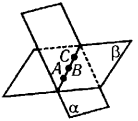
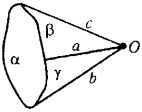
§ 1. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия

1. Доказываем от противного: если AB и CD пересекаются, то у них есть общая точка, и поэтому через них можно провести плоскость, по аксиоме C_3. Следовательно, они лежат в одной плоскости. А по условию, A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Это означает, что AB и CD не пересекаются.

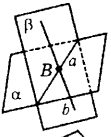
2. Можно. Через две прямые, которые пересекаются, можно провести плоскость γ, по аксиоме C_3. По аксиоме C_1 существует точка, которая не принадлежит этой плоскости. Следовательно, прямая, которая проходит через данную точку и точку пересечения двух прямых, не принадлежит плоскости γ.



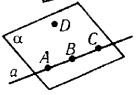
3. A, B, C принадлежат плоскостям α и β. По аксиоме C_2 плоскости α и β пересекаются по прямой, которой принадлежат и A, и B, и C. Исходя из того, что плоскости не могут пересекаться по трем прямым, A, B и C лежат на одной прямой.



4. Плоскости α и β пересекаются по прямой a; плоскости β и γ — по прямой b; плоскости α и γ — по прямой c. Пусть a и b пересекаются в точке A. Точка A принадлежит плоскости α, плоскости β и плоскости γ. Следовательно, точка A принадлежит плоскостям α и β, значит, она принадлежит и прямой пересечения c.

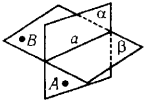


5. Если плоскости α и β пересекаются по прямой a, прямая $b \in \beta$ и $b \cap \alpha$ в точке B, то точка B принадлежит двум плоскостям, по аксиоме C_2 $B \in a$. Это значит, что точка B будет общей для a и b, то есть они пересекаются.

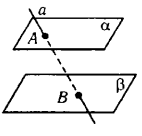


6. Не могут. Докажем от противного. Предположим, три любых точки лежат на одной прямой. Тогда по теореме 1.1 через эту прямую и четвертую точку можно провести плоскость. Следовательно, эти четыре точки лежат в одной плоскости, а это противоречит условию.

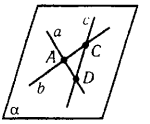
7. По аксиоме I (планиметрии), существует точка A, не принадлежащая прямой a. По теореме 1.1 через прямую и точку A можно провести плоскость α. По аксиоме C_1 существует точка B, не принадлежащая плоскости α. По теореме 1.1 через a и B можно провести плоскость β. Эти плоскости разные и пересекаются по прямой a.



8*. Пусть a не пересекает β. Значит, существует точка B в плоскости β, по аксиоме C_1. Через прямую a и точку B можно построить плоскость γ, по теореме 1.1. Эта плоскость пересекает β по прямой b, а плоскость α по прямой c. Прямая c содержит точку A. Следовательно, a и c пересекаются в точке A. Прямые a, b, c принадлежат плоскости γ. Если a не пересекает β, то она не пересекает b, то есть они параллельны. Это значит, что $c \cap b$, а если они пересекаются, то пересекаются α и β, а это противоречит условию.



9. По аксиоме C_3 проведем плоскость α через две данные прямые. Все прямые, что пересекают a и b не в точке A, имеют две общих точки с α. По теореме 1.2, все эти прямые лежат в плоскости α.

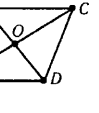


10. По теореме 1.1 можно провести плоскость α через данную прямую и точку, лежащую вне прямой. Все прямые, проходящие через данную точку и пересекающие данную прямую, имеют две общих точки с α, следовательно, лежат в плоскости α, по теореме 1.2.

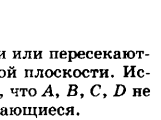
11. Пусть AB и CD не лежат в одной плоскости, соответственно, A, B, C, D тоже не лежат в одной плоскости. По теореме 1.1 проведем плоскость γ через прямую AB и точку C. Точка D не лежит в плоскости γ. Проведем прямую BD, она пересекает γ в точке B, поскольку BD не лежит в γ, а AC лежит. Значит, BD и AC не лежат в одной плоскости.

12. Есть четыре точки A, B, C, D. Плоскость можно провести через три точки. Таких плоскостей можно провести четыре: (ABC), (BCD), (ABD), (ACD).

13. Можно. Существует точка D, которая не принадлежит a, по аксиоме I. По теореме 1.1 можно провести плоскость α через точку D и прямую a. Следовательно, через три точки, лежащие на одной прямой, всегда можно провести плоскость.



14*. Доказываем от противоположного. Если точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, то прямые AB и CD, AC и DB попарно параллельные. Они образуют параллелограмм, диагонали которого BC и AD пересекаются, а это противоречит условию.

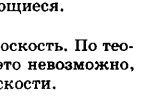


§ 2. Параллельность прямых и плоскостей

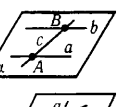
1. Предположим, что AC и BD не скрещивающиеся. Тогда они или пересекаются, или параллельные, а это значит, что они лежат в одной плоскости. Исходя из условия, AB и CD скрещивающиеся, делаем вывод, что A, B, C, D не лежат в этой плоскости. Следовательно, AC и BD скрещивающиеся.

2. Нельзя, если проведем две такие прямые, то они образуют плоскость. По теореме 1.2 прямые a и b будут лежать в одной плоскости, но это невозможно, потому что a и b непересекающиеся и не лежат в одной плоскости.

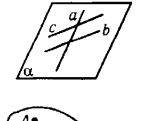
3. Плоскость α образуют две параллельные прямые. По теореме 1.2 все прямые, которые пересекают b и a, лежат в плоскости α.



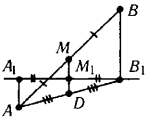
4. Плоскость α образуют прямые a и b. Прямая $c \parallel b$, они должны лежать в одной плоскости, а прямая a пересекается с c, значит, они также должны лежать в одной плоскости. Следовательно, прямая c может лежать в одной плоскости и с a, и с b, плоскость α и является соответствующей. Значит, все прямые, пересекающиеся с a и параллельные b, лежат в одной плоскости α.



5. $A_1M_1 = M_1B_1$, потому что отношение отрезков при параллельной проекции сохраняется. $AA_1 \parallel MM_1 \parallel BB_1$, следовательно, A_1ABB_1 — трапеция, $MM_1 = \dfrac{AA_1 + BB_1}{2}$: 1) $MM_1 = 6$ м; 2) $MM_1 = 4{,}2$ дм; 3) $MM_1 = 6{,}2$ см; 4) $MM_1 = \dfrac{a+b}{2}$.



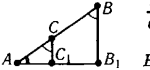
6*. AA_1 и BB_1 образуют плоскость β, AB пересекается с α, α и β пересекаются по прямой A_1B_1. Рассмотрим плоскость β. Проведем отрезок A_1B. По теореме Фалеса $AD = DB_1$. Исходя из этого, MD — средняя линия ΔABB_1, значит, $MD = \dfrac{1}{2}BB_1$.



M_1D — средняя линия ΔAA_1B_1, значит $M_1D = \frac{1}{2}AA_1$, $MM_1 = MD - M_1D = \frac{1}{2}(BB_1 - AA_1)$. 1) $MM_1 = 1$ м; 2) $MM_1 = 0{,}6$ дм; 3) $MM_1 = 2{,}1$ см; 4) $MM_1 = \frac{|b-a|}{2}$.

7. Как параллельные прямые CC_1 и BB_1 образуют плоскость γ. Она пересекает плоскость α по прямой AB_1. Рассмотрим ΔABB_1:

1) $\frac{AC}{CB} = \frac{AC_1}{C_1B_1} = \frac{2}{3}$, по теореме Фалеса. ΔABB_1 и ΔACC_1 — подобные, поэтому:



$\frac{AC}{CC_1} = \frac{AB}{BB_1}$. $AB = AC + CB = AC + \frac{3}{2}AC = \frac{5}{2}AC$.

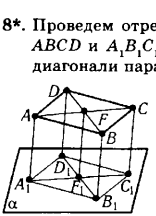
$BB_1 = \frac{AB \cdot CC_1}{AC} = \frac{\frac{5}{2}AC \cdot CC_1}{AC} = 37{,}2$ см.

2) $BB_1 = \frac{AB \cdot CC_1}{AC}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{11}{9}$; $BB_1 = \frac{11}{9} \cdot 8{,}1 = 9{,}9$ см.

3) $BB_1 = \frac{AB \cdot CC_1}{AC}$; $\frac{CC_1}{AC} = \frac{5}{2}$; $BB_1 = 6 \cdot \frac{5}{2} = 15$ см.

4) $BB_1 = \frac{AB \cdot CC_1}{AC}$; $AB = AC + BC = a + b$; $BB_1 = \frac{(a+b) \cdot c}{a}$.

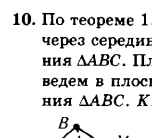
8*. Проведем отрезок OO_1, который соединяет точки пересечения диагоналей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. $BF = FD$, $AF = FC$, потому что точка пересечения делит диагонали параллелограмма пополам. $AA_1 \parallel DD_1 \parallel FF_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. $A_1F_1 = F_1C_1$, $B_1F_1 = F_1D_1$ — по теореме Фалеса, значит FF_1 — средняя линия трапеций AA_1CC_1 и BB_1DD_1. Из AA_1CC_1 имеем $FF_1 = \frac{1}{2}(CC_1 + AA_1)$, из BB_1DD_1 имеем $FF_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + DD_1)$, поэтому $DD_1 = 2FF_1 - BB_1 = CC_1 + AA_1 - BB_1$.



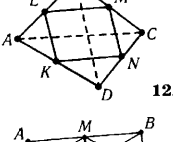
1) $DD_1 = 7$ м; 2) $DD_1 = 2$ м; 3) $DD_1 = a + c - b$.

9. Предположим, есть такая прямая, что $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Но прямые a и b параллельные по теореме 2.2, они должны лежать в одной плоскости, а это противоречит условию.

10. По теореме 1.3 точки A, B, C образуют плоскость α. Проведем в плоскости α через середины AB и BC отрезок KL. $KL \parallel AC$, потому что KL — средняя линия ΔABC. Плоскость β образует точки A, D, C. Через середины AD и CD проведем в плоскости β отрезок MN. $MN \parallel AC$, потому что MN— средняя линия ΔABC. $KL \parallel MN$ по теореме 2.2.



11. LM — средняя линия ΔABC, $LM \parallel AC$; KN — средняя линия ΔADC, $KN \parallel AC$. По теореме 2.2 $LM \parallel KN$. $LK \parallel MN$ аналогично, следовательно, $KLMN$ — параллелограмм по определению.

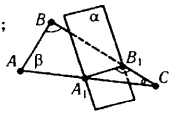


12. Можно провести две плоскости (ADC), (ABC), если A, B, C, D не лежат в одной плоскости. AC — прямая пересечения плоскостей. $ABCD$ — пространственный четырехугольник. Из задачи № 11 видно, что $MNLK$ — параллелограмм. MK и NK пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам. $MPLQ$ — параллелограмм аналогично из задачи № 11. Q — середина BD, P — середина AC. ML, PQ — диагонали парал-

* Решения и ответы приводятся к учебникам указанных годов.

лелограмма $MPLQ$. Точка их пересечения O, значит, PQ, NK, ML пересекаются в одной точке.

13. A_1B_1, AB лежат в плоскости (ABC). α пересекает (ABC) по прямой A_1B_1. $A_1B_1 \parallel AB$, так как A_1B_1 и AB не имеют общих точек.
ΔABC и ΔA_1B_1C — подобные, следовательно:



1) $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C}{AC}$; $A_1C = AC - AA_1$; $\dfrac{AA_1}{AC} = \dfrac{2}{3}$; $AA_1 = \dfrac{2}{3}AC$;

$$A_1B_1 = AB \cdot \frac{\frac{1}{3}AC}{AC} = \frac{1}{3}AB = 5 \text{ см.}$$

2) $A_1B_1 = AB \cdot \dfrac{A_1C}{AC}$; $\dfrac{AA_1}{A_1C} = \dfrac{5}{3}$; $AA_1 = \dfrac{5}{3}A_1C$; $AC = AA_1 + A_1C = \dfrac{8}{3}A_1C$;

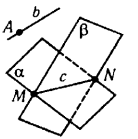
$$A_1B_1 = AB \cdot \frac{A_1C}{\frac{8}{3}A_2C} = \frac{3}{8}AB = 3 \text{ см.}$$

3) $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{CB_1}{BC}$; $A_1B_1 = \dfrac{AB \cdot CB_1}{BC} = \dfrac{4}{5}CB_1 = 8$ см.

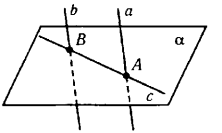
4) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$;

$A_1B_1 = AB \cdot \dfrac{A_1C}{AC}$; $AC = AA_1 + A_1C = a + c$; откуда

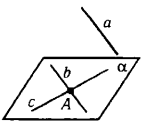
$$AA_1 = b \cdot \frac{c}{a+c}.$$



14. Пусть α и β пересекаются по прямой c. Точка A не принадлежит данным плоскостям. Проведем через точку A прямую b, параллельную прямой пересечения плоскостей α и b. $b \parallel \alpha$ и $b \parallel \beta$, по теореме 2.3.

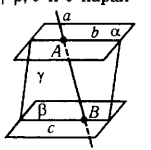


15. Пусть прямая a пересекается с плоскостью α в точке A, тогда прямые a и b образуют плоскость β. Прямая c, которая содержит точку A, — прямая пересечения плоскостей α и β. Прямая c пересекается с прямой a, а следовательно, и с прямой b. Так как c принадлежит β, то b пересекается с β.



16. Пусть a и b скрещивающиеся. Проведем прямую c, параллельную прямой a, через точку на прямой b. По аксиоме C_3 b и c образуют плоскость α. По теореме 2.3 плоскость α параллельна a. То, что через прямую a можно провести плоскость, параллельную b, можно доказать аналогично.

17. $b \parallel c$. Пусть a — прямая пересечения плоскостей β и γ, b — прямая пересечения плоскостей α и β, c — прямая пересечения плоскостей γ и α. По теореме 2.3 $c \parallel \beta$, b и c параллельны. $a \parallel c$, потому что прямая $a \in \beta$. $a \parallel \alpha$, по теореме 2.3.

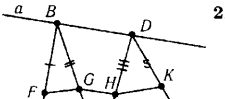


18. Плоскости α и β параллельны. A — точка пересечения прямой a с плоскостью α. Если a не пересекает β, то через прямую a и точку B, принадлежащую β, можно провести плоскость γ. Она пересекает α по прямой b, $A \in b$, и β по

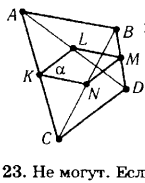
прямой c, $B \in c$. $b \parallel c$ по свойству параллельных плоскостей. $a \cap c$, потому $a \cap b$, но $c \in \beta$, а значит, a пересекает β.

19. Пусть a и b — непересекающиеся прямые. Проведем прямую a_1, параллельную прямой b, через точку A, принадлежащую прямой a. Затем проведем прямую b_1, параллельную прямой a, через точку B, которая принадлежит прямой b. $a \parallel b_1$, $a_1 \parallel b$. По аксиоме C_3 прямые a_1, a и b_1, b образовывают плоскости. Эти плоскости параллельны по признаку параллельности плоскостей.

20. Пусть прямые a и b — непересекающиеся. Проведем плоскость α через точку M и прямую a, а плоскость β — через точку A и прямую b. Искомая прямая c — прямая пересечения плоскостей α и β. Но если c параллельна одной из прямых a или b, то c не пересечет эту прямую. А это может быть при условии, что c лежит в плоскости, параллельной прямой.



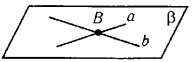
21*. Проведем отрезки AB, BC, CD, DE от прямой a до прямой b. F — середина AB, G — середина BC, H — середина DC, K — середина DE. $FG \parallel b$, $GH \parallel a$, $HK \parallel b$, потому что FG, GH, HK — средние линии соответствующих треугольников. Следовательно, $FG \parallel HK$. Через них можно провести плоскость α; по теореме 1.2, $GH \in \alpha$. Все такие отрезки будут лежать в одной плоскости. По признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$.

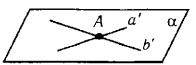


22. $ABCD$ — пространственный четырехугольник; AB и CD непересекающиеся.
Плоскости (ABC) и (ABD) пересекаются с плоскостью α по прямым KL и PQ, где $PQ \parallel AB$ и $KL \parallel AB$. Отсюда $KL \parallel PQ$. $KP \parallel LQ$ доказываем аналогично. Значит, $KLPQ$ — параллелограмм по определению.

23. Не могут. Если бы плоскости α и β пересекались, то через точку их пересечения проходили бы две плоскости, параллельные γ, что противоречит теореме 2.5.

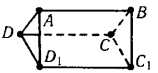
24. Если γ не пересекает ни одной плоскости, то $\alpha \parallel \gamma$, $\beta \parallel \gamma$. Тогда через точку пересечения α и β проходят две плоскости, параллельные γ, что противоречит теореме 2.5. Это значит, что γ пересекает хотя бы одну плоскость.



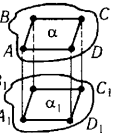


25. Проведем прямые a', b', параллельные α, через точку B. $a' \parallel \alpha$, $b' \parallel \alpha$.
Пусть прямые a', b' не лежат в одной плоскости.
Строим в плоскости α $a \parallel a'$, $b \parallel b'$; тогда через прямые a', a и b', b можно провести две плоскости, параллельные α и проходящие через точку B, а это противоречит теореме 2.5. Значит, прямые a' и b' лежат в одной плоскости.

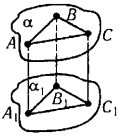
26. Проведем через точку A прямые c и d, соответственно параллельные a и b. Проведем плоскость α, параллельную a и b, через c и d. Это возможно при условии, что a не принадлежит плоскости a и b.



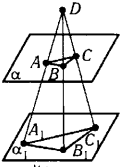
27. $ABCD$, ABC_1D_1 — параллелограммы. Из $ABCD$: $AB \parallel CD$, $AB = CD$; из ABC_1D_1: $AB \parallel C_1D_1$, $AB = C_1D_1$. Значит, по теореме 2.2 $C_1D_1 \parallel CD$, $C_1D_1 = CD$, следовательно, CDD_1C_1 — параллелограмм.



28. $\alpha \parallel \alpha_1$. Параллельные прямые BB_1 и CC_1 образовывают плоскость, которая пересекает плоскость α по прямой BC, а плоскость α_1 — по прямой B_1C_1. По свойству параллельных плоскостей $BC \parallel B_1C_1$. $AB \parallel A_1B_1$, $DC \parallel D_1C_1$, $AD \parallel A_1D_1$ доказываем аналогично. Значит, если $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, то $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ и $B_1C_1 \parallel A_1D_1$. Очевидно, что $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.



29. $\alpha \parallel \alpha_1$. Плоскость, образованная AA_1 и BB_1, пересекает по параллельным прямым плоскости α и α_1 по свойству параллельных плоскостей. Следовательно, $AB \parallel A_1B_1$. Из ABB_1A_1: $AA_1 \parallel BB_1$, $AB \parallel A_1B_1$, значит, ABB_1A_1 — параллелограмм, а его противолежащие стороны равны: $AB = A_1B_1$. $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$ доказываем аналогично. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

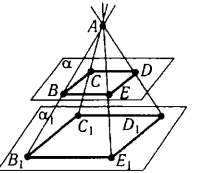


30. $\alpha \parallel \alpha_1$. $AC \parallel A_1C_1$, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ по свойству параллельных плоскостей, которые пересекаются третьей, $\Delta ADC \sim \Delta A_1DC_1$, $\Delta CDB \sim \Delta C_1DB_1$, $\Delta ADB \sim \Delta A_1DB_1$. Отсюда:

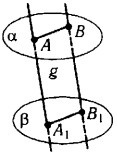
$$\frac{AD}{A_1D} = \frac{CD}{C_1D} = \frac{AC}{A_1C_1}; \quad \frac{CD}{C_1D} = \frac{BD}{B_1D} = \frac{CB}{C_1B_1};$$

$$\frac{AD}{A_1D} = \frac{BD}{B_1D} = \frac{AB}{A_1B_1}. \text{ Тогда } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

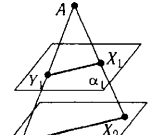
Следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



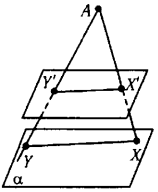
31. $\alpha \parallel \alpha_1$, $BCDE$ — параллелограмм.
$BC \parallel B_1C_1$, $CD \parallel C_1D_1$, $ED \parallel E_1D_1$, $BE \parallel B_1E_1$ по свойству параллельных плоскостей, которые пересекаются третьей. $BC \parallel ED$, $CD \parallel BE$, потому что $BCDE$ — параллелограмм, значит, $B_1C_1 \parallel E_1D_1$, $C_1D_1 \parallel B_1E_1$.
Следовательно, $B_1C_1D_1E_1$ — параллелограмм.



32. $\alpha \parallel \beta$. По свойству параллельных плоскостей $AB \parallel A_1B_1$ при пересечении α и β плоскостью, которую образуют AA_1 и BB_1. $AA_1 \parallel BB_1$, $AB \parallel A_1B_1$, значит, AA_1B_1B — параллелограмм, таким образом, $AB = A_1B_1 = a$.



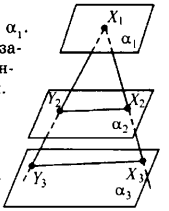
33*. Через точку A проведем еще одну прямую, пересекающуюся с α_1 и α_2 в точках Y_1, Y_2. Через прямые A_1Y_2 и AX_2 проведена плоскость, которая пересекается с α_1 и α_2. По свойству параллельных плоскостей прямые пересечения Y_1X_1, Y_2X_2 параллельны, значит, $\Delta AY_1X_1 \sim \Delta AY_2X_2$, поэтому $\frac{AY_1}{AY_2} = \frac{AX_1}{AX_2}$, следовательно, одинаковые для обеих прямых.

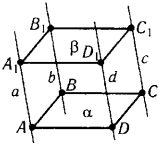


34*. $\frac{AX'}{X'X} = \frac{m}{n}$. Проведем плоскость $\beta \parallel \alpha$ через X'. Через точку A проведем прямую AY, которая пересекает α в точке Y, а β в точке Y'.
По свойству параллельных плоскостей $Y'X' \parallel YX$. Исходя из этого, $\Delta AY'X' \sim \Delta AYX$, значит, $\frac{AY'}{AY} = \frac{AX'}{AX} = \frac{m}{m+n}$. $\frac{AY'}{Y'Y} = \frac{m}{m+n-m} = \frac{m}{n}$. Отсюда видим, что все точки, которые лежат в плоскости β, делят отрезок в отношении $m : n$.

35*. $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \parallel \alpha_3$.

Проведем прямую X_1Y_3 через точку X_1, принадлежащую α_1. $X_2Y_2 \parallel X_3Y_3$ по свойству параллельных плоскостей. Из задачи № 34* видим, что все точки, делящие прямую в заданном отношении, лежат на плоскости, параллельной данной. От выбора прямой эти отношения не зависят.





36. $a \parallel b \parallel c \parallel d$; β — произвольная плоскость, пересекающая a, b, c, d в точках A_1, B_1, C_1, D_1; $ABCD$ — параллелограмм. По признаку параллельности плоскостей $(AA_1B_1B) \parallel (DD_1C_1C)$: $AB \parallel CD$ как стороны параллелограмма, $AA_1 \parallel DD_1$ как отрезки параллельных прямых. Значит, $A_1B_1 \parallel C_1D_1$. $B_1C_1 \parallel A_1D_1$ доказываем аналогично. Таким образом, $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

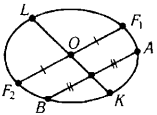
37. Проекция медианы будет медианой проекционного треугольника, поскольку при параллельной проекции отношение отрезков сохраняется.

38. Средняя линия перейдет в среднюю линию, потому что при проекции сохраняется отношение отрезков и параллельность.

39. Не может. При параллельной проекции параллельные отрезки переходят в параллельные, а боковые стороны трапеции не являются параллельными.

40. Может. При параллельной проекции углы не сохраняются, а в точке проекции параллельность сохранилась.

41. Центр симметрии перейдет в центр симметрии спроектированной фигуры, так как при проекции отношение отрезков сохраняется.



42*. Любая хорда, параллельная данному диаметру FF_1, делится перпендикулярным диаметром пополам. Проведем в окружности хорду, параллельную F_1F_2. Разделим ее пополам и проведем прямую OO_1 через центр окружности O и точку O_1. OO_1 пересекается с окружностью в точке K и L. KL — искомый диаметр.

§ 3. Перпендикулярность прямых и плоскостей

1. Пусть A — данная точка, a — данная прямая. Возьмем точку B вне прямой a, и по теореме 1.1 проведем плоскость через эти точку и прямую. К прямой a можно провести перпендикуляр в точку A в плоскости α.

2. В пространстве можно провести неограниченное количество плоскостей через прямую. Проведем плоскости α и β. Данная прямая — прямая пересечения. На этой прямой возьмем точку C и проведем перпендикуляры к данной прямой в плоскостях α и β. Количество перпендикуляров, которые можно провести, неограничено.

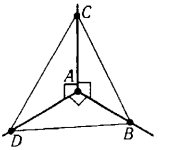
3. $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$, следовательно, ΔACD, ΔACB, ΔABD — прямоугольные.

1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см.

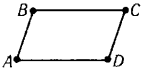
По теореме Пифагора из ΔACD: $CD = \sqrt{AD^2 + AC^2}$; по теореме Пифагора из ΔACB: $AC^2 = BC^2 - AB^2$. $CD = \sqrt{AD^2 + BC^2 - AB^2} = \sqrt{2{,}25 + 49 - 9} = 6{,}6$ см.

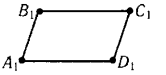
2) $BD = 9$ см; $BC = 16$ см; $AD = 5$ см. $CD = \sqrt{AD^2 + AC^2}$ из ΔCAD.

$AC^2 = CB^2 - AB^2$ из ΔCAB.
$AB^2 = BD^2 - AD^2$ из ΔDAB; $AC^2 = CB^2 - BD^2 + AD^2$.
$CD = \sqrt{2AD^2 + CB^2 - BD^2} = 15$ см.
3) $AB = b$, $BC = a$, $AD = d$.
$CD = \sqrt{d^2 + a^2 - b^2}$.
4) $BD = c$, $BC = a$, $AD = d$.
$CD = \sqrt{2d^2 + a^2 - c^2}$.

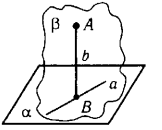


4*. $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник.
$A_1B_1 \parallel AB$, $A_1B_1 \parallel C_1D_1$, значит, $AB \parallel C_1D_1$.
$CD \parallel C_1D_1$, значит, $AB \parallel CD$.
$BC \parallel B_1C_1 \parallel A_1D_1$, $AD \parallel A_1D_1$, значит, $BC \parallel AD$.
$ABCD$ — параллелограмм.
Если $A_1B_1 \perp AB$, то $AB \perp BC$, по теореме 3.1. $CD \perp AD$ аналогично. Следовательно, $ABCD$ — прямоугольник.

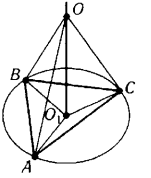




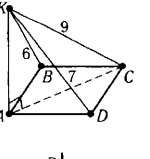
5. Проведем прямую b, перпендикулярную α, и пересекающую α в точке B. Проведем прямую a через точку B в плоскости α. $AB \perp a$. Проведем плоскость β через точку A и прямую a. AB — единственный перпендикуляр к прямой a, проходящей через точку A, в плоскости β. К прямой, проведенной через точку B, AB — также единственный перпендикуляр, что можно доказать аналогично.



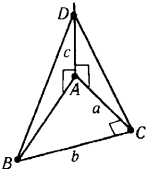
6. $OO_1 \perp (ABC)$.
O — произвольная точка прямой, перпендикулярной к (ABC).
O_1 — центр окружности.
O_1A, O_1B, O_1C — радиусы окружности.
$OO_1 \perp (ABC)$, значит, $OO_1 \perp O_1B$, $OO_1 \perp O_1A$, $OO_1 \perp O_1C$.
ΔOO_1A, ΔOO_1C, ΔOO_1B — прямоугольные. $\Delta OO_1A = \Delta OO_1B = \Delta OO_1C$ — по двум катетам. $O_1A = O_1B = O_1C$ — радиусы окружности. Отсюда $OA = OB = OC$. OO_1 — общий. Любая точка прямой OO_1 равноудалена от вершины ΔABC, потому что точка O — произвольная.

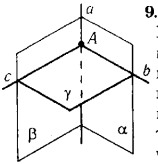


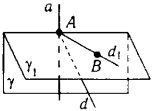
7. $KB = 6$ см, $KC = 9$ см, $KD = 7$ см, $ABCD$ — прямоугольник. $AK \perp AB$, $AK \perp AD$, $AK \perp AC$, поскольку $AK \perp (ABCD)$. ΔAKB, ΔAKC, ΔAKD — прямоугольные.
По теореме Пифагора:
ΔAKB: $AK^2 = KB^2 - AB^2 = KB^2 - DC^2$; $DC^2 = KB^2 - AK^2$.
ΔAKC: $AK^2 = KC^2 - AC^2 = KC^2 - (CD^2 + AD^2)$.
ΔAKD: $AK^2 = KD^2 - AD^2$; $AD^2 = KD^2 - AK^2$.
$AK^2 = KC^2 - KB^2 + AK^2 - KD^2 + AK^2$.
$AK^2 = KB^2 + KD^2 - KC^2$.
$AK = \sqrt{KB^2 + KD^2 - KC^2} = 2$ м.
Ответ: 2 м.



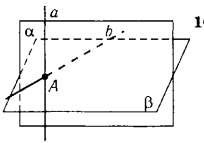
8. $AD \perp AB$, $AD \perp AC$, поскольку $AD \perp (ABC)$.
$AC = a$, $BC = b$, $AD = c$; из ΔADC, по теореме Пифагора:
$DC^2 = AD^2 + AC^2 = a^2 + c^2$; $DC = \sqrt{a^2 + c^2}$; из ΔADB:
$DB^2 = AD^2 + AB^2$, из ΔABC имеем:
$AB^2 = AC^2 + BC^2 = a^2 + b^2$;
$DB^2 = c^2 + a^2 + b^2$; $DB = \sqrt{c^2 + a^2 + b^2}$.



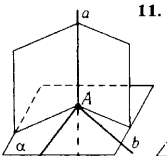


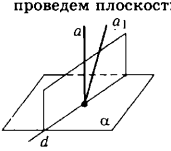


9. Данная прямая — a, данная точка на ней — A. Проведем плоскости α и β через a. Через точку A в этих плоскостях проведем прямые, перпендикулярные a. Эти прямые образуют плоскость γ по теореме 3.2, перпендикулярную a. Докажем единственность плоскости γ. Предположим, существует еще одна плоскость γ_1, проходящая через A, перпендикулярная a. $B \in \gamma_1$, $B \notin \gamma$. Проведем плоскость через a и B. Она пересечет γ и γ_1 по прямым d и d_1, перпендикулярным a, но поскольку через эту точку прямой на плоскости проходит только одна прямая, перпендикулярная ей, это невозможно.



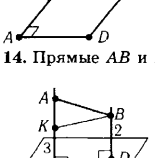
10. Проведем плоскость α через прямые a и b. Она должна быть перпендикулярна a и пересекает плоскость β по прямой, проходящей через точку A. Значит, на плоскости α в точку A проведены две прямые, которые проходят через эту точку, и перпендикулярны a. Это невозможно, следовательно, b лежит в плоскости β.





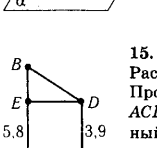
11. Проведем прямые b и c через точку A. Через эту же точку проведем плоскости, перпендикулярные им. a — прямая пересечения плоскостей. $a \perp b$, $a \perp c$. a перпендикулярна α. Предположим, существует прямая a_1, перпендикулярная α и проходящая через точку A. Проведем плоскость α_1 через a и a_1. Она пересечет α по прямой d, $d \perp a$, $d \perp a_1$, что невозможно. Это доказывает единственность a.

12. Построим прямые b и c в плоскости α. Проведем плоскости, перпендикулярные b и c, через точку B. d — прямая пересечения плоскостей. $d \perp b$, $d \perp c$, следовательно, $d \perp \alpha$. Построим прямую, параллельную d, через точку A. По теореме 3.3 она будет перпендикулярна α.

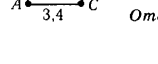


13. 1. $BC \parallel AD$.
$BC \perp AB$ как сторона квадрата.
$BC \perp BM$, поскольку $BM \perp (ABCD)$. Значит, по теореме 3.3 $AD \perp (ABM)$, $BC \perp (ABM)$.
2. $CD \perp (MBC)$ доказываем аналогично.

14. Прямые AB и BD перпендикулярны плоскости α. Следовательно, $AC \parallel BD$.

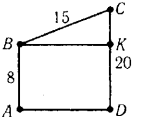


$AB \perp CD$, $BD \perp CD$; $ABDC$ — прямоугольная трапеция, где BK — высота трапеции, $BK \parallel CD$.
$BKCD$ — прямоугольник, где $BK = CD = 24$ м, $KC = BD = 2$ м;
$AK = AC - KC = 3 - 2 = 1$ м.
ΔABK — прямоугольный. По теореме Пифагора
$AB^2 = BK^2 + AK^2 = 6{,}76$ м^2, откуда
$AB = 2{,}6$ м.
Ответ: 2,6 м.

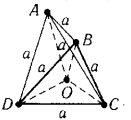


15. $AB = 5{,}8$ м, $CD = 3{,}9$ м.
Расстояние между столбами — $AC = 3{,}4$ м.
Проведем $DE \perp AB$, $DE \parallel AC$.
$ACDE$ — прямоугольник, $DE = AC$, $CD = AE$. ΔDEB — прямоугольный. По теореме Пифагора $BD^2 = DE^2 + EB^2 = AC^2 + (AB - CD)^2$;
$BD = \sqrt{15{,}17} \approx 3{,}9$ м.
Ответ: 3,9 м.

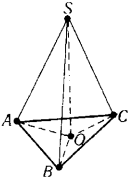
16. $AB = 8$ м, $BC = 15$ м, $CD = 20$ м. Искомое расстояние — AD.
Проведем $BK \perp CD$, $BK \parallel AD$.
$ABKD$ — прямоугольник, $BK = AD$, $AB = KD$, $CK = CD - KD = CD - AB = 12$ м.
$\triangle BKC$ — прямоугольный. По теореме Пифагора
$BK^2 = BC^2 - CK^2$; $BK = \sqrt{81} = 9$ м.
Ответ: 9 м.



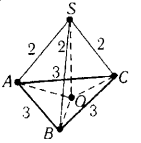
17. $AO \perp OB$, $AO \perp OC$, $AO \perp OD$, поскольку $AO \perp (BCD)$.
$\Delta AOB = \Delta AOC = \Delta AOD$ (AO — общий катет и по гипотенузам — $AD = AC = AB = a$). $R = OB = OC = OD$, поэтому O — центр описанной окружности около треугольника.
$R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Из треугольника AOB, по теореме Пифагора
$AO^2 = AB^2 - OB^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{2}{3}a^2$. $AO = \sqrt{\dfrac{2}{3}}a$.
Ответ: $\sqrt{\dfrac{2}{3}}a$.



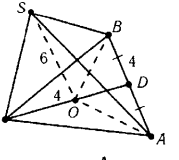
18. $SO \perp \alpha$, $SA = SB = SC = a$.
$SO \perp OA$, $SO \perp OB$, $SO \perp OC$.
$\Delta SAO = \Delta SCO = \Delta SBO$ (по общему катету SO и гипотенузам).
Отсюда $OA = OB = OC = R$. Следовательно, центр окружности, описанной около ΔABC, — O.



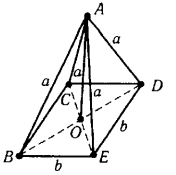
19. $AB = BC = AC = 3$ см, $SA = SB = SC = 2$ м, $SO \perp (ABC)$.
ΔABC — равносторонний. O — центр окружности, описанной около треугольника, откуда $AO = OB = OC = R = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ см.
ΔSOA — прямоугольный. По теореме Пифагора
$SO^2 = AS^2 - AO^2$; $SO = \sqrt{4 - 3} = 1$ м.
Ответ: 1 м.



20*. CD — медиана и высота равнобедренного треугольника ABC.
Из задачи № 18, $SO \perp (ABC)$, O — центр окружности, описанной около ΔABC, и точка пересечения серединных перпендикуляров.
O лежит на CD.
ΔABC, $R = OC = OB = OA$; $OD = CD - R$. ΔAOD — прямоугольный. По теореме Пифагора $OD^2 = R^2 - AD^2 = R^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$, $AD = \dfrac{1}{2}AB$.
$OD^2 - (CD - R)^2 = R - \dfrac{1}{4}AB$;
$CD^2 - 2CDR + R^2 = R^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$. $R = \dfrac{CD^2 + \dfrac{1}{4}AB^2}{2CD} = \dfrac{5}{2}$ м.
ΔSOA — прямоугольный. По теореме Пифагора
$SA^2 = SO^2 + OA^2$, $SA = 6{,}5$ м.
Ответ: 6,5 м.



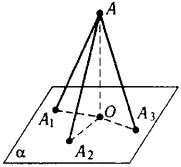
21. $AB = AC = AD = AE = a$.
$BCDE$ — квадрат. $BC = CD = EB = ED = b$.
$AO \perp (BCDE)$, $\Delta AOE = \Delta AOB = \Delta AOC = \Delta AOD$ по общему катету и гипотенузам. Значит, $R = OE = OC = OD = OB$ — центр окружности, описанной около квадрата, точка пересечения диагоналей. Диагонали делятся точкой пересечения пополам.



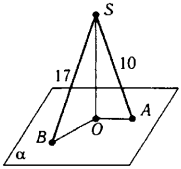
$R = \frac{b\sqrt{2}}{2}$; из треугольника AOD, по теореме Пифагора

$AO = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}$.

Ответ: $\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}$.



22. На плоскость α опустим перпендикуляр из точки A. $AO \perp OA_1$, $AO \perp OA_2$, $AO \perp OA_3$, поскольку $AO \perp \alpha$. $AA_1 = AA_2 = AA_3$ — данные наклонные; $\Delta AA_1O = \Delta AA_2O = \Delta AA_3O$ (по общему катету AO и гипотенузам), значит, $OA_1 = OA_2 = OA_3$. Следовательно, основания данных наклонных лежат на окружности.



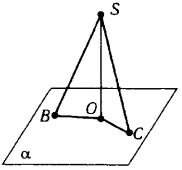
23. $SA = 10$ см, $SB = 17$ см, $OB - OA = 9$ см.
На плоскость α опустим перпендикуляр из точки S.
$SO \perp OA$, $SO \perp OB$, поскольку $SO \perp \alpha$.
ΔSOA и ΔSOB — прямоугольные.
Из ΔSOA по теореме Пифагора $SO^2 = SA^2 - AO^2$.
Из ΔSOB по теореме Пифагора имеем:
$SO^2 = SB^2 - OB^2$.
$SA^2 - AO^2 = SB^2 - OB^2$; $OB = 9 + OA$;
$SA^2 - AO^2 = SB^2 - 81 - 18OA - OA^2$.

$OA = \frac{SB^2 - 81 - SA^2}{18} = 6$ см; $OB = 15$ см.

Ответ: 6 см, 15 см.

24. SA, SB — наклонные, OA, OB — проекции. $SO \perp OA$, $SO \perp OB$, $SO \perp \alpha$.

1) $SB - SA = 26$ см, $OB = 40$ см, $SA = 12$ см.



ΔSOA, ΔSOB — прямоугольные.
Из ΔSOA по теореме Пифагора $SO^2 = SA^2 - AO^2$.
Из ΔSOB по теореме Пифагора $SO^2 = SB^2 - BO^2$.
$SA^2 - AO^2 = SB^2 - BO^2$; $SB = 26 + SA$.
$SA^2 - AO^2 = 676 + 52SA + SA^2 - BO^2$.

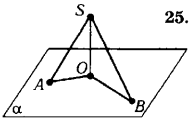
$SA = \frac{BO^2 - AO^2 - 676}{52} = 15$ см; $SB = 41$ см.

Ответ: 15 см, 41 см.

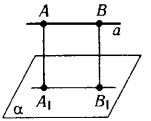
2) $\frac{SA}{SB} = \frac{1}{2}$; $OA = 1$ см; $OB = 7$ см;
$\triangle SOA$: $SO^2 = SA^2 - AO^2$; $\triangle SOB$: $SO^2 = SB^2 - BO^2$;
$SB = 2SA$; $SA^2 - AO^2 = 4SA^2 - BO^2$;
$3SA^2 = BO^2 - AO^2$;

$SA = \sqrt{\frac{BO^2 - AO^2}{3}} = 4$ см; $SB = 2SA = 8$ см.

Ответ: 4 см, 8 см.

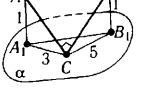


25. $SA = 23$ см, $SB = 33$ см; $SO \perp OA$, $SO \perp OB$, $SO \perp \alpha$;
ΔSOA, ΔSOB — прямоугольные. $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$.
Из ΔSOA по теореме Пифагора $SO^2 = SA^2 - AO^2$; $AO = \frac{2}{3}OB$.
Из ΔSOB по теореме Пифагора $SO^2 = SB^2 - OB^2$.



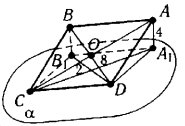
$SA^2 - \frac{4}{9}OB^2 = SB^2 - OB^2$;
$\frac{4}{9}OB^2 = SB^2 - OB^2$; $OB^2 = 1008$;
$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = 9$ см.
Ответ: 9 см.

26. Точки A и $B \in a$; $a \parallel \alpha$.
На плоскость α опустим перпендикуляры из точек A и B. A_1, B_1 — точки пересечения перпендикуляров с α.
Проведем через AA_1 и BB_1 плоскость, которая пересечет α по прямой A_1B_1.
По теореме 3.4 $AB \parallel A_1B_1$, $AA_1 \parallel B_1B$
Следовательно, $AA_1 = BB_1$, так как ABB_1A_1 — параллелограмм.



27. $AA_1 \perp (CA_1B_1)$; $BB_1 \perp (CA_1B_1)$; $(CA_1B_1) \parallel AB$.
$AA_1 = BB_1 = 1$ м; $A_1C = 3$ м; $B_1C = 5$ м.
ΔAA_1C, ΔBB_1C — прямоугольные.
Из треугольника AA_1C по теореме Пифагора $AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2$.
Из ΔBB_1C по теореме Пифагора $BC^2 = BB_1^2 + B_1C^2$.
Из ΔABC по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 + BB_1^2 + B_1C^2$.
$AB = 6$ м.
Ответ: 6 м.

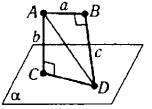
28. $ABCD$ — ромб. $A_1C = 8$ м, $B_1D = 2$ м; $AA_1 = BB_1 = 4$ м.
$AA_1 \perp (A_1B_1CD)$, $BB_1 \perp (A_1B_1CD)$.
$AA_1 \perp A_1D$, $AA_1 \perp A_1C$, $AA_1 \perp A_1B_1$, $BB_1 \perp B_1C$, $BB_1 \perp B_1D$, $BB_1 \perp B_1A_1$.
A_1B_1 — проекция AB на (A_1B_1CD).
$AB = A_1B_1$, поскольку AA_1B_1B — прямоугольник.
ΔAA_1C — прямоугольный; по теореме Пифагора
$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 = 80$.
ΔBB_1D — прямоугольный;
по теореме Пифагора $BD^2 = BB_1^2 + B_1D^2 = 20$.



ΔABO — прямоугольный, потому что диагонали ромба пересекаются под прямым углом и делятся точкой пополам:

$AB^2 = \frac{BD^2}{4} + \frac{AC^2}{4} = 25$; $AB = A_1B_1 = 5$ м; $AB = BC = CD = AD$.
B_1C — проекция стороны BC на (A_1B_1CD), $B_1C = A_1D$.
ΔB_1BC — прямоугольный; по теореме Пифагора
$B_1C^2 = BC^2 - BB_1^2 = 25 - 16 = 9$.
$B_1C = A_1D = 3$ м.
Ответ: 3 м, 5 м.

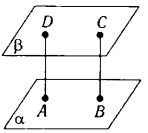
29. $BD \perp AB$, $AC \perp \alpha$, $AB \parallel \alpha$.
$AB = a$, $AC = b$, $BD = c$.
Проведем через AC и BD плоскость, которая пересечет α по прямой D. Следовательно, $AC \perp CD$.
ΔACD — прямоугольный; тогда
по теореме Пифагора $AD^2 = AC^2 + CD^2$.
ΔABD — прямоугольный; по теореме Пифагора $AD^2 = AB^2 + BD^2$.
$AC^2 + CD^2 = AB^2 + BD^2$.
$CD^2 = a^2 + c^2b^2$.



$CD = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.

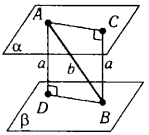
Ответ: $\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.

30. $\alpha \parallel \beta$. Проведем из точек A и B в плоскости α перпендикуляры к плоскости β.



По теореме 3.4 $AD \parallel BC$. Проведем через AD и BC плоскость, которая пересекает α и β по прямым AB и DC. $AB \parallel DC$ по свойству параллельных плоскостей. Исходя из этого, $ABCD$ — параллелограмм и прямоугольник, так как $DC \perp BC$ и $DC \perp AD$. Следовательно, $AD = BC$, так как в прямоугольнике противолежащие стороны равны.

31. $AD \perp \beta$, $BC \perp \alpha$, $AD = BC = a$, $AB = b$.

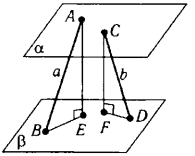


$AD = BC$. $AC = DB$ из задачи №30.
Проекция AB на α — AC, проекция AB на β — DB.
ΔADB — прямоугольный, $AD \perp DB$.
$DB^2 = AB^2 - AD^2 = b^2 - a^2$.

$DB = AC = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Ответ: $\sqrt{b^2 - a^2}$.

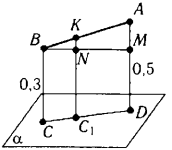
32. $AB = a$, $CD = b$, $\alpha \parallel \beta$.



На плоскость β опустили перпендикуляры из точек A и C. $CB \perp \beta$, $AE \perp \beta$, $AE = CF$ (из задачи № 30). Следовательно, $CF \perp FD$, $AE \perp BE$, $BE = c$. BE — проекция AB на β; FD — проекция CD на β, из ΔCFD и ΔAEB по теореме Пифагора: $AB^2 - BE^2 = AE^2$, $CD^2 - DF^2 = CF^2$, откуда:

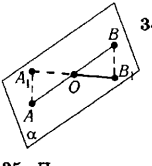
$a^2 - c^2 = b^2 - DF^2$; $DF = \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}$.

Ответ: $\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}$.



33. $AD \perp \alpha$, $BC \perp \alpha$, $AD \parallel BC$ по теореме 3.4. Проведем через AD и BC плоскость, которая пересечет α по прямой DC. $BC \perp DC$, $AD \perp DC$. $AD = 0{,}5$ м, $BC = 0{,}3$ м.
$ABCD$ — прямоугольная трапеция. Проведем $BM \parallel CD$ и $KL \perp \alpha$, значит, $KL \perp DC$.
$BC = MD = 0{,}3$ м, поскольку $MBCD$ — прямоугольник.
Отсюда $AM = 0{,}5 - 0{,}3$ м $= 0{,}2$ м. $NL = DM = 0{,}3$ м, так как $NLDM$ — прямоугольник. Следовательно, $KL = KN + NL$.

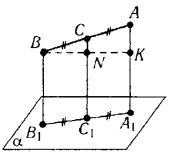
1) $\frac{BK}{AK} = \frac{7}{3}$; $\Delta ABM \sim \Delta KBN$, получим $\frac{BK}{BA} = \frac{KN}{AM}$; $KN = AM \cdot \frac{7}{10} = 0{,}14$ м.
$KL = 0{,}44$ м.
Ответ: 0,44 м.
2) $\frac{BK}{AK} = \frac{3}{7}$, $KN = AM \cdot \frac{3}{10} = 0{,}06$ м.
$KL = 0{,}36$ м.
Ответ: 0,36 м.



34. Проведем $AA_1 \perp \alpha$ и $BB_1 \perp \alpha$ из точек A и B отрезка AB. Данный отрезок пересекается с α в точке D. $AA_1 \perp A_1B_1$, $BB_1 \perp B_1A_1$.
По теореме 3.4 $AA_1 \parallel BB_1$. Следовательно, $\angle A_1AD = \angle B_1BD$, $AD = DB$. D — середина AB.
$AA_1 = BB_1$, так как $\Delta AA_1D = \Delta BB_1D$ по острому углу и гипотенузе.

35. Построим плоскость α через диагональ BD, она пересекает AC в точке O. O — точка пересечения диагоналей, делящая их пополам. $AO = OC$ (из задачи № 34).

36. C — середина AB. Из точек A, B и C проведем AA_1, CC_1, BB_1, которые перпендикулярны α. Отсюда $AA_1 \perp AB_1$ и $A_1B_1 \perp CC_1$. По теореме 3.4 $AA_1 \parallel CC_1 \parallel BB_1$. ABB_1A_1 — прямоугольная трапеция.
Проведем $BK \perp AA_1$, $BK \parallel A_1B_1$.
A_1KBB_1 и BNC_1B_1 — прямоугольники. $BB_1 = NC_1 = KA_1$, $AK = AA_1 - KA_1$.
$CN = \frac{1}{2}AK$, так как $\Delta ABK \sim \Delta CBN$. Следовательно, $CC_1 = NC_1 + NC = BB_1 + \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1) = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$.



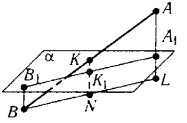
1) $CC_1 = \frac{1}{2}(3{,}2 + 5{,}3) = 4{,}25$ см;

2) $CC_1 = \frac{1}{2}(7{,}4 + 6{,}1) = 6{,}75$ см;

3) $CC_1 = \frac{a+b}{2}$.

Ответ: 4,25 см; 6,75 см; $\frac{a+b}{2}$.

37. AB пересекает плоскость α в точке C. Точка K — середина AB. KK_1, AA_1, BB_1 — перпендикулярны α, а значит, и A_1B_1. В плоскости, образованной AB и AA_1, проведем из точки B прямую, пересекающую KK_1 в точке N, AA_1 — в точке L. $AL \perp LB$, $KN \perp LB$ по построению, значит, по теореме 3.4 $KN \parallel AL$. $KN = \frac{1}{2}AL$, так как KN — средняя линия ΔLAB. $AL = AA_1 - A_1L$, $A_1L = BB_1$ как стороны прямоугольника. $KN = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$; $KK_1 = KN - K_1N$, $K_1N = BB_1$ как стороны прямоугольника. $KK_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1) - BB_1 = \frac{1}{2}(AA_1 - BB_1)$.



1) $KK_1 = \frac{1}{2}(5{,}3 \text{ см} - 3{,}2 \text{ см}) = 1{,}05$ см;

2) $KK_1 = \frac{1}{2}(7{,}4 - 6{,}1) = 0{,}65$ см;

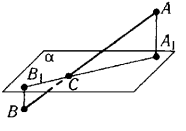
3) $KK_1 = \frac{|a-b|}{2}$.

Ответ: 1,05 см; 0,65 см; $\frac{|a-b|}{2}$.

38. AB пересекает плоскость α в точке C. На плоскость α из точек A и B проведем перпендикуляры AA_1, BB_1. $AA_1 = 0{,}5$ м; $BB_1 = 0{,}3$ м; $AB = 1$ м.
A_1B_1 — проекция AB на плоскость α.
$A_1B_1 = A_1C + CB_1$.
ΔAA_1C, ΔBB_1C — прямоугольные и подобные.

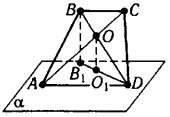
Отсюда: $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}$; $AC + BC = AB = 1$ м.

$AC = \frac{5}{3}BC$; $BC = 0{,}375$ м; $AC = 0{,}625$ м.



Из ΔBB_1C по теореме Пифагора
$CB_1^2 = BC^2 - BB_1^2$; $CB_1 = 0{,}225$ м.
Из ΔAA_1C по теореме Пифагора
$A_1C^2 = AC^2 - AA_1^2$; $A_1C = 0{,}375$ м.
$A_1B_1 = 0{,}6$ м.
Ответ: 0,6 м.

39*. На плоскость α из точек B и O проведем перпендикуляры BB_1 и OO_1 — расстояния от плоскости α до основания BC и O — точка пересечения диагоналей.



По теореме 3.4 $BB_1 \perp B_1D$, $OO_1 \perp B_1D$, $BB_1 \perp OO_1$. $BB_1 = a$, $\frac{AD}{BC} = \frac{m}{n}$.

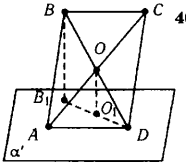
Из трапеции $ABCD$: $\Delta AOD \sim \Delta ODO_1 \sim \Delta COB$. Отсюда $\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{n}{m}$.

$\Delta BDB_1 \sim \Delta ODO_1$. Отсюда $\frac{BD}{OD} = \frac{BB_1}{OO_1}$.

$BD = BO + OD$; $\frac{BD}{OD} = \frac{BO + OD}{OD} = \frac{BO}{OD} + 1 = \frac{n}{m} + 1 = \frac{n+m}{m}$;

$OO_1 = \frac{m}{n+m} \cdot BB_1 = \frac{m}{n+m} \cdot a$.

Ответ: $\frac{m}{n+m} \cdot a$.



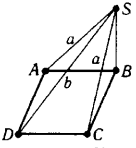
40. $BB_1 \perp B_1D$, $OO_1 \perp B_1D$, поскольку $BB_1 \perp \alpha$, $OO_1 \perp \alpha$. $ABCD$ — параллелограмм. Точка O пересекает его диагонали и делит их пополам. $BO = OD$.

По теореме 3.4 $BB_1 \parallel OO_1$. Следовательно, OO_1 — средняя линия ΔBB_1D. $BB_1 = a$, $OO_1 = \frac{1}{2}a$.

Ответ: $\frac{a}{2}$.

41. $ABCD$ — квадрат. $SA = SC = a$, $SD = b$.

По признаку перпендикулярности прямой и плоскости ($SB \perp (ABCD)$) $SB \perp AB$, $SB \perp BC$, $SB \perp BD$.



ΔSBA, ΔSBC, ΔSBD — прямоугольные.

По теореме Пифагора

из ΔSBD: $SB^2 = SD^2 - BD^2$; из ΔABD: $BD^2 = 2AB^2$.

$SB^2 = SD^2 - 2AB^2$.

Из ΔSBA: $SB^2 = SA^2 - AB^2$.

$SD^2 - 2AB^2 = SA^2 - AB^2$.

$AB^2 = SD^2 - SA^2 = b^2 - a^2$;

$AB = \sqrt{b^2 - a^2}$ — сторона квадрата.

Из ΔSBA: $SB^2 = SA^2 - AB^2 = a^2 - b^2 + a^2 = 2a^2 - b^2$.

$SB = \sqrt{2a^2 - b^2}$.

Ответ: $\sqrt{2a^2 - b^2}$; $\sqrt{b^2 - a^2}$.

42. Рисунок, аналогичный рисунку задачи № 41.

$ABCD$ — прямоугольник. $SA = a$; $SC = b$; $SD = c$.

$SB \perp AB$, $SB \perp BD$, $SB \perp BC$, поскольку $SB \perp (ABCD)$.

ΔSBA, ΔSBD, ΔSBC — прямоугольные.

По теореме Пифагора

ΔSBA: $SB^2 = SA^2 - AB^2$;

ΔSBD: $SB^2 = SD^2 - BD^2$;

ΔABD: $BD^2 = AB^2 + AD^2$; $AD = BC$;

$BD^2 = AB^2 - BC^2$.

Из треугольника SBC: $SB^2 = SC^2 - BC^2$.

$SD^2 - SA^2 - AB^2 - BC^2 + AB^2 = 0$;

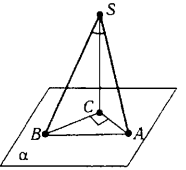
$BC^2 = SD^2 - SA^2 = c^2 - a^2$; $BC = \sqrt{c^2 - a^2}$;

$SB^2 = b^2 - c^2 + a^2$; $SB = \sqrt{b^2 - c^2 + a^2}$;

$AB^2 = a^2 - b^2 + c^2 - a^2 = c^2 - b^2$; $AB = \sqrt{c^2 - b^2}$.

Ответ: $\sqrt{b^2 - c^2 + a^2}$; $\sqrt{c^2 - a^2}$; $\sqrt{c^2 - b^2}$.

43. $SA = SB = 2$ м, $\angle ASB = 60°$, $AC \perp BC$, $SC \perp AC$, $SC \perp CB$, $SC \perp \alpha$.



$AC = CB$, так как у равных наклонных равные проекции. Плоскость (ASB) пересекает α по прямой AB. $AB = AS = SB = 2$м, поскольку ΔASB — равносторонний. ΔACB — прямоугольный. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

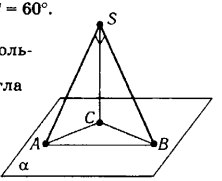
$AB^2 = 2AC^2$; $AC^2 = 2$; $AC = \sqrt{2}$.

ΔACS — прямоугольный. По теореме Пифагора

$SC^2 = AS^2 - AC^2 = 2$; $SC = \sqrt{2}$ м.

Ответ: $\sqrt{2}$ м.

44. $SC \perp AC$, $SC \perp CB$. $SC = 1$ м, $\angle ASB = 90°$, $\angle ASC = \angle BSC = 60°$.



ΔASB — равнобедренный и прямоугольный.

$AB^2 = 2AS^2$, по теореме Пифагора. ΔACS — прямоугольный. $SC = \frac{1}{2}AS$ как катет, лежащий напротив угла в 30°. Значит, $AS = 2SC = 2$ м.

$AB^2 = 2 \cdot 4 = 8$; $AB = 2\sqrt{2}$ м.

Ответ: $2\sqrt{2}$ м.

45. $SO \perp (ABC)$. Построим радиусы окружности OE, OF, OD; $OE \perp AB$, $OF \perp BC$. $SD \perp AC$, $SE \perp AB$, $SF \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах. Значит, SD, SE, SF — расстояния от точки S до сторон треугольника.

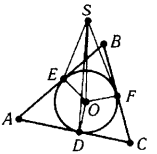
$SO \perp OD$, $SO \perp OF$, $SO \perp OE$. $\Delta SOE = \Delta SOD = \Delta SOF$ по двум катетам. Отсюда $SD = SF = SE$.

46. $OK = OL = OM = 0{,}7$ м — радиусы вписанной окружности.

$SO = 2{,}4$ м. $SO \perp (ABC)$, $SO \perp OL$, $SO \perp OM$, $SO \perp OK$.

Искомые расстояния — SL, SK, SM (из задачи № 45)

$SL = SK = SM$.



ΔSOL — прямоугольный. По теореме Пифагора

$SL^2 = SO^2 + OL^2$; $SL = \sqrt{SO^2 + OL^2} = 2{,}5$ м.

Ответ: 2,5 м.

47. Рисунок, аналогичный рисунку задачи №46.

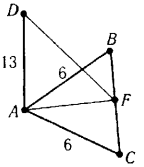
$SL = SM = SK = 6{,}1$ м, $SO = 1{,}1$ м. $OL = OK = OM$ — радиусы вписанной окружности.

$SO \perp (ABC)$, $SO \perp OL$, $SO \perp OM$, $SO \perp OK$, ΔSOL — прямоугольный. По теореме Пифагора $OL^2 = SL^2 - SO^2$;

$OL = \sqrt{SL^2 - SO^2} = \sqrt{36} = 6$ м.

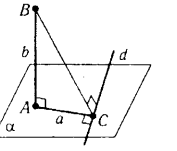
Ответ: 6 м.

48. $BC = AC = AB = 6$ см, $AD = 13$ см.



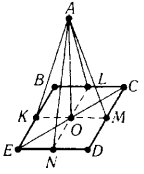
$AD \perp (ABC)$, $AD \perp AB$, $AD \perp AC$, $AD \perp AF$.
AF — высота и медиана ΔABC. $AF \perp BC$.
DF — искомое расстояние, так как $DF \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах.
ΔACF — прямоугольный. $CF = \frac{1}{2}BC$, $AB = BC$. По теореме Пифагора $AF^2 = AC^2 - \frac{AC^2}{4} = \frac{3}{4}AC^2$.
ΔDAF — прямоугольный. $DF^2 = AD^2 + AF^2 = AD^2 + \frac{3}{4}AC^2$. $DF = \sqrt{196} = 14$ см.
Ответ: 14 см.

49. $AB \perp \alpha$, $AB \perp AC$.



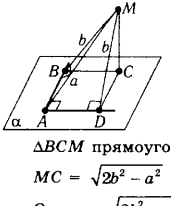
$AB = b$, $AC = a$.
$BC \perp d$ по теореме о трех перпендикулярах.
ΔABC — прямоугольный. По теореме Пифагора
$BC^2 = AB^2 + AC^2$; $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$.

50. $ABCD$ — квадрат. $BD = EC = d$.



O — центр окружности, вписанной в квадрат, и точка пересечения диагоналей квадрата. $AO \perp (EBCD)$.
$OL = ON = OK = OM$, $LN = KM = EB$.
$LN \perp BC$, $KM \perp BE$, $KM \perp CD$, $LN \perp ED$.
$AL \perp BC$, $AM \perp CD$, $AN \perp ED$, $AK \perp BE$ по теореме о трех перпендикулярах.
Значит, AL, AM, AN, AK — расстояния от точки A до сторон квадрата, $AN = AL = AM = AK = a$.
По теореме Пифагора из ΔBED: $BD^2 = 2EB^2$; $EB^2 = \frac{BD^2}{2} = \frac{d^2}{2}$.
ΔAON — прямоугольный: $ON = \frac{1}{2}EB$; по теореме Пифагора $AO^2 = AN^2 - ON^2 = AN^2 - \frac{EB^2}{4} = a^2 - \frac{d^2}{8}$.
$AO = \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{8}}$.
Ответ: $\sqrt{a^2 - \frac{d^2}{8}}$.

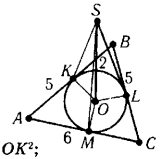
51. $\angle BAD = 90°$,
MD — расстояние от M до AD. $MD \perp AD$.



MA — расстояние от точки M до вершины угла. $MA = a$.
MB — расстояние от M до AB, $MB \perp AB$, $MD = MB = b$.
MC — расстояние от M до (ABD). $MC \perp DC$, $MC \perp BC$.
$AD \perp DC$, $AB \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах.
Следовательно, $CD \parallel AB$, $BC \parallel AD$, $ABCD$ — прямоугольник.
ΔADM прямоугольный: $AD^2 = AM^2 - MD^2 = a^2 - b^2$; $AD = BC$.
ΔBCM прямоугольный: $MC^2 = MB^2 - BC^2 = b^2 - a^2 + b^2 = 2b^2 - a^2$;
$MC = \sqrt{2b^2 - a^2}$.
Ответ: $\sqrt{2b^2 - a^2}$.

52. ΔABC — равнобедренный, $SO \perp (ABC)$, $SO = 2$ м.
$AC = BC = 5$ см — боковые стороны. $AB = 6$ м — основание.

$OK = OL = OM$ — радиус окружности, вписанной в треугольник .
$OM \perp AC$, $OK \perp AB$, $OL \perp BC$. $SK \perp AB$, $SL \perp BC$, $SM \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах. $\Delta SOM = \Delta SOL = \Delta SOK$ (по двум катетам). $SK = SL = SM$ — расстояния от точки S до сторон.



ΔABC: $OK = \dfrac{S_{ABC}}{P}$; $S_{ABC} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)\cdot p}$; $p =$

$= \dfrac{AB + BC + AC}{2} = 8$ см;

$S_{ABC} = 12$ см^2; $OK = 1{,}5$ см.

ΔSOK — прямоугольный. По теореме Пифагора $SK^2 = SO^2 + OK^2$;

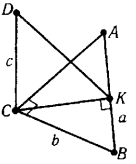
$SK = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ см.

Ответ: 2,5 см.

53. $DC = c$. $DC \perp (ABC)$, $DC \perp AC$, $DC \perp CB$, $DC \perp CK$. CK — высота ΔABC, проведенная к гипотенузе. DK — расстояние от точки D до гипотенузы, так как $DK \perp AB$ по теореме о трех перпендикулярах.

Из равенства площадей ΔABC: $CK = \dfrac{AC \cdot CB}{AB}$.

По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$.



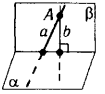
$CK = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}\cdot b}{a} = \sqrt{b^2 - \dfrac{b^4}{a^2}}$.

ΔDCK — прямоугольный. По теореме Пифагора

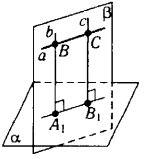
$DK = \sqrt{CD^2 + CK^2} = \sqrt{c^2 + b^2 - \dfrac{b^4}{a^2}}$.

Ответ: $\sqrt{c^2 + b^2 - \dfrac{b^4}{a^2}}$.

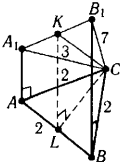
54. Проведем прямую b, перпендикулярную плоскости α, через произвольную точку A, которая принадлежит прямой a. Проведем плоскость β через a и b. По теореме 3.6 $\alpha \perp \beta$.



55. Проведем две прямые — b и c, перпендикулярные к плоскости α, из точек B и C, принадлежащих прямой a. По теореме 3.4 $b \parallel c$. Проведем плоскость β через прямые b и c. По теореме 3.6 $\beta \perp \alpha$. B и C лежат в плоскости β, следовательно, прямая a лежит в плоскости β. Очевидно, что все прямые, перпендикулярные к α и пересекающие a, лежат в одной плоскости.



56. $AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, следовательно, по теореме 3.4 $AA_1 \parallel BB_1$. Из точки K — середины A_1B_1 — проведем перпендикуляр KM. $KM \perp (ABC)$. $KM \parallel AA_1 \parallel BB_1$. Значит, KM — средняя линия трапеции AA_1B_1B, $KM = \dfrac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$.



$\triangle B_1BC$, $\triangle A_1AC$ — прямоугольные. По теореме Пифагора $AA_1 =$

$= \sqrt{A_1C^2 - AC^2}$, $BB_1 = \sqrt{B_1C^2 - BC^2}$.

$\triangle ABC$ — равносторонний, значит, $AB = BC = AC$.

$AA_1 = \sqrt{5}$ м;

$BB_1 = 3\sqrt{5}$ м; $KM = 2\sqrt{5}$ м.

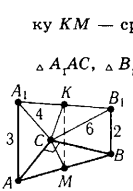
$\triangle ABC$: MC — высота равностороннего треугольника. $MC = \sin 60° \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$ м.

$\triangle KMC$ — прямоугольный, $KM \perp MC$.

По теореме Пифагора $KC = \sqrt{KM^2 + MC^2} = \sqrt{20+3} = \sqrt{23}$ см.

Ответ: $\sqrt{23}$ см.

57. $AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, $AA_1 \perp AC$, $BB_1 \perp BC$; по теореме 3.4 $AA_1 \parallel BB_1$. Опустим $KM \perp (ABC)$. По теореме 3.4 $KM \parallel AA_1 \parallel BB_1$. $AM = MB$, поскольку KM — средняя линия трапеции AA_1B_1B. $KM = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1) = 2{,}5$ м.



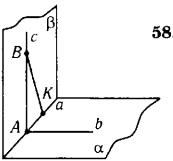
$\triangle A_1AC$, $\triangle B_1BC$ — прямоугольные. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1^2} = \sqrt{7}$ м; $BC = \sqrt{B_1C^2 + BB_1^2} = 4\sqrt{2}$ м. Из $\triangle ACB$: $AM = MB$, отсюда M — центр описанной около треугольника окружности. Значит, $MC = AM = MB = \frac{AB}{2}$.

По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{7+32} = \sqrt{39}$ м.

$MC = \frac{\sqrt{39}}{2}$ м.

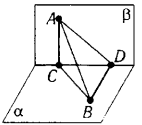
$\triangle KMC$ — прямоугольный. По теореме Пифагора $KC = \sqrt{KM^2 + MC^2} = 4$ м.

◉ 4 м.



58. a — прямая пересечения плоскостей α и β. Проведем в точку A в плоскости α прямую b, перпендикулярную a. Проведем прямую c, пересекающую точку A, в плоскости β. Возьмем на прямой c произвольную точку B и опустим перпендикуляр к прямой a. $b \perp BA$, поскольку $b \perp BC$, по теореме о трех перпендикулярах. Следовательно, по теореме 3.2 $b \perp \beta$.

59. $AC \perp CD$. По теореме о трех перпендикулярах $BD \perp AD$. $\triangle ACD$, $\triangle BCD$, $\triangle ADB$ — прямоугольные. Тогда:



1) Из $\triangle ADB$: по теореме Пифагора $AB = \sqrt{DB^2 + DA^2}$;

Из $\triangle ACD$: $AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{72}$ м;

$AB = \sqrt{49+72} = 11$ м.

2) $AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{153}$ м;

$AB = \sqrt{DB^2 + DA^2} = 13$ м.

3) $AB = \sqrt{DB^2 + DA^2}$.

У треугольника BDC по теореме Пифагора $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{48}$ м.

$AB = \sqrt{16+48} = 8$ м.

4) $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{24}$ м;

$AB = \sqrt{DB^2 + DA^2} = 7$ м.

5) $AB^2 = DB^2 + AD^2$;

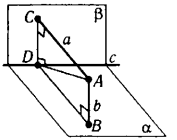
$AD^2 = AC^2 + CD^2$; $AB^2 = DB^2 + AD^2 + CD^2$;

$AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

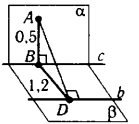
6) $AB^2 = DB^2 + AD^2$;
$DB^2 = BC^2 - DC^2$; $AB^2 = AD^2 + BC^2 - DC^2$;
$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

60. $\alpha \perp \beta$. Они пересекаются по прямой b. $AB \perp \alpha$, $AC \perp \beta$. $AB = a$, $AC = b$. Опустим из точки B $BD \perp \beta$. По теореме 3.4 $BD \parallel AC$. $CD \parallel AB$, поскольку $CD \perp BD$. Следовательно, $ABCD$ — прямоугольник. $AB = CD$, $AC = BD$. $\triangle ABD$ — прямоугольный. По теореме Пифагора $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

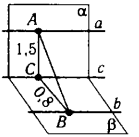
Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2}$.



61. $\alpha \perp \beta$. c — прямая их пересечения. $AB \perp BD$, так как $AB \perp c$. BD — расстояние между прямыми b и c. AD — расстояние от точки A до прямой b, поскольку $AD \perp b$ по теореме о трех перпендикулярах.
$\triangle ABD$ — прямоугольный. По теореме Пифагора
$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = 1{,}3$ м.
Ответ: 1,3 м.



62. $\alpha \perp \beta$. c — прямая их пересечения. $a \parallel c$, $b \parallel c$. Проведем из точки A, которая принадлежит a, $AC \perp c$. Из точки B, которая принадлежит b, проведем $BC \perp c$. AB — расстояние между прямыми a и b, поскольку по теореме о трех перпендикулярах $AB \perp a$, $AB \perp b$. $\triangle ACB$ — прямоугольный.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 1{,}7$ м.
Ответ: 1,7 м.



§ 4. Декартовы координаты и векторы пространства

1. Точки пространства, для которых $x = 0$ и $y = 0$, лежат на оси z.

2. 1) В плоскости xy лежат точки, для которых $z = 0$. Это точка $D(1, 2, 0)$.
2) На оси z лежат точки, для которых $x = 0$ и $y = 0$. Это точка C (0, 0, 3).
3) В плоскости yz лежат точки, для которых x равняется 0. Это точки $B(0, 1, 2)$, $C(0, 0, 3)$.

3. Основание перпендикуляра, опущенного из точки $A(1, 2, 3)$ на ось z, будет иметь координаты $x = 0$, $y = 0$, $A_1(0, 0, 3)$. На ось y: $x = z = 0$, $A_2(0, 2, 0)$. На ось x: $y = z = 0$, $A_3(1, 0, 0)$.
Основание перпендикуляра, опущенного на плоскость (xy), будет иметь $z = 0$, точка $A_4(1, 2, 0)$. На плоскость (xz): $y = 0$, $A_5(1, 0, 3)$. На плоскость (yz): $x = 0$, точка A_3 (0, 2, 9).

4. Расстояние от точки (1, 2, −3) до плоскости xy равняется:
$\sqrt{(x-1)^2 + (2-2)^2 + (-3-0)^2} = |z| = 3$;
до плоскости xz: $\sqrt{(1-1)^2 + (2-0)^2 + (-3-(-3))^2} = |y| = 2$;
до плоскости yz: $\sqrt{(1-0)^2 + (2-2)^2 + (-3-(-3))^2} = |x| = 1$.
Расстояния до координатных осей:
до x: $\sqrt{(1-1)^2 + (2-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{13}$;
до y: $\sqrt{(1-0)^2 + (2-2)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{10}$;

до z: $\sqrt{(1-0)^2(2-0)^2+(-3-(-3))^2} = \sqrt{5}$;
до начала координат: $\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2+(3-0)^2} = \sqrt{14}$.

5. $A(0, 1, -1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(0, -1, 0)$, $D(x, y, 0)$.
От D до A, B, C расстояния равны, следовательно:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2+1} = \sqrt{(x+1)^2+y^2+1} = \sqrt{x^2+(y+1)^2}.$$

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2+1=(x+1)^2+y^2+1, \\ x^2+(y-1)^2+1=x^2+(y+1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-3y+1=x^2+2x+1+y^2, \\ x^2+y^2-2y+1+1=x^2+y^2+2y+1. \end{cases}$$

Из этой системы будем иметь:

$$\begin{cases} 2x=-2y, \\ 4y=1. \end{cases}$$

Получаем: $x=-\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{4}$, значит, точка $D\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

6. Исходя из того, что расстояние от точек до плоскости (yz) равняется 2, то $|x|=2$, значит, $x=\pm 2$. Если $x=2$:

$$\begin{cases} \sqrt{2^2+(y-0)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(y-1)^2+(z-0)^2}, \\ \sqrt{2^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(2-1)^2+y^2+z^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4+y^2+(z-1)^2=4+(y-1)^2+z^2, \\ 4+y^2+(z-1)^2=1+y^2+z^2. \end{cases}$$

Из этой системы получим $y=z=2$ и точку $(2, 2, 2)$.
Если $x=-2$:

$$\begin{cases} \sqrt{(-2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(-2-0)^2+(y-1)^2+(z-0)^2}, \\ \sqrt{(-2)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(-2-1)^2+y^2+z^2}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+y^2+(z-1)^2=4+(y-1)^2+z^2, \\ 4+y^2+(z-1)^2=9+y^2+z^2. \end{cases}$$

Из этой системы получим $y=z=-2$ и точку $(-2, -2, -2)$.

7. Пусть точка является равноудаленной от точек $A(2, 2, 3)$ и $B(-2, 1, 3)$. Значит:

$$\sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2+(0-3)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(0-1)^2+(0-3)^2}.$$

Исходя из этого, $6x=0$; $x=0$.
Следовательно, точка С будет иметь координаты $(0, 0, 0)$.

8. Пусть точки равноудалены от точек $A(1, 2, 3)$ и $O(0, 0, 0)$. Получаем: $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2$, значит, имеем $x+y+2z-7=0$. Это уравнение геометрического места точек пространства, равноудаленных от точки A и начала координат.

9. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, тогда точка пересечения его диагоналей делит их пополам. Следовательно, необходимо доказать, что у середины AC и BD одинаковые координаты.

Середина AC: $x=\frac{1+1}{2}=1$, $y=\frac{3+1}{2}=2$, $z=\frac{2+4}{2}=3$.

Середина BD: $x=\frac{2+0}{2}=1$, $y=\frac{2+0}{2}=2$, $z=\frac{4+2}{2}=3$.

Значит, AC пересекается с BD, и точка пересечения делит их пополам. Очевидно, что $ABCD$ — параллелограмм.

10. Доказываем аналогично задаче №9. Нужно найти координаты середины диагоналей AC и BD и показать, что они одинаковые.
1) $A(0, 2, -3)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(2, -2, -1)$, $D(3, -1, -5)$.
Середина AC: $x = 1$, $y = 0$, $z = -2$, $O(1, 0, -2)$.
Середина BD: $x = 1$, $y = 0$, $z = -2$, $O'(1, 0, -2)$. O' совпадает с точкой O.
$ABCD$ — параллелограмм.
2) $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, 7)$, $C(-2, 1, 5)$, $D(-1, 2, 1)$.
Середина AC: $x = 0$, $y = 1$, $z = 4$.
Середина CD: $x = 0$, $y = 1$, $z = 4$, значит, диагонали пересекаются и точка пересечения делит их пополам, $ABCD$ — параллелограмм.

11. Докажем, что $ABCD$ — ромб. Сначала необходимо доказать, что $ABCD$ — параллелограмм, а затем — равенство его сторон.
1) Аналогично задаче №10 докажем, что $ABCD$ — параллелограмм: $A(6, 7, 8)$, $B(8, 2, 6)$, $C(4, 3, 2)$, $D(2, 8, 4)$.
Середина AC: $x = 5$, $y = 5$, $z = 5$.
Середина BD: $x = 5$, $y = 5$, $z = 5$, то есть $ABCD$ — параллелограмм.
Показываем равенство всех сторон: $AB = BC = CD = DA$.

$$AB = \sqrt{(6-8)^2 + (7-2)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{35};\ BC = \sqrt{(8-4)^2 + (2-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{33};$$

$$CD = \sqrt{(4-2)^2 + (3-8)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{33};\ DA = \sqrt{(2-6)^2 + (8-7)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{33}.$$

Получаем $AB = BC = CD = DA$, значит, $ABCD$ — ромб.
2) То, что $ABCD$ — параллелограмм, докажем аналогично.
$A(0, 2, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(2, 0, 2)$, $D(1, 2, 2)$.
Середина AC: $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$; середина BD: $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.
$ABCD$ — параллелограмм.

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (2-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{5},\ BC = \sqrt{(1-2)^2 + (0-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5};$$

$$CD = \sqrt{(2-1)^2 + (0-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{5};\ DA = \sqrt{(1-0)^2 + (2-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}.$$

$AB = BC = CD = CD$, значит, $ABCD$ — ромб.

12. Пусть один конец отрезка — точка $A(1, 1, 1)$, а середина отрезка — точка $C(1, 1, 1)$. Для нахождения координат точки B — второго конца отрезка — применим формулы для середины отрезка: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.
$1 = \frac{2 + x}{2}$, отсюда $x = 0$; $1 = \frac{y + 3}{2}$, отсюда $-y = -1$; $1 = \frac{z - 1}{2}$, отсюда $z = 3$.
Следовательно, координаты точки B — $(0, -1, 3)$.

13. Координаты точки D мы найдем, когда вычислим середину диагонали AC.
1) $A(2, 3, 3)$, $B(0, 2, 4)$, $C(4, 1, 0)$, $D(x, y, z)$.
Середина AC: $x_1 = 3$, $y_2 = 2$, $z_1 = 1$.
Для диагонали BD: $3 = \frac{x + 0}{2}$, откуда $x = 6$; $2 = \frac{y + 2}{2}$, откуда $y = 2$; $1 = \frac{z + 4}{2}$, $z = -2$.
Следовательно, координаты вершины D — $D(6, 2, -2)$.
2) $A(1, -1, 0)$, $B(0, 1, -1)$, $C(-1, 0, 1)$, $D(x, y, z)$.
Середину AC находим аналогично, затем находим вершину D.
Середина AC: $x_1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{2}$, $z_1 = \frac{1}{2}$.
Для BD: $0 = \frac{x + 0}{2}$, отсюда $x = 0$; $-\frac{1}{2} = \frac{y + 1}{2}$, отсюда $y = -2$; $\frac{1}{2} = \frac{z + 1}{2}$, отсюда $z = 2$.
То есть D имеет координаты $D(0, -2, 2)$.

3) $A(4, 2, -1)$, $B(1, -3, 2)$, $C(-4, 2, 1)$, $D(x, y, z)$.
Середина AC: $x_1 = 0$, $y_2 = -1$, $z_1 = 0$.
Для BD: $0 = \frac{x+1}{2}$, $x = -1$; $-1 = \frac{y-3}{2}$, $y = 1$; $0 = \frac{z+2}{2}$, отсюда $z = -2$.
Следовательно, координаты вершины D — $D(-1, 1, -2)$.

14. $A(a, c, -в)$, $B(-a, d, в)$. Если середина отрезка AB лежит на оси y, то координаты x и z равняются нулю.
$x = \frac{a-a}{2} = 0$, $y = \frac{c+d}{2}$, $z = \frac{-b+b}{2} = 0$, значит, середина AB лежит на оси y.

15. $C(a, в, c)$, $D(p, a, -c)$. Для того чтобы середина отрезка CD лежала в плоскости xy, необходимо, чтобы $z = 0$.
$x = \frac{a+p}{2}$, $y = \frac{b+a}{2}$, $z = \frac{c-c}{2} = 0$, значит, середина отрезка CD лежит в плоскости xy.

16. Для получения преобразования симметрии относительно плоскости xy нужно из данной точки опустить на эту плоскость перпендикуляр. Тогда его основание будет иметь координаты $M_1(x, y, 0)$. Затем из точки M_1 по другую сторону xy откладываем такое же расстояние. Это точка $M'(x', y', z')$. $x' = x$, $y' = y$, так как координаты xy при этом не изменились. Следовательно, $z' = -z$, потому что $M(x', y', z')$ лежит по другую сторону xy.

17. $A(1, 2,3)$, $B(0, -1, 2)$, $C(1, 0, -3)$.
Найдем точки, симметричные данным относительно xy. Координаты x, y этих точек не изменятся, изменится знак координаты z. Отсюда имеем: $A'(1, 2, -3)$, $B'(0, -1, -2)$, $C'(1, 0, 3)$.
Координата x изменит знак относительно yz:
$A'(-1, 2, 3)$, $B'(0, -1, 2)$, $C'(-1, 0, -3)$.
Координата y изменит знак относительно xz:
$A'(1, -2, 3)$, $B'(0, 1, 2)$, $C'(1, 0, -3)$.

18. $A(1, 2, 3)$, $B(0, -1, 2)$, $C(1, 0, -3)$.
Найдем точки, симметричные данным относительно начала координат.
Начало координат по определению — середина отрезков AA', BB', CC'. При этом A', B', C' — симметричные точкам A, B, C. Значит, получим для точки $A(1, 2, 3)$:
$\frac{x'+1}{2} = 0$, $\frac{y'+2}{2} = 0$, $\frac{z'+3}{2} = 0$, откуда $x' = -1$, $y' = -2$, $z' = -3$.
Для точки $B(0, -1, 2)$: $\frac{x'+0}{2} = 0$, $\frac{y'-1}{2} = 0$, $\frac{z'+2}{2} = 0$, откуда $x' = 0$, $y' = 1$, $z' = -2$.
Для точки $C(1, 0, -3)$: $\frac{x'+1}{2} = 0$, $\frac{y'+0}{2} = 0$, $\frac{z'-3}{2} = 0$, откуда $x' = -1$, $y' = 0$, $z' = 3$.
Мы имеем точки $A'(-1, -2, -3)$, $B'(0, 1, -2)$, $C'(-1, 0, 3)$.

19. Докажем, что преобразование симметрии относительно точки является движением. Для этого возьмем две точки: $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Движение — это преобразование, при котором сохраняется расстояние. Итак, возьмем некоторую точку O с координатами $(0, 0, 0)$. Точки A_1' и A_2' будут симметричны точкам A_1 и A_2 относительно O. Докажем, что $A_1A_2 = A_1'A_2'$.
Координаты A_1' $(-x_1, -y_1, -z_1)$, а A_2' $(-x_2, -y_2, -z_2)$.
Значит, $A_1'A_2' = \sqrt{(-x_1 + x_2)^2 + (-y_1 + y_2)^2 + (-z_1 + z_2)^2} = A_1A_2$.
Таким образом, преобразование симметрии относительно точки есть движение.

20. Докажем, что преобразование симметрии относительно плоскости xy является движением. Возьмем точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Из задачи № 16 мы знаем, что точки, симметричные точкам A_1 и A_2 относительно плоскости xy, это точки $A_1'(x_1, y_1, -z_1)$ и $A_2'(x_2, y_2, -z_2)$. Докажем, что $A_1A_2 = A_1'A_2'$.

$$A_1'A_2' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (-z_1 + z_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = A_1A_2.$$

Следовательно, преобразование симметрии относительно плоскости — действительно движение.

21. Докажем, что при движении в пространстве круг переходит в круг с тем же радиусом. Так как расстояние между точками при движении сохраняется, то будет сохраняться и расстояние между центром круга и точками на окружности, ограничивающими круг. Таким образом, круг переходит в круг с тем же радиусом.

22. Докажем, что в результате движения в пространстве три точки прямой переходят в точки, также лежащие на одной прямой. При движении прямые переходят в прямые, а отрезки между этими точками на прямой переходят в равные отрезки. Следовательно, три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, которые также лежат на одной прямой.

23. $x' = x + a$; $a = x' - x = 1$;
$y' = y + b$; $b = y' - y = 1$;
$z' = z + c$; $c = z' - z = -2$; $A(1, 0, 2) \to A'(2, 1, 0)$.

24. $x' = x - 1$;
$y' = y - 2$;
$z' = z + 1$.
Начало координат перейдет в точку $O'(-1, -2, 1)$.

25. 1) $A(2, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(3, -2, 1)$, $D(2, -3, 0)$.
Параллельный перенос будет существовать при выполнении равенств.
$x_B - x_A = x_D - x_C$, $\quad -1 = -1$.
$y_B - y_A = y_D - y_C$, $z_B - z_A = z_D - z_C$, $\quad -1 = -1$. $1 \neq -1$.
Такого параллельного переноса не бывает.
2) $A(-2, 3, 5)$, $B(1, 2, 3)$, $C(4, -3, 6)$, $D(7, -2, 5)$.
$x_B - x_A = x_D - x_C$, $y_B - y_A = y_D - y_C$,
$3 = 3$. $\quad -1 \neq 1$.
Такого параллельного переноса не бывает.
3) $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(3, -2, 2)$, $D(2, -3, 1)$.
$x_B - x_A = x_D - x_C$, $y_B - y_A = y_D - y_C$, $\quad z_B - z_A = z_D - z_C$,
$-1 = -1$. $\quad -1 = -1$. $\quad -1 = -1$.
Параллельный перенос будет существовать при выполнении равенств.
4) $A(1, 1, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $C(-2, 2, 1)$, $D(1, 1, 1)$.
$x_B - x_A = x_D - x_C$, $\quad -1 \neq 3$.
Такого параллельного переноса не бывает.

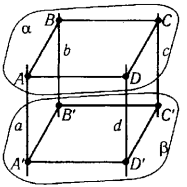
26. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм. Поскольку при параллельном переносе равные отрезки переходят в равные отрезки, докажем, что, $ABCD$ перейдет в равный ему параллелограмм.
Координаты точек A и B: $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.
AB перейдет в $A'B'$, где $A'(x_1 + a; y_1 + b)$, $B'(x_2 + a; y_2 + b)$.

Проверим равенство AB и $A'B'$. $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,

$$A'B' = \sqrt{(x_2 + a - x_1 - a)^2 + (y_2 + b - y_1 - b)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Следовательно, $AB = A'B'$. Равенство остальных сторон и диагоналей доказываем аналогично.

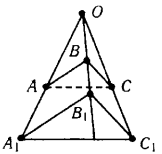
Если при параллельном переносе параллельные прямые и плоскости переходят в параллельные, то углы тоже сохраняются. Значит, параллелограмм перейдет в равный ему параллелограмм.



27. $a \parallel b \parallel c \parallel d$.

Прямые a и b, b и c, c и d, d и a образуют плоскости, которые пересекают α и β по параллельным прямым. Следовательно, ABB_1A_1, BCC_1B_1, CC_1D_1D, DD_1A_1A — параллелограммы. Значит, $ABCD = A_1B_1C_1D_1$, а при параллельном переносе равные параллелограммы совмещаются. Отсюда $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $DC = D_1C_1$, $AD = A_1D_1$.

28. Пусть O — центр симметрии, а ее коэффициент — k.



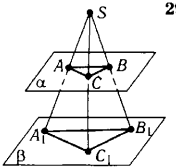
$$\frac{OA_1}{OA} = k, \ \frac{OB_1}{OB} = k, \ \frac{OC_1}{OC} = k.$$

$\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$; $\triangle OBC \sim \triangle OB_1C_1$; $\triangle OAC \sim \triangle OA_1C_1$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Поскольку треугольники подобны, то:

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = k.$$

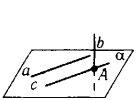
Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по трем пропорциональным сторонам. Значит, гомотетия в пространстве есть преобразование подобия.



29. Плоскости SA_1C_1, SA_1B_1, SB_1C_1 пересекаются с плоскостями α и β по параллельным прямым.

$\triangle ASC \sim \triangle A_1SC_1$, $\triangle ASB \sim \triangle A_1SB_1$, $\triangle CSB \sim \triangle C_1SB_1$ — по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. Следовательно, $\frac{A_1S}{AS} = \frac{B_1S}{BS} = \frac{C_1S}{CS} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = k$.

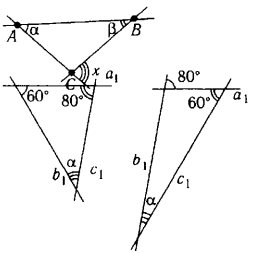
Таким образом, $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ — гомотетичны.

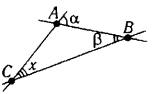


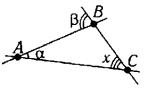
30. Прямая $b \perp \alpha$. b пересекает плоскость α в точке A. Проведем через точку A прямую $c \parallel a$. По определению перпендикулярности прямой и плоскости $b \perp c$. Значит, по определению угла между пересекающимися прямыми, угол между прямыми a и b равняется 90°.

31. 1) Пусть φ — угол $\triangle ABC$, или внешний угол $\triangle ABC$, не смежный с α и β, тогда $\varphi = \alpha + \beta$.

2) Пусть φ — угол $\triangle ABC$, а α или β — внешние углы $\triangle ABC$, тогда $\varphi = |\alpha - \beta|$.







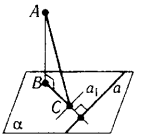
32. 1) Проведем в плоскости α $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$, $c_1 \parallel c$. Найдем углы между прямыми a_1, b_1, c_1. Это и будут углы между прямыми a, b, c.

$\alpha = 180° - (60° + 80°) = 40°$.

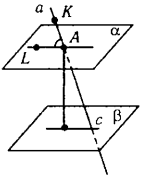
2) $80° = 60° + \alpha$;

$\alpha = 20°$.

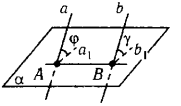
33. $AB \perp \alpha$, AC — наклонная, BC — ее проекция.
Прямая $a \perp BC$.
Через точку C проведем прямую $a_1 \parallel a$, $a_1 \perp BC$. По теореме о трех перпендикулярах $a_1 \perp AC$ и $a \perp AC$. И наоборот: если $a \perp AC$, значит $a_1 \perp BC$; если $a_1 \perp BC$, то $a \perp BC$.



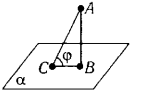
34. 1) $\alpha \parallel \beta$. Прямая a пересекает плоскости α и β в точках A и β. Проведем из точки A прямую, перпендикулярную плоскости β, $AC \perp \beta$. Проведем плоскость γ через AC и AB. γ пересекает плоскость β по прямой BC, а α по прямой, проходящей через точку A. $b \parallel BC$ по свойству параллельных прямых. $AC \perp \alpha$, так как $AC \perp BC$. Следовательно, на прямой b лежит проекция прямой a на плоскость. BC — проекция a на β. $\angle ABC$, $\angle KAL$ — углы между a и плоскостями α и β. $\angle KAL = \angle ABC$ (соответственные при $b \parallel BC$ и секущей a).



2) Прямая a пересекает α в точке A, b — в точке B. $a \parallel b$. Проведем плоскость β через a и b. β пересекает α по прямой c, содержащей точки A и B. Проведем в точки A и B прямые $a_1 \perp c$ и $b_1 \perp c$. Углы φ и α — углы между прямыми a и b и плоскостью α. При параллельном переносе точки B в точку A прямые a_1 и b_1 совместятся, a и b — тоже, следовательно, $\varphi = \gamma$.

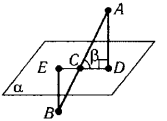


35. $AB = h$, $AB \perp \alpha$, значит, $AB \perp BC$.
BC — проекция наклонной AC на плоскость α.
$\angle\varphi$ — угол между AC и α.
$\triangle ABC$ — прямоугольный.
1) $\varphi = 30°$, $AC = 2h$.
2) $\varphi = 45°$, $AC = \sqrt{2}h$.
3) $\varphi = 60°$, $AC = \dfrac{h}{\sin 60°} = \dfrac{h \cdot 2}{\sqrt{3}}$.

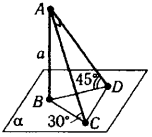


36. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче.
Имеем: $AC = a$, $AB \perp \alpha$, AC — наклонная, BC — ее проекция.
$AB \perp BC$. $\angle\varphi$ — угол между AC и плоскостью α.
$\triangle ABC$ — прямоугольный.
1) $\varphi = 45°$, $BC = a \cdot \cos\varphi = a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2) $\varphi = 60°$, $BC = a \cdot \cos 60° = \dfrac{1}{2}a$.
3) $\varphi = 30°$, $BC = a \cdot \cos 30° = a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

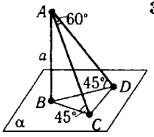
37. $BE = 2$ м, $AB = 10$ м, $AD = 3$ м.
$BE \perp \alpha$, $AD \perp \alpha$, следовательно, $DE \perp BE$, $DE \perp AD$.
C — точка пересечения отрезка AB и плоскости α.
$\triangle ADC$, $\triangle BEC$ — прямоугольные.
$\triangle ADC \sim \triangle BEC$ по двум сторонам и углу.
По определению угла между прямой и плоскостью $\angle\beta$ — угол между AB и α.
Из подобия треугольников следует $\dfrac{AD}{BE} = \dfrac{AC}{BC}$.
$\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{2}$; $AB + BC = AB = 10$ м, отсюда $BC = 4$ м.
Таким образом, из $\triangle BEC$: $\sin\beta = \dfrac{EB}{BC} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $\beta = 30°$.
Ответ: 30°.



38. $AB \perp \alpha$, $AB \perp BC$, $AB \perp BD$.
AD и AC — наклонные. BC и BD — проекции данных наклонных на плоскость α. $\angle ACB$ и $\angle ADB$ — углы между AD, AC и плоскостью α. $\angle ACB = 30°$, $\angle ADB = 45°$, $\angle CBD = 90°$, $AB = a$. $\triangle ABD$, $\triangle ABC$ — прямоугольные.

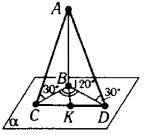


$AD = \dfrac{AB}{\sin 45°} = a \cdot \sqrt{2}$. $AC = 2 \cdot AB = 2a$.
$\triangle DAC$ — прямоугольный, по теореме Пифагора,
$DC^2 = \sqrt{AD^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$.
Ответ: $a\sqrt{6}$.



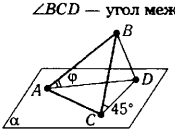
39. $\angle ADB = \angle ACB = 45°$. $AB = a$. $\angle CAD = 60°$.
$\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ — прямоугольные и равнобедренные.
$CB = a$, $BD = a$.
Из $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{2}a$. Из $\triangle ABD$: $AD = \sqrt{2}a$.
$\triangle ACD$ — равносторонний, поэтому $CD = AC = AD = \sqrt{2}a$.
Ответ: $\sqrt{2}a$.

40. $\angle ACB = \angle ADB = 30°$, $\angle CBD = 120°$, $AB = a$.
$\triangle ABC$, $\triangle ABD$ — прямоугольные.



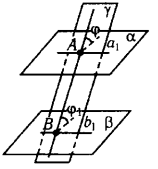
Из $\triangle ABC$: $BC = \dfrac{AB}{\text{tg}30°} = a \cdot \sqrt{3}$. Из $\triangle ABD$: $BD = \dfrac{AB}{\text{tg}30°} = a \cdot \sqrt{3}$.
$\triangle CBD$ — равнобедренный, BK — высота и медиана.
$\angle BCD = \angle BDC = 30°$.
$CK = BC \cdot \cos 30° = a\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}$, $CD = 3a$.
Ответ: $3a$.

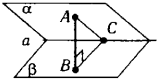
41. $\triangle ABC$ — прямоугольный, равнобедренный.
$BD \perp \alpha$, $DC \perp BD$, $AD \perp BD$. DC — проекция катета BC на α.
$\angle BCD$ — угол между α и BC, $\angle BCD = 45°$. $\triangle BDA$ — прямоугольный; $\sin\varphi = \dfrac{BD}{AB}$.



Из $\triangle BDC$: $BD = \dfrac{BC}{\sqrt{2}}$. Из $\triangle ACB$: $AB = \sqrt{2} \cdot BC$.
$\sin\varphi = \dfrac{1}{2}$, $\varphi = 30°$.
Ответ: 30°.

42. $\alpha \parallel \beta$. γ пересекает α по прямой a, β — по прямой b. $a \parallel b$ по свойству параллельных плоскостей.
Проведем в плоскости γ прямую c, $c \perp a$, $c \perp b$. Проведем через точки A и B прямые $a_1 \perp a$ и $b_1 \perp b$. Прямые a_1 и b_1 параллельны как перпендикуляры к параллельным прямым. Углы $\angle\varphi = \angle\varphi_1$ как соответственные между $a_1 \parallel b_1$ и секущей c.



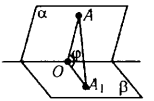


43. Из точки A проведем перпендикуляр AB: $AB \perp \beta$, $AB \perp a$. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. $BC \perp a$ по теореме о трех перпендикулярах. Следовательно, $\angle ACB$ — угол между плоскостями α и β. $\angle ACB = 30°$. $\triangle ABC$ — прямоугольный, $AB = a$.

$AC = \dfrac{AB}{\sin 30°} = 2AB = 2a$.
Ответ: $2a$.

44. Точка A принадлежит плоскости α. Опустим из точки A $AC \perp a$, $AB \perp \beta$. Следовательно, $AB \perp BC$. $BC \perp a$ по теореме о трех перпендикулярах. Таким

образом, $\angle ACB$ — угол между плоскостями α и β.
$\triangle ABC$ — прямоугольный, причем $AC = 2AB$.



$\sin ACB = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB}{2AB} = \dfrac{1}{2}$; $\angle ACB = 30°$.

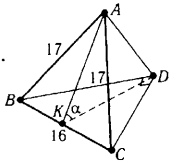
Ответ: 30°.

45. $\triangle ABC$, $\triangle BDC$ — равнобедренные.
Из точек A и D проведем высоты, которые будут также медианами. $\angle AKD$ — угол между плоскостями треугольников.
По теореме косинусов из $\triangle AKD$:

$AD = \sqrt{AK^2 + DK^2 - 2 \cdot AK \cdot KD \cdot \cos 60°} = \sqrt{AK^2 + DK^2 - AK \cdot KD}$.

$\triangle BDC$ — прямоугольный, $\angle CDK = \angle DCK = 45°$, так как DK — биссектриса.

Таким образом, $DK = KC = \dfrac{1}{2}BC = 8$ м.



$\triangle AKB$ — прямоугольный, $BK = \dfrac{1}{2}BC = 8$ м, $AB = 17$ м.

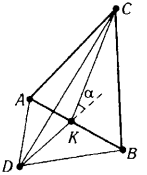
По теореме Пифагора: $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = 15$ м.

Следовательно, $AD = \sqrt{225 + 64 - 120} = 13$ м.

Ответ: 13 м.

46. В $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ проведем высоты и медианы CK и DK. $\angle\alpha$ — угол между плоскостями треугольников.
1) $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см, $CD = 35$ см.
По теореме косинусов из $\triangle CKD$ найдем $\cos\alpha$:

$\cos\alpha = \dfrac{CK^2 + DK^2 - CD^2}{2 \cdot CK \cdot DK}$.



Из $\triangle AKC$ по теореме Пифагора $CK^2 = \sqrt{AC^2 - AK^2} = 5$ см.
Из $\triangle DKB$ по теореме Пифагора

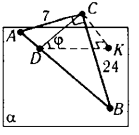
$DK = \sqrt{DB^2 - BK^2} = \sqrt{AD^2 - BC^2} = 35$ см.

$\cos\alpha = \dfrac{25 + 1225 - 1225}{2 \cdot 5 \cdot 35} = \dfrac{1}{14}$.

2) $\cos\alpha = \dfrac{AC^2 - AK^2 + AD^2 - BK^2 - CD^2}{2(AC^2 + AK^2)(AD^2 - BK^2)} = \dfrac{2}{21}$.

47. $\triangle ABC$ — прямоугольный. $AC = 7$ м, $BC = 24$ м.
На плоскость α из точки C опустим перпендикуляр. Проведем высоту CD в $\triangle ABC$. $KD \perp AB$ по теореме о трех перпендикулярах. Итак, $\angle CDK$ — угол между α и плоскостью треугольника. $\angle CDK = 30°$, $\triangle CKD$ — прямоугольный.

$CK \perp DK$, $CK = \dfrac{1}{2}CD$.



Для $\triangle ACB$: $CD = \dfrac{AC \cdot CB}{AB}$. По теореме Пифагора

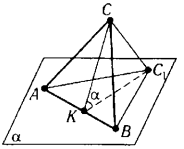
$AB^2 = AC^2 + BC^2$, $CD = \dfrac{AC \cdot CB}{\sqrt{AC^2 - BC^2}} = \dfrac{7 \cdot 24}{25} = 6{,}72$ м.

$CK = \dfrac{1}{2} \cdot 6{,}72 = 3{,}36$ м.

Ответ: 3,36 м.

48. $AB = AC = BC = a$.
На плоскость α из точки C опустим $CC_1 \perp \alpha$. Проведем высоту и медиану CK в $\triangle ABC$. $C_1K \perp AB$ по теореме о трех перпендикулярах. Итак, $\angle C_1KC$ — угол между плоскостью α и плоскостью треугольника. $\triangle AC_1B$ — проекция $\triangle ABC$ на плоскость α.

$S_{AC_1B} = S_{ACB} \cdot \cos\alpha$; $S_{ACB} = \dfrac{1}{2}a^2 \cdot \sin\beta = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



1) $S_{AC_1B} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \cos 30° = \frac{3}{8}a^2$.

2) $S_{AC_1B} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \cos 45° = \frac{\sqrt{6}}{8}a^2$.

3) $S_{AC_1B} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \cos 60° = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}$.

49. Из задачи №46 $\angle CKD$ — угол между плоскостями треугольников ABC и ABD. Тогда:

1) а) $S_{AC_1B} = S_{ABC} \cdot \cos\alpha$;

$S_{ABC} = \frac{1}{2}CK \cdot AB$; $CK = 5$ см, $AB = 24$ см, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 24 = 60$ см^2. $\cos\alpha = \frac{1}{14}$.

$S_{AC_1B} = 60 \cdot \frac{1}{14} = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$ см^2.

б) $S_{ABC} = \frac{1}{2}CK \cdot AB$, $CK = 63$ см, $AB = 32$ см; $S_{ABC} = 1008$ см^2.

$S_{AC_1B} = 1008 \cdot \frac{2}{21} = 96$ см^2.

2) $S_{AD_1B} = S_{ABD} \cdot \cos\alpha$;

а) $S_{ABD} = \frac{1}{2}DK \cdot AB$; $DK = 35$ см, $AB = 24$ см, $S_{ABD} = 420$ см^2.

$S_{AD_1B} = 420 \cdot \frac{1}{14} = 30$ см^2.

б) $S_{ABD} = \frac{1}{2}DK \cdot AB$; $DK = 12$ см, $AB = 32$ см, $S_{ABD} = 192$ см^2.

$S_{AD_1B} = 192 \cdot \frac{2}{21} = 18\frac{2}{7}$ см^2.

50. $A(2, 7, -3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-3, 4, 5)$, $D(-2, 3, -1)$.

$\overline{AB} = (-1, -7, 6)$, $\overline{BC} = (-4, -4, 2)$, $\overline{DC}(-1, -7, 6)$, $\overline{AD}(-4, -4, 2)$,

$\overline{AC}(-5, -11, 8)$, $\overline{BD}(-3, 3, -4)$.

$\overline{AB} = \overline{DC}$; $\overline{BC} = \overline{AD}$.

51. $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(0, 2, -1)$; $\overline{AB} = (-2, 1, 1)$, $\overline{CD}(x, y - 2, z + 1)$.

Если $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $x = -2$, $y - 2 = 1$, $z + 1 = 1$;
$y = 3$, $z = 0$. $D(-2, 3, 0)$.
Ответ: $D(-2, 3, 0)$.

52. $\overline{AB} + \overline{CD} = 0$.
Из задачи №51: $\overline{AB}(-2, 1, 1)$; $\overline{CD} = (x, y - 2, z + 1)$, откуда имеем:
$-2 + x = 0$; $y - 2 + 1 = 0$; $z + 1 + 1 = 0$; $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$. $D(2, 1, -2)$.
Ответ: $D(2, 1, -2)$.

53. $\bar{a} = \overline{(2; n; 3)}$; $\bar{b} = \overline{(3; 2; m)}$.
Если векторы коллинеарны, то $\frac{2}{3} = \frac{n}{2} = \frac{3}{m}$, откуда $n = \frac{4}{3}$; $m = \frac{9}{2}$.
Ответ: $\frac{4}{3}$; $\frac{9}{2}$.

54. $\bar{a}(1, 2, 3)$, $A(1, 1, 1)$, точка B имеет координаты $(x, y, 0)$.
$\overline{AB} = (x - 1, y - 1, -1)$, из равенства $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = -\frac{1}{3}$ найдем x и y.
$x - 1 = -\frac{1}{3}$, $\frac{y-1}{2} = -\frac{1}{3}$,
$x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$. $\overline{AB} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -1\right)$.
Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -1\right)$.

55. Векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равняется 0.

1) $\bar{a}\,(2, -1, 3)$; $\bar{b}\,(1, 3, n)$.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 - 3 + 3n = 0$; $n = \frac{1}{3}$;

2) $\bar{a}\,(n, -2, 1)$; $\bar{b}\,(n, -n, 1)$.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = n^2 + 2n + 1 = 0$, $(n + 1)^2 = 0$, $n = -1$;

3) $\bar{a}\,(n, -2, 1)$; $\bar{b}\,(n, 2n, 4)$.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = n^2 - 4n + 4 = 0$, $(n - 2)^2 = 0$, $n = 2$;

4) $\bar{a}\,(4, 2n, -1)$; $\bar{b}\,(-1, 1, n)$.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = -4 + 2n - n = 0$, $n = 4$.

56. $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(0, 2, -1)$, $D(0, 0, c)$.

$\overline{AB} = (-2, 1, 1)$, $\overline{CD}\,(0, -2, c + 1)$;

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0 - 2 + c + 1 = 0$;

$c = 1$.

57*. Пусть вектор $\bar{a}$ имеет координаты (a_1, a_2, a_3),

вектор $\bar{b}$ имеет координаты (b_1, b_2, b_3),

а вектор $\bar{c}$ имеет координаты (c_1, c_2, c_3).

Тогда $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}|\bar{a}||\bar{b}|$,

$\bar{a} \cdot \bar{c} = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$,

$\bar{b} \cdot \bar{c} = b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0$.

$$|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}| = \sqrt{(a_1 + b_1 + c_1)^2 + (a_2 + b_2 + c_2)^2 + (a_3 + b_3 + c_3)^2} =$$

$$= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 + 2 \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 + |\bar{a}||\bar{b}|}.$$

58*. По условию $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}|$, и $\overline{a^2} = \overline{b^2} = \overline{c^2} = 1$. Тогда:

1) $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c})}{|\bar{a}||\bar{b} + \bar{c}|}$;

$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \overline{ab} + \overline{ac} = |\bar{a}||\bar{b}| \cdot \cos 60^\circ + |\bar{a}||\bar{c}| \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a} \cdot (\bar{b} - \bar{c})}{|\bar{a}||\bar{b} - \bar{c}|}$ $\bar{a}(\bar{b} - \bar{c}) = \overline{ab} - \overline{ac} = |\bar{a}||\bar{b}| \cdot \cos 60^\circ - |\bar{a}||\bar{c}| \cdot \cos 60^\circ = 0$.

$\cos\varphi = 0$, $\varphi = 90^\circ$.

59. $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$, $D(2, -3, 1)$.

$\overline{AB} = (1, -2, 3)$, $\overline{CD}\,(-1, -4, 1)$.

$\cos\varphi = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}|}$, $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = -1 + 8 + 3 = 10$.

$|\overline{AB}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$, $|\overline{CD}| = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18}$.

$\cos\varphi = \dfrac{10}{2\sqrt{63}} = \dfrac{5}{\sqrt{63}}$.

Ответ: $\dfrac{5}{\sqrt{63}}$.

60. $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$;

$\overline{AB} = (1, -2, 3)$, $|\overline{AB}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$,

$\overline{BC} = (2, 2, -2)$, $|\overline{BC}| = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$,

$\overline{AC} = (3, 0, 1)$, $|\overline{AC}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$,

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{10 + 12 - 14}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{2}{15}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{15}}$.

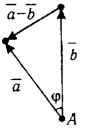
61*. По теореме косинусов имеем $\angle\varphi$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\varphi$, $BC^2 = |\overline{a} - \overline{b}|^2$, $AB^2 = |\overline{a}|^2$, $AC^2 = |\overline{b}|^2$,

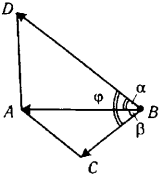
$|\overline{a} - \overline{b}|^2 = |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 - 2|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$,

$|\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 - 2\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 - 2|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$,

$|\overline{a} \cdot \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$.



62*. $\cos\varphi = \dfrac{\overline{BD} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BD}| \cdot |\overline{BC}|}$.



DA перпендикулярен к (ABC), $DA \perp AB$.

$\triangle DAB$, $\triangle BAC$ — прямоугольные.

$\overline{BC} \cdot \overline{BA} = BC \cdot AB \cdot \cos\alpha$, $\overline{BD} \cdot \overline{BA} = BD \cdot AB \cdot \cos\beta$,

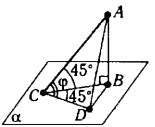
$\overline{BC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AB^2} = BC \cdot BD \cdot AB^2 \cdot \cos\alpha\cos\beta$, $\overline{BC} \cdot \overline{BD} = BC \cdot BD \cdot \cos\alpha\cos\beta$

$$\cos\varphi = \frac{BC \cdot BD \cdot \cos\alpha\cos\beta}{BC \cdot BD} = \cos\alpha\cos\beta.$$

Ответ: $\cos\alpha\cos\beta$.

63. $AB \perp \alpha$. Значит, $AB \perp BC$, $AB \perp BD$. AB — наклонная, BC — ее проекция, $\angle ACB = \angle BCD = 45°$. Искомый угол — $\angle ACD = \alpha$. Опустим из точки B $BD \perp CD$. $AD \perp CD$ по теореме о трех перпендикулярах.

$\triangle CDA$ — прямоугольный, $\cos\alpha = \dfrac{CD}{AC}$.



$\triangle BDC$ — прямоугольный, $\cos 45° = \dfrac{CD}{BC}$; $CD = BC \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\triangle ABC$ — прямоугольный, $\cos 45° = \dfrac{BC}{AC}$; $AC = BC \cdot \sqrt{2}$.

$$\cos\alpha = \frac{BC}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot BC} = \frac{1}{2};\ \alpha = 60°.$$

64*. $AB \perp \alpha$, $AB \perp BC$, $AB \perp BD$; $AC = AD$.

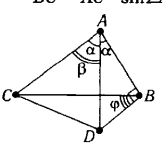
$\angle CAB = \angle DAB = \alpha$. $\angle CAD = \beta$.

По теореме косинусов из треугольника CBD найдем $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{2BC^2 - CD^2}{2BC \cdot BD} = \frac{2BC^2 - CD^2}{2BC^2} = 1 - \frac{CD^2}{2BC^2}.$$

$\triangle ABC$, $\triangle ABD$ — прямоугольные.

$BC = AC \cdot \sin\angle ACB$; $BC = AC \cdot \sin\alpha$.



Для $\triangle CAD$ по теореме косинусов $DC^2 = 2AC^2 - 2AC^2 \cdot \cos\beta$.

$$\cos\varphi = 1 - \frac{AC^2(1 - \cos\beta)}{AC^2 \cdot \sin\alpha} = 1 - \frac{(1 - \cos\beta)}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos\beta - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\cos\beta - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.