Вариант № 21165264

1. Задание 1 № 501181

На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 29 литров бензина по цене 33 руб. 70 коп. за литр. Какую сумму сдачи он должен получить у кассира? Ответ запишите в рублях.

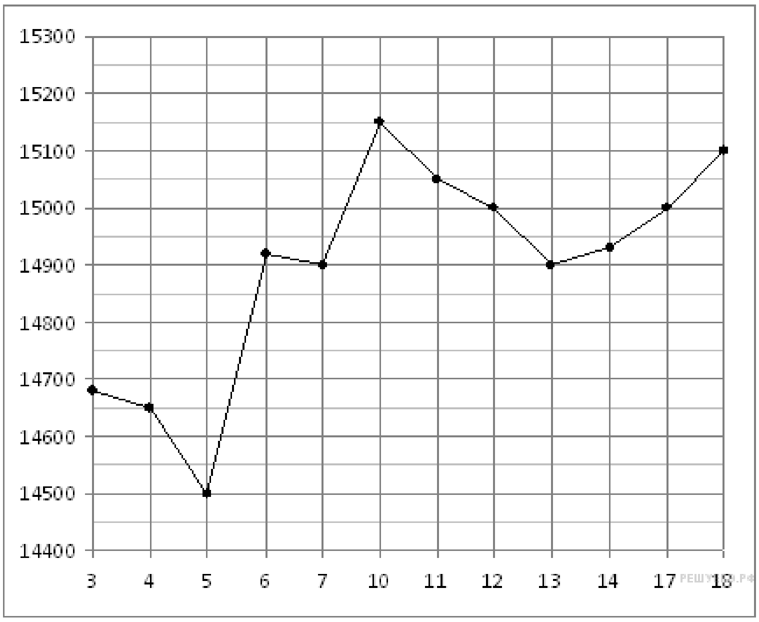
Решение.

Клиент залил в бак бензина на сумму 33,70·29 = 977,30 рублей. Тогда он получит от кассира 1000 − 977.30 = 22,7 рублей сдачи.

Ответ: 22,7.
Ответ: 22,7

2. Задание 2 № 26875

На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 18 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наибольшей за данный период.



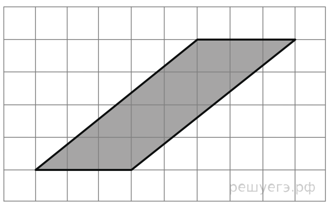
Решение.

Из графика видно, что наибольшей цена была 10 сентября (см. рисунок).

Ответ: 10.
Ответ: 10

3. Задание 3 № 27561

Найдите площадь параллелограмма, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведенную к этому основанию или его продолжению. Поэтому

$$S = 4 \cdot 3 = 12 \text{ см}^2.$$

Примечание.

Приведем другое решение. Площадь параллелограмма равна разности площади прямоугольника и двух равных прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами параллелограмма. Поэтому

$$S = 8 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 12 \text{ см}^2.$$

Ответ: 12.

Ответ: 12

4. Задание 4 № 286171

На конференцию приехали 5 ученых из Швеции, 7 из Италии и 4 из Чехии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двенадцатым окажется доклад ученого из Чехии.

Решение.

Всего в семинаре принимает участие $5+7+4=16$ ученых, значит, вероятность того, что ученый, который выступает двенадцатым, окажется из Чехии, равна

$$\frac{4}{16} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

Ответ: 0,25

5. Задание 5 № 101879

Решите уравнение $\frac{x-6}{7x+3} = \frac{x-6}{5x-1}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Решение.

Заметим, что числители дробей равны. Имеем:

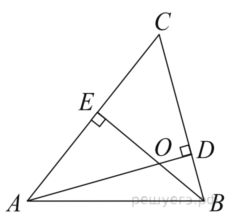
$$\frac{x-6}{7x+3} = \frac{x-6}{5x-1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-6=0; \\ 7x+3=5x-1; \quad 5x-1 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6; \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: 6.

Ответ: 6

6. Задание 6 № 27763

Два угла треугольника равны 58° и 72°. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Сумма углов в выпуклом четырёхугольнике $DOEC$ равна 360°, следовательно,

$$\angle DOE = 360^\circ - \angle CDO - \angle CEO - \angle C = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (180^\circ - 58^\circ - 72^\circ) = 130^\circ.$$

Ответ: 130.

Приведём другое решение.

Один из углов между высотами треугольника, проведёнными из двух его вершин, равен углу при третьей вершине; другой угол равен сумме углов треугольника, из вершин которых проведены высоты.

Требуется найти тупой угол между высотами, он равен 58° + 72° = 130°.

Ответ: 130

7. Задание 7 № 517174

Прямая $y = -3x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = -3x + 8$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y' = -3$:

$$(x^2 + 7x - 6)' = \ -3 \Leftrightarrow 2x + 7 = -3 \Leftrightarrow x = -5.$$

Ответ: −5.

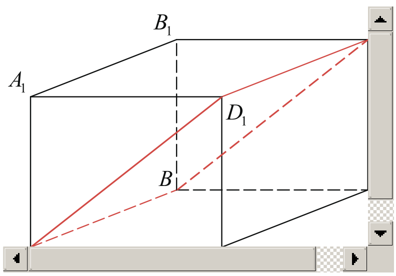
Ответ: -5

8. Задание 8 № 513360

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: AB = 15, AD = 12, AA_1 = 16. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.

Решение.

Сечение пересекает параллельные грани по параллельным отрезкам. Поэтому сечение ABC_1D_1 — параллелограмм. Кроме того, ребро AB перпендикулярно граням AA_1D_1D и BB_1C_1C. Поэтому углы D_1AB и ABC_1 — прямые. Поэтому сечение ABC_1D_1 — прямоугольник.



Из прямоугольного треугольника AD_1D найдем AD_1 :

$$AD_1 = \sqrt{(AD)^2 + (AA_1)^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20.$$

Тогда площадь прямоугольника ABC_1D_1 равна:

$$AB \cdot AD_1 = 15 \cdot 20 = 300.$$

Ответ: 300

Ответ: 300

9. Задание 9 № 61513

Найдите значение выражения $\frac{(6\sqrt{2})^2}{3}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{(6\sqrt{2})^2}{3}=\frac{36\cdot 2}{3}=24.$$

Ответ: 24.

Ответ: 24

10. Задание 10 № 516295

Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=1,8+10t-5t^2$, где h — высота в метрах, t— время в секундах, прошедшее с момента броска. Какое время мяч будет находиться на высоте не менее 5 метров? Ответ дайте в секундах.

Решение.

Определим моменты времени, когда мяч находился на высоте ровно 5 метров. Для этого решим уравнение $h(t)=5$:

$$h(t)=5\Leftrightarrow 1,8+10t-5t^2=5\Leftrightarrow 5t^2-10t+3,2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0,4; \\ t=1,6. \end{array}\right.$$

Проанализируем полученный результат: поскольку по условию задачи мяч брошен снизу вверх, это означает, что в момент времени $t=0,4$ (с) мяч находился на высоте 5 метров, двигаясь снизу вверх, а в момент времени $t=1,6$ (с) мяч находился на этой высоте, двигаясь сверху вниз. Поэтому он находился на высоте не менее пяти метров 1,6 − 0,4 = 1,2 секунды.

Ответ: 1,2.

Ответ: 1,2

11. Задание 11 № 110205

Имеются два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй — 15 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 34% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 46% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Решение.

Пусть концентрация первого раствора кислоты — c_1, а концентрация второго — c_2. Если смешать эти растворы кислоты, то получится раствор, содержащий 34% кислоты: $30c_1+15c_2=45\cdot 0,34$. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 46% кислоты: $mc_1+mc_2=2m\cdot 0,46$. Решим полученную систему уравнений.

$$\begin{cases} 30c_1+15c_2=15,3, \\ c_1+c_2=0,92 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c_2=0,92-c_1, \\ 30c_1+13,8-15c_1=15,3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c_2=0,92-c_1, \\ 15c_1=1,5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c_2=0,82, \\ c_1=0,1. \end{cases}$$

Таким образом, в первом сосуде содержится $m_1=0,1\cdot 30=3$ кг кислоты.

Ответ: 3.

Ответ: 3

12. Задание 12 № 124317

Найдите наименьшее значение функции $y=x^3-3x+23$ на отрезке $[0;2]$.

Решение.

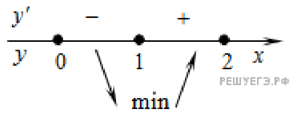
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1).$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3(x+1)(x-1) = 0, \\ 0 \le x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1, \end{array} \right. \\ 0 \le x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 1$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(1) = 1 - 3 \cdot 1 + 23 = 21.$$

Ответ: 21.

Ответ: 21

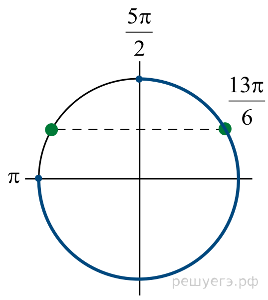
13. Задание 13 № 509947

а) Решите уравнение $3\cos 2x - 5\sin x + 1 = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right].$

Решение.

Сведём уравнение к квадратному относительно синуса, используя формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$ Имеем:



$$3\cos 2x - 5\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3(1 - 2\sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - 6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -\frac{4}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ (см. рис.), получим число $\frac{13\pi}{6}.$

Ответ:а) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{13\pi}{6}.$

14. Задание 14 № 519829

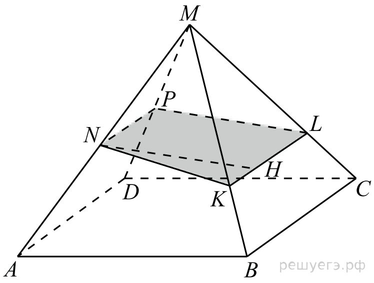
Дана правильная четырёхугольная пирамида *MABCD*, все рёбра которой равны 6. Точка *N* — середина бокового ребра *MA*, точка K делит боковое ребро *MB* в отношении 5:1, считая от вершины *M*.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки *N* и *K* параллельно прямой *AD*, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

Решение.

а) Через точки N и K проведём прямые, параллельные ребру AD. Эти прямые пересекают рёбра MD и MC в точках P и L соответственно. Четырёхугольник $KLPN$ — сечение пирамиды указанной плоскостью. Стороны NP и KL параллельны и не равны. Следовательно, $KLPN$ — трапеция. В треугольниках NMK и PML углы при веhшине M равны, $ML = MK$, $MN = MP$. Следовательно, треугольники равны, и поэтому $NK = PL$. Таким образом, трапеция $KLPN$ равнобедренная.



б) Пусть NH — высота трапеции $KLPN$. Имеем

$$NP = \frac{1}{2}AD = 3\ KL = \frac{5}{6}BC = 5.$$

Найдём NK из треугольника NMK. Имеем $NM = NP = 3$, $MK = KL = 5$. По теореме косинусов,

$$NK^2 = NM^2 + MK^2 - 2NM \cdot MK \cdot \cos\angle NMK = 9 + 25 - 15 = 19.$$

Поскольку трапеция равнобедренная, $KH = \frac{KL - NP}{2} = 1.$

По теореме Пифагора из треугольника KHN получаем:

$$NH = \sqrt{NK^2 - HK^2} = \sqrt{19 - 1} = 3\sqrt{2}.$$

Следовательно, площадь трапеции равна

$$\frac{KL + NP}{2} \cdot NH = \frac{5+3}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $12\sqrt{2}$.

15. Задание 15 № 507792

Решите неравенство $\frac{1}{6x^2 - 5x} \geq \frac{1}{\sqrt{6x^2 - 5x + 1} - 1}$.

Решение.

Пусть $a = \sqrt{6x^2 - 5x + 1}$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2 - 1} \geq \frac{1}{a - 1}, \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{a^2 - 1} \leq 0, \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq a < 1.$$

Следовательно:

$$\begin{cases} 6x^2 - 5x + 1 < 1, \\ 6x^2 - 5x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(6x - 5) < 0, \\ (2x - 1)(3x - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{6}. \end{array} \right.$$

Таким образом, решением исходного неравенства является множество $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$.

16. Задание 16 № 517533

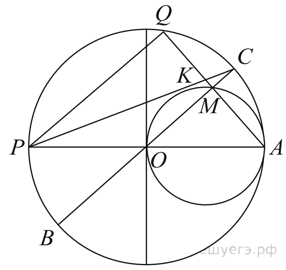
Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая окружность проходит через через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от A. Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P.

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin\angle AOC = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение $QK:KA$.

Решение.

а) Так как AO — диаметр, а AM — хорда, то $\angle OMA = 90°$, значит $AQ \perp BC$. AO пересекает большую окружность в P, AP — диаметр, тогда $\angle PQA = 90°$, откуда $PQ \perp AQ$.



Поскольку $PQ \perp AQ$ и $AQ \perp BC$, то $PQ \parallel BC$, что и требовалось доказать.

б) Так как $\angle AOC$ — центральный, то $\angle CPA = \frac{1}{2}\angle AOC$. $PQ \parallel BC$, значит, $\angle QPA = \angle COA$ — соответственные углы. Поскольку $\angle CPA = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\angle QPA, CP$ — биссектриса $\angle QPA$, тогда по свойству биссектрисы

$$\frac{QK}{KA} = \frac{PQ}{AP} = \cos\angle QPA = \sqrt{1-\sin^2\angle AOC} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: б) $\frac{2}{3}$.

17. Задание 17 № 506958

Антон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

Решение.

Пусть сумма кредита S у.е., процентная ставка банка x %.

Предложение «Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину» означает: Антон взятую сумму возвращал в банк равными долями. Сумма, образованная применением процентной ставки, составляет:

$$0,01xS + 0,01x\cdot\frac{5S}{6} + 0,01x\cdot\frac{4S}{6} + \ldots + 0,01x\cdot\frac{2S}{6} + 0,01x\cdot\frac{S}{6} = 0,01Sx\cdot\left(1+\frac{5}{6}+\frac{4}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right) =$$

$$= 0,01Sx\cdot\frac{1+\frac{1}{6}}{2}\cdot 6 = 0,01Sx\cdot\frac{6+1}{2} = 0,035Sx. \text{ (у.е.)}$$

Общая сумма, выплаченная Антоном за 6 месяцев: $S + 0,035Sx = (1+0,035x)\cdot S$ (у.е.). А эта сумма по условию задачи равна $1,63S$ у.е. Решим уравнение:

$$(1+0,035x)S = 1,63S \Leftrightarrow 1+0,035x = 1,63 \Leftrightarrow 0,035x = 0,63 \Leftrightarrow x = 18.$$

Ответ: 18.

18. Задание 18 № 516336

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

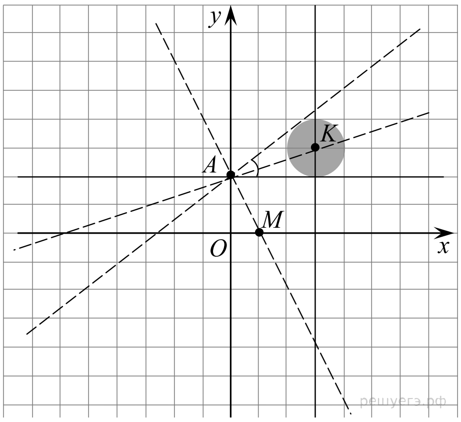
$$\begin{cases} \left((x-3)^2+(y-3)^2-1\right)\left((x-1)^2+y^2\right) \le 0, \\ y-2 = ax \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Уравнение $y = ax + 2$ задает прямую. Эта прямая при всех a проходит через точку $A(0;2)$.

Неравенство системы $((x-3)^2+(y-3)^2-1)\,((x-1)^2+y^2) \le 0$ задает объединение круга с центром в точке $K(3;3)$ и радиусом 1 и точки $M(1;0)$. Система не будет иметь решений тогда и только тогда, когда прямая $y = ax + 2$ не имеет общих точек с кругом и не проходит через точку M.



Пусть α — угол между касательными к окружности $(x-3)^2+(y-3)^2=1$, проведёнными из точки $A(0;2)$. Тогда тангенс угла $\frac{\alpha}{2}$, образованного этими касательными с прямой AK, равен $\frac{1}{3}$ (см.рис.). Воспользовавшись формулой тангенса двойного угла, получим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$. Значит, для касательных к окружности $a = 0$ и $a = \frac{3}{4}$.

Прямая AM имеет угловой коэффициент -2.

Отсюда получаем $a < -2;\ -2 < a < 0;\ a > \frac{3}{4}$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$;

19. Задание 19 № 517583

На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5120.

а) Может ли быть записано число 230?

б) Можно ли обойтись без числа 14?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

Решение.

а) Пусть на доске написано число 230 и 99 других различных натуральных чисел. Минимально возможная сумма чисел на доске достигается при условии, что сумма 99 различных натуральных чисел минимальна. А это, в свою очередь, возможно, если 99 различных натуральных числа - арифметическая прогрессия с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 1.$ Сумма S_{99} этих чисел, по формуле суммы арифметической прогрессии, составит:

$$S_{99} = \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 4950.$$

Сумма всех чисел на доске S будет равна:

$$S = S_{99} + 230 = 4950 + 230 = 5180.$$

Нетрудно заметить, что полученная сумма больше, чем 5120, а это значит, что и любая сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых есть 230, больше 5120, следовательно, числа 230 на доске быть не может.

б) Пусть на доске не записано число 14. В таком случае, минимально возможная сумма S чисел на доске будет состоять из двух сумм арифметических прогрессий: суммы S_1 первых 13 членов прогрессии с первым членом $a_1 = 1,$ разностью $d = 1$ (то есть ряда 1,2,3,..13) и суммы первых 87 членов прогрессии с первым членом $a_1 = 15,$ разностью $d = 1$ (то есть ряда 15,16,17,..101). Найдем эту сумму:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1+13}{2} \cdot 13 + \frac{15+101}{2} \cdot 87 = 91 + 5046 = 5137.$$

Нетрудно заметить, что полученная сумма больше, чем 5120, а это значит, что и любая сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых нет 14, больше 5120, следовательно, без числа 14 на доске обойтись нельзя.

в) Допустим, что на доске выписаны все числа от 1 до 100. Тогда получается, что полученный ряд составляет арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1,$ разностью $d = 1.$ По формуле для суммы арифметической прогрессии найдем сумму S_0 всех чисел на доске:

$$S_0 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050.$$

Полученная сумма не удовлетворяет условию задачи. Теперь, чтобы увеличить сумму всех чисел, написанных на доске до обозначенной в условии, попробуем заменить числа, кратные 14 на другие числа, следующие за сотней: 70 заменим на 110, 84 - на 104, а 98 - на 108. Полученная сумма S будет равна:

$$S = S_0 - (70 + 84 + 98) + (110 + 104 + 108) = 5120.$$

При дальнейшей замене чисел, кратных 14 на числа, большие 100, сумма будет увеличиваться и не соответствовать условию задачи. Таким образом, наименьшее количество чисел, кратных 14 равно 4.

Приведем другое решение пункта в).

Приведем пример, когда на доске написано четыре числа, кратных 14 (14, 28, 42, 56):

1, 2, ... , 69, 71, 72, ... , 83, 85, 86, ... , 97, 100, 101, 102, 103, 115.

Докажем, что не может быть четырех шести чисел, кратных 14. Чтобы убрать максимальное количество чисел, кратных 14, необходимо, чтобы разности между новыми и старыми числами были минимальными. То есть заменять надо наибольшие числа, кратные 14, на наименьшие возможные, большие ста числа. Пусть количество чисел, кратных 14, равно 3. Тогда минимальная сумма записанных на доске чисел равна:

$$S = 1 + 2 + \ldots + 55 + 57 + \ldots + 69 + 71 + \ldots + 83 + 85 + \ldots + 97 + 100 + \ldots 104 = 5152.$$

Полученная сумма больше, чем 5120. При дальнейшей замене чисел, кратных 14, на числа, большие 100, сумма будет увеличиваться, значит, на доске не может быть меньше четырех чисел, кратных 14.

Ответ: а) Нет б) Нет в) 4.