Лаппо Л.Д., Сапожников А.А.

Домашняя работа по геометрии за 7 класс

к учебнику «Геометрия: Учеб. для 7-9 кл.
общеобразоват. учреждений /
А.В. Погорелов. — М.: «Просвещение», 2002 г.»

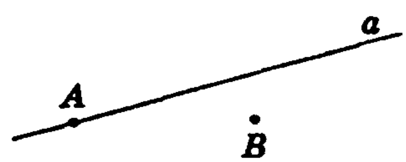
§ 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

№ 1.

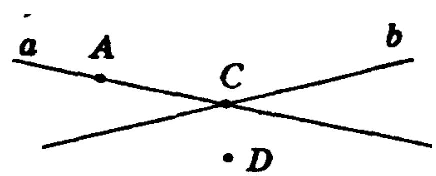
1) Проведите прямую. Отметьте какую-нибудь точку A, лежащую на прямой, и точку B, не лежащую на прямой.

2) Проведите две пересекающиеся прямые a и b. Отметьте точку C пересечения прямых: точку A на прямой a, не лежащую на прямой b; точку D, не лежащую ни на одной из прямых a и b[1].

1)



2)



---

[1] Условия заданий приводятся в учебных целях и в необходимом объеме — как иллюстративный материал. Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги. (Ст. 19 п. 2 Закона РФ об авторском праве и смежных правах от 9 июня 1993 г.)

№ 2.

Отметьте на листе бумаги две точки. Проведите через них от руки прямую. С помощью линейки проверьте правильность построения.

№ 3.

Могут ли две прямые иметь две точки пересечения?

Задача решена в п. 2 учебника (стр. 4).

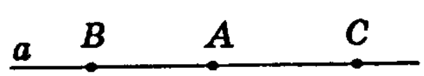
№ 4.

Для проверки правильности линейки применяют такой способ. Через две точки с помощью линейки проводят линию. Затем линейку переворачивают и через те же точки снова проводят линию. Если линии не совпадают, то линейка неправильная. На каком свойстве прямых основан этот способ проверки правильности линейки?

Этот способ проверки правильности линейки основан на том, что через две точки можно провести единственную прямую.

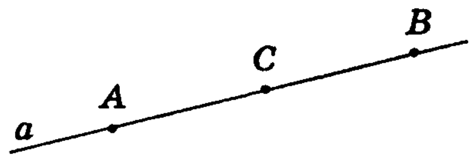
№ 5.

Проведите прямую *a*. Отметьте на прямой две какие-нибудь точки A и B. Отметьте теперь точку C так, чтобы точка A лежала между точками B и C.



№ 6.

Проведите прямую *a*. Отметьте на прямой две какие-нибудь точки A и B. Отметьте теперь какую-нибудь точку C отрезка AB.



№ 7.

Точка M лежит на прямой CD между точками C и D. Найдите длину отрезка CD, если

1) CM = 2,5 см, MD = 3,5 см;
2) CM = 3,1 дм, MD = 4,6 дм;
3) CM = = 12,3 м, MD = 5,8 м.

По условию точка M лежит между двумя точками C и D, по свойству измерения отрезков получаем $CD = CM + MD$.

1) CD = 2,5 см + 3,5 см = 6 см;
2) CD = 3,1 дм + 4,6 дм = 7,7 дм;
3) CD = 12,3 м + 5,8 м = 18,1 м.

Ответ: 1) 6 см;
2) 7,7 дм;
3) 18,1 м.

№ 9.

Три точки A, B, C лежат на одной прямой. Известно, что AB = 4,3 см AC = 7,5 см, BC = 3,2 см. Может ли точка A лежать между точками B и C? Может ли точка C лежать между точками A и B? Какая из трех точек A, B, C лежит между двумя другими?

Задача решена в п. 4 учебника (стр. 6).

№ 10.

Точки A, B, C лежат на одной прямой. Принадлежит ли точка B отрезку AC, если AC = 5 см, BC = 7 см? Объясните ответ.

Если точка *B* принадлежит отрезку *AC*, значит, лежит между точками *A* и *C*, по свойству измерения отрезков получаем $AB + BC = AC$, следовательно, AB + 7 см = 5 см, но это невозможно. Значит предположение неверно, и точка *B* не принадлежит отрезку *AC*.

Ответ: Точка *B* не принадлежит отрезку *AC*.

№ 11.

Точки A, B, C лежат на одной прямой. Может ли точка B разделять точки A и C, если AC = 7 м, BC = 7,6 м? Объясните ответ.

Предположим, точка *B* разделяет точки *A* и *C*, а, значит, лежит между ними, тогда по свойству измерения отрезков получаем: $AB + BC = AC$, следовательно, AB + 7,6 м = 7 м, что невозможно. Значит, точка *B* не разделяет точки *A* и *C*.

Ответ: Точка *B* не может разделять точки *A* и *C*.

№ 12.

Могут ли точки A, B, C лежать на одной прямой, если AB = 1,8 м, AC = 1,3 м, BC = 3 м? Объясните ответ.

Пусть точки *A*, *B*, *C* лежат на одной прямой, тогда одна из них находится между двумя другими точками, и по свойству измерения отрезков получаем:

1) $BC = AB + AC$, что неверно, т.к. 3 м ≠ 1,8 м + 1,3 м;
2) $AB = AC + CB$, что неверно, т.к. 1,8 м ≠ 1,3 м + 3 м.
3) $AC = AB + BC$, что неверно, т.к. 1,3 м ≠ 1,8 м + 3 м;

Значит:

1) Точка *B* не лежит между точками *A* и *C*.
2) Точка *A* не лежит между точками *B* и *C*.
3) Точка *C* не лежит между точками *A* и *B*.

Ответ: Точки *A*, *B*, *C* не могут лежать на одной прямой.

№ 13.

Могут ли три точки A, B, C лежать на одной прямой, если длина большего отрезка AB меньше суммы длин отрезков AC и BC? Объясните ответ.

Три точки *A*, *B*, *C* лежат на одной прямой, если $AB = AC + CB$ (по свойству измерения отрезков), а по условию $AB < AC + CB$, значит, точки *A*, *B*, *C* не могут лежать на одной прямой.

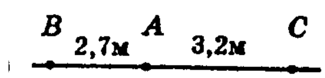
Ответ: Точки *A*, *B*, *C* не могут лежать на одной прямой.

№ 14.

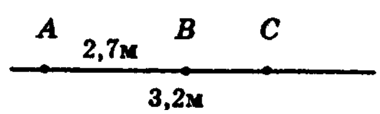
Точки A, B, C лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка BC, если AB = 2,7 м, AC = 3,2 м. Сколько решений имеет задача?

Существуют два решения.

1)



2)



1) Если точка *A* лежит между *B* и *C*, тогда
   $BC = AB + AC = 2{,}7$ м $+ 3{,}2$ м $= 5{,}9$ м.
2) Если точка *B* лежит между *A* и *C*, тогда

$BC = AC - AB = 3{,}2$ м $- 2{,}7$ м $= 0{,}5$ м.

Ответ: 5,9 м или 0,5 м.

№ 15.

На отрезке AB длиной 15 м отмечена точка C. Найдите длины отрезков AC и BC, если:

1) отрезок AC на 3 м длиннее отрезка BC;
2) отрезок AC в два раза длиннее отрезка BC;
3) точка C — середина отрезка AB;
4) длины отрезков AC и BC относятся как 2:3.

1) $AB = AC + BC$, $BC = 6$ м;
15 м $= BC + BC + 3$м, $AC = 6$ м $+ 3$ м $= 9$ м.
12 м $= 2BC$,

2) $AB = AC + BC$, $BC = 5$ м;
15 м $= 2BC + BC$, $AC = 2 \cdot 5$ м $= 10$ м.
15 м $= 3BC$

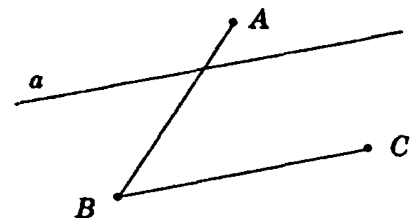
3) Поскольку $AC = CB$:
$AB = AC + CB$, имеем:
$AC = CB = AB : 2 = 15$ м $: 2 = 7{,}5$ м.

4) Пусть $AC - 2x$ м, а $BC - 3x$ м,
$AB = AC + CB$, $AC = 2 \cdot 3$ м $= 6$ м;
$15 = 2x + 3x$, $BC = 3 \cdot 3$ м $= 9$ м.
$15 = 5x$,
$x = 3$.

Ответ:
1) $AC = 9$ м, $BC = 6$ м;
2) $AC = 10$ м, $BC = 5$ м;
3) $AC = 7{,}5$ м, $BC = 7{,}5$ м;
4) $AC = 6$ м, $BC = 9$ м.

№ 16.

Проведите прямую и отметьте какую-нибудь точку А, не лежащую на этой прямой. Отметьте теперь две точки В и С так, чтобы отрезок AB пересекал прямую, а отрезок BC не пересекал ее.



№ 17.

Дана прямая и три точки A, B, C, не лежащие на этой прямой. Известно, что отрезок AB пересекает прямую, а отрезок AC не пересекает ее. Пересекает ли прямую отрезок BC? Объясните ответ.

Задача решена в п. 5 учебника (стр. 7).

№ 18.

Даны прямая и четыре точки A, B, C и D, не лежащие на этой прямой. Пересекает ли прямую отрезок AD, если:

1) отрезки AB, BC и CD пересекают прямую;

2) отрезки AC и BC пересекают прямую, а отрезок BD не пересекает;

3) отрезки AB и CD пересекают прямую, а отрезок BC не пересекает;

4) отрезки AB и CD не пересекают прямую, а отрезок BC пересекает;

5) отрезки AB, BC, CD не пересекают прямую;

6) отрезки AC, BC и BD пересекают прямую? Объясните ответ.

Плоскость разделяется прямой на две полуплоскости. Отрезок *AD* пересекают нашу прямую, если концы отрезка — *A* и *D* — лежат в разных полуплоскостях.

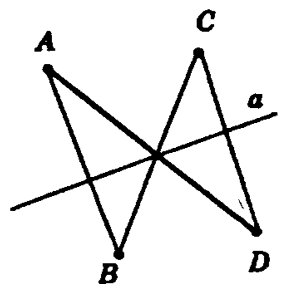
1) а) AB пересекает a, следовательно, A и B лежат в разных полуплоскостях относительно a. Аналогично: B и C лежат в разных полуплоскостях относительно a. Следовательно, A и C лежат в одной полуплоскости относительно a.

б) AD пересекает a, следовательно, A и D лежат в разных полуплоскостях относительно a.

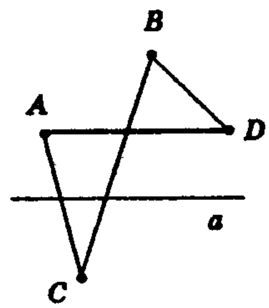
Из а) и б) следует, что C и D лежат в разных полуплоскостях относительно a, следовательно, CD пересекает a.

Аналогично 2), 3), 4), 5), 6).

1)

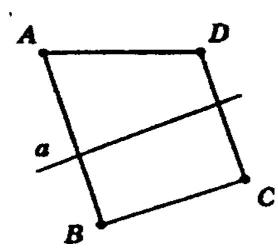


2)



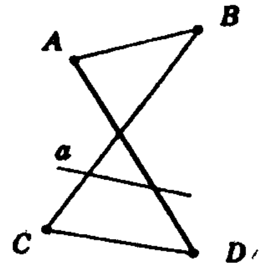
Аналогично п. 1)

3)



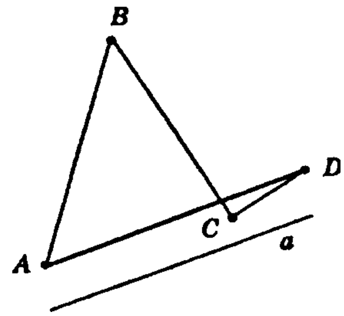
Аналогично п. 1)

4)



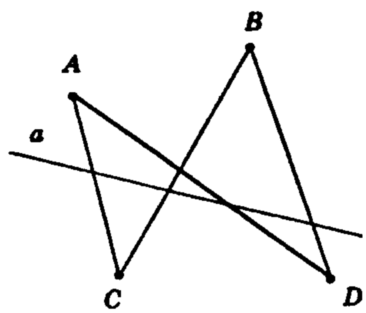
Аналогично п. 1)

5)



Аналогично п. 1)

6)



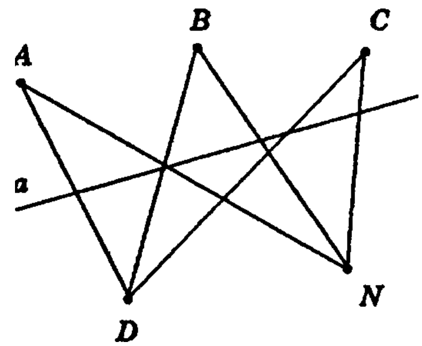
Аналогично п. 1)

Ответ: 1) пересекает;
2) не пересекает;
3) не пересекает;
4) пересекает;
5) не пересекает;
6) пересекает.

№ 19.

Даны пять точек и прямая, не проходящая ни через одну из этих точек. Известно, что три точки расположены в одной полуплоскости относительно этой прямой, а две точки — в другой. Каждая пара точек соединена отрезком. Сколько отрезков пересекает прямую? Объясните ответ.

6 отрезков: *AD*; *AN*; *BD*; *BN*; *CD*; *CN*.



Отрезок пересекает прямую тогда и только тогда, когда концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям.

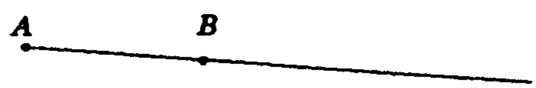
№ 20.

Даны прямая *a* и точки A, X, У, Z на этой прямой. Известно, что точки X, У лежат по одну сторону от точки A, точки X и Z тоже лежат по одну сторону от точки A. Как расположены точки У и Z относительно точки A: по одну сторону или по разные стороны? Объясните ответ.

Задача решена в п. 6 учебника (стр. 7).

№ 21.

Отметьте две точки A и B. Проведите полупрямую AB.



№ 22.

На отрезке АВ взята точка С. Среди полупрямых АВ, АС, СА, СВ назовите пары совпадающих полупрямых, дополнительных полупрямых. Объясните ответ.

Задача решена в п. 6 учебника (стр. 8).

№ 24.

Луч a проходит между сторонами угла (cd). Найдите угол (cd), если

1) $\angle$(ac) = 35°, $\angle$(ad) = 75°;
2) $\angle$(ac) = = 57°, $\angle$(ad) = 62°;
3) $\angle$(ac) = 94°, $\angle$(ad) = = 85°.

Если угол разбивается на углы любыл лучом, проходящим между его сторонами через его вершину, то градусная мера угла равна сумме градусных мер этих углов, значит, $\angle(cd) = \angle(ac) + \angle(ad)$.

1) $\angle(cd) = 35^o + 75^o = 110^o$;
2) $\angle(cd) = 57^o + 62^o = 119^o$;
3) $\angle(cd) = 94^o + 85^o = 179^o$.

Ответ: 1) 110^o;
2) 119^o;
3) 179^o.

№ 25.

Может ли луч С проходить между сторонами угла (ab), если

1) $\angle$(ac) = 30°, $\angle$(cb) = 80°, $\angle$(ab) = 50°;
2) $\angle$(ac) = = 100°, $\angle$(cb) = 90°;
3) угол (ac) больше угла (ab)?

Задача решена в п. 7 учебника (стр. 9).

№ 26.

Между сторонами угла (ab), равного 60°, проходит луч *c*. Найдите углы (oc) и (bc), если

1) угол (ac) на 30° больше угла (bc);

2) угол (ac) в два раза больше угла (bc);

3) луч *c* делит угол (ab) пополам;

4) градусные меры углов (ac) и (bc) относятся как 2:3.

Поскольку луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*), по свойству измерения углов получаем:

$\angle(ac) + \angle(bc) = \angle(ab)$.

1) $\angle(ab) = \angle(bc) + \angle(bc) + 30^o$,

$60^o = 2 \cdot \angle(bc) + 30^o$;

$2 \cdot \angle(bc) = 30^o$;

$\angle(ac) = 45^o$, $\angle(bc) = 15^o$.

2) $\angle(ab) = 2 \cdot \angle(bc) + \angle(bc)$,

$60^o = 3 \cdot \angle(bc)$,

$\angle(ac) = 40^o$, $\angle(bc) = 20^o$.

3) $\angle(ac) = \angle(bc) = \angle(ab) : 2 = 60^o : 2 = 30^o$.

4) $\angle(ac) = 2x$, $\angle(bc) = 3x$, $\angle(ab) = 60^o$,

$2x + 3x = 60^o$,

$5x = 60^o$,

$x = 12^o$.

$\angle(ac) = 24^o$, $\angle(bc) = 36^o$.

Ответ: 1) $\angle(ac) = 45^o$, $\angle(bc) = 15^o$;

2) $\angle(ac) = 40^o$, $\angle(bc) = 20^o$;

3) $\angle(ac) = 30^o$, $\angle(bc) = 60^o$;

4) $\angle(ac) = 24^o$, $\angle(bc) = 36^o$.

№ 29.

Существует ли на полупрямой AB такая точка X, отличная от B, что AX = AB? Объясните ответ.

Предположим, такая точка *x* существует, X $\neq$ B.

По свойству откладывания отрезков на любой полупрямой можно отложить единственный отрезок заданной длины от ее начальной точки. Следовательно, точки X и *B* совпадут, т.е. X =

В, что неверно по предположению, значит такой точки Х не существует.

№ 30.

На луче АВ отложен отрезок АС, меньший отрезка АВ. Какая из трех точек А, В, С лежит между двумя другими? Объясните ответ.

Задача решена в п. 8 учебника (стр. 10).

№ 31.

На луче АВ отмечена точка С. Найдите длину отрезка ВС, если:

1) АВ = 1,5 м, АС = 0,3 м;
2) АВ = 2 см, АС = 4,4 см.

1)

$BC = AB - AC$ = 1,5 м – 0,3 м = 1,2 м;

2)

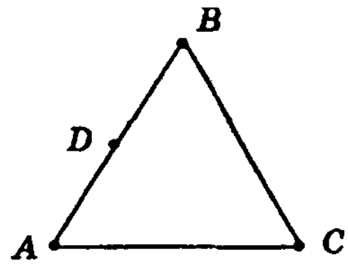
$BC = AC - AB$ = 4,4 см – 2 см = 2.4 см.

Ответ: 1) 1,2 м;
2) 2,4 см.

№ 33.

На стороне АВ треугольника АВС взята точка D. Чему равна сторона АВ треугольника, если AD = 5 см, а BD = 6 см?

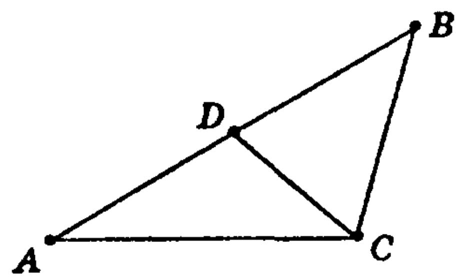
$AB = AD + BD$ = 5 см + 6 см = 11 см.



Ответ: $AB = 11$ см.

№ 34.

На стороне AB треугольника ABC взята точка D. Найдите угол C треугольника, если $\angle ACD = 30°$, а $\angle BCD = 70°$.



По свойству измерения углов получим:
$\angle BCA = \angle ACD + \angle BCD = 30^o + 70^o = 100^o$.

Ответ: $\angle BCA = 100^o$.

№ 36.

Треугольники ABC и PQR равны. Известно, что AB = 5 см, BC = 6 см, AC = 7 см. Найдите стороны треугольника PQR. Объясните ответ.

По условию треугольники ABC и PQR равны, значит, равны и их соответствующие стороны, тогда, $AC = PR$, $AB = PQ$, $BC = QR$.

Получим: $PQ = 5$ см, $PR = 7$ см, $QR = 6$ см.

Ответ: $PQ = 5$ см, $PR = 7$ см, $QR = 6$ см.

№ 37.

Треугольники ABC и PQR равны. Углы второго треугольника известны: $\angle P = 40°$, $\angle Q = 60°$, $\angle R = 80°$. Найдите углы треугольника ABC.

По условию треугольники ABC и PQR равны, значит, у них равны и соответствующие углы, получаем:

$\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$, $\angle A = \angle P$.

Следовательно, $\angle C = 80^o$, $\angle B = 60^o$, $\angle A = 40^o$.

Ответ: $\angle C = 80^o$, $\angle B = 60^o$, $\angle A = 40^o$.

№ 38.

Треугольники ABC и PQR равны. Известно, что сторона AB равна 10 м, а угол C равен 90°. Чему равны сторона PQ и угол R? Объясните ответ.

Задача решена в п. 9 учебника (стр. 12).

№ 39.

Треугольники ABC, PQR и XYZ равны. Известно, что AB=5 см, QR=6 см, ZX=7 см. Найдите остальные стороны каждого треугольника.

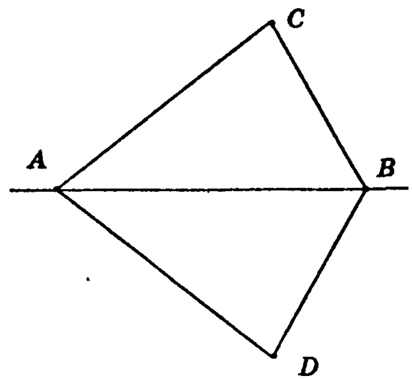
По условию треугольники ABC, PQR и XYZ равны, значит, у них:

$AB = PQ = XY$, значит, $PQ = XY = 5$ см;
$CA = RP = ZX$, значит, $CA = RP = 7$ см;
$BC = QR = YZ$, значит, $BC = YZ = 6$ см;

Ответ: $PQ = 5$ см, $XY = 5$ см, $CA = 7$ см, $RP = 7$ см, $BC = 6$ см, $YZ = 6$ см.

№ 40.

Дан треугольник ABC. Существует ли другой, равный ему треугольник ABD?



Из основного свойства простейших фигур, существует равный ему треугольник относительно данной полупрямой. Чтобы его найти, достаточно построить точку D, симмитричную точке C относительно прямой и соединить ее с точками A и B.

Ответ: существует.

№ 41.

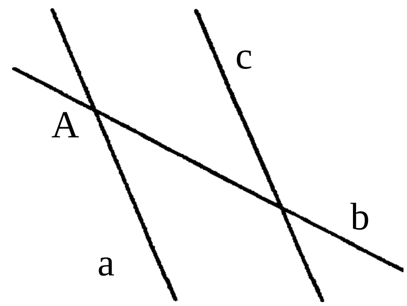
Может ли прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, не пересекать другую? Объясните ответ.

Задача решена в п. 11 учебника (стр. 13).

№ 42.

Даны две пересекающиеся прямые. Можно ли провести третью прямую, параллельную каждой из двух данных?

Пусть A — точка пересечения прямых a и b. Предположим, что мы провели прямую c, параллельную прямым a и b. Это значит, что через точку A проходят две прямые a и b, параллельные *c*, что противоречит аксиоме: через точку, не лежащую на прямой можно провести единственную прямую, паралельную данной.

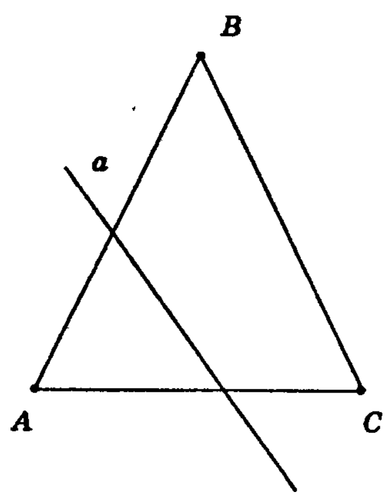


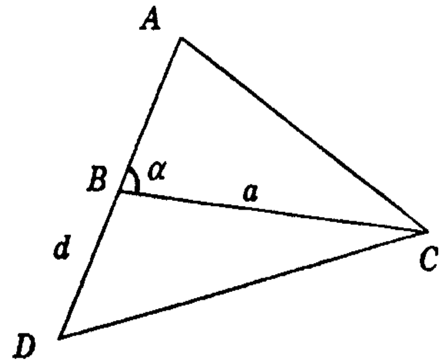
Ответ: нельзя.

№ 43.

Может ли прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекать каждую его сторону? Почему?

Не может.





По теореме: если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других сторон. Следовательно, не может.

№ 44*.

Даны четыре различные точки A, B, C и D. Известно, что точки A, B, C лежат на одной прямой и точки B, C, D также лежат на одной прямой. Докажите, что все четыре точки A, B, C, D лежат на одной прямой.

Прямые проходят через точки B и C. По аксиоме через любые две различные точки можно провести единственную прямую и получаем, что это одна и та же прямая. Так как она проходит через точки A, B, C и B, C, D, то все четыре точки A, B, C и D лежат на этой прямой. Что и требовалось доказать.

№ 45*.

Даны четыре прямые a, b, c и d. Известно, что прямые a, b, c пересекаются в одной точке и прямые b, c, d также пересекаются в одной точке. Докажите, что все четыре данные прямые проходят через одну точку.

Прямые a, b, c пересекаются в одной точке, следовательно, прямая a проходит через точку пересечения прямых b и c. Прямые b, c, d пересекаются в одной точке, следовательно, прямая d проходит через точку пересечения прямых b и c.

Две различные прямые не могут иметь двух точек пересечения, значит, прямые a и d проходят через одну точку пересечения прямых b и c, и, следовательно, все четыре прямые проходят через одну точку. Что и требовалось доказать.

№ 46*.

Точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Известно, что прямая AB пересекает отрезок CD, а прямая CD пересекает отрезок AB. Докажите, что отрезки AB и CD пересекаются.

Прямая AB пересекает отрезок CD, следовательно, точка пересечения прямых AB и CD принадлежит отрезку CD.

Прямая CD пересекает отрезок AB, следовательно, точка пересечения прямых AB и CD принадлежит отрезку AB.

Точка пересечения прямых AB и CD принадлежит отрезку AB и отрезку CD, получаем, что отрезки AB и CD пересекаются в этой точке. Что и требовалось доказать.

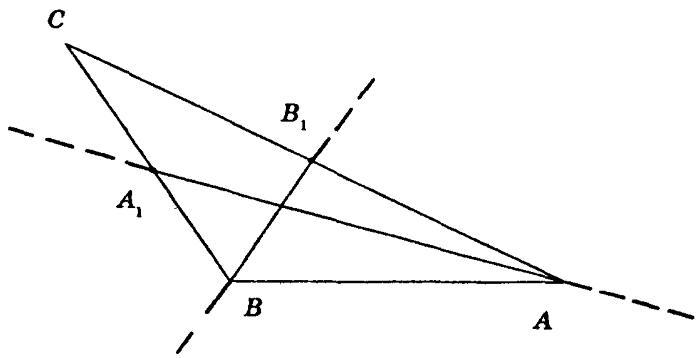
№ 47*.

Дан треугольник ABC. На стороне AC взята точка B_1 а на стороне BC — точка A_1. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются.

Прямая BB_1 пересекает сторону AC в точке B_1, следовательно, точки A и C располагаются в разных полуплоскостях относительно прямой BB_1. Две прямые не могут иметь двух точек пересечения, следовательно, отрезок A_1C не пересекает прямую BB_1, и точки A_1 и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой BB_1.

Так как точки A_1 и C расположены в одной полуплоскости, а точки A и C — в разных полуплоскостях относительно прямой BB_1, то точки A и A_1 расположены в разных полуплоскостях, и следовательно отрезок AA_1 пересекает прямую BB_1.

Рассмотрим положение точек относительно прямой AA_1. Точки B и C лежат в разных полуплоскостях, а точки B_1 и C — в одной полуплоскости относительно прямой AA_1. Значит, точки B и B_1 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AA_1 и следовательно отрезок BB_1 пересекает прямую AA_1.



Точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 лежит и на отрезке AA_1, и на отрезке BB_1, следовательно, эти отрезки пересекаются. Что и требовалось доказать.

№ 48*.

Отрезки AB и CD, не лежащие на одной прямой, пересекаются в точке E. Докажите, что отрезок AC не пересекает прямую BD.

Две прямые не могут иметь двух точек пересечения, значит, отрезок EC не пересекает прямую DB, и точки E и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой DB.

Отрезок AE не пересекает прямую DB и точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно прямой DB.

Точки A и E и точки C и E лежат в одной полуплоскости относительно прямой DB, значит, точки A и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой DB, и отрезок AC не пересекает прямую DB. Что и требовалось доказать.

№ 49*.

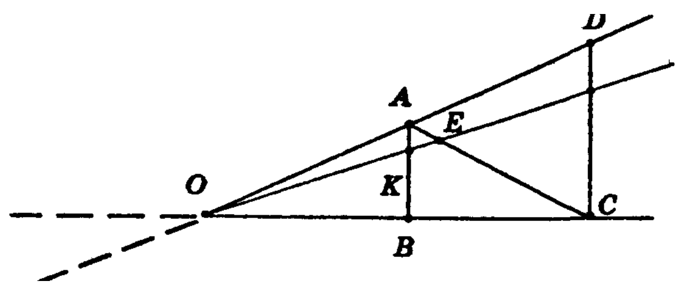
Докажите, что если луч, исходящий из вершины угла, пересекает отрезок AB с концами на сторонах угла, то он пересекает

1) отрезок AC с концами на сторонах угла;

2) любой отрезок CD с концами на сторонах угла.

1) Пусть K — точка пересечения луча с отрезком AB. Прямая OK пересекает отрезок AB, следовательно, точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой OK. Точки B и C лежат в одной полуплоскости, так как отрезок BC не пересекается с прямой OK, а точки A и C лежат в разных полуплоскостях, получаем, что прямая OK пересекает отрезок AC в некоторой точке, обозначим ее буквой E.

Прямая BC разбивает плоскость на две полуплоскости, в одной из которых лежит данный луч OK и точка A (поскольку отрезок AK не пересекает прямую OB) и точка E (поскольку отрезок AE не пересекает прямую OB). Значит, точка E должна лежать на луче OK.



2) Пусть CD — произвольный отрезок с концами на сторонах угла, и точка C лежит на стороне OB, а точка D на стороне OA. Отрезок AB пересекает луч OK, значит, луч OK пересекает и отрезок AC, а если луч пересекает AC, то луч будет пересекать и отрезок CD.

Что и требовалось доказать.

№ 50.

Докажите, что две прямые либо параллельны, либо пересекаются в одной точке.

Пусть даны две не параллельные прямые a и b, следовательно, они имеют общие точки. Если они имеют одну общую точку, то, это значит, что они пересекаются, если бы они имели две общие точки, то через эти точки проходили бы две различные прямые, что противоречит основному свойству принадлежности точек и прямых: через две различные точки можно провести прямую и притом только одну.

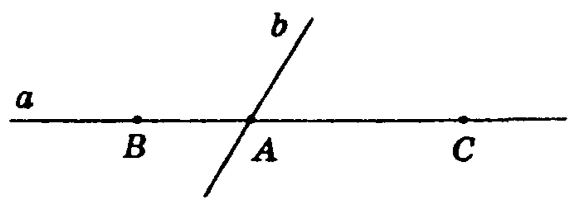
Что и требовалось доказать.

№ 51*.

Точки А и С принадлежат прямой а. На полупрямой СА отложен отрезок СВ, больший отрезка СА.

1) Какая из трех точек А, В, С лежит между двумя другими? Объясните ответ.

2) Докажите, что точка А разбивает прямую a на две полупрямые АВ и АС.



Точки A и B лежат на одной полупрямой с началом в точке C, следовательно, точка C не лежит между точками A и B.

Пусть B лежит между A и C, тогда $AC = AB + CB$ и $AC > CB$, что противоречит условию: $CB > AC$, следовательно, B не лежит между точками A и C.

Из трех точек одна и только одна лежит между двумя другими. На основании предыдущих рассуждений приходим к выводу, что точка A лежит между точками B и C.

Через точку A проведем прямую b, отличную от прямой a. Точка A лежит между точками B и C, следовательно, отрезок BC пересекает прямую b, получаем, что точки B и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой b, и по разные стороны от точки A. Все точки прямой a, лежащие в одной полуплоскости с точкой C, расположены по одну сторону от точки A и образуют одну полупрямую AC, а все точки прямой a, расположенные в одной полуплоскости с точкой B, тоже будут лежать по одну сторону от точки A и образуют полупрямую AB.

Что и требовалось доказать.

§ 2. СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

№ 1.

Найдите углы, смежные с углами 30°; 45°; 60°; 90°.

По теореме о сумме смежных углов: сумма смежных углов равна 180^o, имеем:

1) $180^o - 30^o = 150^o$;
2) $180^o - 45^o = 135^o$;
3) $180^o - 60^o = 120^o$;
4) $180^o - 90^o = 90^o$.

Ответ: 150^o; 135^o; 120^o; 90^o.

№ 2.

Могут ли два смежных угла быть оба

1) острыми,
2) тупыми;
3) прямыми? Обоснуйте ответ.

По теореме о сумме смежных углов: сумма смежных углов равна 180^o, имеем:

1) Угол, меньший 90^o, называется острым. Сумма двух острых углов меньше 180^o, значит, оба смежных угла не могут быть острыми.

2) Угол, больший 90^o и меньший 180^o, называется тупым. Сумма двух тупых углов больше 180^o, значит, оба смежных угла не могут быть тупыми.

3) Угол, равный 90^o, называется прямым. Сумма двух прямых углов равна 180^o, значит, оба смежных угла могут быть

прямыми (заметим, что если один из смежных углов прямой, то другой обязательно будет прямым).

Ответ: 1) не могут;
2) не могут;
3) могут.

№ 3.

Найдите смежные углы, если один из них в два раза больше другого.

Задача решена в п. 14 учебника (стр. 21).

№ 4.

Найдите смежные углы, если
1) один из них на 30° больше другого;
2) их разность равна 40°;
3) один из них в 3 раза меньше другого;
4) они равны.

По теореме о сумме смежных углов: сумма смежных углов равна 180°.

1) Пусть градусная мера одного угла x, тогда другого — $x + 30$. Составим уравнение:

$$x + x + 30 = 180,$$
$$2x = 150,$$
$$x = 75$$
$$x + 30 = 75 + 30 = 105.$$

Получаем, что смежные углы равны 75° и 105°.

2) Пусть градусная мера одного угла x, тогда второго — $x + 40$. Составим уравнение:

$$x + x + 40 = 180,$$
$$2x = 140,$$
$$x = 70;$$
$$x + 40 = 70 + 40 = 110.$$

Получаем, что смежные углы равны 70° и 110°.

3) Пусть градусная мера одного угла x, тогда второго — $3x$. Составим уравнение:

$$x + 3x = 180,$$
$$4x = 180,$$
$$x = 45;$$
$$3x = 3 \cdot 45 = 135.$$

Получаем, что смежные углы равны 45° и 135°.

4) Получаем, что градусная мера каждого из углов равна $180 : 2 = 90$, следовательно, смежные углы равны по 90°.

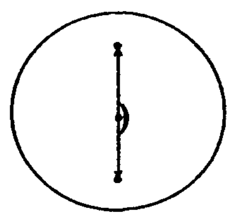
Ответ: 1) 75° и 105°;
2) 70° и 110°;
3) 45° и 135°;
4) 90° и 90°.

№ 5.

Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов, когда они показывают

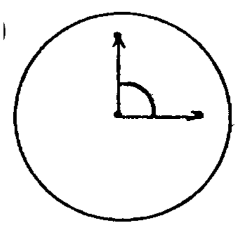
1) 6 ч;
2) 3 ч;
3) 4 ч?

1)



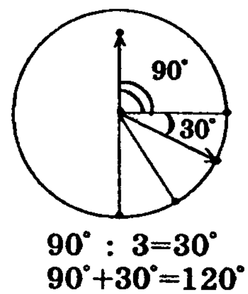
180°

2)



90°

3)



Ответ: 1) 180°;
2) 90°;
3) 120°.

№ 6.

Найдите смежные углы, если их градусные меры относятся как 1) 2:3;
2) 3:7;
3) 11:25;
4) 22:23.

По теореме о сумме смежных углов: сумма смежных углов равна 180°.

1) Пусть градусная мера одного угла $2x$, тогда второго — $3x$. Составим уравнение:

$2x + 3x = 180,$
$5x = 180,$
$x = 36;$
$2x = 2 \cdot 36 = 72;$
$3x = 3 \cdot 36 = 108.$

Получаем, что смежные углы равны 72° и 108°.

2) Пусть градусная мера одного угла $3x$, тогда второго — $7x$. Составим уравнение:

$3x + 7x = 180,$
$10x = 180,$
$x = 18;$

$$3x = 3 \cdot 18 = 54;\ 7x = 7 \cdot 18 = 126.$$

Получаем, что смежные углы равны 54° и 126°.

3) Пусть градусная мера одного угла $11x$, тогда второго — $25x$. Составим уравнение:

$$11x + 25x = 180,$$
$$36x = 180,$$
$$x = 5;$$
$$11x = 11 \cdot 5 = 55;$$
$$25x = 25 \cdot 5 = 125.$$

Получаем, что смежные углы равны 55° и 125°.

4) Пусть градусная мера одного угла $22x$, тогда второго — $23x$. Составим уравнение:

$$22x + 23x = 180,$$
$$45x = 180,$$
$$x = 4;$$
$$22x = 22 \cdot 4 = 88;$$
$$23x = 23 \cdot 4 = 92.$$

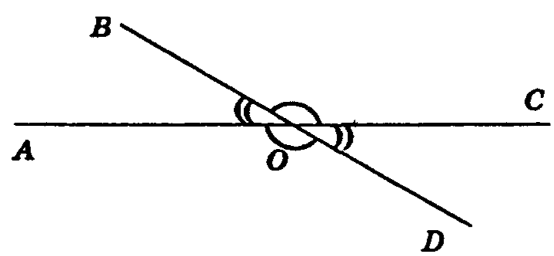
Получаем, что смежные углы равны 88° и 92°.

Ответ:
1) 72° и 108°;
2) 54° и 126°;
3) 55° и 125°;
4) 88° и 92°.

№ 7.

Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 30°. Чему равны остальные углы?

Пусть $\angle AOB = 30^\circ$ (см. рис.)



$\angle AOB = \angle COD$, как вертикальные углы, значит, $\angle COD = 30^o$.

$\angle AOB$ и $\angle BOC$ — смежные углы. Сумма смежных углов равна 180^o. Значит, $\angle BOC = 180^o - \angle AOB = 180^o - 30^o = 150^o$.

$\angle BOC$ и $\angle AOD$ — вертикальные углы, а следовательно они равны. Значит, $\angle AOD = 150^o$.

Ответ: 30^o, 150^o, 150^o.

№ 8.

Чему равен угол, если два смежных с ним угла составляют в сумме 100°?

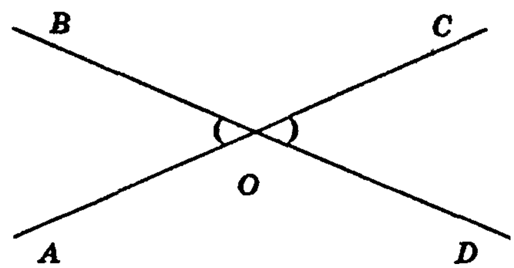
Из рисунка:

$\angle BOC$ и $\angle COD$ — смежные углы;

$\angle BOC$ и $\angle AOB$ — смежные углы.

$\angle COD$ и $\angle AOB$ — вертикальные углы, которые равны между собой и по условию в сумме составляют 100^o. Значит, каждый из этих углов равен $100^o : 2 = 50^o$.

$\angle AOB + \angle BOC = 180^o$ (по теореме о сумме смежных углов).



Следовательно, $\angle BOC = 180^o - 50^o = 130^o$.

Ответ: 130^o.

№ 9.

Сумма двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна 50°. Найдите эти углы.

Задача решена в п. 15 учебника (стр. 23).

№ 10.

Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.

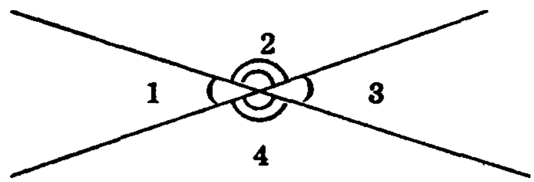
Из рисунка:

$\angle 1$ и $\angle 3$ — вертикальные, следовательно, они равны.

$\angle 2$ и $\angle 4$ — вертикальные, следовательно, они равны.

$\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные углы, $\angle 1 + \angle 2 = 180^{\circ}$.

$\angle 4$ и $\angle 3$ — смежные углы, $\angle 3 + \angle 4 = 180^{\circ}$. Получаем, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^{\circ}$.



Пусть градусная мера первого угла x, тогда второго — $4x$. Составим уравнение:

$$x + 4x + x + 4x = 360,$$
$$10x = 360,$$
$$x = 36;$$
$$4x = 36 \cdot 4 = 144.$$

Имеем: $\angle 1 = 36^{\circ}$; $\angle 2 = 144^{\circ}$; $\angle 3 = 36^{\circ}$; $\angle 4 = 144^{\circ}$.

Ответ: 36°; 144°.

№ 11.

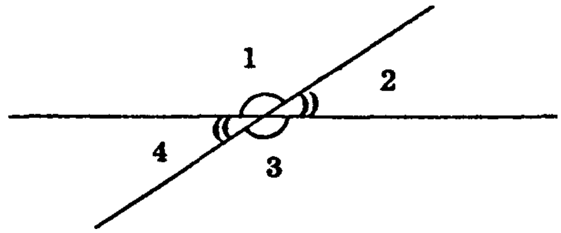
Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, на 50° меньше другого. Найдите эти углы.

$\angle 1$ и $\angle 3$ — вертикальные углы, следовательно, они равны.

$\angle 2$ и $\angle 4$ — вертикальные углы, следовательно, они равны.

$\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные углы, $\angle 1 + \angle 2 = 180^{\circ}$.

$\angle 3$ и $\angle 4$ — смежные углы, $\angle 3 + \angle 4 = 180^{\circ}$.



Получаем, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.

Пусть градусная мера второго угла x, тогда первого — $x + 50$. Составим уравнение:

$x + x + 50x + x + x + 50 = 360$, $4x + 100 = 360$, $4x = 260$, $x = 65$.

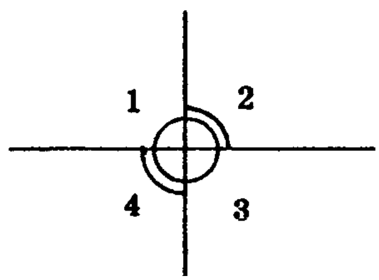
Итак, $\angle 2 = 65^\circ$, $\angle 4 = 65^\circ$, $\angle 1 = 115^\circ$, $\angle 2 = 115^\circ$.

Ответ: 65°, 115°.

№ 12.

Найдите углы, которые получаются при пересечении двух прямых, если сумма трех из этих углов равна 270°.

При пересечении двух прямых получается две пары смежных углов, сумма каждой 180°, значит, сумма всех четырех углов 360°. Если сумма трех из этих углов 270°, то четвертый угол равен $360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$. Из рисунка: $\angle 1 = 90^\circ$.



$\angle 1$ и $\angle 3$ — вертикальные, значит, $\angle 1 = \angle 3 = 90^\circ$.

$\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные, следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle 2 = 90^\circ$.

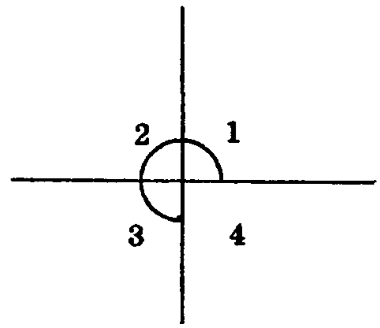
$\angle 2$ и $\angle 4$ — вертикальные, следовательно, $\angle 2 = \angle 4 = 90^\circ$.

При пересечении двух прямых получились углы 90^o, 90^o, 90^o, 90^o.

Ответ: все углы прямые.

№ 13.

Докажите, что если три из четырех углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равны, то прямые перпендикулярны.



Пусть градусная мера каждого из трех равных углов равна x. Сумма четырех углов при пересечении двух прямых равна 360^o. Из рисунка: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^o$, $x + x + x + \angle 4 = 360^o$, но $\angle 4$ и $\angle 2$ — вертикальные, значит, $\angle 2 = \angle 4$, поэтому его градусная мера также равна x. $4x = 360$, $x = 90$. При пересечении двух прямых получились прямые углы, значит, они пересекаются под прямым углом, следовательно, они перпендикулярны. Что и требовалось доказать.

№ 14.

Как с помощью линейки проверить, является ли прямым угол в чертежном угольнике?

См. рис. 42 на стр. 27 учебника.

№ 15.

Чему равен угол между биссектрисой и стороной данного угла, равного

1) 30°;

2) 52°;
3) 172°?

По определению биссектриса делит угол пополам, значит, угол между биссектрисой и стороной угла равен половине данного угла:

1) $30^{o} : 2 = 15^{o}$;
2) $52^{o} : 2 = 26^{o}$;
3) $172^{o} : 2 = 86^{o}$.

Ответ: 1) 15^{o};
2) 26^{o};
3) 86^{o}.

№ 16.

Найдите угол, если его биссектриса образует со стороной угол, равный

1) 60°;
2) 75°;
3) 89°.

По определению биссектриса делит угол пополам, следовательно, искомый угол равен удвоенному углу между биссектрисой и стороной искомого угла.

1) $60^{o} \cdot 2 = 120^{o}$;
2) $75^{o} \cdot 2 = 150^{o}$;
3) $89^{o} \cdot 2 = 178^{o}$.

Ответ: 1) 120^{o};
2) 150^{o};
3) 178^{o}.

№ 17.

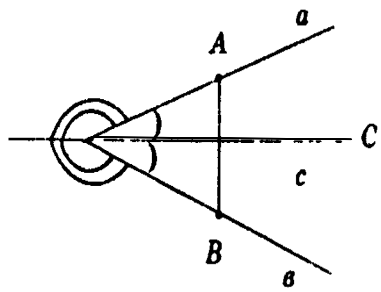
Докажите, что биссектриса угла образует с его сторонами углы не больше 90°.

Задача доказана в п. 18 учебника (стр. 25).

№ 18*.

Докажите, что если луч исходит из вершины угла и образует с его сторонами равные острые углы, то он является биссектрисой угла.

Пусть луч C образует равные острые углы со сторонами a и b.



Проведем отрезок AB, как показано на рисунке. Он пересекает прямую c либо на луче C, либо на его дополнении, но его дополнение он пересекать не может, т.к. в этом случае дополнение луча C являлось бы биссектрисой, но по определению биссектриса не может образовывать со сторонами угла тупы углы.

Таким образом, луч C проходит между сторронами угла.

По определению биссектрисы луч C является биссектрисой, что и требовалось доказать.

№ 19.

Найдите угол между биссектрисами смежных углов.

$\angle AOB$ и $\angle BOC$ — смежные, и их сумма равна 180° (по свойству смежных углов).

Пусть OK — биссектриса $\angle AOB$; OD — биссектриса $\angle BOC$.

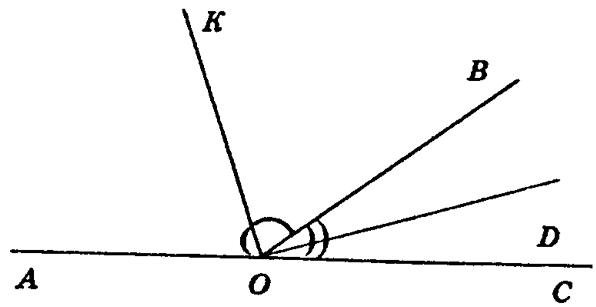
Выведем обозначения:

$\angle BOD = x$, а $\angle AOK = y$.

Тогда $2x + 2y = 180^{\circ}$,

$x + y = 90^{\circ}$.

$\angle KOD = x + y = 90^{\circ}$.



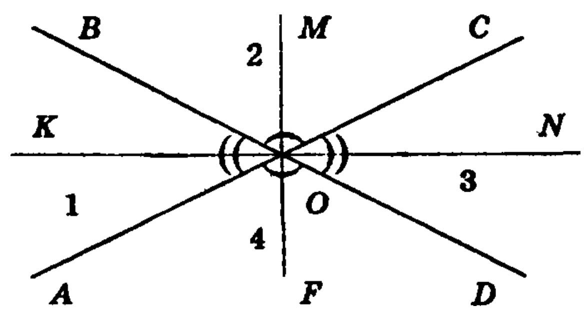
Ответ: 90°.

№ 20.

Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

$\angle 1$ и $\angle 3$; $\angle 2$ и $\angle 4$ — вертикальные.

Проведем биссектрисы $\angle 1$; $\angle 2$; $\angle 3$ и $\angle 4$.



$\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные. Угол между биссектрисами смежных углов равен 90° (см. предыдущую задачу), т.е. $\angle KOM = \angle MON = \angle NOF = \angle FOK = 90°$. Углы $\angle KOM$, $\angle MON$, $\angle NOF$ и $\angle FOK$ имеют общие стороны и общую вершину.

Таким образом, $KN \perp MF$.

№ 21.

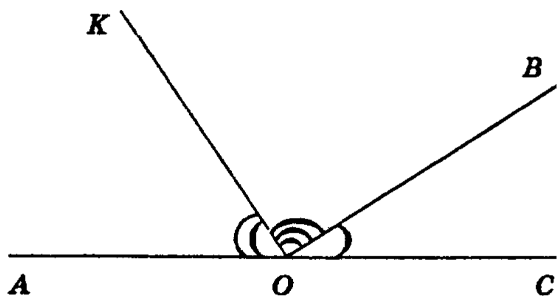
Найдите угол между биссектрисой и продолжением одной из сторон данного угла, равного

1) 50^o;

2) 90^o;

3) 150^o.

Пусть угол *KOC* — данный, *OB* — его биссектриса.



$\angle AOK + \angle KOC = 180^o$ (т.к. они смежные).

Т.к. биссектриса по определению делит данный угол пополам, то $\angle AOB = 180^o — \angle KOC : 2$.

1) $180^o - 50^o : 2 = 155^o$;

2) $180^o - 90^o : 2 = 135^o$;

3) $180^o - 150^o : 2 = 105^o$.

Ответ: 1) 155^o;

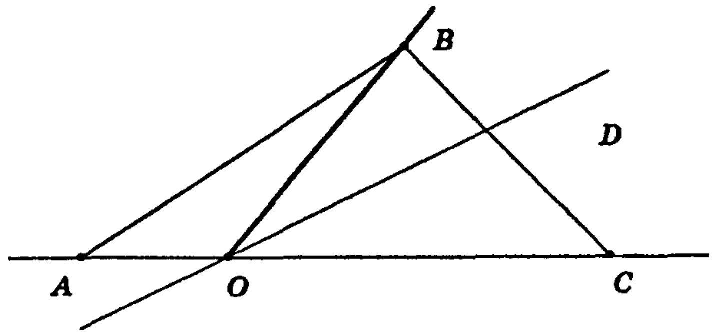
2) 135^o;

3) 105^o.

№ 22*.

Из вершины *O* смежных углов *AOB* и *COB* проведен луч *OD* в полуплоскость, где проходит общая сторона углов *OB*. Докажите, что луч *OD* пересекает либо отрезок *AB*, либо отрезок *BC*. Какой из отрезков пересекает луч *OD*, если угол *AOD* меньше (больше) угла *AOB*? Объясните ответ.

Так как прямая *OD* пересекает сторону *AC* треугольника *ABC* в точке *O*, то она пересекает либо сторону *AB*, либо сторону *BC* (по теореме 1.1).



Т.к. дополнительный луч к лучу *OD* лежит в разных полуплоскостях с отрезками *AB* и *BC*, точка пересечения прямой *OD* с одним из этих отрезков лежит на луче *OD*.

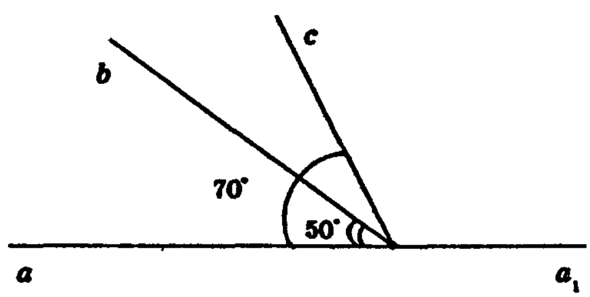
Если $\angle AOD$ больше $\angle AOB$, то луч *OD* будет проходить между сторонами $\angle$BOC и будет пересекать отрезов *BC*; а в случае, когда угол *AOD* меньше угла *AOB*, луч *OD* будет пересекать отрезок *AB*.

№ 23.

Из вершины развернутого угла (aa_1) в одну полуплоскость проведены лучи *b* и *c*. Чему равен угол (*bc*), если

1) $\angle(ab) = 50^o$; $\angle(ac) = 70^o$;
2) $\angle(a_1b) = 50^o$; $\angle(ac) = 70^o$;
3) $\angle(ab) = 60^o$; $\angle(a_1c) = 30^o$?

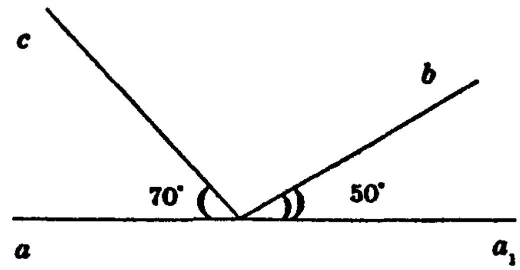
1)



По свойству измерения углов

$\angle(bc) = \angle(ac) - \angle(ab) = 70^o - 50^o = 20^o$.

2)

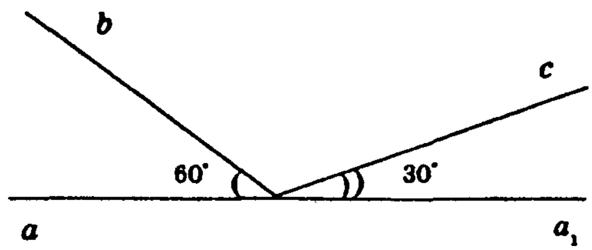


Т.к. $\angle(aa_1) = 180^o$, то по свойству измерения углов

$\angle(aa_1) = \angle(ac) + \angle(cb) + \angle(ba_1)$

$\angle(bc) = \angle(aa_1) - \angle(ac) - \angle(ba_1) = 180^o - 70^o - 50^o = 60^o$.

3)



$\angle(aa_1) = \angle(ab) + \angle(bc) + \angle(ca_1)$

$\angle(bc) = 180^o - 60^o - 30^o = 90^o$.

Ответ: 1) 20^o;
2) 60^o;
3) 90^o.

№ 24.

Из вершины развернутого угла (aa_1) проведены лучи b и с в одну полуплоскость. Известно, что $\angle(ab) = 60^o$, $\angle(ac) = 30^o$. Найдите углы (a_1b), (a_1c) и (bc).

$\angle(aa_1) = 180^o$.

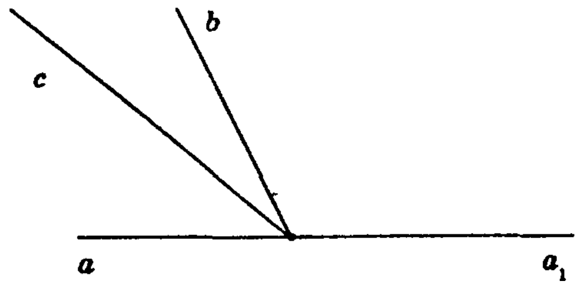
$\angle(ab) + \angle(a_1b) = 180^o$ (т.к. они смежные).

$\angle(a_1b) = 180^o - 60^o = 120^o$.

$\angle(ac) + \angle(a_1c) = 180^o$ (т.к. они смежные).

$\angle(a_1c) = 180^o - 30^o = 150^o$, $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(cb)$.

$\angle(cb) = \angle(ab) - \angle(ac) = 60^o - 30^o = 30^o$.



Ответ: 120^o; 150^o; 30^o.

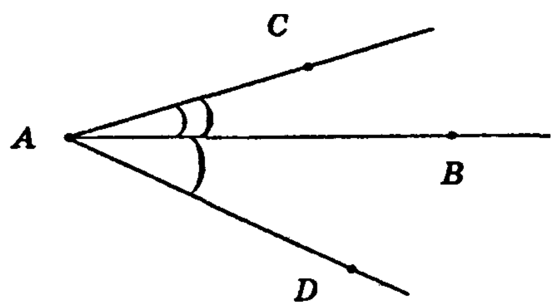
№ 25.

От полупрямой *AB* в разные полуплоскости отложены углы *BAC* и *BAD*. Найдите угол *CAD*, если

1) $\angle BAC = 80^o$, $\angle BAD = 170^o$;
2) $\angle BAC = 87^o$, $\angle BAD = 98^o$;
3) $\angle BAC = 140^o$, $\angle BAD = 30^o$;
4) $\angle BAC = 60^o$, $\angle BAD = 70^o$.

$\angle CAD = \angle BAC + \angle BAD$

1) $\angle CAD = 80^o + 170^o = 250^o$, т.к. $250^o > 180^o$, то $\angle CAD = 360^o - 250^o = 110^o$;
2) $\angle CAD = 87^o + 98^o = 185^o$, т.к. $185^o > 180^o$, то $\angle CAD = 360^o - 185^o = 175^o$;



3) $\angle CAD = 140^o + 30^o = 170^o$;

4) $\angle CAD = 60^o + 70^o = 130^o$.

Ответ: 1) 250^o;
2) 175^o;
3) 170^o;
4) 130^o.

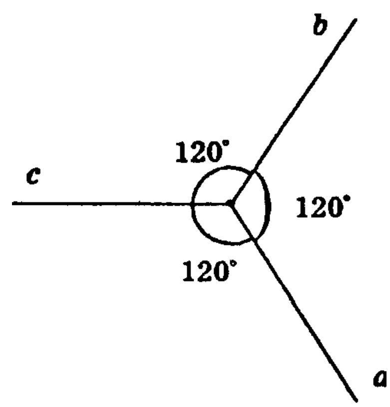
№ 26*.

Даны три луча a, b, c с общей начальной точкой. Известно, что $\angle(ab) = \angle(ac) = \angle(bc) = 120^o$.

1) Проходит ли какой-нибудь из этих лучей между сторонами угла, образованного двумя другими лучами?

2) Может ли прямая пересекать все три данных луча? Объясните ответ.

1) Пусть один из этих лучей проходит между сторонами угла, образованного двумя другими лучами. Тогда он образует со сторонами этого угла углы, равные120^o, значит, этот луч является биссектрисой угла в 240^o, а он, по условию, равен 120^o. Противоречие. Таким образом, ни один из этих лучей не может проходить между сторонами угла, образованного двумя другими лучами.



2) Пусть прямая d не проходит через общую точку лучей a, b, c и пересекает их в точках A, B, C. Одна из этих точек лежит между двумя другими точками. Предположим, это точка C. тогда луч C пересекает отрезок AB, а т.к. отрезок AB находится внутри угла $\angle(ab)$, то это означает, что луч C проходит между сторонами $\angle(ab)$, но этопротиворечит доказанному в п. 1 данной задачи. Таким образом, не существует прямой, пересекающей все три луча.

§ 3. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

№ 1.

Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если отрезок $AC = 10$ м?

Задача решена в п. 20 учебнике (стр. 29).

№ 2.

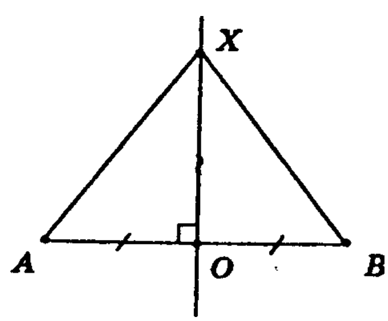
Через середину O отрезка AB проведена прямая, перпендикулярная прямой AB. Докажите, что каждая точка X этой прямой одинаково удалена от точек A и B.

Возьмем на прямой произвольную точку X и соединим ее с точками A и B.

Рассмотрим полученные треугольники: В $\Delta AOX = \Delta BOX$ $AO = OB$, т.к. O — середина отрезка AB;

$\angle AOX = \angle BOX = 90^{\circ}$, т.к. $AB \perp XO$;

OX — общая сторона.

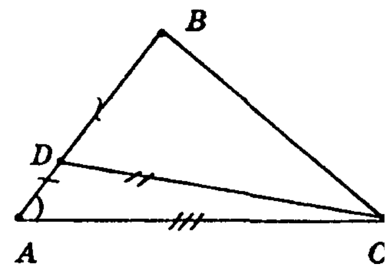


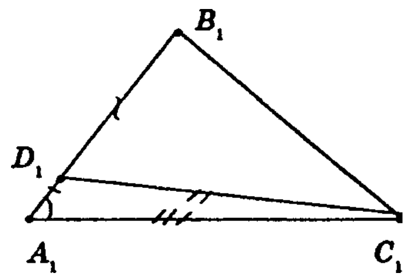
Таким образом, $\Delta AOX = \Delta BOX$ по 1-му признаку равенства треугольников. В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны. Отсюда $AX = BX$.

Что и требовалось доказать.

№ 3.

На стороне AB треугольника ABC взята точка D, а на стороне A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взята точка D_1. Известно, что треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны и отрезки DB и D_1B_1 равны. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.





Т.к. $\Delta ADC = \Delta A_1D_1C_1$, то $AC = A_1C_1$, $AD = A_1D_1$, $\angle A = \angle A_1$.

$AB = AD + DB$, $A_1B_1 = A_1D_1 + D_1B_1$, т.к. $AB = A_1B_1$, $DB = D_1B_1$, то $AD = A_1D_1$

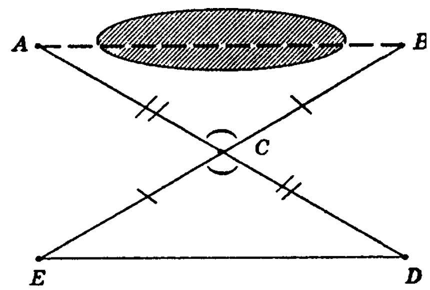
В ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$:

$\angle A = \angle A_1$ $AC = A_1C_1$, т.к. $\Delta ADC = \Delta\ A_1D_1C_1$, $AB = A_1B_1$, следовательно, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по 1-му признаку равенства треугольников.

№ 4.

Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками А и В, между которыми нельзя пройти по прямой, выбирают такую точку *C*, из которой можно пройти и к точке *A*, и к точке *B* и из которой видны обе эти точки. Измеряют расстояния *AC* и *BC*, продолжают их за точку *C* и отмеряют $CD = AC$ и $EC = CB$. Тогда отрезок *ED* равен искомому расстоянию. Объясните почему.

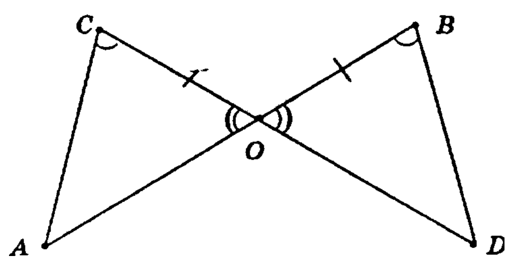
Т.к. $\angle ACB = \angle ECD$ (т.к. они вертикальные), $EC = CB$, $AC = CD$ (по построению), то $\Delta ACB = \Delta ECD$ (по 1-му признаку оравенства треугольников).



В равных треугольниках против равных углов лежат равные сторроны. Таким образом, $AB = ED$.

№ 5.

Отрезки *AB* и *CD* пересекаются в точке *O*. Докажите равенство треугольников *ACO* и *DBO*, если известно, что угол *ACO* равен углу *DBO* и $BO = CO$.

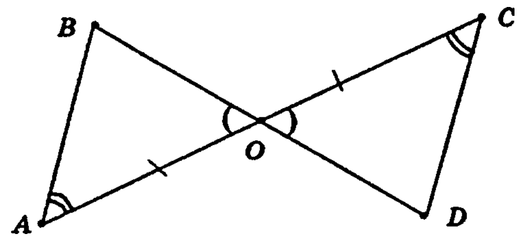


Т.к. $CO = BO$, $\angle ACO = \angle DBO$, а $\angle AOC = \angle DOB$ (как вертикальные углы), то $\Delta ACO = \Delta DBO$ по 2-му признаку равенства треугольников.

№ 6.

Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Докажите равенство треугольников BAO и DCO, если известно, что угол BAO равен углу DCO и $AO = CO$.

В ΔABO и ΔDCO:
$AO = OC$ (из условия)
$\angle BAO = \angle DCO$ (из условия)
$\angle AOB = \angle DOC$ (как вертикальные углы).

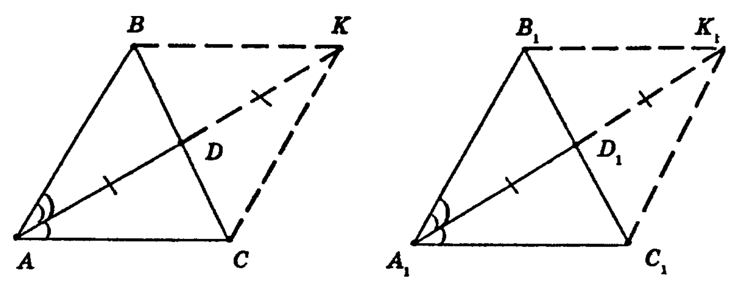


Таким образом, $\Delta ABO = \angle DCO$ по 2-му признаку равенства треугольников.

№ 7*.

Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

Сделаем дополнительные построения:



Продолжим AD до точки K, так, что $DK = AD$.

Продолжим A_1D_1 до точки K_1, так, что $D_1K_1 = A_1D_1$.

В ΔADC и ΔDBK:

$AD = DK$

$\angle ADC = \angle BDK$ (как вертикальные)

$BD = DC$ (т.к. AD — медиана)

Таким образом, $\Delta ADC = \Delta DBK$ по 1-му признаку, и $\angle DAC = \angle DKB$

$AC = BK$.

Аналогично $\Delta A_1D_1C_1 = \Delta D_1B_1K_1$ и $\angle D_1A_1C_1 = \angle D_1K_1B_1$

$A_1C_1 = B_1K_1$.

В ΔABK и $\Delta A_1B_1K_1$:

$AK = A_1K_1$ (т.к. $AK = 2AD = 2A_1D_1 = A_1K_1$)

$\angle BAK = \angle B_1A_1K_1$ (по условию)

$\angle BKA = \angle B_1K_1A_1$ (т.к. $\angle BKA = \angle KAC = \angle K_1A_1C_1 = \angle B_1K_1A_1$), ($\angle KAC = \angle K_1A_1C_1$ по условию)

Таким образом, $\Delta ABK = \Delta A_1B_1K_1$ по 2-му признаку равенства треугольников, и $AB = A_1B_1$, и $BK = B_1K_1 = A_1C_1 = AC$.

Т.к. в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$

$BA = B_1A_1$

$AC = A_1C_1$

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. $A_1B_1K_1$ по 1-му признаку равенства треугольников.

№ 8.

Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B, из которых одна (точка A) недоступна, провешивают направление отрезка AB и на его продолжении отмеряют произвольный отрезок BE. Выбирают на местности точку D, из которой видна точка A и можно пройти к точкам B и E. Провешивают прямые BDQ и EDF и отмеряют $FD = DE$ и $DQ = BD$. Затем идут по прямой FQ, глядя на точку A, пока не найдут точку H, которая лежит на прямой AD. Тогда HQ равно искомому расстоянию. Докажите это.

В ΔFDQ и ΔBDE: $FD = DE$, $BD = DQ$ (по условию)

$\angle FDQ = \angle BDE$ (как вертикальные).

Таким образом, $\Delta FDQ = \Delta BDE$ (по 1-му признаку равенства треугольников).

Отсюда $\angle DFQ = \angle DEB$.

В ΔEDA и ΔFDH:

$FD = DE$

$\angle DFQ = \angle DEB$

$\angle FDH = \angle ADE$ (как вертикальные)

Таким образом, $\Delta EDA = \Delta FDH$ по 2-му признаку равенства треугольников.

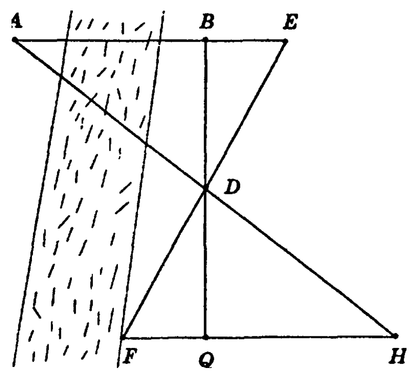
Откуда: $AD = DH$, $\angle EAD = \angle DHF$.

Рассмотрим ΔABD и ΔQHD:

$AD = DH$

$\angle EAD = \angle FHD$

$\angle ADB = \angle QDH$ (как вертикальные)



Таким образом, $\Delta ABD = \Delta QHD$ по 2-му признаку равенства треугольников.

Откуда $AB = QH$, что и требовалось доказать.

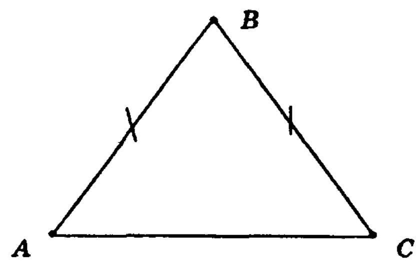
№ 9.

Периметр равнобедренного треугольника равен 1 м, а основание равно 0,4 м. Найдите длину боковой стороны.

Т.к. ΔABC — равнобедренный, то $AB = BC$ и $P = 2AB + AC$.

$1 = 2AB + 0,4$

$2AB = 0{,}6$
$AB = 0{,}3.$
$AB = BC = 0{,}3$ м.



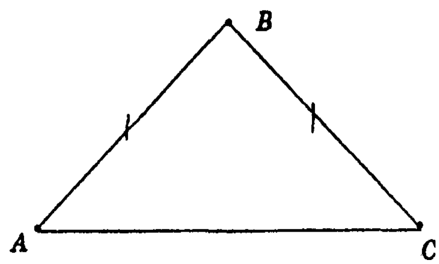
Ответ: 0,3 м.

№ 10.

Периметр равнобедренного треугольника равен 7,5 м, а боковая сторона равна 2 м. Найдите основание.

Т.к. ΔABC — равнобедренный, то $AB = BC$ и $P = AB + BC + AC = 2AB + AC$, $AC = P - 2AB$

$AC = 7{,}5$ м $- 2 \cdot 2$ м $= 3{,}5$ м.



Ответ: 3,5 м.

№ 11.

Периметр равнобедренного треугольника равен 15,6 м. Найдите его стороны, если основание:

1) меньше боковой стороны на 3 м;
2) больше боковой стороны на 3 м.

1) Пусть боковая сторона — x м, тогда основание — $(x - 3)$. Тогда:

$$P = x + x + (x - 3),$$
$$P = 3x - 3,$$
$$15{,}6 = 3x - 3,$$
$$3x = 18{,}6,$$
$$x = 6{,}2 \text{ м}.$$

2) Пусть боковая сторона — x м, тогда основание — $(x + 3)$ м. Тогда:

$$P = x + x + (x + 3),$$
$$P = 3x + 3,$$
$$15{,}6 = 3x + 3,$$
$$3x = 12{,}6$$
$$x = 4{,}2 \text{ м}.$$

Ответ: 1) 6,2 м; 6,2 м; 3,2 м;
2) 4,2 м; 4,2 м; 7,2 м.

№ 12.

Докажите, что у равностороннего треугольника все углы равны.

Задача решена в п. 23 учебника (стр. 31).

№ 13.

От вершины C равнобедренного треугольника ABC с основанием AB отложены равные отрезки: CA_1 на стороне CA и CB_1 на стороне CB. Докажите равенство треугольников

1) CAB_1 и CBA_1;
2) ABB_1 и BAA_1.

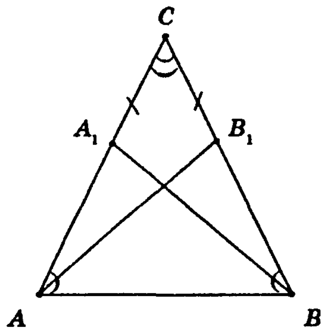
1) В ΔCAB_1 и ΔCBA_1: $AC = BC$, т.к. ΔABC — равнобедренный $A_1C = CB_1$ (по условию).

$\angle C$ — общий, таким образом, $\Delta CAB_1 = \Delta CBA_1$ по 1-му признаку равенства треугольников.

2) В ΔABB_1 и ΔBAA_1: $AA_1 = BB_1$ ($AA_1 = AC - CA_1 = AB - AB_1 = BB_1$)

AB — общая сторона.

$\angle CAB = \angle CBA$ (т.к. ABC — равнобедренный, а у равнобедренных треугольников углы при основании равны).



Таким образом, $\Delta ABB_1 = \Delta BAA_1$ по 1-му признаку равенства треугольников.

№ 14.

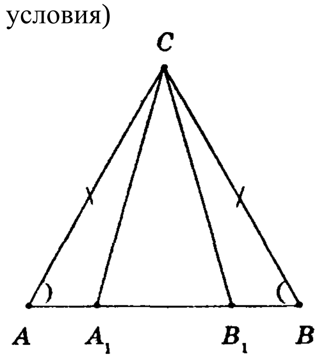
На основании AB равнобедренного треугольника ABC даны точки A_1 и B_1. Известно, что $AB_1 = BA_1$. Докажите, что треугольники AB_1C и BA_1C равны.

В ΔAB_1C и ΔBA_1C:

$AC = BC$ (т.к. ΔABC — равнобедренный)

$\angle CAB = \angle CBA$ (т.к. ΔABC — равнобедренный).

$AB_1 = BA_1$ (из условия)

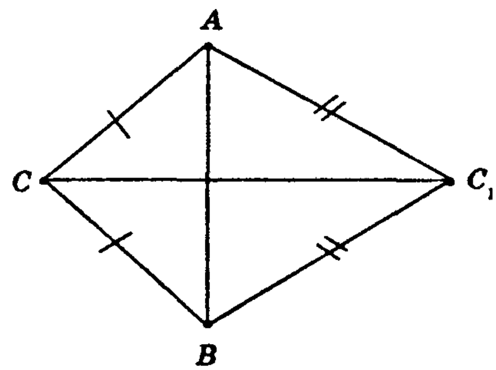


Таким образом, $\Delta AB_1C = \Delta BA_1C$ по 1-му признаку равенства треугольников.

№ 15.

Треугольники ACC_1 и BCC_1 равны. Их вершины A и B лежат по разные стороны от прямой CC_1. Докажите, что треугольники ABC и ABC_1 равнобедренные.

Т.к. $\Delta ACC_1 = \Delta BCC_1$, то: $AC = BC$, $AC_1 = BC_1$.



Таким образом, ΔABC и ΔABC_1 равнобедренные по определению.

Что и требовалось доказать.

№ 16.

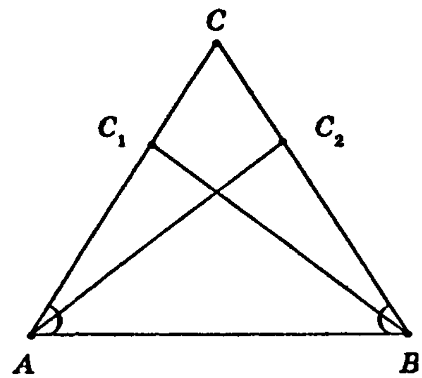
Сформулируйте и докажите теорему, обратную утверждению задачи 12.

Задача решена в п. 24 учебника (стр. 32).

№ 17.

На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки C_1 и C_2. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если треугольники ABC_1 и BAC_2 равны.

Т.к. $\Delta AC_1B = \Delta AC_2B$, то $\angle A = \angle B$. Следовательно, ΔABC равнобедренный.



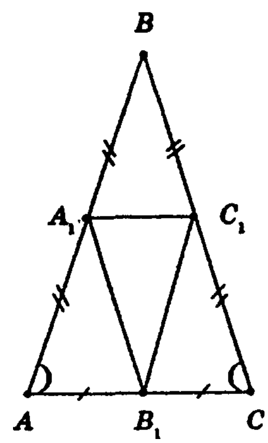
Что и требовалось доказать.

№ 18.

1) Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются также вершинами равнобедренного треугольника.

2) Докажите, что середины сторон равностороннего треугольника являются также вершинами равностороннего треугольника.

1)



В ΔAA_1B_1 и ΔB_1C_1C:

$AA_1 = CC_1$ как половины равных сторон (т.к. $AA_1 = AB : 2 = BC : 2 = CC_1$)

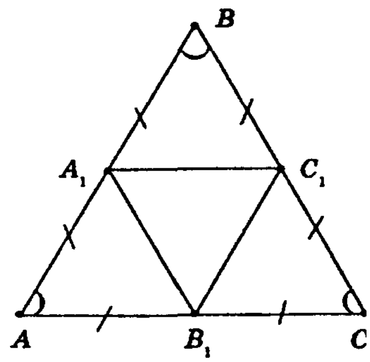
$\angle A = \angle C$, т.к. ΔABC — равнобедренный и $\angle A$ и $\angle C$ — углы при основании.

Таким образом, $\Delta AA_1B_1 = \Delta B_1C_1C$ по 1-му признаку равенства треугольников.

Отсюда $A_1B_1 = B_1C_1$.

Таким образом, $\Delta A_1B_1C_1$ — равнобедренный (по определению).

2)



В ΔAA_1B_1, ΔA_1BC_1, ΔCC_1B_1:

$\angle A = \angle B = \angle C$ (т.к. ΔABC — равносторонний).

$AA_1 = A_1B = BC_1 = C_1C = CB_1 = B_1A$ (как половины равных сторон).

Таким образом, $\Delta AA_1B = \Delta A_1BC = \Delta CC_1B_1$ по 1-му признаку равенства треугольников.

Откуда $A_1C_1 = C_1B_1 = A_1B_1$.

Таким образом, $\Delta A_1B_1C_1$ равносторонний по определению.

№ 20.

Докажите, что у равнобедренного треугольника:

1) биссектрисы, проведенные из вершин при основании, равны;

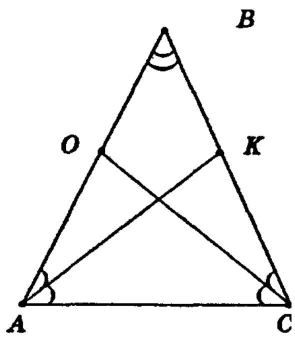
2) медианы, проведенные из тех же вершин, тоже равны.

1) $\angle BAK = \angle KAC = \angle OCA = \angle OCK$, т.к. $\angle A = \angle C$, и CO и KA — биссектриссы.

В ΔAKB и ΔCOB: $AB = BC$ (т.к. ΔABC — равнобедренный)

$\angle BAK = \angle BCO$ (т.к. AK и CO — биссиктриссы равных углов).

$\angle B$ — общий. Таким образом, $\Delta AKB = \Delta COB$ по 2-му признаку равенства треугольников.



Откуда $AK = CO$, что и требовалось доказать.

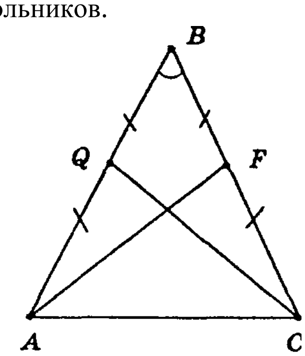
2) $AQ = QB = BF = FC$, т.к. AF и CQ — медианы.

В ΔAFB и ΔCQB:

$AB = BC$ (т.к. ΔABC — равнобедренный)

$QB = BF$

$\angle B$ — общий. Таким образом, $\Delta AFB = \Delta CQB$ по 1-му признаку равенства треугольников.



Откуда $AF = CQ$.

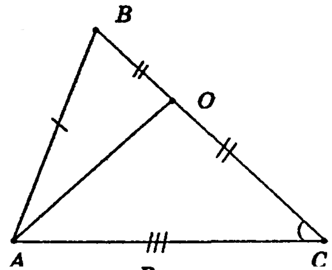
№ 21.

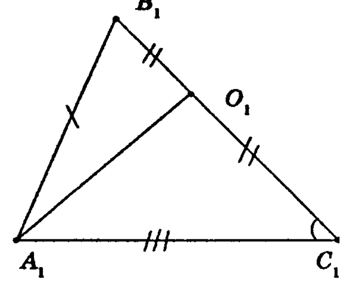
Докажите, что у равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$:

1) медианы, проведенные из вершин A и A_1, равны;

2) биссектрисы, проведенные из вершин A и A_1, равны.

1)





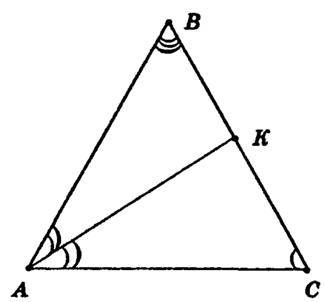
$\angle C = \angle C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

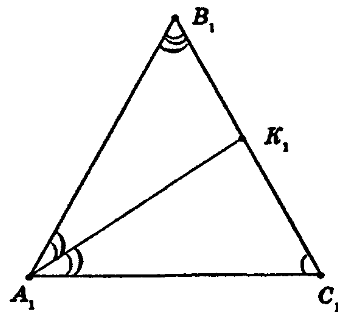
$BO = OC = B_1O_1 = O_1C_1$, т.к. AO и A_1O_1 — медианы, и $BC = B_1C_1$.

В ΔAOC и $\Delta A_1O_1C_1$: $AC = A_1C_1$, $OC = O_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Таким образом, $\Delta AOC = \Delta A_1O_1C_1$ по 1-му признаку, откуда $AO = A_1O_1$.

2)





Т.к. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, то: $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$.

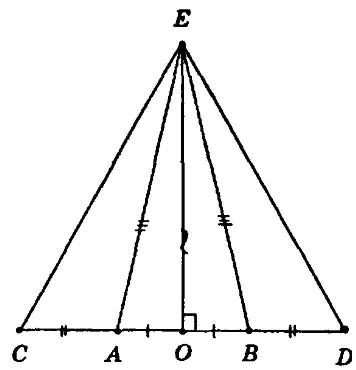
$\angle BAK = \angle KAC = \angle B_1A_1K_1 = \angle K_1A_1C_1$, т.к. AK и A_1K_1 — биссектрисы равных углов.

В ΔAKC и $\Delta A_1K_1C_1$: $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle KAC = \angle K_1A_1C_1$. Таким образом, $\Delta AKC = \Delta A_1K_1C_1$ по 2-му признакуравенства треугольников.

Откуда $AK = A_1K_1$.

№ 22.

Точки A, C, B, D лежат на одной прямой, причем отрезки AB и CD имеют общую середину. Докажите, что если треугольник ABE равнобедренный с основанием AB, то треугольник CDE тоже равнобедренный с основанием CD.



Т.к. ΔABE — равнобедренный, и ($\angle CAE$ и $\angle EAB$), ($\angle EBA$ и $\angle EBD$) — смежные, то $\angle CAE = 180^{\circ} - \angle EAB = 180^{\circ} - \angle EBA = \angle EBD$.

В ΔCAE и ΔEBD:

$AE = BE$ (т.к. ABE — равнобедренный)

$\angle CAE = \angle EBD$

$CA = BD$ (т.к. $CA = CO - AO = OD - OB = BD$)

Таким образом, $\Delta CAE = \Delta EBD$, следовательно, ΔCED — равнобедренный, (т.к. $CE = \angle ED$ как лежащие против равных углов в равных треугольниках), что и требовалось доказать.

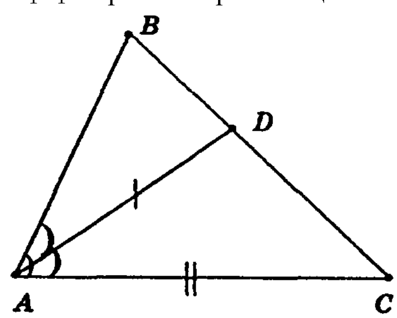
№ 23.

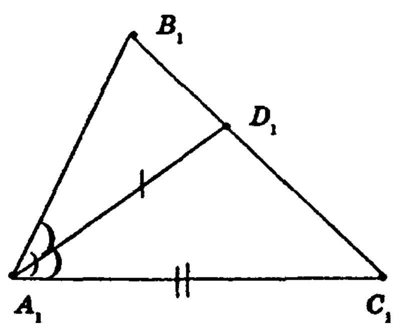
Докажите равенство треугольников по углу, биссектрисе этого угла и стороне, прилежащей к этому углу.

Пусть $AD = A_1D_1$ — равные биссектрисы, $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ — равные стороны.

В $\Delta ADC = \Delta A_1D_1C_1$: $\angle DAC = \angle D_1A_1C_1$ (т.к. $\angle DAC$ половина угла $\angle BAC$ $\angle DAC = \angle BAC : 2 = \angle B_1A_1C_1 : 2 = \angle D_1A_1C_1$).

$AD = A_1D_1$, $AC = A_1C_1$. (по условию: $AD = A_1D_1$ — равные биссиктрисы, $AC = A_1C_1$ — равные прилежащие стороны).





Таким образом, $\Delta ADC = \Delta A_1D_1C_1$ по 1-му признаку равенства треугольников, откуда $\angle C = \angle C_1$ как лежащие против равных сторон в равных треугольниках)

В ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$: $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (по условию)

$\angle C = \angle C_1$.

Таким образом, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по 1-му признаку равенство треугольников, что и требовальсь доказать.

№ 24.

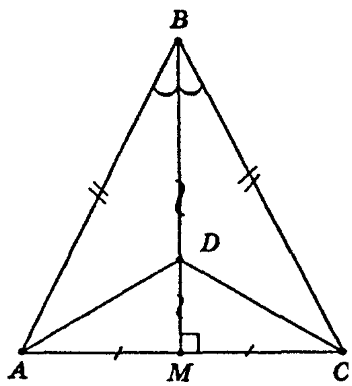
В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием **AC** проведена медиана *BM*. На ней взята точка *D*.

Докажите равенство треугольников:

1) *ABD* и *CBD;*

2) *AMD* и *CMD.*

Т.к. *BM* — медиана равнобедренного треугольника, то она является и высотой и биссектрисой. Таким образом, $\angle AMD = \angle DMV = 90^o$, $\angle ABD = \angle DBC$,



1) В ΔABD и ΔDBC: $AB = BC$ (т.к. ΔABC равнобедренный), BD — общая.

$\angle ABD = \angle DBC$ (т.к. BM — биссектриса).

Таким образом, $\Delta ABD = \Delta DBC$ по 1-му признаку равенства треугольников.

2) В ΔADM и ΔMDC:

$AM = MC$ (т.к. BM — медиана)

DM — общая

$\angle AMD = \angle DMC = 90^{\circ}$

Таким образом, $\Delta ADM = \Delta MDC$ по 2-му катетам, что и требовалось доказать.

№ 25.

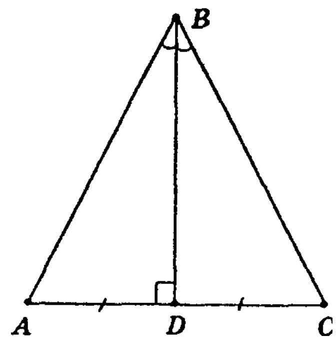
Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если у него

1) медиана BD является высотой;

2) высота BD является биссектрисой;

3) биссектриса BD является медианой.

В ΔABD и ΔDBC:



1) Если BD — медиана и высота, то $AD = DC$, $\angle ADB = \angle CDB = 90°$, BD — общая. $\Delta ABD = \Delta CBD$ по двум катетам.

Откуда $AB = BC$, таким образом, ΔABC — равнобедренный.

2) Если BD — высота и биссектриса, то $\angle ABD = \angle DBC$, $\angle ADB = \angle BDC$, BD — общая. $\Delta ABD = \Delta CBD$ по 2катету и двум прилежащим углам.

Откуда $AB = BC$, таким образом, ΔABC — равнобедренный.

3) Если BD — биссектриса и медиана:

Продлим BD до точки B_1, так, что $BD = DB_1$.

В ΔABD и ΔCDB_1:

$AD = DC$ (т.к. BD — медиана)

$BD = DB_1$

$\angle ADB = \angle CDB_1$ (из построения, как вертикальные).

Таким образом, $\Delta ABD = \Delta CDB_1$ по 1-му признаку равенства треугольников.

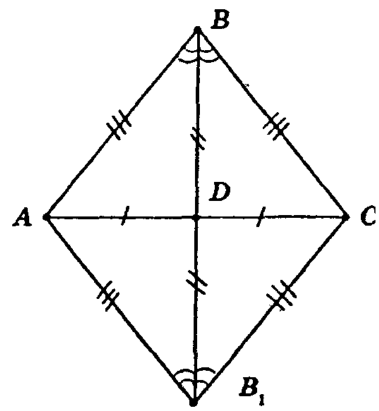
Откуда $\angle ABD = \angle CB_1D$, $AB = B_1C$.

Аналогично $\Delta ADB_1 = \Delta BDC$.

$\angle AB_1D = \angle DBC$, $AB_1 = BC$.

Т.к. $\angle ABD = \angle DBC$ (т.к. BD — биссектриса), то $\angle ABD = \angle DBC = \angle AB_1D$.

ΔBB_1A — равнобедренный, т.к. $\angle ABD = \angle AB_1D$,



Таким образом, $AB = AB_1$; т.к. $AB_1 = BC$, то $AB = BC$.

Следовательно, ΔABC — равнобедренный по определению.

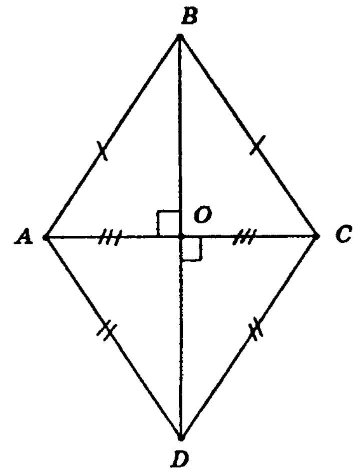
№ 26.

Даны два равнобедренных треугольника с общим основанием. Докажите, что их медианы, проведенные к основанию, лежат на одной прямой.

В ΔABC: BO — медиана, а значит, и высота (ΔABC — равнобедренный). Таким образом, BO $\perp$ AC.

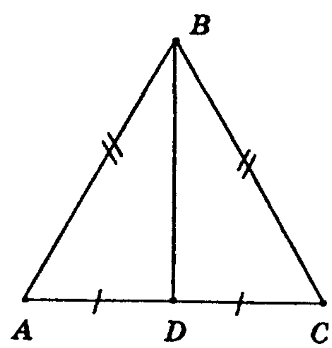
В ΔADC: DO — медиана, а значит, и высота (ΔADC — равнобедренный). Таким образом, DO $\perp$ AC.

Таким образом, к отрезку AC через точку O проведены два перпендикуляра. По теореме 2.3 через точку, лежащую на прямой, можно провести перпендикуляр, и притом единственный. Таким образом, медианы лежат на одной прямой.



№ 27.

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. Найдите ее длину, если периметр треугольника ABC равен 50 м, а треугольника ABD — 40 м.



$P_{ABC} = AB + BC + AC$

$P_{ABC} = 2AB + AC$ (т.к. $AB = BC$)

$50 = 2AB + AC.$

$$25 = AB + \frac{1}{2}AC,$$

$$P_{ABD} = AB + BD + AD = AB + BD + \frac{1}{2}AC$$ (т.к. BD — медиана)

$40 = 25 + BD$

$BD = 40 - 25 = 15.$

Ответ: 15 м.

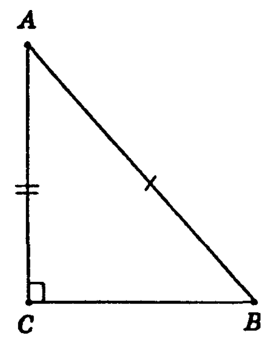
№ 28.

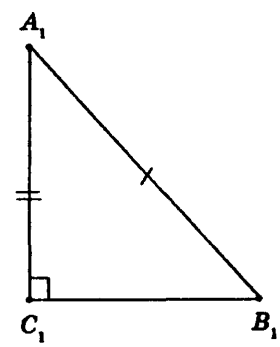
Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, противолежащей основанию, является медианой и высотой.

Задача решена в п. 26 учебника (стр. 34).

№ 29.

У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90^o$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.



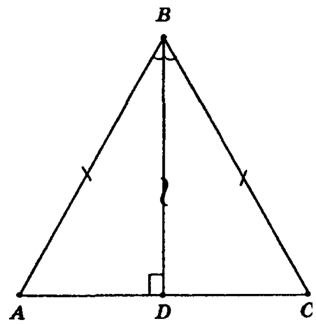


Доказано в п. 27 учебника (стр. 35.).

№ 30.

Докажите, что у равнобедренного треугольника высота а, опущенная на основание, является медианой и биссектрисой.

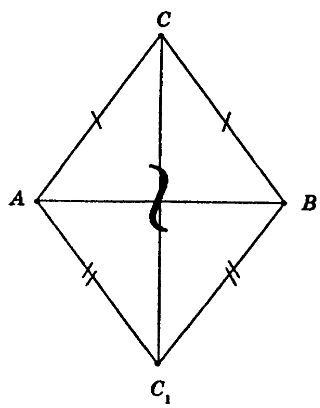
Исходя из утверждения задачи № 29, выходит, что ΔABD = ΔDBC, таким образом, $AD = DC$ как стороны, лежащие в равных треугольниках против равных углов, следовательно, BD — медиана.



$\angle ABD = \angle DBC$ (следовательно, BD — биссектриса), что и требовалось доказать.

№ 31.

Треугольники ABC и ABC_1 равнобедренные с общим основанием AB. Докажите равенство треугольников ACC_1 и BCC_1.



В ΔACC_1 и ΔBCC_1:

$AC = CB$,

$AC_1 = C_1B$ (т.к. ΔACB и ΔABC_1 — равнобедренные)

CC_1 — общая.

Таким образом, $\Delta ACC_1 = \Delta BCC_1$ (по 3-му признаку равенства треугольников).

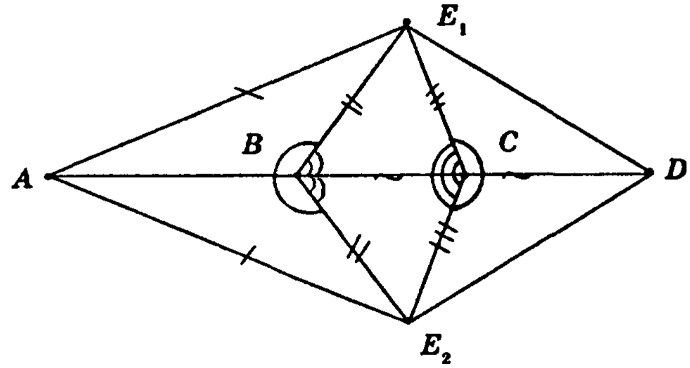
№ 32*.

Точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что если треугольники ABE_1 и ABE_2 равны, то треугольники CDE_1 и CDE_2 тоже равны.

$BE_1 = BE_2$, $\angle ABE_1 = \angle ABE_2$, т.к. $\Delta ABE_1 = \Delta ABE_2$.(из условия)

В ΔE_1BC и ΔE_2BC:

BC — общая



$\angle E_1BC = \angle E_2BC$ (т.к. $\angle E_1BC = 180^\circ - \angle ABE_1 = 180^\circ - \angle ABE_2 = \angle E_2BC$) (смежные с рвными углами).

$BE_1 = BE_2$.(по условию)

Таким образом, $\Delta E_1BC = \Delta E_2BC$ по 1-му признаку равенства треугольников.

Откуда $E_1C = E_2C$ как лежащие против равных углов в равных треугольникахи $\angle BCE_1 = \angle BCE_2$.

В ΔCDE_1 и ΔCDE_2:

$E_1C = E_2C$,

$\angle E_1CD = \angle E_2CD$, т.к. $\angle E_1CD = 180^o - \angle ACE_1 = 180^o - \angle ACE_2 = \angle E_2CD$ (смежные с равными углами).

Таким образом, $\Delta CDE_1 = \Delta CDE_2$ по 1-му признаку равенства треугольников.

№ 33.

Два отрезка AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Докажите равенство треугольников ACD и BDC.

В ΔAOD и ΔCOB:

$AO = OB$, $CO = OD$ (т.к. O — середина отрезков AB и CD).

$\angle COB = \angle AOD$ (как вертикальные).

Таким образом, $\Delta AOD = \Delta COB$ по 1-му признаку равенства треугольников. Откуда $AD = CB$ (как лежащие против равных углов в равных треугольниках).

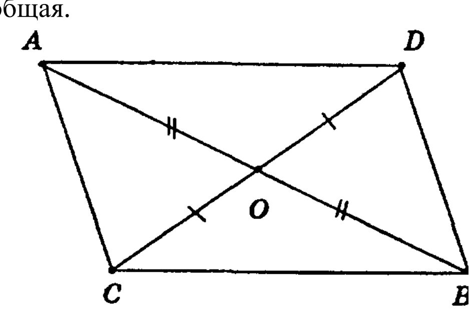
Аналогично $\Delta AOC = \Delta DOB$ и $AC = DB$.

В ΔACD и ΔBDC:

$AD = CB$ (из условия),

$AC = DB$ (из условия),

CD — общая.



Таким образом, $\Delta ACD = \Delta BDC$ по 3-му признаку равенства треугольников.

№ 34.

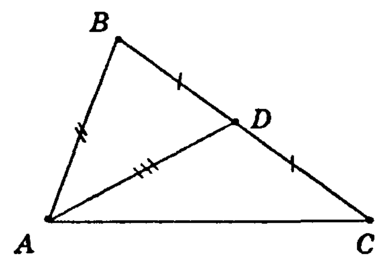
Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.

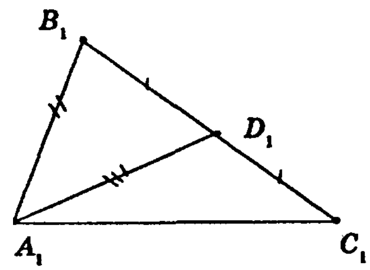
$BD = B_1D_1$, т.к. $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}B_1C_1 = B_1D_1$ (по условию).

В ΔABD и $\Delta A_1B_1D_1$:

$AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$, $BD = B_1D_1$, таким образом, $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ по 3-му признаку равенства треугольников.

Откуда $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$.





В ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$:

$AB = A_1B_1$

$BC = B_1C_1$ (по условию задачи)

$\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$, таким образом, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по 1-му признаку равенства треугольников.

№ 35.

Отрезки AB и CD пересекаются. Докажите, что если отрезки AC, CB, BD и AD равны, то луч AB является биссектрисой угла CAD и луч CD — биссектрисой угла ACB.

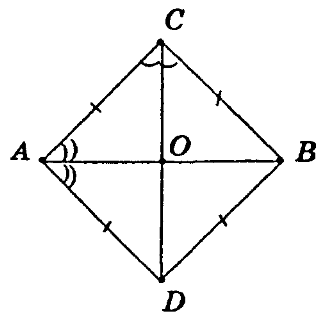
В ΔACD и ΔBCD:

По условию: $AC = CB$, $AD = DB$, CD — общая.

Таким образом, $\Delta ACD = \Delta BCD$ (по 3-му признаку равенства треугольников), откуда $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle CDB$ (как углы, лежащие в равных треугольниках против равных сторон).

Следовательно, CD — биссектриса $\angle ACB$.

Аналогично доказываем, что $\Delta ACB = \Delta ADB$ и $\angle CBA = \angle DBA$, $\angle DAB = \angle CAB$.

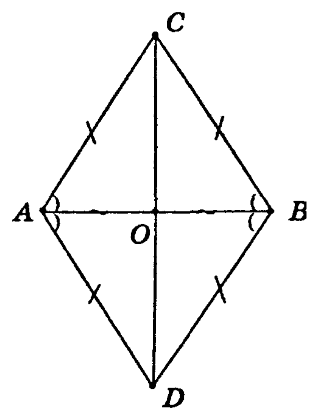


Таким образом, AB — биссектриса ΔACB, что и требовальсь доказать.

№ 36.

Докажите, что в № 35 прямые AB и CD перпендикулярны.

ΔADC, ΔACB, ΔCBD, ΔBDA являются равнобедренными по определению (т.к. у них 2 стороны равны), таким образом, биссектрисы AO, OB, CO, OD являются высотами соответствующих треугольников.



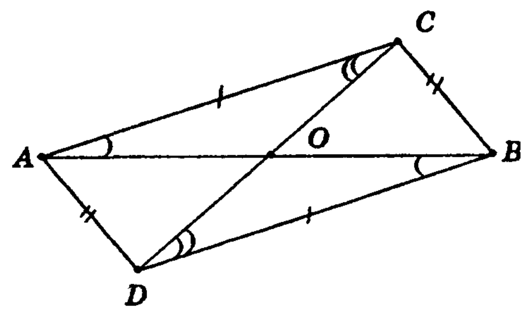
Следовательно, $AO \perp CD$ и $OB \perp CD$, а это по т. 2.3. возможно лишь если $AB \perp CD$, что и требовалось доказать.

№ 37.

Треугольники ABC и BAD равны, причем точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что

1) треугольники CBD и DAC равны;

2) прямая CD делит отрезок AB пополам.



Т.к. $\Delta ABC = \Delta ABD$, то $AC = BD$, $CB = AD$, $\angle CAO = \angle OBD$.

1) В ΔCBD и ΔDAC:

CD — общая

$AC = DB$, $AD = CB$ (из условия).

Таким образом, $\Delta CBD = \Delta DAC$ по 3-му признаку равенства треугольников, таким образом, $\angle CDB = \angle DCA$.

2) В ΔAOC и ΔDOB:

$AC = BD$, $\angle CAO = \angle OBD$, $\angle CDB = \angle DCA$.

Таким образом, $\Delta AOC = \Delta DOB$ по 2-му признаку, откуда $AO = OB$. Следовательно, отрезок BD делит отрезок AB пополам, что и требовалось доказать.

№ 38.

Отрезки равной длины AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = OD$. Докажите равенство треугольников ABC и DCB.

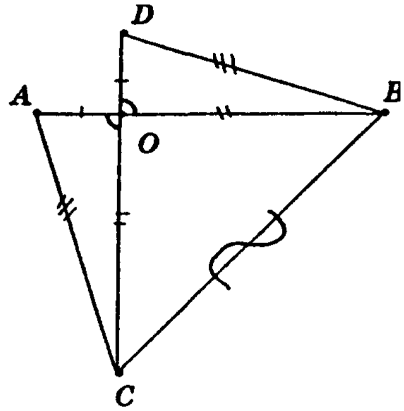
В ΔAOC и ΔDOB:

$AO = OD$ (по условию),

$OC = OB$ (т.к. $OC = DC - DO = AB - AO = OD$),

$\angle AOC = \angle DOB$ (как вертикальные).

Таким образом, $\Delta AOC = \Delta DOB$ по 2-му признаку равенства треугольников, откуда $AC = DB$ (как лежащие в равных треугольниках против равных углов).



В ΔABC и ΔDCB:

$AC = DB$ (из условия),

$AB = CD$ (из условия),

BC — общая.

Таким образом, $\Delta ABC = \Delta DCB$ по 3-му признаку равенства треугольников, что и требовалось доказать.

№ 39.

Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, исходящим из одной вершины.

Продлим медианы так, чтобы:

$BD = DO$, $B_1D_1 = D_1O_1$.

В ΔADO и ΔDBC:

$AD = DC$ (из условия)

$BD = DO$ (по построению)

$\angle ADO = \angle BDC$ (как вертикальные).

Таким образом, $\Delta ADO = \Delta BDC$ по 1-му признаку равенства треугольников; откуда $AO = BC$ как лежащие в равных треугольниках против равных углов, $\angle AOD = \angle DBC$.

Аналогично $\Delta A_1D_1O_1 = \Delta D_1B_1O_1$ и $A_1O_1 = B_1C_1$, $\angle A_1O_1D_1 = \angle D_1B_1C_1$.

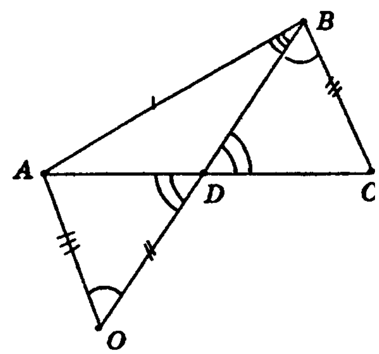
Т.к. $BC = B_1C_1$, то $AO = A_1O_1$.

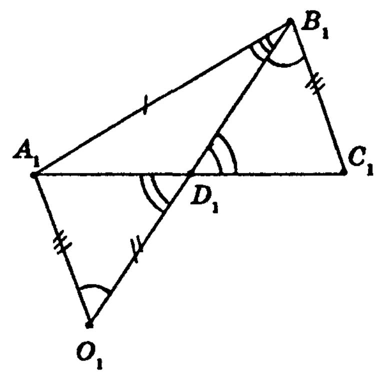
В ΔAOB и $\Delta A_1O_1B_1$:

$AB = A_1B_1$ (из условия),

$AO = A_1O_1$ (по построению),

$BO = B_1O_1$ (по построению),





Таким образом, $\Delta ABO = \Delta A_1B_1O_1$ по 3-му признаку равенства треугольников.

Откуда $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$, $\angle A_1O_1D_1 = \angle D_1B_1C_1$. Т.к. $\angle AOD = \angle DBC$ и $\angle A_1O_1D_1 = \angle D_1B_1C_1$, то $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$.

$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$

$\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_1D_1 + \angle D_1B_1C_1$, т.к. правые части равны, то и левые должны быть равны.

Следовательно $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

В ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$:

$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ (из условия).

Таким образом, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по 1-му признаку равенства треугольников, что и требовалось доказать.

№ 40.

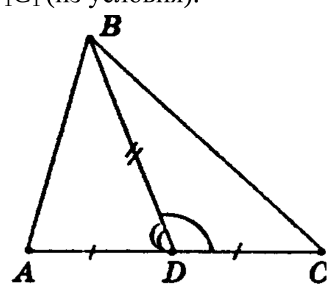
Докажите равенство треугольников по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и углам, которые образует с ней медиана.

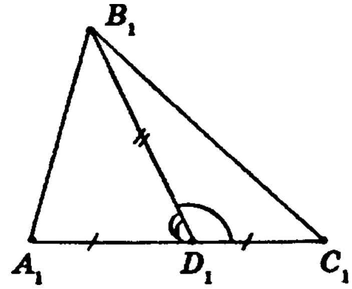
В ΔBDC и $\Delta B_1D_1C_1$:

$BD = B_1D_1$ (из условия),

$DC = D_1C_1$ ($DC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}A_1C_1 = D_1C_1$) (т.к. D и D_1 — середины сторон AC и A_1C_1 соответственнно)

$\angle BDC = \angle B_1D_1C_1$ (из условия).





Таким образом, $\Delta BDC = \Delta B_1D_1C_1$ по 1-му признаку равенства треугольников. Откуда $BC = B_1C_1$.

Аналогично $\Delta ADB = \Delta A_1D_1B_1$ и $AB = A_1B_1$.

В ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$:

$AB = A_1B_1$ (из равенства $\Delta ADB = \Delta A_1D_1B_1$

$BC = B_1C_1$ (из равенства $\Delta BDC = \Delta B_1D_1C_1$

$AC = A_1C_1$ (из условия)

Таким образом, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по 3-му признаку равенства треугольников, что и требовалось доказать.

§ 4. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

№ 1.

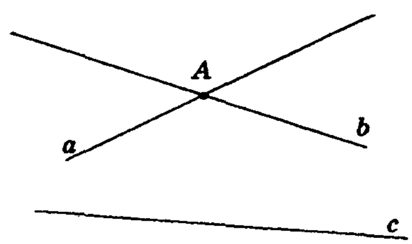
Докажите, что если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Пусть a и b — параллельные прямые, и пусть прямая c пересекает прямую a. Допустим, c не пересекает b, тогда через данную точку проходят 2 прямые, параллельные прямой b, но это невозможно, таким образом, пришли к противоречию.

№ 2.

Докажите, что если две прямые пересекаются, то любая третья прямая пересекает по крайней мере одну из этих прямых.

Пусть прямые a и b пересекаются в точке A. Допустим, что b не пересекает c, тогда $b \parallel c$, но исходя из предыдущей задачи, т.к. a пересекает b в точке A, то она пересекает и c в некоторой точке.



№ 3.

Дано: $a \parallel b \parallel c \parallel d$. Докажите, что $a \parallel d$.

Т.к. $b \parallel c$ и $b \parallel c$, то по определению параллельности $b \parallel d$. Т.к. $a \parallel b$ и $b \parallel d$, то $a \parallel d$.

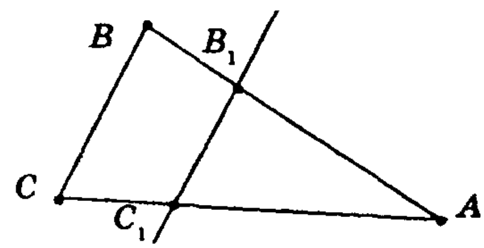
№ 4.

Прямые AB и CD параллельны. Докажите, что если отрезок BC пересекает прямую AD, то точка пересечения принадлежит отрезку AD.

Задача решена в п. 29 учебника (стр. 42).

№ 5.

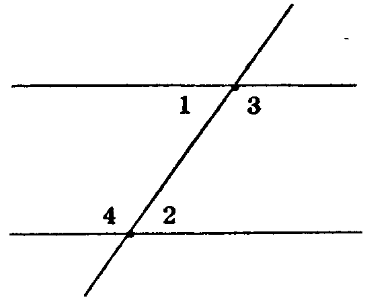
Дан треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка B_1, а на стороне AC — точка C_1. Назовите внутренние односторонние и внутренние накрест лежащие углы при прямых AB, AC и секущей B_1C_1.



1) внутренние односторонние углы:
   $\angle AB_1C$ и $\angle AC_1B_1$
   $\angle BB_1C_1$ и $\angle CC_1B_1$
2) внутренние накрест лежащие углы:
   $\angle AB_1C_1$ и $\angle AC_1B_1$
   $\angle BB_1C_1$ и $\angle CC_1B_1$.

№ 6.

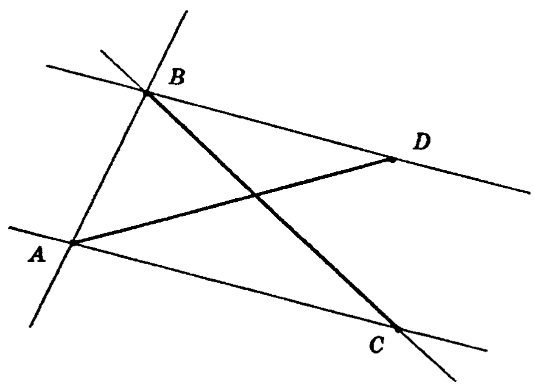
Назовите внутренние накрест лежащие и внутренние односторонние углы на рисунке.



Внутренние односторонние углы:
$\angle 2$ и $\angle 3$, $\angle 1$ и $\angle 4$.
Внутренние накрест лежащие углы:
$\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$.

№ 7.

Отрезки AD и BC пересекаются. Для прямых AC и BD и секущей BC назовите пару внутренних накрест лежащих углов. Для тех же прямых и секущей AB назовите пару внутренних односторонних углов. Объясните ответ.



$\angle ACB$ и $\angle CBD$ — внутренние накрест лежащие углы, т.к. точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC. $\angle ABD$ и $\angle CAB$ — внутренние односторонние углы, т.к. точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB, в той полуплоскости, где лежит точка пересечения отрезков AD и BC.

№ 8.

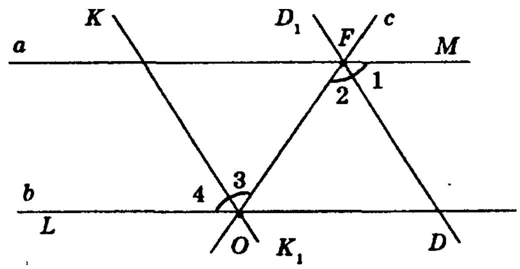
Даны прямая AB и точка C, не лежащая на этой прямой. Докажите, что через точку C можно провести прямую, параллельную прямой AB.

Задача решена в п. 31 учебника (стр. 44).

№ 9.

Докажите, что биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных параллельными и секущей, параллельны, то есть лежат на параллельных прямых.

$\angle MFO = \angle FOL$ как внутренние накрест лежащие углы.
$\angle MFO = \angle 1 + \angle 2$, $\angle 1 = \angle 2$, потому что FD — биссектриса.
$\angle FOL = \angle 3 + \angle 4$, $\angle 3 = \angle 4$, потому что OK — биссектриса.

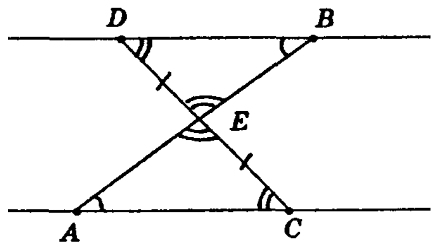


Таким образом, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$. Но $\angle 3$ и $\angle 2$ являются внутренними накрест лежащими при прямых DD_1 и KK_1 и секущей FO. Т.к .$\angle 3 = \angle 2$, то прямые, содержащие биссектрисы, параллельны.

№ 10.

Отрезки AB и CD пересекаются в точке E и делятся этой точкой пополам. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

В ΔDEB и ΔAEC:
$DE = EC$, $AE = EB$ (из условия).
$\angle AEC = \angle DEB$ (как вертикальные).

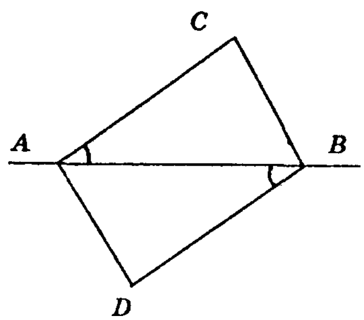


Таким образом, $\Delta DEB = \Delta AEC$ по 1-му признаку равенства треугольников.

Откуда $\angle CDB = \angle DCA$ (как углы, лежащие против равных сторон в равных треугольниках), которые являются внутренними накрест лежащими для прямых AC и DB и секущей DC. Следовательно, $AC \parallel DB$.

№ 11.

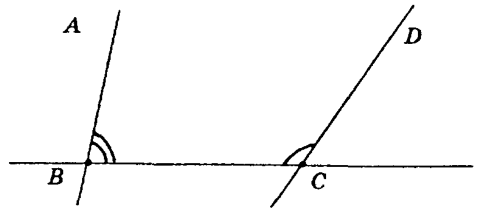
Треугольники ABC и BAD равны. Точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.



Т.к. $\Delta ABC = \Delta ABD$, то $\angle CAB = \angle ABD$, а они являются внутренними накрест лежащими для прямых AC, BD и секущей AB. Таким образом, $AC \parallel BD$, что и требовалось доказать.

№ 12.

Угол $ABC = 80^{\circ}$, а угол $BCD = 120^{\circ}$. Могут ли прямые AB и CD быть параллельными? Обоснуйте ответ.



Т.к. $80^{\circ} \neq 120^{\circ}$ и $80^{\circ} + 120^{\circ} \neq 180^{\circ}$, то они и не накрест лежащие, и не односторонние, таким образом, прямые AB и CD не параллельны.

Ответ: не могут.

№ 13.

Прямые AC и BD параллельны, прячем точки A и D лежат по разные стороны от секущей BC. Докажите, что

1) углы DBC и ACB — внутренние накрест лежащие относительно секущей BC;

2) луч BC проходит между сторонами угла ABD;

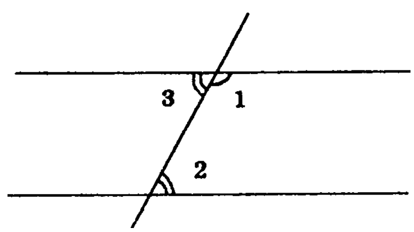
3) углы CAB и DBA — внутренние односторонние относительно секущей AB.

Задача решена в п. 32 учебника (стр. 45).

№ 14.

1) Разность двух внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей равна 30°. Найдите эти углы.

2) Сумма двух внутренних накрест лежащих углов при двух параллельных прямых и секущей равна 150°. Чему равны эти углы?



1) $\angle 1 = 180^o - \angle 2$ (т.к. $\angle 1$ и $\angle 2$ — внутренние односторонние).

$\angle 1 = \angle 2 + 30^o$ (из условия),

$180^o - \angle 2 = \angle 2 + 30^o$, $2 \cdot \angle 2 = 150$,

$\angle 2 = 75^o$, $\angle 1 = 105^o$.

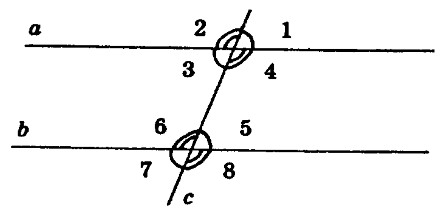
2) Т.к. $\angle 3 = \angle 2$ (внутренние накрест лежащие углы), то $2(\angle 3) = 150^o$

$\angle 3 = \angle 2 = 75^o$.

Ответ: 1) 75^o и 105^o;
2) 75^o и 75^o.

№ 15.

Один из углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 72^o. Найдите остальные семь углов.



Пусть $\angle 1 = 72^o$.

$\angle 1 = \angle 3 = 72^o$ (как вертикальные).

$\angle 3 = \angle 5 = 72^o$ (как накрест лежащие).

$\angle 5 = \angle 7 = 72^o$ (как вертикальные).

$\angle 2 = 180^o - 72^o = 108^o$ (т.к. $\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные).

Остальные находятся аналогично:

$\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 108^o$.

Ответ: 72^o, 72^o, 72^o, 108^o, 108^o, 108^o,180^o.

№ 16.

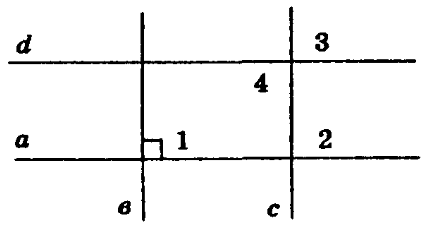
Один из углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 30^o. Может ли один из остальных семи углов равняться 70^o? Объясните ответ.

По предыдущей задаче углы будут равны либо 30^o, либо 150^o, но не 70^o.

Ответ: не может.

№ 17.

Докажите, что две прямые, параллельные перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны.



Пусть $a \perp b$, тогда

$b \parallel c$

$a \parallel d$

$\angle 1 = \angle 2 = 90^o$ (как соответственные углы).

$\angle 2 = \angle 4 = 90^o$ (как накрест лежащие углы).

Т. о. $c \perp d$.

№ 18.

Найдите неизвестный угол треугольника, если у него два угла равны

1) 50^o и 30^o;
2) 40^o и 75^o;
3) 65^o и 80^o;
4) 25^o и 120^o.

Т.к. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^o$, то $\angle 3 = 180^o - (\angle 1 + \angle 2)$.

1) $\angle 3 = 180^o - 30^o - 50^o = 100^o$
2) $\angle 3 = 180^o - 40^o - 75^o = 65^o$
3) $\angle 3 = 180^o - 65^o - 80^o = 35^o$
4) $\angle 3 = 180^o - 25^o - 120^o = 35^o$.

Ответ: 1) 100^o;
2) 65^o;
3) 35^o;
4) 35^o.

№ 19.

Найдите углы треугольника, если они пропорциональны числам

1) 1, 2, 3;
2) 2, 3, 4;
3) 3, 4, 5;
4) 4, 5, 6;
5) 5, 6, 7.

1) Пусть $\angle 1 = x$, тогда
$\angle 2 = 2x$
$\angle 3 = 3x$

1) $x + 2x + 3x = 180$ (т.к. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^o$)
$6x = 180$
$x = 30$

Т. о. углы треугольника: 30^o; 60^o; 90^o.

Аналогично:

2) $2x + 3x + 4x = 180^o$, $x = 20^o$
$\angle 1 = 40^o$, $\angle 2 = 60^o$, $\angle 3 = 80^o$.

3) $3x + 4x + 5x = 180^o$, $x = 14^o$
$\angle 1 = 45^o$, $\angle 2 = 60^o$, $\angle 3 = 75^o$

4) $4x + 5x + 6x = 180^o$, $x = 12^o$
$\angle 1 = 48^o$, $\angle 2 = 60^o$, $\angle 3 = 72^o$

5) $5x + 6x + 7x = 180^o$, $x = 10^o$
$\angle 1 = 50^o$, $\angle 2 = 60^o$, $\angle 3 = 70^o$.

Ответ: 1) 30^o, 60^o, 90^o;
2) 40^o, 60^o, 80^o;
3) 45^o, 60^o, 75^o;

4) 48^o, 60^o, 72^o;
5) 50^o, 60^o, 70^o.

№ 20.

Может ли в треугольнике быть:

1) два тупых угла;
2) тупой и прямой углы;
3) два прямых угла?

Ответ: 1) не может;
2) не может;
3) не может. Т.к. сумма углов треугольника равна 180^o, а в данных случаях сумма будет больше.

№ 21.

Может ли быть тупым угол при основании равнобедренного треугольника?

Если угол будет тупым, то сумма углов треугольника будет больше 180^o, но это не может быть, т.к. сумма угло в треугольнике = 180^o, т.к. в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Ответ: не может.

№ 22.

Найдите угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника, если угол при основании у него равен

1) 40^o;
2) 55^o;
3) 72^o.

Т.к. углы при основании равнобедренного треугольника равны и сумма углов треугольника равна 180^o, то

1) $180^o - 2 \cdot 40^o = 100^o$;
2) $180^o - 2 \cdot 55^o = 70^o$;

3) $180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$.

Ответ: 1) 100°;
2) 70°;
3) 36°.

№ 23.

Найдите угол при основании равнобедренного треугольника, если угол между боковым сторонами равен
1) 80°;
2) 120°;
3) 30°.

Пусть x — угол при основании, тогда, т.к. треугольник равнобедренный, то составим уравнение:

1) $2x + 80^\circ = 180^\circ$,
$x = (180^\circ - 80^\circ) : 2$,
$x = 50^\circ$;
2) $(180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$;
3) $(180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$.

Ответ: 1) 50°;
2) 30°;
3) 75°.

№ 24.

Один из углов равнобедренного треугольника равен 100°. Найдите остальные углы.

Т.к. этот угол не может быть угло при основании (сумма углов в треугольнике тогда будет больше 180°), то это будет угол между боковыми сторонами.

Из предыдущей задачи:

$\frac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$.

$\angle 1 = 40^\circ$, $\angle 2 = 40^\circ$, $\angle 3 = 100^\circ$.

Ответ: 40°, 40°.

№ 25.

Один из углов равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите остальные углы. Сколько решений имеет задача?

Пусть угол, равный 70°, является углом при вершине треугольника, тогда угол при основании будет:

$\frac{1}{2}(180^\circ - 70^\circ) = \frac{1}{2}\,110^\circ = 55^\circ$.

$\angle 1 = 55^\circ$, $\angle 2 = 55^\circ$, $\angle 3 = 70^\circ$.

Пусть угол, равный 70°, является углом при основании, тогда:

$180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

$\angle 1 = 70^\circ$, $\angle 2 = 40^\circ$, $\angle 3 = 70^\circ$.

Ответ: 2 решения:
1) 40° и 70° или
2) 55° и 55°.

№ 26.

Докажите, что если один из углов равнобедренного треугольника равен 60°, то этот треугольник равносторонний.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

1) Пусть угол при вершине треугольника равен 60°, тогда, т.к. $\angle 1 = \angle 2$, то $60^\circ + \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$. Таким образом, треугольник равносторонний.

2) Пусть $\angle 60^\circ$ — угол при основании, тогда $60^\circ + 60^\circ + \angle 3 = 180^\circ$, $\angle 3 = 60^\circ$. Таким образом, треугольник равносторонний.

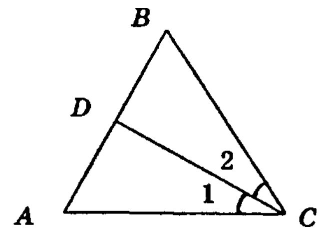
№ 27.

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD. Найдите углы треугольника ABC, если угол ADC равен

1) 60°;
2) 75°;
3) α.

Пусть $\angle 1 = x$, тогда:

$\angle A + \angle 1 + \angle CDA = 180^\circ$, $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle A$ (т.к. треугольник равнобедренный).



Исходя из условия, составим уровнения:

1) $2x + x + 60 = 180$,
   $3x = 120$,
   $x = 40$.
   $\angle A = 80^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, $\angle ABC = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$.
2) $2x + x + 75 = 180$,
   $3x = 105$,
   $x = 35$.
   $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, $\angle B = 40^\circ$.
3) $2x + x + \alpha = 180$,
   $3x = 180 - \alpha$,
   $x = (180 - \alpha) : 3 = 60 - \frac{\alpha}{3}$,
   $\angle A = 120^\circ - 2 \cdot \frac{\alpha}{3}, \angle C = 120^\circ - 2 \cdot \frac{\alpha}{3}, \angle B = 4 \cdot \frac{\alpha}{3} - 60^\circ$

Ответ: 1) 80°, 80°, 20°;
2) 70°, 70°, 40°;
3) $120^\circ - 2 \cdot \frac{\alpha}{3}$, $120^\circ - 2 \cdot \frac{\alpha}{3}$, $4 \cdot \frac{\alpha}{3} - 60^\circ$.

№ 28.

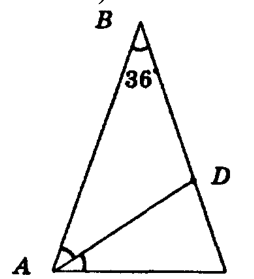
В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и углом при вершине B, равным 36°, проведена биссектриса AD. Докажите, что треугольники CDA и ADB равнобедренные.

Углы при основании треугольника:

$\frac{1}{2}(180^o - 36^o) = 72^o$,

$\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2}\,72^o = 36^o$ (т.к. AD — биссектриса).

$\angle ADC - 180^o - (72^o + 36^o) = 72^o$.



Т.к. $\angle C = \angle ADC$; $\angle B = \angle BAD$, то треугольники ABD и ADC равнобедренные.

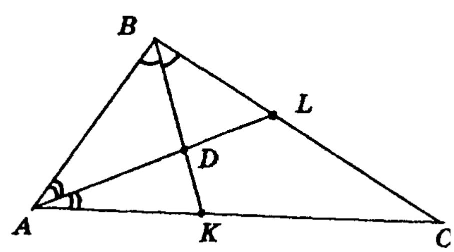
Что и требовалось доказать.

№ 29.

В треугольнике ABC проведены биссектрисы из вершин A и B. Точка их пересечения обозначена D. Найдите угол ADB, если

1) $\angle A = 50^o$, $\angle B = 100^o$;
2) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$;
3) $\angle C = 130^o$;
4) $\angle C = \gamma$.

Так как BK и AL — биссектрисы, то $\angle BAD = \angle DAC$, $\angle ABD = \angle DBC$.



Рассмотрим ΔABD:

$\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\angle ADB=180^o$ (т.к. сумма углов треугольника равна180°).

$\angle ADB=180^o-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$.

1) $\angle ADB=180^o-\frac{1}{2}(50^o+100^o)=180^o-75^o=105^o$

2) $\angle ADB=180^o-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

3) $\angle A+\angle B+\angle C=180^o$, $\angle A+\angle B=180^o-130^o$

$\angle ADB=180^o-\frac{1}{2}\cdot 50^o=180^o-25^o=155^o$

4) $\angle A+\angle B=180^o-\gamma$,

$\angle ADB=180^o-\frac{1}{2}\cdot(180^o-\gamma)=180^o-90^o+\frac{\gamma}{2}=90^o+\frac{\gamma}{2}$.

Ответ:
1) 105^o;
2) $180^o-(\alpha+\beta)/2$;
3) 155^o;
4) $90^o+\gamma/2$.

№ 30.

Чему равны углы равностороннего треугольника?

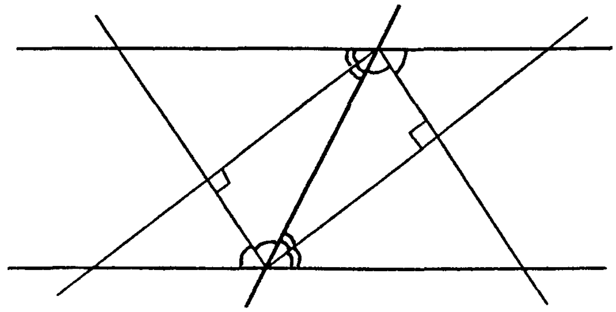
Т.к. у равностороннего треугольника все углы равны, то $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\frac{180^o}{3}=60^o$.

Ответ: 60^o, 60^o, 60^o.

№ 31.

Под каким углом пересекаются биссектрисы двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых?

Т.к. сумма двух односторонних углов при параллельных прямых и секущей равна 180^o, тогда сумма половины этих углов равна 90^o, а угол пересечения биссектрис равен $180^o-90^o=90^o$.



Ответ: 90°.

№ 32.

Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 70^o. Найдите углы треугольника.

Внутренний угол треугольника, смежный со внешним углом 70^o, равен $180^o - 70^o = 110^o$. Это может быть только угол между боковыми сторонами, т.к. иначе сумма углов треугольника была бы больше 180^o. Таким образом, углы при основании: $\frac{1}{2}$ $(180^o - 110^o) = 35^o$.

Ответ: 35^o, 35^o, 110^o.

№ 33.

Найдите углы треугольника, зная, что внешние углы при двух его вершинах равны 120^o и 150^o.

Внутренний угол треугольника, смежный со внешним углом 150^o, равен $180^o - 150^o = 30^o$, а с углом 120^o – равен $180^o - 120^o = 60^o$. Третий угол равен: $180^o - 60^o - 30^o = 90^o$.

Ответ: 30^o,60^o, 90^o.

№ 34.

Два внешних угла треугольника равны 100^o и 150^o. Найдите третий внешний угол.

Внутренний угол, смежный со внешним углом в 150°, равен: $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, а с углом 100°: $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. По теореме, третий внешней угол равен сумме двух внутренних, не смежных с ним углов, т.е. $80^\circ + 30^\circ = 110^\circ$.

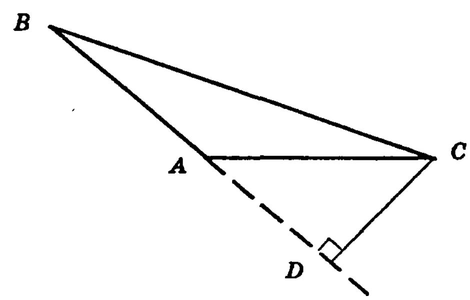
№ 35.

В треугольнике ABC проведена высота CD. Какая из трех точек A, B, D лежит между двумя другими, если углы A и B треугольника острые?

Задача решена в п. 34 учебника (стр. 47).

№ 36.

В треугольнике ABC проведена высота CD. Какая из трех точек A, B, D лежит между двумя другими, если угол A тупой? Обоснуйте ответ.

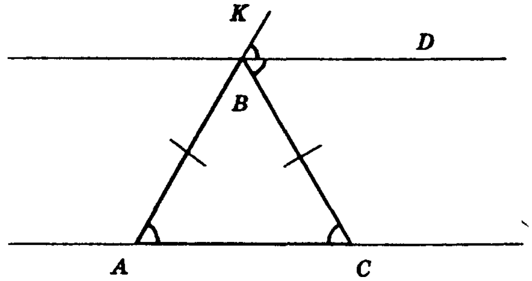


Пусть точка B лежит между точками A и D, тогда $\angle B = \angle D + \angle C$, но $\angle B < 90^\circ$, $\angle D = 90^\circ$. Таким образом, получили противоречие. Пусть точка D лежит между точками A и B, тогда $\angle D = \angle A + \angle C$, но $\angle D = 90^\circ$, $\angle A > 90^\circ$. Таким образом, получили противоречие. Таким образом, точка A лежит между B и D.

Ответ: A.

№ 37.

Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.



$\angle KBD + \angle DBC = \angle A + \angle C$ (по теореме 4.5),

$\angle A = \angle C$ (т.к. это углы при основании в равнобедренном треугольнике).

$\angle CBD = \angle KBD$, таким образом, $\angle KBD = \angle DBC = \angle A = \angle C$. Т.к. $\angle DBC = \angle C$, а они являются внутренними накрест лежащими при прямых DB и AC и секущей BC, то $BD \parallel AC$.

№ 38.

Сумма внешних углов треугольника ABC при вершинах A и B, взятых по одному для каждой вершины, равна 240°. Чему равен угол C треугольника?

Сумма внутренних углов треугольника при вершинах A и B по теореме 4.5 равна $360^{\circ} - 240^{\circ} = 120^{\circ}$. Таким образом, $\angle C = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$.

Ответ: 60°.

№ 39.

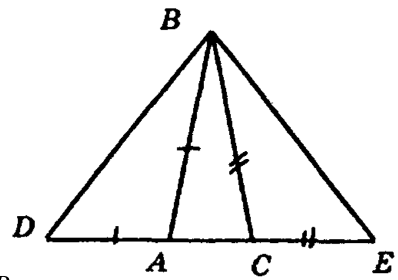
Треугольник ABC. На продолжении стороны AC отложены отрезки $AD = AB$ и $CE = CB$. как найти углы треугольника DBE, зная углы треугольника ABC?

Треугольник ΔABD — равнобедренный, BD — его основание. В ΔABD: $\angle A$ — внешний угол для ΔABD.

Поэтому $\angle D = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\angle A}{2}$.

Аналогично найдем угол E треугольника BDE.

1)



ΔDBA и ΔBCE равнобедренные, таким образом, $\angle D = (180^\circ - \angle DAB) : 2 = (180^\circ - 180^\circ + \angle BAC) : 2 = \frac{1}{2}\angle BAC$ (т.к. $\angle BAC$ и $\angle DAB$ смежные).

Аналогично $\angle E = \frac{1}{2}\angle BCA$, $\angle DBE = \angle ABC + \frac{1}{2}\left(\angle BCA + \angle BAC\right)$.

$\angle E = \frac{1}{2}\angle BCA = \frac{\angle C}{2}$.

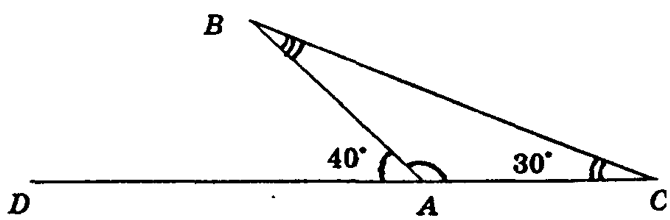
Следовательно, $\angle DBE = \angle B + \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2} = \angle B + \frac{\angle A + \angle C}{2}$, считая $\angle A$, $\angle C$, $\angle B$ углами треугольника ABC.

Ответ: $\angle DBE = \angle ABC + \frac{\angle BAC + \angle ACB}{2}$,

$\angle D = \frac{1}{2}\angle BAC \quad \angle E = \frac{1}{2}\angle BCA$.

№ 40.

У треугольника один из внутренних углов равен 30°, а один из внешних 40°. Найдите остальные внутренние углы треугольника.



$\angle BAC = 180^o - \angle DAB = 180^o - 40^o = 140^o$ (т.к. $\angle DAB$ и $\angle BAC$ — смежные).

$\angle B = 180^o - \angle C - \angle BAC = 180^o - 30^o - 140^o = 10^o$ (т.к. сумма внутренних углов треугольника равна 180°).

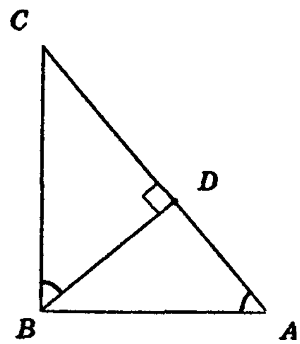
Ответ: 140^o, 10^o.

№ 41.

Из вершины прямого угла треугольника ABC проведена высота BD. Найдите угол CBD, зная, что

1) $\angle A = 20^o$;
2) $\angle A = 65^o$;
3) $\angle A = \alpha$.

Так как угол B — прямой, то точка D лежит на гипотенузе (по задаче № 35 § 4).



Т.к. ΔABC — прямоугольный, то $\angle C = 90^o - \angle A$.

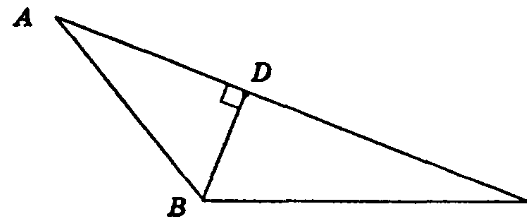
Т.к. ΔBCD — прямоугольный, то $\angle CBD = 90^o - 90^o + \angle A = \angle A$.

1) $\angle CBD = 20^o$,
2) $\angle CBD = 65^o$,
3) $\angle CBD = \alpha$.

Ответ: 1) 20^o;
2) 65^o;
3) α.

№ 42.

Из вершины тупого угла B треугольника ABC проведена высота BD. Найдите углы треугольника ABD и CBD, зная, что $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.



$\angle C = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

Т.к. $\angle CDB$ — прямоугольный, то $\angle DBC = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - 180^\circ + \alpha + \beta = \alpha + \beta - 90^\circ$.

Т.к. $\angle DBA$ — прямоугольный, то $\angle D = 90^\circ$

$\angle ABC = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - \alpha$.

Ответ: $90^\circ, \alpha, 90^\circ - \alpha; 90^\circ, 180^\circ - (\alpha + \beta), (\alpha + \beta) - 90^\circ$.

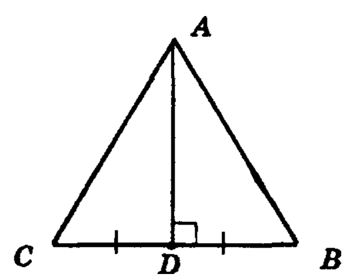
№ 43.

Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

Задача решена в п. 35 учебника (стр. 48).

№ 44.

Найдите углы прямоугольного равнобедренного треугольника.



Прямой угол может быть только при вершине, т.к. иначе сумма углов треугольника будет больше 180^o. Углы при основании равны $\frac{1}{2}$ $(180^o - 90^o) = 45^o$.

Ответ: $90^o, 45^o, 45^o$.

№ 45.

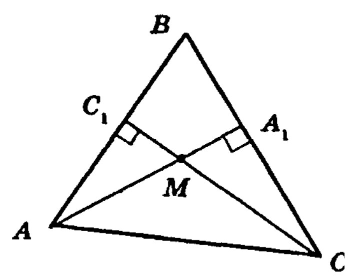
В равностороннем треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABD.

$\angle C = \angle A = \angle B = 60^o$ (по свойству равностороннего треугольника). Т.к. медиана является высотой, то $\angle D = 90^o$, $\angle B = 60^o$, $\angle DAB = 90^o - \angle B = 30^o$.

Ответ: $30^o, 60^o, 90^o$.

№ 46.

Высоты треугольника ABC, проведенные из вершин A и C, пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMC$, если $\angle A = 70^o$, $\angle C = 80^o$.



В ΔACC_1:

$\angle A = 70^o$ (из условия), $\angle C_1 = 90^o$, $\angle ACC_1 = 90^o - 70^o = 20^o$.

В ΔACA_1:

$\angle C = 80^o$ (из условия), $\angle A_1 = 90^o$, $\angle A_1AC = 90^o - 80^o = 10^o$.

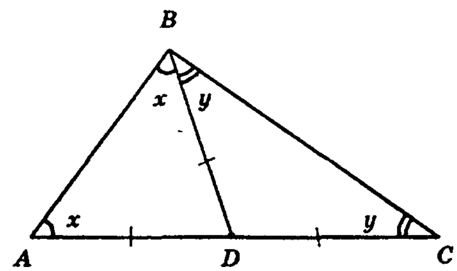
В ΔAMC: т.к. сумма внутренних углов треугольника равна 180°, то

$\angle AMC = 180^o - (\angle A_1AC + \angle C_1CA) = 180^o - 20^o - 10^o = 150^o$.

Ответ: 150^o.

№ 47.

В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC. Найдите угол B треугольника.



Пусть $\angle ADB = x$, тогда $\angle BDC = 180^\circ - x$ (смежный угол).

ΔADB и ΔDBC равнобедренные (по построению). Таким образом, $\angle A = \angle ABD = \frac{1}{2}(180^\circ - x)$.

$\angle C = \angle DBC = \frac{1}{2}(180^\circ - 180^\circ + x)$.

$\angle B = \angle DBC + \angle ABD = 90^\circ - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 90^\circ$.

Ответ: 90°.

№ 48.

Прямая a пересекает отрезок BC в его середине. Докажите, что точки B и C находятся на одинаковом расстоянии от прямой a.

Проведем через точки B и C прямые, перпендикулярные прямой a. В ΔABB_1 и ΔACC_1:

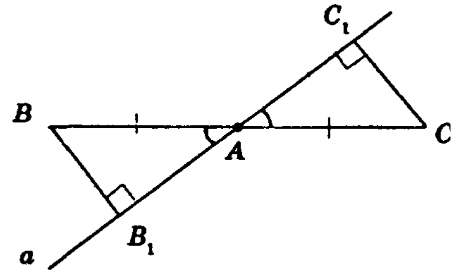
$\angle BAB_1 = \angle CAC_1$ (как вертикальные),

$\angle B_1 = \angle C_1 = 90^\circ$

$AB = AC$ (по условию).

$\angle B = 90^\circ - \angle BAB_1 = 90^\circ - \angle C_1AC = \angle C$

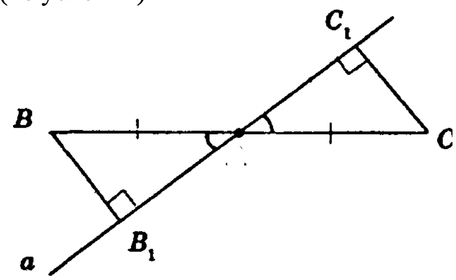
Таким образом, $\Delta ABB_1 = \Delta ACC_1$ по по гипотезе и прилежащему к ней углу, откуда $BB_1 = CC_1$.



№ 49.

Отрезок BC пересекает прямую a в точке O. Расстояния от точек B и C до прямой a равны. Докажите, что точка O является серединой отрезка BC.

В ΔOBB_1 и ΔOCC_1:
$\angle BOB_1 = \angle COC_1$ (как вертикальные),
$\angle B_1 = \angle C_1 = 90^\circ$
$\angle B = 90^\circ - \angle BOB_1 = 90^\circ - \angle C_1OC = \angle C$
$OB = OC$ (из условия)



Таким образом, $\Delta OBB_1 = \Delta OCC_1$ по 2-му признаку равенства треугольников, откуда $OB = OC$. Таким образом, точка O — середина отрезка BC.

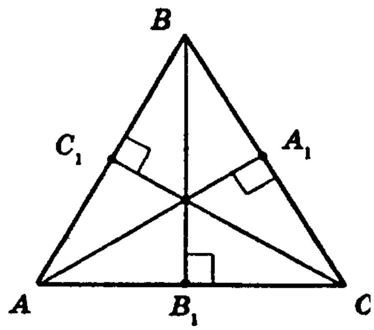
№ 50.

Докажите, что расстояния от любых двух точек прямой до параллельной прямой равны.

Задача решена в п. 36 учебника (стр. 49).

№ 51.

Докажите, что расстояния от вершин равностороннего треугольника до прямых, содержащих противолежащие им стороны, равны.



Построим высоты AA_1, BB_1, CC_1.

В ΔABB_1, ΔB_1BC и ΔAC_1C:

$AC = AB = BC$

$\angle A = \angle C = \angle B$ (т.к. ΔABC — равнобедренный), таким образом,

$\Delta ABB_1 = \Delta B_1BC = \Delta AC_1C$ по гипотенузе и острому углу, откуда $BB_1 = AA_1 = CC_1$.

§ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

№ 1.

Докажите, что любой луч, исходящий из центра окружности, пересекает окружность в одной точке.

Луч пересечет окружность на расстоянии радиуса от центра окружности. Другой точки окружности на луче быть не может, т.к. на луче можно отложить только один отрезок данной длины.

Утверждение доказано.

№ 2.

Докажите, что прямая, проходящая через центр окружности, пересекает окружность в двух точках.

Прямая — это два луча, исходящих из одной точки, между которыми угол равен 180°. Таким образом, на основе предыдущей задачи доказываем эту.

№ 3.

Докажите, что диаметр окружности, проходящей через середину хорды, перпендикулярен ей.

Задача решена в п. 38 учебника (стр. 55).

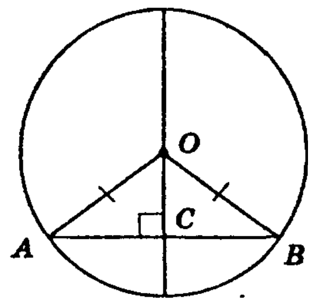
№ 4.

Сформулируйте и докажите теорему, обратную утверждению задачи № 3.

Теорема: Доказать, что диаметр окружност, препендикулярный хорде, проходит через ее середину.

В ΔAOC и ΔCOB:

$OA = OB$, т.к. OA и OB — радиусы окружности, CO — общая сторона, таким образом, $\Delta AOC = \Delta OCB$ по гипотенузе и катету, откуда $AC = CB$.



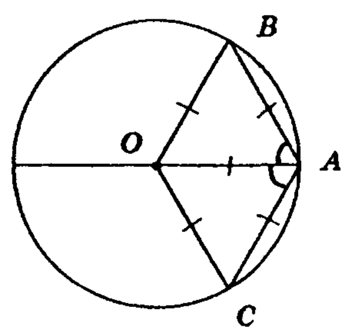
№ 5.

1) Из точки данной окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

2) Из точки данной окружности проведены две хорды, равные радиусу. Найдите угол между ними.

1) $OB = BA = OA$ (по условию), таким образом, ΔAOB — равносторонний, откуда $\angle OAB = 60^{o}$.

2) Аналогично $\angle OAC = 60^{o}$



$\angle BAC = \angle OAB + \angle OAC = 60^{o} + 60^{o} = 120^{o}$.

Ответ: 1) 60^{o};

2) 120^{o}.

№ 6.

Докажите, что серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника пересекаются.

Задача решена в п. 39 учебника (стр. 56).

№ 7.

Может ли окружность касаться прямой в двух точках? Объясните ответ.

Допустим, окружность с центром O касается прямой в двух точках A и B, таким образом, у треугольника AOB: $\angle OAB = \angle OBA = 90^{o}$, а этого не может быть.

Ответ: не может.

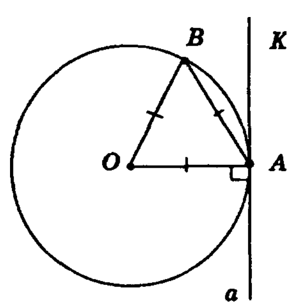
№ 8.

Докажите, что касательная к окружности не имеет с ней других общих точек, кроме точки касания.

Задача решена в п. 40 учебника (стр. 57).

№ 9.

Какие углы образует хорда AB, равная радиусу окружности, с касательной в точке A?



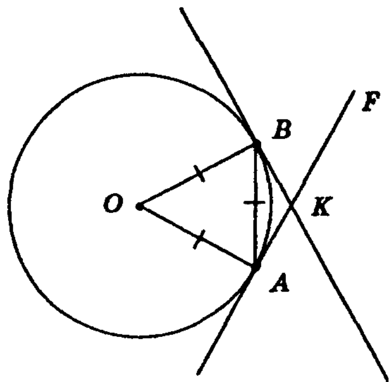
OB = OA = AB (по условию), таким образом, $\angle OAB = 60^o$ (т.к. ΔABO — равносторонний).

Т.к. OA $\perp a$, то $\angle BAK = 90^o - 60^o = 30^o$.

Ответ: $\angle BAK = 30^o$.

№ 10.

Найдите углы, под которыми пересекаются прямые, касающиеся окружности в концах хорды, равной радиусу.



$\angle ABK = \angle BAK = 30^o$ (из предыдущей задачи)

$\angle BKA = 180^o - (\angle BAK + \angle ABK) = 180^o - 30^o - 30^o = 120^o$ (т.к. сумма внутренних углов треугольника равна 180˚).

$\angle BKF = 180^o - 120^o = 60^o$ (т.к. $\angle BKF$ и $\angle BKA$ смежные).

Ответ: 60^o, 120^o.

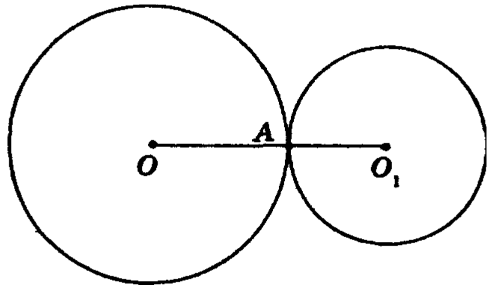
№ 11.

Окружности с радиусами 30 см и 40 см касаются. Найдите расстояние между центрам окружностей в случаях внешнего и внутреннего касания.

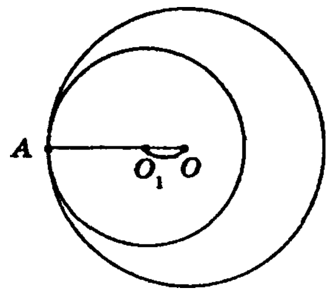
Точки O, A, O_1 лежат на одной прямой. Рассмотрим 2 случая

1) Случай внутреннего касания окружностей.

$OO_1 = OA + O_1A = 30 + 40 = 70$ см



2) Случай внутреннего касания окружностей.



$O_1O = OA - O_1A = 40 - 30 = 10$ см

Ответ: 70 см, 10 см.

№ 12.

Могут ли касаться две окружности, если их радиусы равны 25 см и 50 см, а расстояние между центрами 60 см?

Допустим, они касаются, тогда их центры и точка пересечения лежат на одной прямой и расстояние между центрами равно либо $25 + 50 = 75$, либо $50 - 25 = 25$, но $75 \neq 60$ и $25 \neq 60$, таким образом, пришли к противоречию.

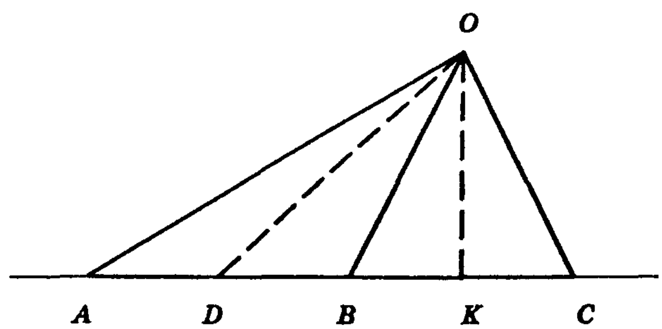
Ответ: не могут.

№ 13*.

1) Точки A, B, C лежат на прямой, а точка O — вне прямой. Могут ли два треугольника AOB и BOC быть равнобедренными с основаниями AB и BC? Обоснуйте ответ.

2) Могут ли окружность и прямая пересекаться более чем в двух точках?

1) Допустим, ΔAOB и ΔBOC — равнобедренные, таким образом, $AO = OB = OC$, и $\angle A = \angle C = \angle ABO = \angle OBC$, а это возможно лишь если $\angle ABO = \angle OBC = 90^{\circ}$, т.к. они смежные, то есть их сумма равна 180° но тогда $\angle A = \angle C = 90^{\circ}$, что не может быть, т.к. в этом случае сумма углов треугольника будет больше 180°.



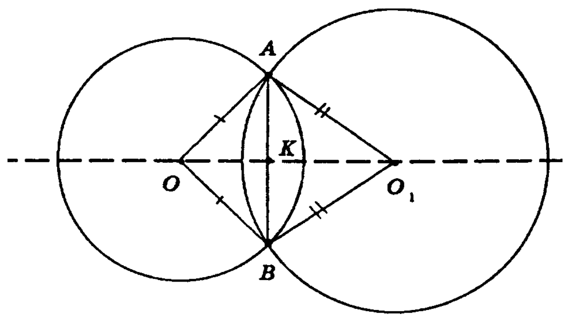
2) Пусть прямая a пересекает окружность с центром в точке O хотя бы в трех точках A, B, C. Тогда точки A, B, C принадлежат окружности, и $OA = OB = OC$ (как радиусы) и лежат на прямой a. Треугольники OAB и BOC — равнобедренные. Но это невозможно (в п. 1 мы это доказали). Значит, предположение не верно, могут пересекаться более чем в двцх точках.

Ответ: 1) Не могут;
2) Не могут.

№ 14*.

1) Окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая AB перпендикулярна прямой OO_1.

2) Докажите, что две окружности не могут пересекаться более чем в двух точках.



1) Докажем, что $AB \perp OO_1$.
В ΔOAO_1 и ΔOBO_1:
$OA = OB$ (как радиусы),
$O_1A = O_1B$ (как радиусы),
OO_1 — общая.

Таким образом, $\Delta OAO_1 = \Delta OBO_1$ по 3-му признаку равенства треугольников, откуда $\angle AOK = \angle KOB$, $\angle AO_1K = \angle BO_1K$.

В ΔAOB:

$OA = OB$, следовательно, ΔAOB — равнобедренный, $\angle AOK = \angle KOB$, таким образом, OK — биссектриса, которая является и высотой, т.к.ΔAOB — равнобедренный, то есть $OK \perp \underline{AB}$.

Таким образом, $AB \perp OO_1$.

2) Докажем, что окружности не могут пересекаться более чем в двух различных точках.

Допустим, что две окружности с центрами O и O_1 пересекаются хотя бы в трех различных точках A, B, C, тогда из п. 1 $AC \perp OO_1$, $AB \perp OO_1$, но это невозможно, так как через данную точку A можно провести одну и только одну прямую, перпендикулярную OO_1.

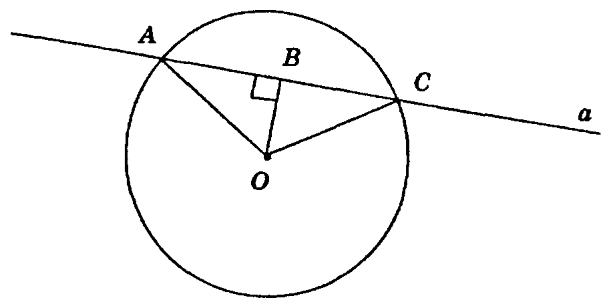
Таким образом, мы пришли к противоречию.

№ 15*.

1) Через точку A окружности с центром O проведена прямая, не касающаяся окружности. OB — перпендикуляр, опущенный на прямую. На продолжении отрезка AB отложен отрезок $BC = AB$. Докажите, что точка C лежит на окружности.

2) Докажите, что если прямая имеет с окружностью только одну общую точку, то она является касательной к окружности в этой точке.

3) Докажите, что если две окружности имеют только одну общую точку, то они касаются в этой точке.



1) Так как прямая a не касается окружности, то она пересекает окружность в двух точках.

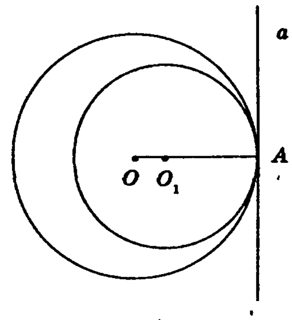
В ΔAOC:

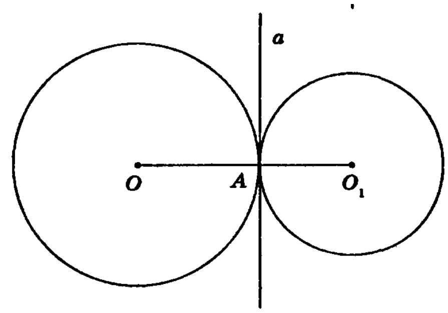
OB — медиана (т.к. $AB = BC$ (по условию)) и высота (т.к. $OB \perp a$ (по условию)). Значит, ΔAOC — равнобедренный. Таким образом, $OA = OC$ и таким образом точка C принадлежит окружности.

2) Пусть прямая a имеет с окружностью только одну общую точку A, но не является касательной, т.е. не перпендикулярна радиусу OA, таким образом, из точки O можно провести к прямой перпендикуляр OB, не совпадающий с OA. На продолжении отрезка AB отложим отрезок BC, равный отрезку AB. Тогда, из п. 1, точки A и C лежат на окружности.Противоречие, т.к. по условию прямая a имеет с окружностью только однук общую точку.

3) Если две окружности касаются в некоторой точке A, то они имеют общую касательную в этой точке.

Пусть точки O_1, O, A не лежат на одной прямой, тогда имеем ΔOO_1A. Прямая OO_1 разбивает плоскость на две полуплоскости, в одной из которых лежит точка A. $\Delta OO_1A = \Delta OO_1A_1$ по 1-му признаку. От луча O_1O отложим в другую полуплоскость $\angle A_1O_1O = \angle AO_1O$ и на нем отложим отрезок $OA_1 = OA$. $OA = OA_1$, $O_1A = O_1A_1$, откуда точка A_1 является общей точкой обеих окружностей. Противоречие. По условию окружности имеют только одну точку пересечения. Таким образом, точки O, O_1, A лежат на одной прямой.

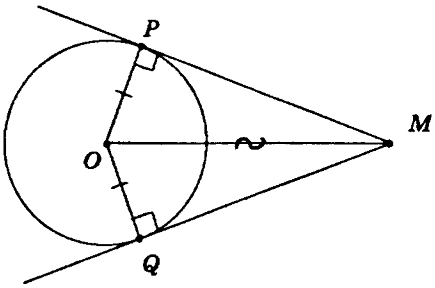




Через точку A проведем прямую a, $a \perp OA$. Таким образом, a — касательная к первой окружности. Так как точки O, O_1, A лежат на одной прямой, то $O_1A \perp a$. Таким образом, a — касательная ко второй окружности. Откуда получаем, что окружности касаются в точке A.

№ 16*.

1) Из одной точки проведены две касательные к окружности. Докажите, что отрезки касательных MP и MQ равны. 2) Докажите, что через одну точку не может проходить больше двух касательных к окружности.



1) В ΔOPM и ΔOQM:

OM — общая,

$OP = OQ$, как радиусы,

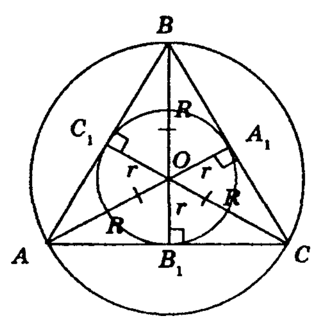
$OP \perp MP$, $OQ \perp MQ$ (т.к. MP и MQ — касательные).

Таким образом, $\Delta OPM = \Delta OQM$ по1-му признаку равенства треугольников. Откуда $MP = MO$.

2) Пусть через точку M можно провести три касательных к окружности: MP, MQ, MA. Тогда из п. 1 следует, что $MP = MQ = MA$, откуда точки P, Q, A лежат на одной окружности с центром M. Получилось, что две окружности имеют три общие очки. Противоречие. В задаче 14 § 5 мы это доказали. Таким образом, через данную точку нельзя провести более двух касательных к данной окружности.

№ 17.

Одна окружность описана около равностороннего треугольника, а другая вписана в него. Докажите, что центры этих окружностей совпадают.



Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров.

В равностороннем треугольнике биссектрисы являются и медианами и высотами, откуда они являются и серединными перпендикулярами. Значит, центры вписанной и описанной окружности совпадают.

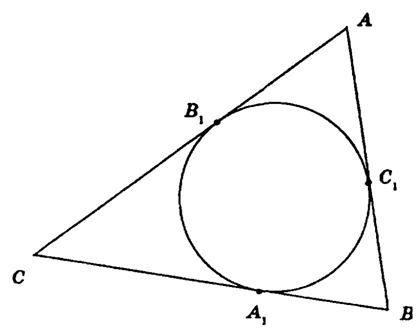
№ 18.

Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что $AC_1 = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.

$AC_1 = AB_1$ (по свойству касательных)

$AC_1 + AB_1 = AB - BC_1 + AC - CB_1 = AB + AC - (BA_1 + CA_1) = AB + AC - BC = 2AC$



Таким образом, $AC_1 = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

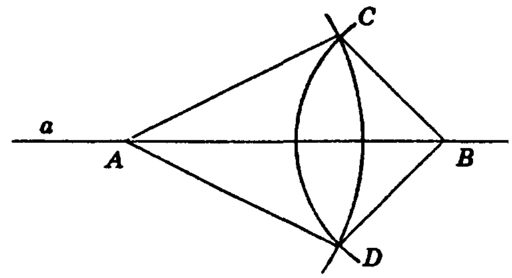
№ 19.

Постройте треугольник по трем сторонам a, b и c.

Задача решена в п. 43 учебника (стр. 58).

№ 20.

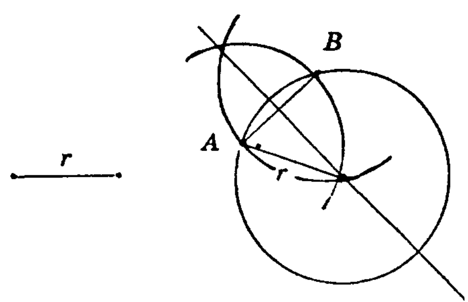
Дан треугольник ABC. Постройте другой, равный ему треугольник ABD.



Построение ясно из рисунка.

№ 21.

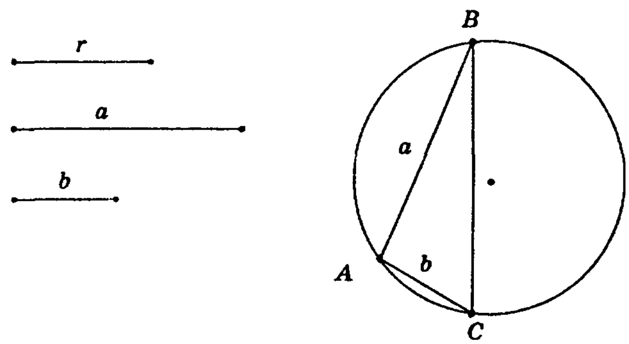
Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.



Центр окружности будет лежать на серединном перпендикуляре, проведенном к отрезку AB, на расстоянии, равном *r* от A и B.

№ 22.

Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности.



Построим окружность данного радиуса, отметим на ней произвольную точку и от нее отложим данные стороны.

№ 23.

Постройте треугольник ABC по следующим данным:

1)по двум сторонам и углу между ними:

а) $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 40^o$;

б) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 70^o$.

2) по стороне и прилежащим к ней углам:

а) $AB = 6$ см, $\angle A = 30^o$, $\angle B = 50^o$;

б) $AB = 4$ см, $\angle A = 45^o$, $\angle B = 60^o$.

1) Построим угол (см. п. 44 учебника, стр. 59) и на сторонах угла от вершины отложим две данных стороны. Соединим две полученные точки на сторонах угла отрезком. Получим треугольник.

Задача б) делается аналогично.

2) Строим данный отрезок, от концов отрезка откладываем углы (см. п. 1). Точка пересечения сторон углов будет третьей вершиной треугольника.

№ 24.

Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему большей из них.

1) $a = 6$ см, $b = 4$ см, $\alpha = 70$о;

2) a = 4 см, b = 6 см, β

1) Построим отрезок, равный 4 см. Конец отрезка будет являться вершиной данного угла, из другого конца проведем окружность с r = 6 см. Точка пересечений стороны угла и данной окружности будет третьей вершиной треугольника.

Пункт 2) аналогично.

№ 25.

Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при основании.

Т.к. у равнобедренного треугольника углы при основании равны, то данная задача сводится к построению треугольника по двум углам и стороне (см. № 23).

№ 26.

Постройте окружность, вписанную в данный треугольник.

Т.к. центр вписанной окружности лежит на пересечении его биссектрис, то задача сводится к построению биссектрис (см. п. 45 учебника, стр. 59).

№ 27.

Разделите угол на четыре равные части.

Делим угол пополам, затем каждую половину еще пополам (п. 45 учебника, стр. 59).

№ 28.

Постройте углы 60^o и 30^o

Строим произвольный равносторонний треугольник, затем один из его углов делим пополам. $60^o : 2 = 30^o$ (см. п. 45 учебника, стр. 59).

№ 29.

Дан треугольник. Постройте его медианы.

Медиана делит противоположную сторону пополам. Таким образом, задача сводится к делению отрезка пополам (см. п. 46 учебника, стр. 72).

№ 30.

Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.

Сначала построим треугольник по стороне, половине стороны и медиане, затем продлим половину стороны до целой и соединим с третьей вершиной.

№ 31.

Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

Построим окружность данного радиуса, возьмем на ней произвольную точку и построим данную сторону, затем разделим ее пополам и построим медиану. Наконец, соединим вершины.

№ 32.

Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

(см. рис. 110 учебника)

Пусть две стороны будут a и b, а медиана — m.

Построим треугольник по трем сторонам:

$AB = a$, $BD = b$, $AD = 2m$;

Проведем медиану BA_1 и на ее продолжении отложим $A_1C = A_1B$;

Проведем сторону AC.

ΔABC — искомый. Докажем это:

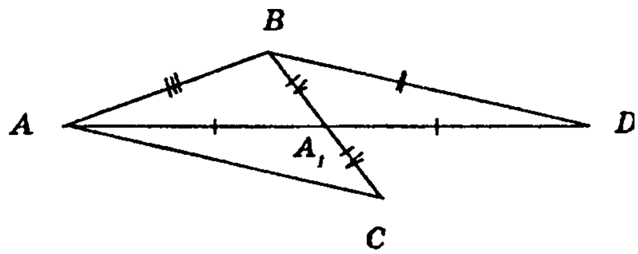
$\Delta BA_1D = \Delta CA_1A$ (по 1-му признаку равенства треугольников).

Таким образом, $AC = BD = b$

$AB = a$

$AA_1 = AD = 2m : 2 = m$

AA_1 — медиана.



Таким образом, ΔABC — искомый.

№ 33.

Дан треугольник. Постройте его высоты.

Построение высоты сводится к построению перпендикуляра (см. п. 47 учебника, стр. 60).

№ 34.

Постройте окружность, описанную около данного треугольника.

Т.к. центр окружности, описанной около треугольника — точка пересечения серединных перпендикуляров, то построение сводится к построению перпендикуляров (задача № 33).

№ 35.

Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

На произвольной прямой строим перпендикуляр длины катета, затем от вершины катета строим окружность с радиусом гипотенузы, после соединяем вершины.

№ 36.

Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и высоте, опущенной на основание.

См. № 35, но гипотенузу надо откладывать в обе полуплоскости.

№ 37.

Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону.

См. № 35.

Существует два решения:

1) от высоты откладывать отрезки данной длины в одну сторону
2) в разные стороны.

№ 38.

Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из них.

Проводим прямую, затем строим на ней высоту. От вершины высоты откладываем отрезок, равный первой стороне, он пересечет нашу прямую в некоторой точке, от которой мы отложим по первоначальной прямой вторую сторону. Затем соединим все вершины и получим искомый треугольник.

№ 39.

Постройте треугольник по стороне и проведенным к ней медиане и высоте.

Сначала строим прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза — заданная медиана треугольника, а катет — заданная высота. Затем от основания медианы в обе стороны откладываем отрезки, равные ½ стороны треугольника. Потом соединяем вершины и получим искомый треугольник.

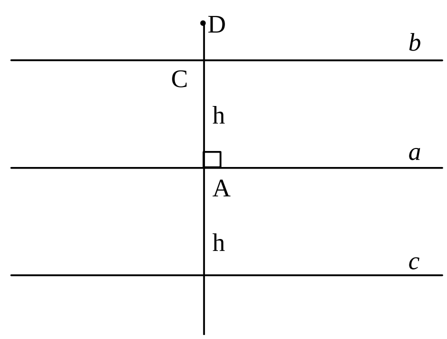
№ 40.

Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.

Построим окружность данного радиуса, затем проведем хорду, равную данной стороне. После проведем серединный перпендикуляр к полученному отрезку. Точку пересечения окружности с серединным перпендикуляром соединим с концами хорды. Получим равнобедренный треугольник.

№ 41.

Докажите, что геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на расстояние h, состоит из двух прямых, параллельных данной и отстоящих от нее на h.



Т.к. расстояние от прямой до некоторой точки — это есть перпендикуляр к этой прямой через эту точку

Докажем, что любая точка, удаленная от a на h лежит либо на c, либо на b.

Пусть точка D не лежит ни на b, ни на c, и расстояние от D до точки A на прямой равно h.

Тогда $DA = h$ и $AD \perp a$.

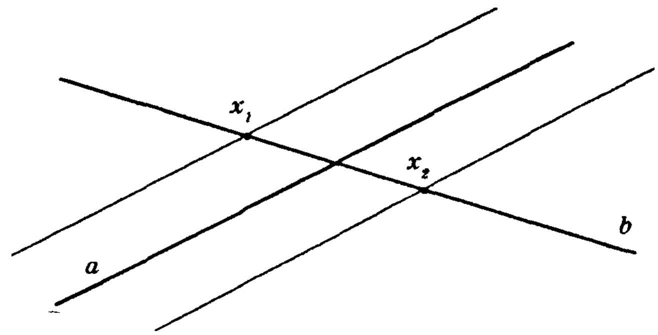
Но CA также равно h и $CA \perp a$.

Следовательно, точки C и D либо совпадают, либо противоположны относительно прямой a.

То есть точка D лежит на прямой b или на c.

№ 42.

На данной прямой найдите точку, которая находится на данном расстоянии от другой данной прямой.



Согласно задаче № 41, геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой, состоит из двух параллельных прямых, параллельных данной, и отстоит от нее на данное расстояние.

№ 43.

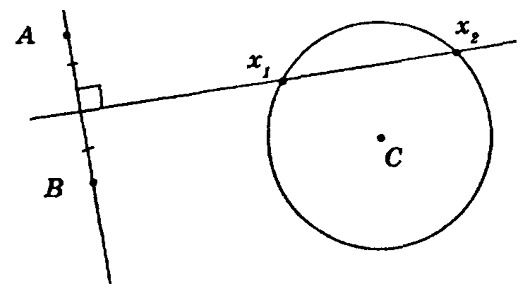
Даны три точки A, B, C. Постройте точку x, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.

Точка x должна быть:

1) одинаково удалена от точек A и B;
2) находится на данном расстоянии от точки C.

1) Точка x лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

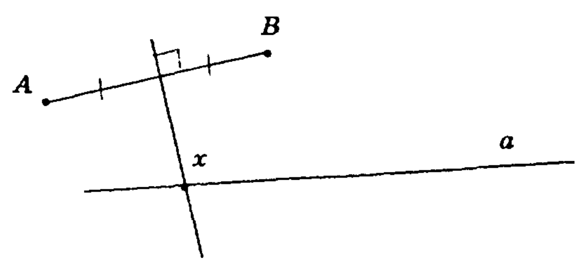
2) Точка x лежит на окружности данного радиуса, с центром в точке C.



Искомая точка x лежит на пересечении серединного перпендикуляра и окружности.

№ 44.

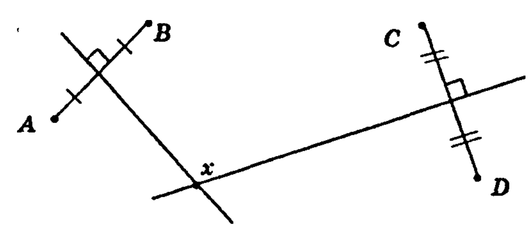
На данной прямой найдите точку, равноудаленную от двух данных точек.



Точка x лежит на пересечении серединного перпендикуляра к отрезку AB и прямой a.

№ 45.

Даны четыре точки A, B, C, D. Найдите точку x, которая одинаково удалена от точек A и B и одинаково удалена от точек C и D.



Точка x лежит на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам AB и CD.

№ 46*.

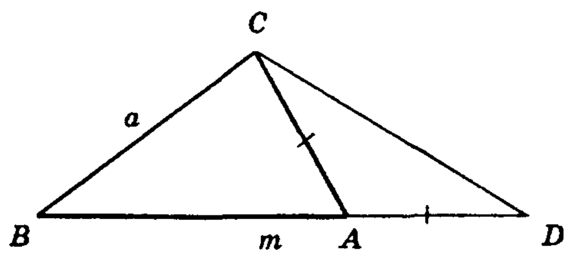
Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.

Пусть даны два отрезка a и m и угол α. Надо построить ΔABC такой, что $BC = a$, ΔBCD $AB + AC = m$.

Решение возможно лишь при $a < m$ т.к. сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны.

Построим ΔBCD по двум сторонам ($BD = m$, $BC = a$) и углу между ними ($\angle B = \alpha$).

Проведем серединный перпендикуляр от CD, он пересечет BD в точке A. $AD = AC$. Получаем искомый ΔBCD, где $BC = a$, ΔBCD $B = \alpha$, $AB + AC = m$, т.к. $AC = AD$.



Если $m = a$, то в ΔBCD $\angle C$ будет больше $\angle D$. Серединный перпендикуляр d к сторонеCD по теореме 1.1. должен пересекать либо сторону BC, либо CD.

Докажем, что серединный перпендикуляр пересекает именно BD.

Допустим, d пересекает сторону BC в точке M, а прямую BD в точке K. Т.к. $KD > BD$, то $\angle KCD < \angle BCD$.

По свойству серединного перпендикуляра ΔDKC — равнобедренный, таким образом, $\angle KCD = \angle D$, но тогда $\angle D > \angle BCD$ (т.к. $m > a$), то есть в ΔBCD $\angle D < \angle C$. Противоречие, т.е. d пересекает именно BD.

Таким образом, задача имеет единственное решение.

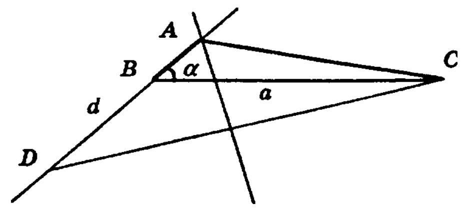
№ 47*.

Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон.

Пусть даны два отрезка a и d и угол α.

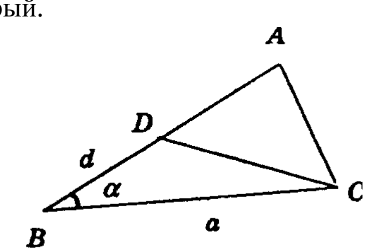
Нужно построить ΔABC, в котором $BC = a$, $\angle B = \alpha$, а $|AC - AB| = d$.

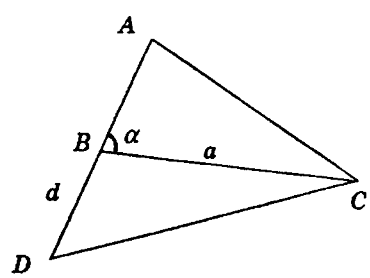
Задача имеет решения лишь при $d < a$, т.к. из нер-ва треугольника следует, что любая сторона должна быть больше разности двух сторон.



I. Допустим такой треугольник уже построен. Рассмотрим два случая:

1) $\angle \alpha$ — острый.



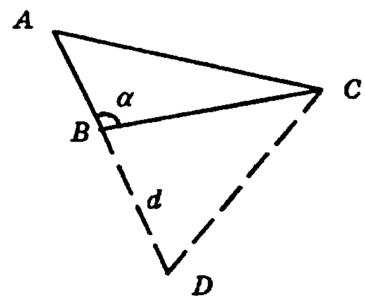


Если $AB > AC$, d = AC, то отложим на стороне AB отрезок $BD = d$, тогда $AD = AB - d = AC$, т.е. точка A лежит на серединном перпендикуляре к CD.

Если $AC > AB$, то отложим на продолжении стороны AB отрезок $BD = d$.

$d = AC - AB$, $AD = AB + BD = AB + d$, т.е. $AD = AC$, поэтому точка A будет лежать на серединном перпендикуляре к CD.

2) $\angle\alpha$ — тупой.



$AC > AB$, тогда на продолжении сторона AB отложим $BD = d$, тогда $AD = AC$ и тогда точка A лежит на серединном перпендикуляре к CD.

а) Если α — острый угол, $d = AC - AB$.

Построим $\angle B = \alpha$.

Отложим на одной стороне угла $BC = a$, а на дополнительной полупрямой к другой стороне $BD = d$.

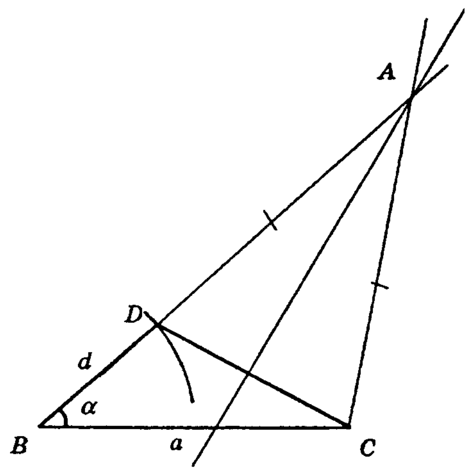
Найдем точку A, проведя серединный перпендикуляр к стороне CD. Т.к. $AB = AD - DB = AC - d$, то $d = AC - AB$, и ΔABC — искомый.

б) Если α — острый угол, $d = AB - AC$.

Построим $\angle B = \alpha$.

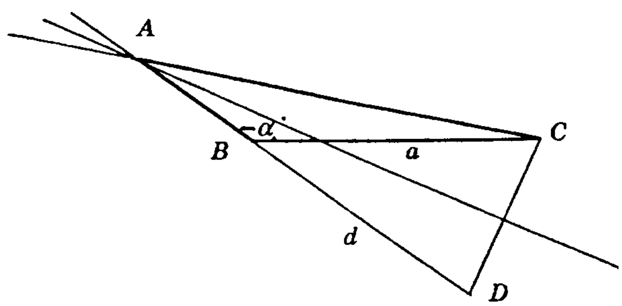
Отложим на одной стороне угла $BC = a$, а на другой — $BD = d$.

Найдем точку A, проведя серединный перпендикуляр к отрезку CD. Т.к. $BA = d + AC$, то $d = AB - AC$, таким образом, ΔABC — искомый.



II.

Если α' — тупой угол, то $d = AC - AB$ (аналогично п. I, а)



Выясним, всегда ли задача имеет решение.

I.

а) В ΔDBC $\angle DBC$ — тупой (т.к. α и $\angle DBC$ смежные) и $DB < BC$, то серединный перпендикуляр обязан пересечь сторону $BC < B$ и сторону BA, таким образом, решение обязано существовать.

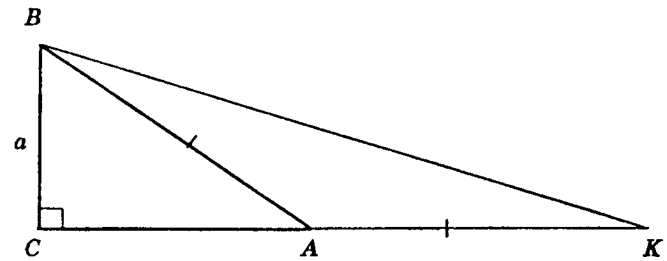
б) Если $\angle BDC \le 90^\circ$, то $\angle CDA \ge 90^\circ$. Тогда решений нет, иначе есть единственное решение.

II.

В ΔBDC $\angle CBD$ — острый (т.к. α и $\angle CBD$ смежные), $a > d$, таким образом, если $\angle BDC$ прямой или тупой, то серединный перпендикуляр к DC не пересекает сторону BA угла CBA и, значит, решений нет. Если $\angle DBC$ — острый, задача имеет единственное решение.

№ 48*.

Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме другого катета и гипотенузы.

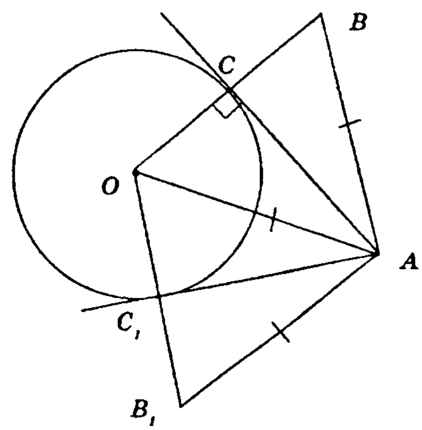


См. задачу 46.

№ 49.

1) Из точки A к окружности с центром O и радиусом R проведена касательная. Докажите, что точка C касания лежит на основании равнобедренного треугольника OAB, у которого $OA = AB$, $OB = 2R$.

2) Проведите касательную к окружности, проходящую через данную точку вне окружности.



1) $OC \perp AC$ по определению. Продлим OC до точки B так, что $CB = OC$. В ΔOBA отрезок AC является высотой и медианой, так как $OC = BC$ по построению, таким образом, ΔOBA — равнобедренный. Откуда $AO = AB$ и $OB = 2OC = 2R$.

2) Проведем к данной окружности касательную, проходящую через данную точку A. Сначала соединим точки O и A.

Затем проведем окружности с центром O и радиусом $2R$ и OA. Они пересекаются в двух точках B и B_1.

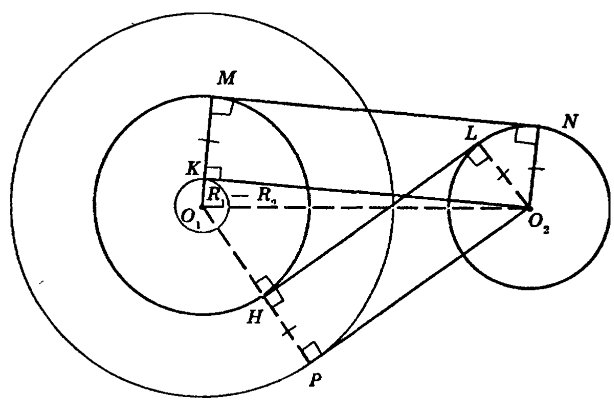
OB и OB_1 пересекают окружность в точках C и C_1. Соединив их с точкой A, получим две касательные AC и AC_1.

ΔOAB и ΔOAB^1 — равнобедренные AC и AC_1 — медианы, значит они являются и высотами. Таким образом, $AC \perp OC = R$, $AC_1 \perp OC_1 = R$, следовательно, AC и AC_1 — касательные. Т.к. к окружности можно провести не более двух касательных (задача № 16 § 5), то построение закончено.

№ 50*.

Проведите общую касательную к двум данным окружностям.

Сначала построим окружность с центром O_1 и радиусом $R_1 - R_2$. Из центра O_2 второй окружности проводим касательную к этой окружности (задача № 49). Касательная касается этой окружности в точке K.



Продлим O_1K до пересечения с окружностью с центром O_1 и радиусом R_1. Прямая O_1K пересечет эту окружность в точке M. Теперь проводим касательную из точки M к окружности с центром O_2 и радиусом R_2. Таким образом, MN — первая касательная, т.к. $MN \perp O_1M$, $O_2N \perp MN$, следовательно, MN — общая касательная.

Затем строим окружность с центром в точке O_1 и радиусом $R_1 + R_2$ и проводим касательную к ней O_2P. $O_1H = R_1$ принадлежит O_1P. Из точки H проведем касательную HL к окружности с центром O_2 и радиусом R_2, таким образом, HL — вторая касательная, т.к. $HL \perp O_2L$ и $HL \perp O_1H$, следовательно, HL — общая касательная.

Рассмотрим всевозможные варианты:

1) Если центр одной окружности лежит внутри другой и они не пересекаются, то касательную провести нельзя.

2) Если центр одной окружности лежит внутри другой и они касаются в одной точке, то одна касательная.

3) Если они пересекаются в двух точках, то две касательные.

4) Если единственная точка пересечения лежит между их центрами, то три касательные.

5) Если $R_1 + R_2 < O_1O_2$, то четыре касательных.

6) Если $R_1 = R_2$ и O_2 совпадает с O_1, то бесконечное число касательных.