

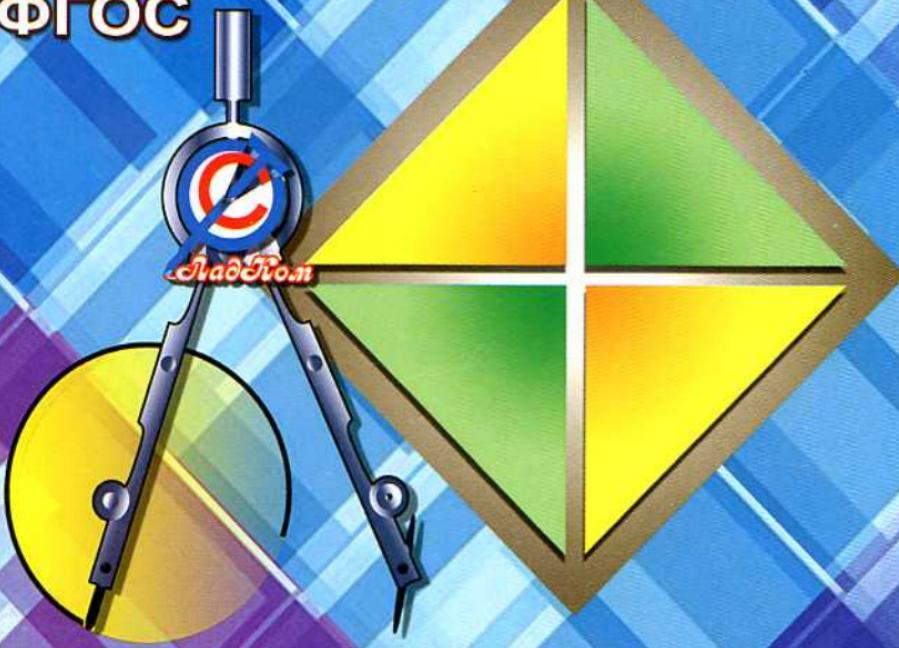
УМК
ГЕОМЕТРИЯ

Л.С. Атанасян

**ВСЕ
ДОМАШНИЕ
РАБОТЫ**

8
класc

ФГОС



**К УЧЕБНИКУ
И РАБОЧЕЙ ТЕТРАДИ**

**Все домашние
работы
по ГЕОМЕТРИИ
за 8 класс
к учебнику и рабочей тетради
Атанасяна Л.С.,
Бутузова В.Ф. и др.**

ФГОС



**Стандарт
Москва
2015**

УДК 882 (075)

ББК 812 Р-7

325

Серия
«Домашний репетитор.
Решебники для родителей»
(учебно-методическое издание
для взрослых)

Захарцов М.А.

Все домашние работы по геометрии за 8 класс к учебнику и рабочей тетради Атанасяна Л.С., Бутузова В.Ф. и др. (Геометрия. 7—9 классы. Учебник; Геометрия. Рабочая тетрадь. 8 класс. Издательство «Просвещение» 2012—2014). ФГОС. М.: ООО «Стандарт», 2015. — 224 с.

ISBN 978-5-91336-216-2

Наш «Решебник» содержит ответы ко всем заданиям и упражнениям учебника и рабочей тетради УМК Геометрия 8 класс Л.С. Атанасяна и др.

Здесь подробно разобраны методы и способы их выполнения, показан правильный путь решения. Издание адресовано исключительно родителям учащихся, для проверки домашних заданий и помощи в решении задач.

Введение

В курсе геометрии 8 класса изучаются наиболее важные виды четырехугольников — параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция; даётся представление о фигурах, обладающих осевой или центральной симметрией; расширяются и углубляются представления учащихся об измерении и вычислении площадей; выводятся формулы площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции; доказывается одна из главных теорем геометрии — теорема Пифагора; вводится понятие подобных треугольников; рассматриваются признаки подобия треугольников и их применения; делается первый шаг в освоении учащимися тригонометрического аппарата геометрии; расширяются сведения об окружности, полученные учащимися в 7 классе; изучаются новые факты, связанные с окружностью.

Наш «Решебник» структурирован согласно заданиям учебника и рабочей тетради. Его главное преимущество состоит в том, что он позволяет наметить правильный путь исследования, проконтролировать точность выполнения различных по сложности задач и упражнений по геометрии. С помощью «Решебника» учащиеся смогут добиться хороших результатов на уроках и эффективно подготовиться к ЕГЭ.

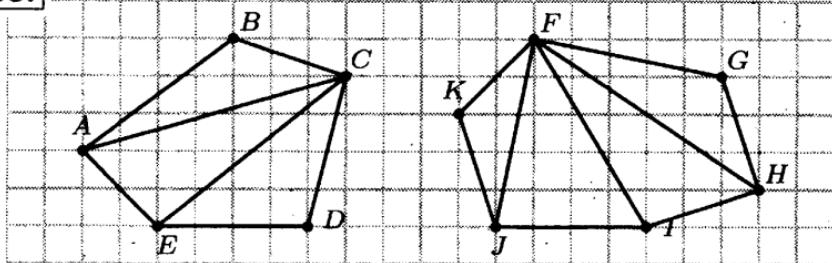
Родители, используя наше издание, в короткий срок способны стать квалифицированными домашними репетиторами для собственных детей.

Учебник

Глава V. Четырехугольники

§ 1. Многоугольники

363.



В случае пятиугольника $ABCDE$ он делится на три треугольника: $\triangle ABC$, $\triangle ACE$, $\triangle CDE$. А в случае шестиугольника $FGHIJK$, на четыре: $\triangle FGH$, $\triangle FHI$, $\triangle FIJ$, $\triangle FJK$.

364. Сумма углов S_n выпуклого n -угольника равна:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Отсюда получаем:

а) при $n = 5$; $S_5 = (n - 2) \cdot 180^\circ = (5 - 2) \cdot 180^\circ = 3 \times 180^\circ = 540^\circ$;

б) при $n = 6$; $S_6 = (n - 2) \cdot 180^\circ = (6 - 2) \cdot 180^\circ = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$

в) при $n = 10$; $S_{10} = (n - 2) \cdot 180^\circ = (10 - 2) \cdot 180^\circ = 8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$.

Ответ: а) 540° ; б) 720° ; в) 1440° .

365. Пусть n — число сторон выпуклого многоугольника, α — величина угла многоугольника, по условию задачи равные друг другу. Тогда

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = \alpha n \Rightarrow n = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}.$$

Отсюда получаем:

а) при $\alpha = 90^\circ$, $n = \frac{360^\circ}{180^\circ - 90^\circ} = 4$;

б) при $\alpha = 60^\circ$, $n = \frac{360^\circ}{180^\circ - 60^\circ} = 3$;

в) при $\alpha = 120^\circ$, $n = \frac{360^\circ}{180^\circ - 120^\circ} = 6$;

г) при $\alpha = 108^\circ$, $n = \frac{360^\circ}{180^\circ - 108^\circ} = 5$;

Ответ: а) 4; б) 3; в) 6; г) 5.

366. Пусть наибольшая сторона четырехугольника $ABCD$ — $AB = x$ мм, тогда три другие стороны равны $BC = (x - 3)$ мм, $CD = (x - 4)$ мм, $DA = (x - 5)$ мм.

Периметр четырехугольника $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = x + (x - 3) + (x - 4) + (x - 5) = 4x - 12 = 80$ мм
 $\Rightarrow 4x = 92 \Rightarrow x = 23$. Следовательно, $AB = 23$ мм, $BC = 20$ мм, $CD = 19$ мм, $DA = 18$ мм.

Ответ: 23 мм, 20 мм, 19 мм, 18 мм.

367. Пусть одна из сторон четырехугольника равна x см, тогда по условию задачи другие его стороны равны $(x - 8)$, $(x + 8)$, $3(x - 8)$. Так как периметр четырехугольника равен 66 см, то $x + (x - 8) + (x + 8) + 3(x - 8) = 66 \Rightarrow 6x - 24 = 66 \Rightarrow 6x = 90 \Rightarrow x = 15$ см, а другие стороны соответственно равны 7 см, 23 см, 21 см.

Ответ: 7 см, 15 см, 21 см, 23 см.

368. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна $(n - 2) \cdot 180^\circ = (4 - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Так как по условиям задачи они равны друг другу, то величина одного угла равна $360^\circ : 4 = 90^\circ$.

Ответ: 90° .

369. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна $(n - 2) \cdot 180^\circ = (4 - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Следовательно $\angle A + \angle B + \angle C = 360^\circ - \angle D = 360^\circ - 135^\circ = 225^\circ$. А так как $\angle A = \angle B = \angle C$ по условию задачи, то $\angle A = \angle B = \angle C = 225^\circ : 3 = 75^\circ$.

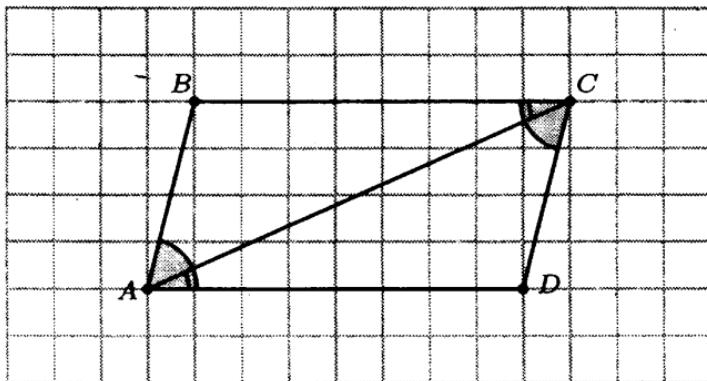
Ответ: 75° .

370. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна $(n - 2) \cdot 180^\circ = (4 - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Пусть наименьший угол такого четырехугольника равен x , тогда из условий задачи получаем, что другие углы пропорционально равны $2x$, $4x$ и $5x$. Следовательно $x + 2x + 4x + 5x = 360^\circ \Rightarrow 12x = 360^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$, $2x = 60^\circ$, $4x = 120^\circ$ и $5x = 150^\circ$.

Ответ: 30° , 60° , 120° , 150° .

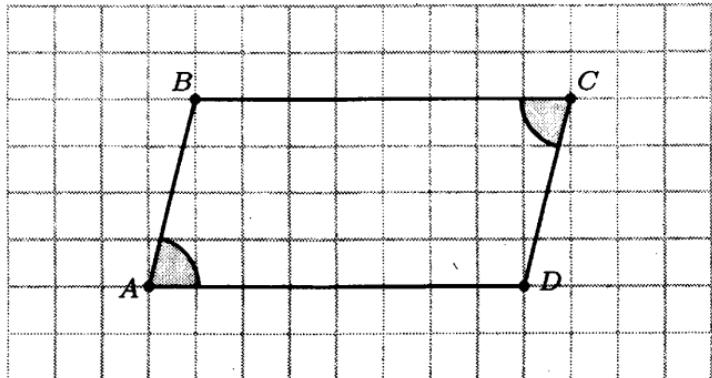
§ 2. Параллелограмм и трапеция

371. а) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведем диагональ AC . По условию $\angle ACD = \angle BAC$ и $\angle BCA = \angle DAC$. Углы ACD , BAC и углы BCA и DAC являются накрест лежащими при пересечении соответствующих прямых (AB и CD , BC и AD) и секущей AC , поэтому $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$. Следовательно, так как противоположные стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ попарно параллельны, то по определению он является параллелограммом.



б) Так как в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы $\angle A$ и $\angle D$ — односторонние при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD , то $\angle A + \angle D = 180^\circ$. По условию задачи $\angle A = \angle C$, то $\angle C + \angle D = 180^\circ$. Следовательно углы C и D являются односторонними углами при пересечении прямых CB и AD секущей CD , а их сумма равна 180° , значит $CB \parallel AD$.

Так как $AB \parallel CD$ и $CB \parallel AD$, то по определению четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.



372. а) Пусть x — одна из сторон параллелограмма, тогда другая его сторона равна $(x + 3)$, а его периметр равен $P = 2(x + (x + 3)) = 2(2x + 3) = 4x + 6 = 48 \Rightarrow 4x = 42 \Rightarrow x = 10,5$ см — длина параллельных друг другу сторон. $(x + 3) = 10,5 + 3 = 13,5$ см — длина двух других параллельных сторон.

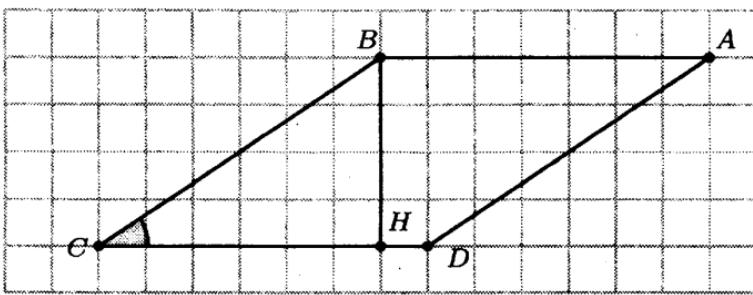
б) Пусть x — одна из сторон параллелограмма, тогда другая его сторона равна $(x + 7)$, а его периметр равен $P = 2(x + (x + 7)) = 2(2x + 7) = 4x + 14 = 48 \Rightarrow 4x = 42 \Rightarrow 8,5$ см — длина параллельных друг другу сторон. $(x + 7) = 8,5 + 7 = 15,5$ см — длина двух других параллельных сторон.

б) Пусть x — одна из сторон параллелограмма, тогда другая его сторона равна $2x$, а его периметр равен $P = 2(x + 2x) = 48 \Rightarrow 6x = 48 \Rightarrow 8$ см — длина параллельных друг другу сторон. $2x = 2 \cdot 8 = 16$ см — длина двух других параллельных сторон.

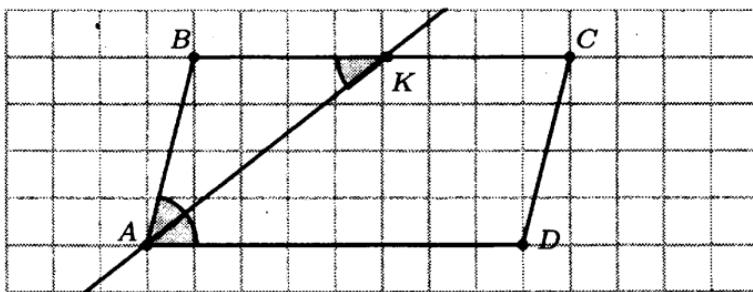
Ответ: а) 10,5 см, 13,5 см; б) 8,5 см, 15,5 см; в) 8 см, 16 см.

373. Пусть в параллелограмме $ABCD$ BH — заданная высота. Так как $\triangle CBH$ — прямоугольный, а $\angle C = 30^\circ$, то $BC = AD = 2BH = 2 \cdot 6,5 = 13$ см. Так как $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 50$ см, то $AB = CD = P_{ABCD}/2 - CB = 50/2 - 13 = 25 - 13 = 12$ см.

Ответ: $AB = CD = 12$ см, $AD = BC = 13$ см.



374. $\angle BAK = \angle KAD$, так как AK — биссектриса $\angle A$. $\angle BKA = \angle KAD$, так как они накрест лежащие при $BC \parallel AD$ секущей AK . Следовательно $\angle BKA = \angle BAK$ и $\triangle BAK$ — равнобедренный, а значит $AB = BK = 15$ см и $BC = BK + KC = 15 + 9 = 24$ см. Значит $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(15 + 24) = 78$ см.



Ответ: 78 см.

375. $\angle BAK = \angle KAD$, так как AK — биссектриса $\angle A$. $\angle BKA = \angle KAD$, так как они накрест лежащие при $BC \parallel AD$ секущей AK . Следовательно $\angle BKA = \angle BAK$ и $\triangle BAK$ — равнобедренный, а значит $AB = BK = 7$ см или $AB = BK = 14$ см, и $BC = BK + KC = 7 + 14 = 21$ см. Значит $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(7 + 21) = 56$ см или $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(14 + 21) = 70$ см.

Ответ: 56 см или 70 см.

376. а) Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle A = \angle C = 84^\circ$, $\angle B = \angle D$, $\angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow \angle B = \angle D = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$.

б) $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle A - \angle B = 55^\circ \Rightarrow 2\angle A = 235^\circ$, $2\angle B = 125^\circ \Rightarrow \angle A = 117^\circ 30'$, $\angle B = 62^\circ 30'$.

Так как противоположные углы параллелограмма равны, то $\angle C = \angle A = 117^\circ 30'$, $\angle D = \angle B = 62^\circ 30'$.

в) По условию $\angle A + \angle C = 142^\circ$. По свойству параллелограмма $\angle A = \angle C = 142^\circ : 2 = 71^\circ$. Так как $\angle A + \angle B = 180^\circ$ и $\angle B = \angle D \Rightarrow \angle B = \angle D = 180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$.

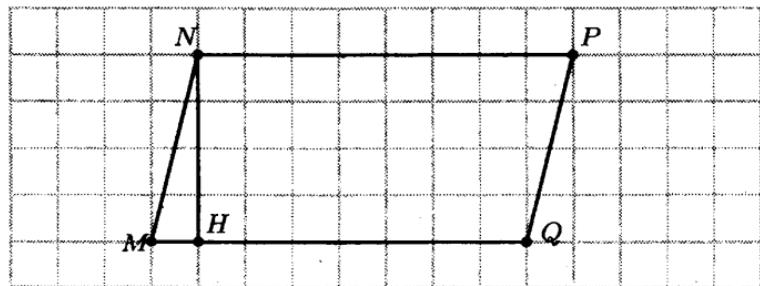
г) По условию $\angle A = 2\angle B$. Так как $\angle B = \angle D$ и $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то $3\angle B = 180^\circ \Rightarrow \angle B = 60^\circ \Rightarrow \angle A = \angle C = 2\angle B = 120^\circ$.

д) По условию $\angle CAD = 16^\circ$ и $\angle ACD = 37^\circ$. Так как $\angle CAD + \angle ACD + \angle D = 180^\circ \Rightarrow \angle D = \angle B = 180^\circ - 16^\circ - 37^\circ = 127^\circ$. Из $\angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow \angle A = \angle C = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$.

Ответ: а) $84^\circ, 96^\circ, 84^\circ, 96^\circ$; б) $117^\circ 30', 62^\circ 30', 117^\circ 30', 62^\circ 30'$; в) $71^\circ, 109^\circ, 71^\circ, 109^\circ$; г) $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$; д) $53^\circ, 127^\circ, 53^\circ, 127^\circ$.

377. Так как точка H принадлежит отрезку MQ , то $MH + HQ = MQ = 8$ см и $NP = MQ = 8$ см. Треугольник MNH — прямоугольный и $\angle MNH = 30^\circ$, то $\angle M = \angle P = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, а $MN = PQ = 2MH = 6$ см (в параллелограмме противоположные углы и стороны равны). Из $\angle M + \angle N = \angle P + \angle Q = 180^\circ \Rightarrow \angle N = \angle Q = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Ответ: стороны параллелограмма: 6 см, 8 см, 6 см, 8 см; углы параллелограмма: $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$.

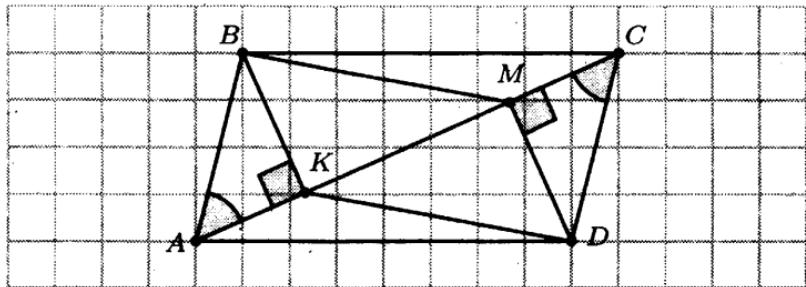


378. Задача решена в учебнике.

379. $\triangle AKB = \triangle CMD$ (по гипотенузе ($AB = DC$ — по свойству противоположных сторон параллелограмма) и острому углу ($\angle BAK = \angle DCM$ — накрест лежащие)),

следовательно $BK = DM$. Так как $\angle BKM = \angle DMK = 90^\circ$ по определению, и они накрест лежащие при прямых BK и DM секущей KM , то $BK \parallel DM$.

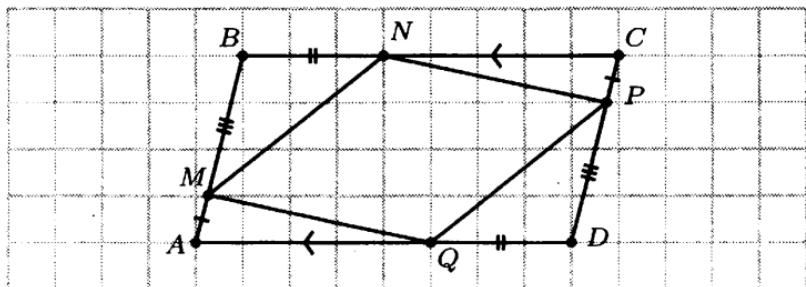
Так как стороны BK и DM равны и параллельны, то по признаку 1° п. 44 учебника $BMDK$ — параллелограмм.



380. Из условий задачи следует, что $AB = AM + MB$, $DC = DP + PC$ и $AM = PC$, $MB = DP$, то $AB = DC$. Аналогично $BC = AD$. Следовательно четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (по 2° признаку, п. 44 учебника).

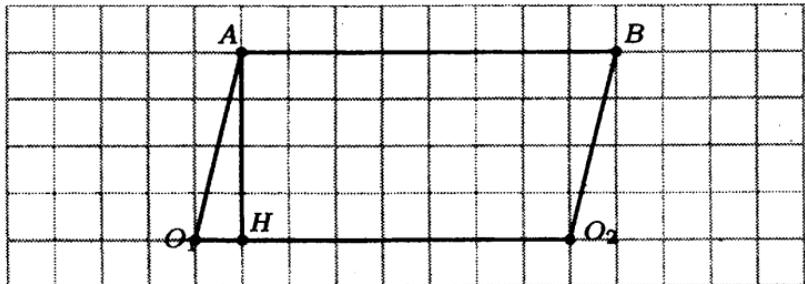
$\triangle MAQ \cong \triangle PCN$ по двум сторонам и углу между ними ($AM = CP$, $AQ = CN$ — по условию, а $\angle A = \angle C$ как противоположные углы параллелограмма $ABCD$), следовательно, $MQ = PN$. Аналогично доказывается, что $MN = PQ$.

Значит, по 2° признаку, п. 44 учебника $MNPQ$ — параллелограмм.



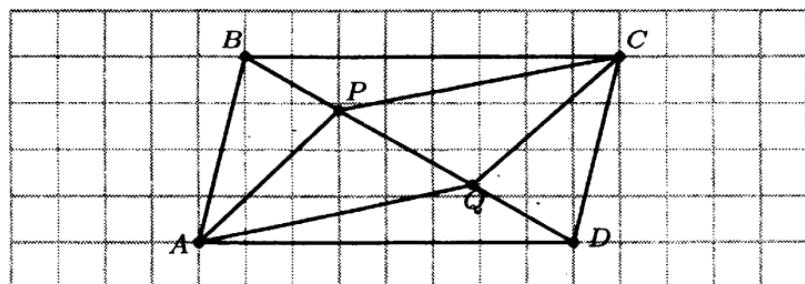
381. По условию задачи $O_1A = O_2B$ и $AB = O_1O_2$, следовательно O_1ABO_2 — параллелограмм (по 2° признаку, п. 44 учебника), поэтому $AB \parallel O_1O_2$ (по определению параллелограмма). Пусть AH — высота параллелограмма

O_1ABO_2 , значит, если $AH = 0$, то AB и O_1O_2 будут лежать на одной прямой.

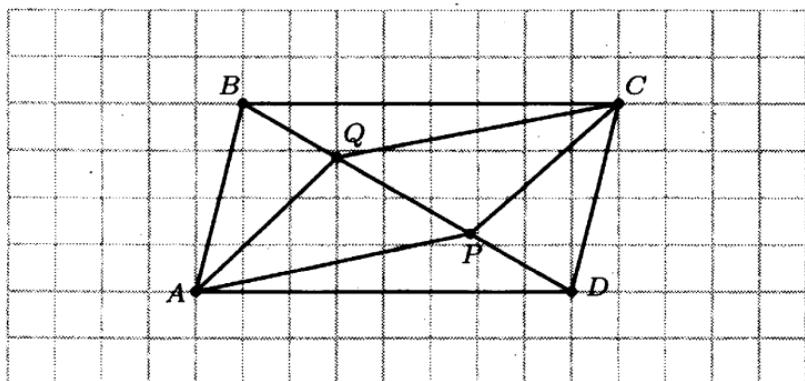


382. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам (2° , п. 43 учебника), то $BO = OD$, и так как точки B_1 и D_1 — середины отрезков BO и OD , то $B_1O = OD_1$. Аналогично рассуждая получаем, что $A_1O = OC_1$. Таким образом, в четырехугольнике $A_1B_1C_1D_1$ диагонали A_1C_1 и B_1D_1 пересекаются в точке O и делятся ей пополам. Следовательно, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм (по признаку 3° , п. 44 учебника).

383. Пусть точка P лежит между точками B и Q . Так как $AB \parallel CD$ ($ABCD$ — параллелограмм), то $\angle ABD = \angle CDB$ (накрест лежащие) и $\triangle ABP \cong \triangle CDQ$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, $PB = QD$, $\angle ABP = \angle CDQ$). Следовательно $AP = CQ$. Аналогично можно доказать, что $\triangle ADQ \cong \triangle CBP \Rightarrow AQ = CP$. Значит в четырехугольнике $APCQ$ противоположные стороны равны, следовательно он параллелограмм (по признаку 2° , п. 44 учебника).

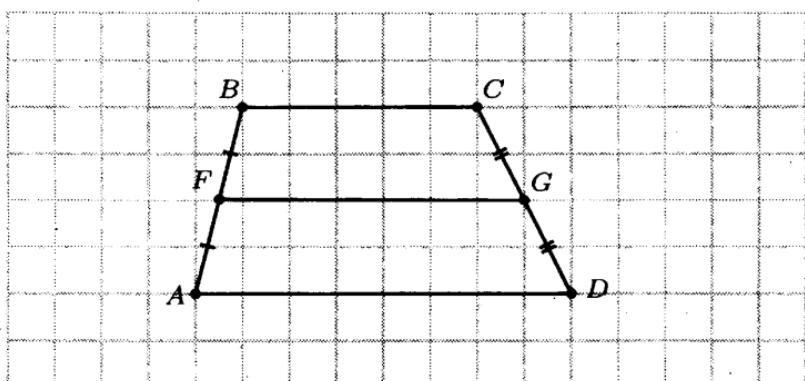


Пусть точка P лежит между точками B и C . Из этого получаем, что $PD = QB$ и доказательство, что четырехугольник $AQCP$ — параллелограмм, доказывается аналогично.



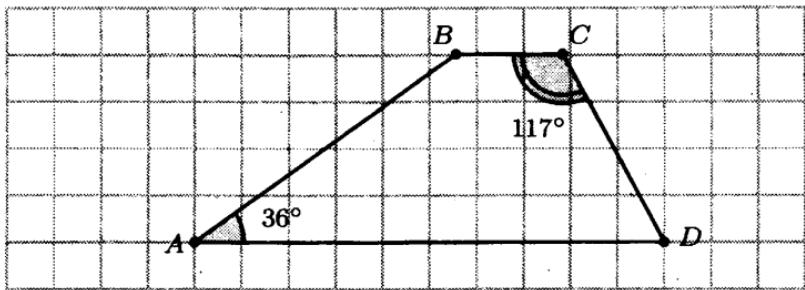
384.–385. Задачи решены в учебнике.

386. Пусть $ABCD$ — заданная трапеция, F — точка на середине стороны AB , а G точка на середине стороны CD . Через точку F проведем прямую, параллельную AD и BC . По теореме Фалеса, данная прямая, пересечет отрезок D посередине, а значит пройдет через точку G . Следовательно отрезок FG , соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен ее основаниям.



387. $\angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow \angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

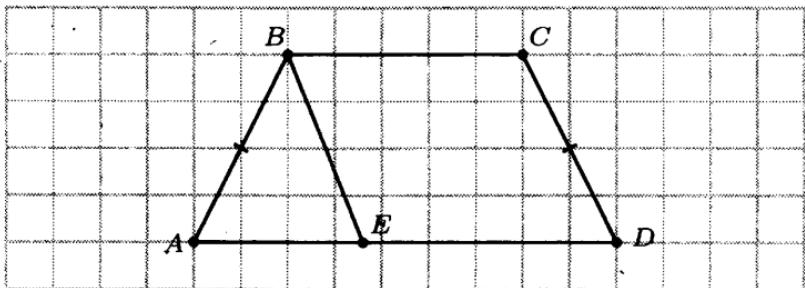
$$\angle C + \angle D = 180^\circ \Rightarrow \angle D = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ.$$



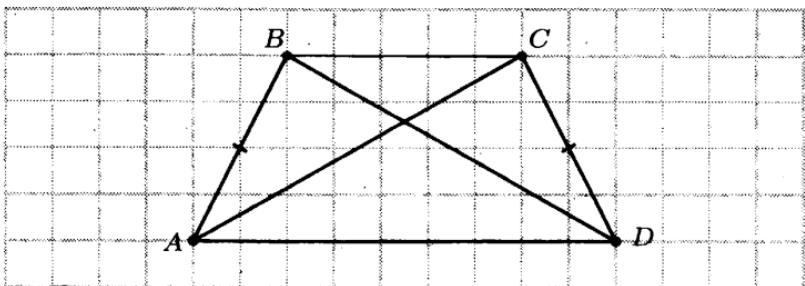
Ответ: $\angle B = 144^\circ$, $\angle D = 63^\circ$.

388. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , $AD > BC$.

a) Проведем прямую $BE \parallel CD$, где E – точка на отрезке AD . Так как $BCDE$ – параллелограмм (по построению), $CD = BE$, $CD = AB \Rightarrow \triangle ABE$ – равнобедренный, то $\angle A = \angle BEA$, $\angle D = \angle BEA \Rightarrow \angle A = \angle D$. Так как $\angle A + \angle B = 180^\circ$ и $\angle C + \angle D = 180^\circ \Rightarrow \angle A = \angle D$. Следовательно углы при каждом основании равнобедренной трапеции равны.

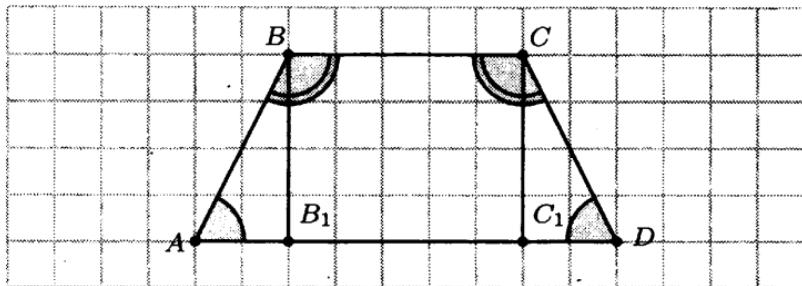


б) $\triangle ABD = \triangle DCA$ по двум сторонам и углу (AD – общая, $AB = CD$, $\angle A = \angle D$ – см. пункт а)). Следовательно $AC = BD$, т. е. диагонали равнобедренной трапеции равны.

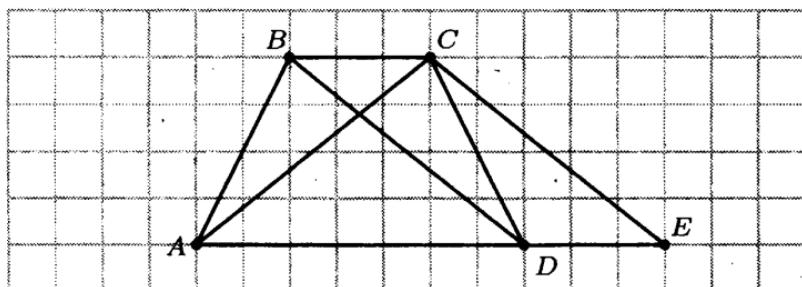


389. Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , $AD > BC$.

a) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$. На сторону AB из точек B и C опустим перпендикуляры BB_1 и CC_1 . $\triangle ABB_1 = \triangle CDC_1$ по катету и острому углу (так как $BB_1 = CC_1$ (BCC_1B_1 — прямоугольник), $\angle A = \angle D$). Следовательно $AB = CD$, значит $ABCD$ — равнобедренная трапеция.



б) $AC = BD$. Проведем прямую $CE \parallel BD$, такую что точка E лежит на прямой AD . Так как $BC \parallel DE$ и $BD \parallel CE$, то $BCED$ — параллелограмм. Значит $CE = BD = AC$, $\triangle ACE$ — равнобедренный, и $\angle CAE = \angle CEA$. Так как $CE \parallel BD$, то $\angle CEA = \angle CAE = \angle BDA$. Следовательно $\triangle ACD = \triangle ABD$ по двум сторонам и углу между ними, значит $AB = CD$, и $ABCD$ — равнобедренная трапеция.

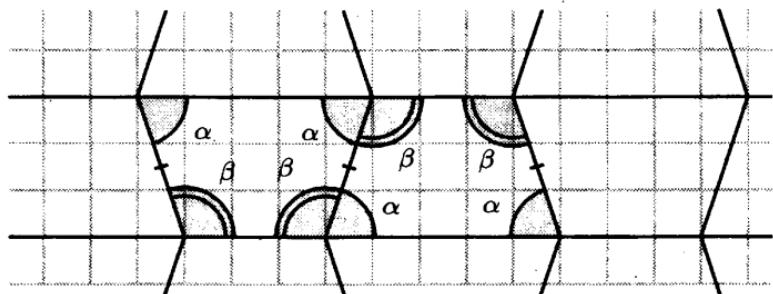


390. Пусть $\angle A = 68^\circ$, тогда $\angle D = \angle A = 68^\circ$ и $\angle C = \angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$.

Ответ: $68^\circ, 112^\circ, 112^\circ$.

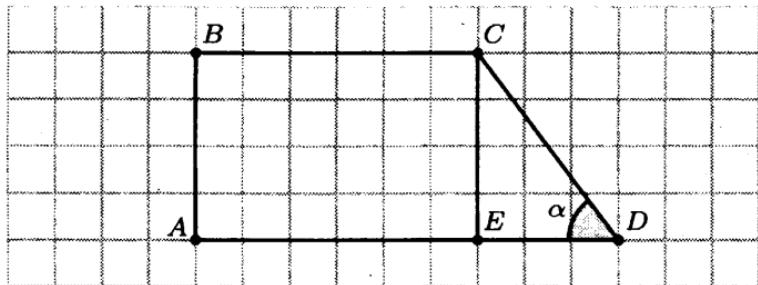
391. Пусть дана равнобедренная трапеция с углами при основании α и β . Положим на плоскость две трапеции так, чтобы совместились их боковые стороны, а угол образованный основаниями был развернутым. Так как $\alpha + \beta = 180^\circ$,

то основания трапеций будут лежать на одной прямой. Аналогично приставляя к полученной фигуре другие трапеции мы получим полосу, расположенную между параллельными прямыми. Совокупностью таких полос можно покрыть любую часть плоскости.



392. а) Пусть $AD = b = 7$ см, $BC = a = 4$ см, $\alpha = \angle D = 60^\circ$, $\angle A = \angle B = 90^\circ$. Проведем $CE \perp AB \Rightarrow AE = BC \Rightarrow DE = AD - AE = 7 - 4 = 3$ см. Так как $\alpha = 60^\circ \Rightarrow \angle DCE = 30^\circ \Rightarrow CD = 2DE = 2 \cdot 3 = 6$ см.

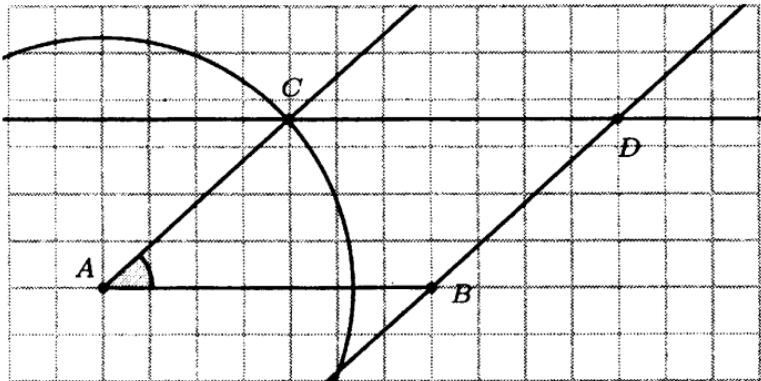
б) Пусть $AD = b = 15$ см, $BC = a = 10$ см, $\alpha = \angle D = 45^\circ$, $\angle A = \angle B = 90^\circ$. Проведем $CE \perp AB \Rightarrow AE = BC \Rightarrow DE = AD - AE = 15 - 10 = 5$ см. Так как $\alpha = 45^\circ \Rightarrow \triangle CDE$ — равнобедренный, следовательно $AB = CE = DE = 5$ см.



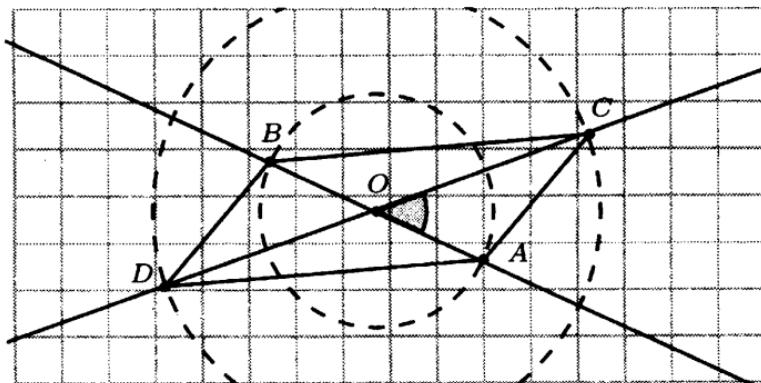
Ответ: а) 6 см; б) 5 см.

393. а) Сначала строим одну из заданных сторон AB , и в точке A проводим луч под данным углом к стороне AB . С помощью циркуля откладываем отрезок AC , равный второй заданной стороне параллелограмма. Так как в параллелограмме противолежащие стороны параллельны, то проведя через точку C прямые параллельные построенным

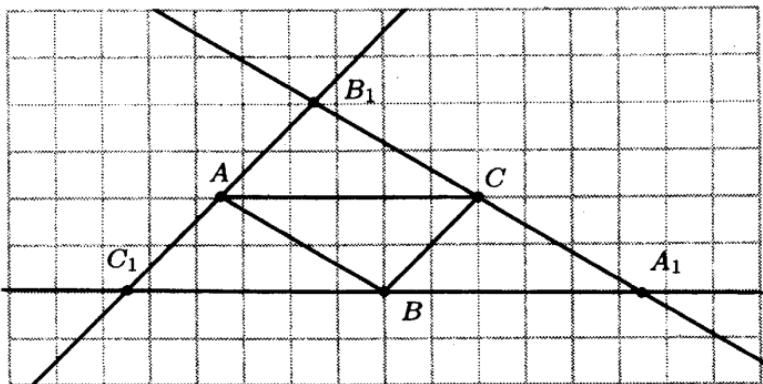
сторонам в точке их пересечения D получим четвертую вершину искомого параллелограмма $ACDB$.



б) Проводим две прямые под заданным углом между диагоналями. С помощью циркуля, из точки пересечения O , проводим две окружности, радиусами равными половине длины данной диагонали. Из свойства 2°, п. 43 учебника следует, что точки их пересечения с прямыми будут вершинами искомого параллелограмма.

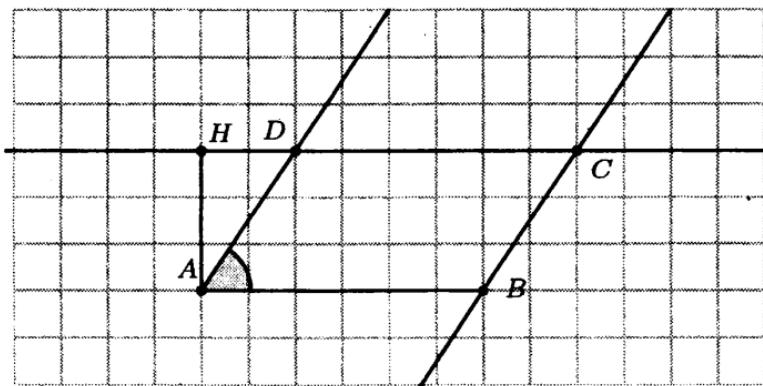


394. Пусть даны три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой. Соединим попарно эти точки и получим $\triangle ABC$. Через каждую вершину треугольника проведем прямую параллельную противолежащей ему стороне треугольника. Полученные четырехугольники $ABC B_1$, ABA_1C и $ACBC_1$ — параллелограммы, так как их противолежащие стороны попарно параллельны. Очевидно, что можно построить только три параллелограмма удовлетворяющим условиям задачи.



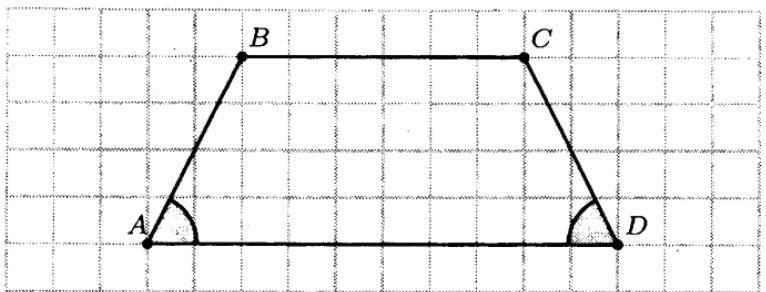
Ответ: три.

395. Пусть $AB = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$, $h = P_1Q_1$. Сначала строим заданную сторону AB , в точке A проводим луч под данным углом $\angle A$ к стороне AB , и строим отрезок $AH = h$ — перпендикулярный стороне AB . Через точку H проводим прямую параллельную стороне AB и получаем точку D — вершину параллелограмма. Затем через точку B проводим прямую параллельную стороне AD и получаем точку C . Соединяя вершины. Искомый параллелограмм построен.



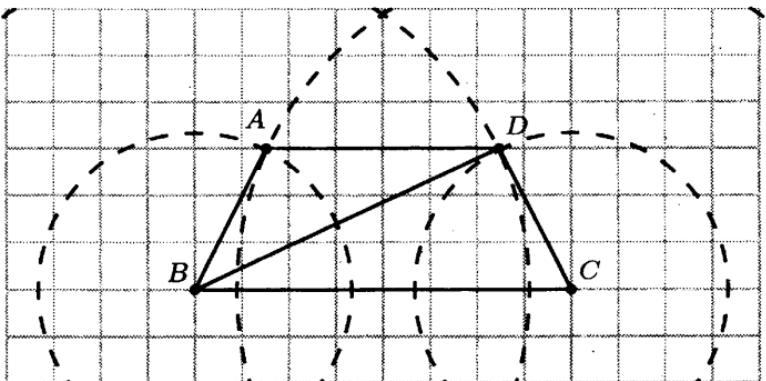
396. Задача решена в учебнике.

397. а) Строим заданную сторону AD . В точках A и D строим углы равные заданному $\angle A$ (так как в равнобедренной трапеции углы при основании равны). Откладываем отрезки AB и AC ($AB = CD$ так как трапеция равнобедренная). Соединяя попарно вершины. Искомая фигура построена.

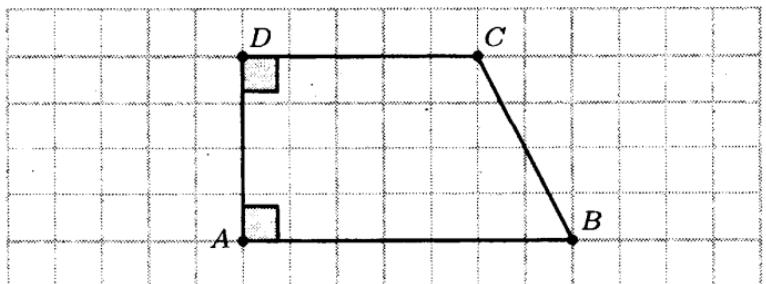


б) Строим заданное основание BC . Так как трапеция равнобедренная, то диагонали и боковые стороны у неё соответственно равны друг другу. Поэтому из точек B и C строим окружности равные величине боковой стороны AB и диагонали BD . Точки их пересечения A и D – вершины равнобедренной трапеции.

Задача не будет иметь решения если не будет выполняться неравенство треугольников $BD < BC + DC$.



398. Пусть AB и DC – основания трапеции ($AB > DC$), а AD – боковая сторона. Строим отрезок AB , затем $AD \perp AB$, $DC \perp AD$. Получаем прямоугольную трапецию $ABCD$.



§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат

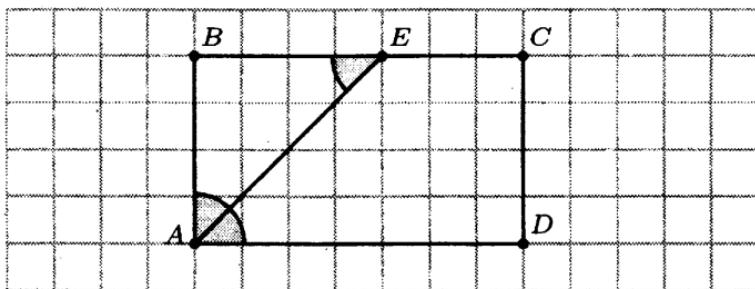
399. Примем для определенности, что у параллелограмма $ABCD$ $\angle A = 90^\circ$. Тогда и противоположный ему угол $\angle C = 90^\circ$ (1° , п. 43 учебника). Из $\angle A + \angle B = 180^\circ$ и $\angle C + \angle D = 180^\circ \Rightarrow \angle B = \angle D = 90^\circ$. Так как все углы параллелограмма $ABCD$ прямые, то это — прямоугольник (по определению).

400. Так как $\angle A = \angle B = 90^\circ \Rightarrow AD \parallel BC$ и $\angle C = \angle D = 90^\circ \Rightarrow AB \parallel DC$. Значит, противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны, и он является параллелограммом, а так как все его углы прямые, то он — прямоугольник.

401. а) $AD \parallel BC \Rightarrow \angle DAE = \angle BAE = \angle BEA \Rightarrow BA = BE$.

1 случай. $BE = 45,6$ см, $EC = 7,85$ см $\Rightarrow P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(AB + BE + EC) = 2(45,6 + 45,6 + 7,85) = 198,1$ см.

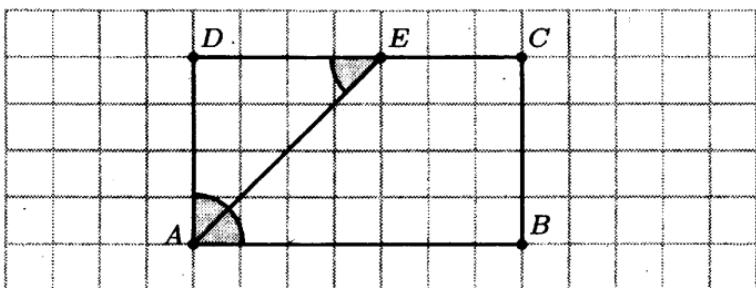
2 случай. $BE = 7,85$ см, $EC = 45,6 \Rightarrow P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(AB + BE + EC) = 2(7,85 + 7,85 + 45,6) = 122,6$ см.



а) $AB \parallel DC \Rightarrow \angle EAB = \angle EAD = \angle DEA \Rightarrow AD = DE$.

1 случай. $DE = 2,7$ дм, $EC = 4,5 \Rightarrow P_{ABCD} = 2(AD + DC) = 2(AD + DE + EC) = 2(2,7 + 2,7 + 4,5) = 19,8$ дм.

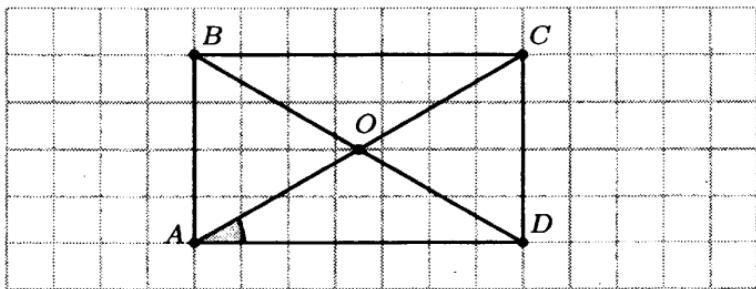
2 случай. $DE = 4,5$ дм, $EC = 2,7 \Rightarrow P_{ABCD} = 2(AD + DC) = 2(AD + DE + EC) = 2(4,5 + 4,5 + 2,7) = 23,4$ дм.



Ответ: а) 198,1 см или 122,6 см; б) 19,8 дм или 23,4 дм.

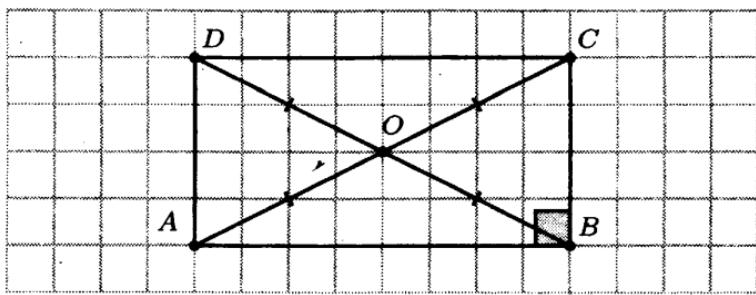
402. Так как $ADCD$ – прямоугольник и параллелограмм, то его диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам. Поэтому $AO = OB = OC = OD \Rightarrow \triangle AOD$ и $\triangle AOB$ – равнобедренные.

403. Так как $ADCD$ – прямоугольник и параллелограмм, то его диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам. Поэтому $AO = OB = OC = OD = 6\text{ см} \Rightarrow \triangle AOB$ – равнобедренный. $\angle CAD = 30^\circ \Rightarrow CD = \frac{1}{2}AC = 6\text{ см}$ и $AB = CD = 6\text{ см}$. Значит $P_{AOB} = AO + OB + AB = 6 + 6 + 6 = 18\text{ см}$.



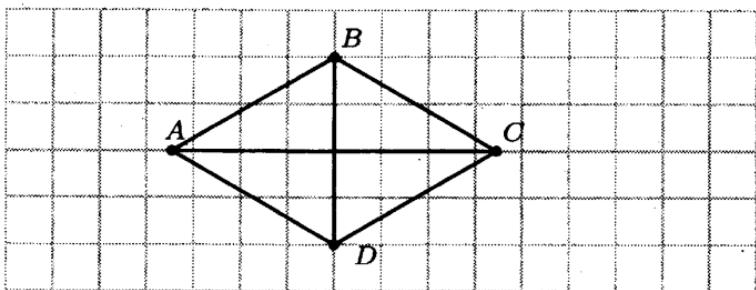
Ответ: 18 см.

404. Пусть BO – медиана, а AC – гипотенуза прямоугольного треугольника ABC . Построим точку D симметричную точке B относительно точки O . В $ABCD$ $BO = OD$ (по построению), $AO = OC$ (по условию), следовательно $ABCD$ – параллелограмм (по признаку 3° , п. 44 учебника). Так как у $ABCD$ все углы прямые, то $ABCD$ – прямоугольник и $AC = BD$, а значит $AO = OC = OB = OD \Rightarrow OB = \frac{1}{2}AC$.



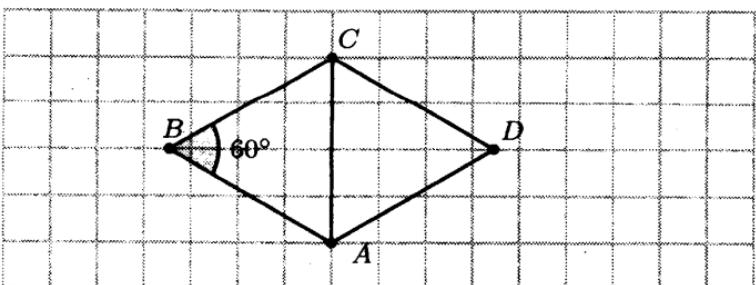
405. а) Так как у ромба стороны равны и по условиям задачи $AB = BD$, то $\triangle ABD \doteq \triangle BCD$ – равносторонний, то $\angle A = \angle C = 60^\circ$ и $\angle B = \angle D = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

б) Так как диагонали ромба делят его углы пополам, $\angle A = \angle C = 60^\circ$ и $\angle B = \angle D = 120^\circ$ (см. а)), то углы образованные диагоналями ромба с его сторонами равны $60^\circ : 2 = 30^\circ$ и $120^\circ : 2 = 60^\circ$.



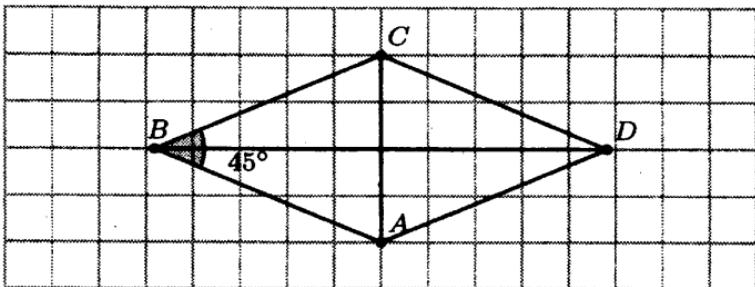
Ответ: а) 60° и 120° ; б) 30° и 60° .

406. Так как $\angle B = 60^\circ$, то $\triangle ABC$ – равносторонний, и $AB = BC = AC = 10,5$ см. Значит $AB = BC = CD = DA$ и $P_{ABCD} = 4AB = 4 \cdot 10,5 = 42$ см.



Ответ: 42 см.

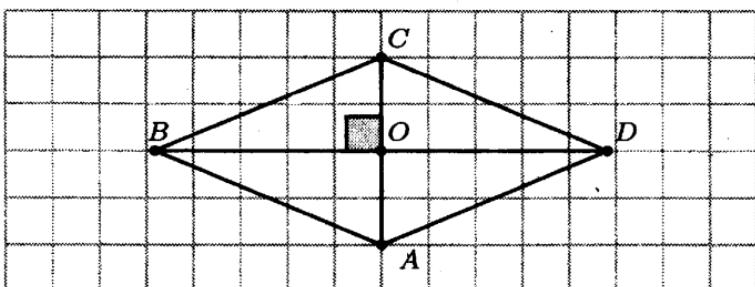
407. Пусть $\angle B = 45^\circ$, тогда $\angle A = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Так как диагонали ромба делят его углы пополам, то углы образованные его диагоналями со сторонами будут $45^\circ : 2 = 22^\circ 30'$ и $135^\circ : 2 = 67^\circ 30'$.



Ответ: $22^\circ 30'$ и $67^\circ 30'$.

408. а) Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AO = OC$ и $BO = OD$, и учитывая, что диагонали перпендикулярны, то $\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = \triangle DOA$ (по двум катетам). Следовательно $AB = BC = CD = DA$, т.е. $ABCD$ — ромб.

б) Если диагональ AC параллелограмма $ABCD$ является биссектрисой его угла A , то в $\triangle ABD$ AO — медиана и биссектриса, и значит $\triangle ABD$ — равнобедренный, следовательно $AB = AD$, а так как $AD = BC$ и $AB = AC$, то все стороны параллелограмма равны, т.е. $ABCD$ — ромб.

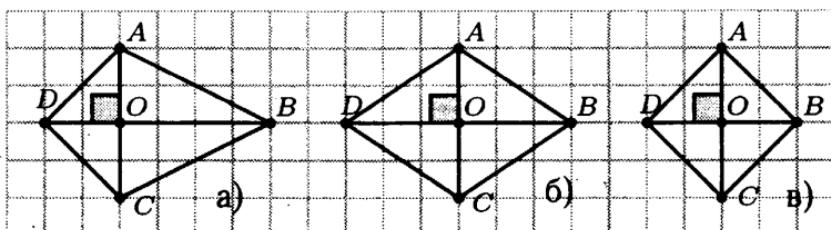


409. Так как $ABCD$ — ромб, то $AB = BC = CD = DA$ и по условиям задачи $\angle A = 90^\circ$, $\angle A = \angle C$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$ и $\angle B = \angle D$, то $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$. Следовательно $ABCD$ — квадрат (по определению).

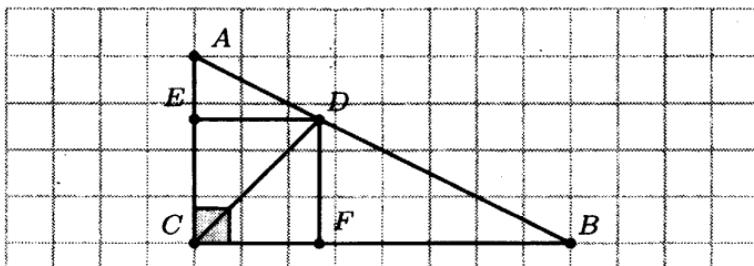
410. а) Нет, не является (см. рисунок).

б) Нет, не является (см. рисунок).

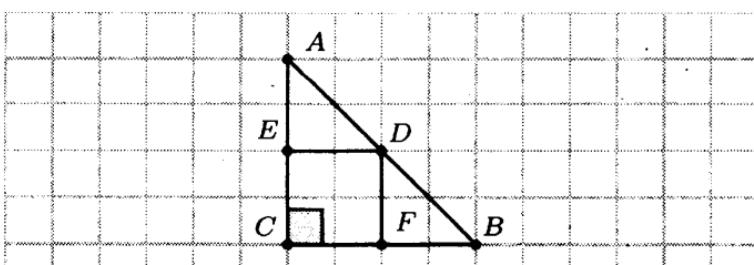
в) $ABCD$ — параллелограмм (2° , п. 43 учебника),
 $AC = BD \Rightarrow ABCD$ — прямоугольник (п. 47 учебника),
 $AC \perp BD \Rightarrow ABCD$ — ромб (задача 408, а)) $\Rightarrow AB = BC = CD = DA$. Следовательно $ABCD$ — квадрат.



411. Так как $DE \parallel CF$ и $DF \parallel CE$, то $ABCD$ — параллелограмм, а так как $\angle C = 90^\circ \Rightarrow \angle C = \angle CED = \angle EDF = \angle DFC = 90^\circ$ (см. задачу 399), то $ABCD$ — прямоугольник. $\angle DCF = \angle DCE$ (по условию), значит $CEDF$ — ромб (см. задачу 408, б)). Так как $CEDF$ ромб и прямоугольник, то он квадрат.

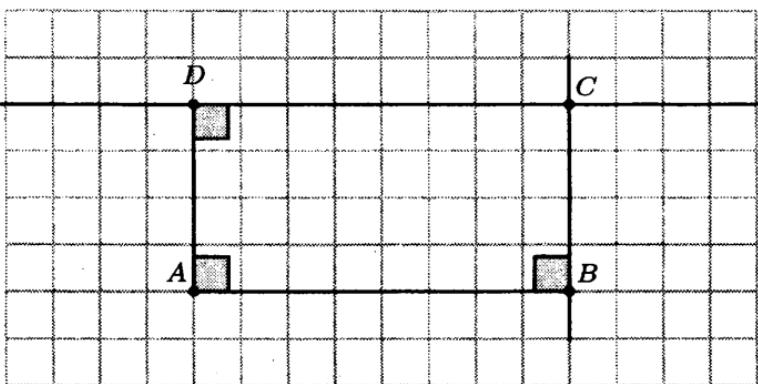


412. $\triangle ABC$ — равнобедренный и прямоугольный, следовательно $AC = CB \Rightarrow \angle A = \angle B = 45^\circ \Rightarrow AE = ED = EC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow P_{CEDF} = 4EC = 2AC = 2 \cdot 12 = 24$ см.

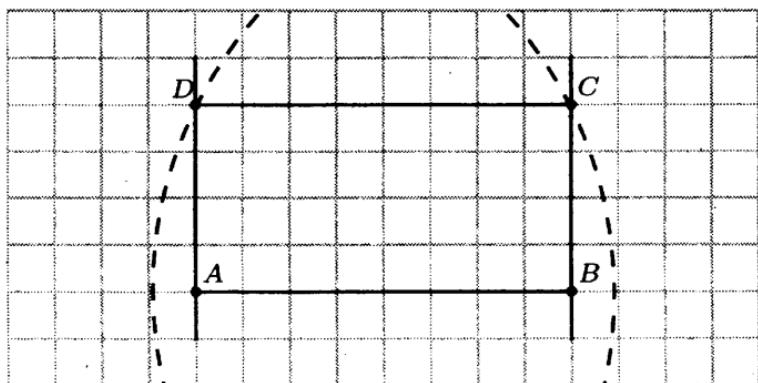


Ответ: 12 см.

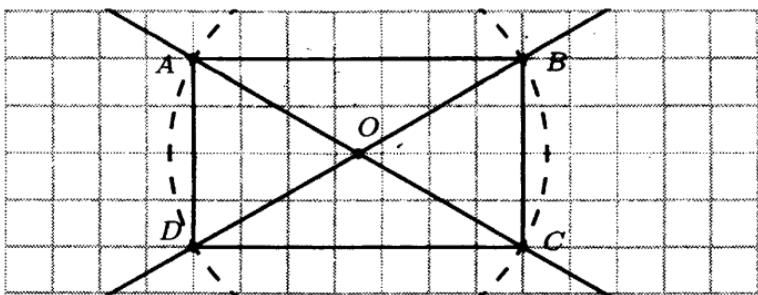
413. а) Построим отрезок AB равный одной из заданных сторон, в точке A построим отрезок $AD \perp AB$. Через точки D и B проведем прямые перпендикулярные сторонам AB и AD . Они пересекутся в точке C . Соединяя вершины. Искомый прямоугольник построен.



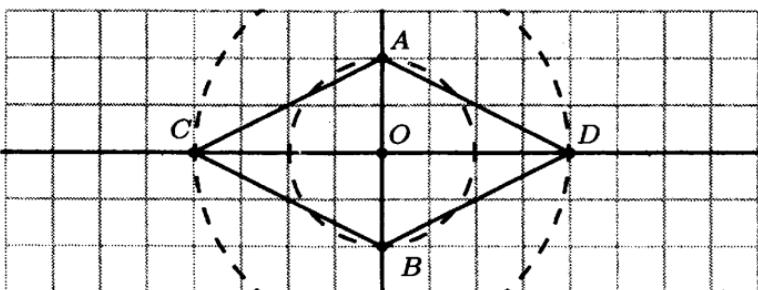
б) Построим заданную сторону AB , и в точках A и B проведем перпендикулярные к ней прямые. Из центров в точке A и B , циркулем с радиусом равным длине заданной диагонали, отметим точки D и C . $ABCD$ — искомый прямоугольник.



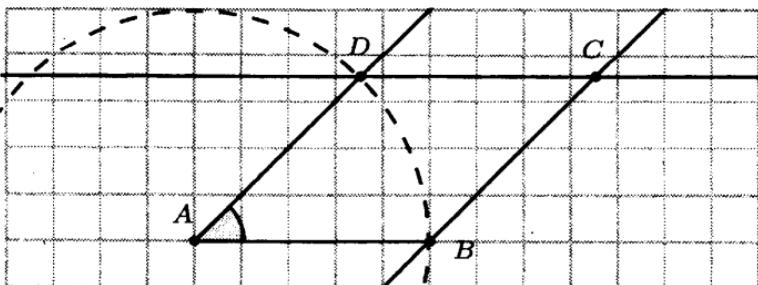
в) Диагонали прямоугольника равны друг другу (п. 46 учебника). Поэтому построим две прямые пересекающиеся под заданным углом и пересекающиеся в точке O . Из центра в точке O проведем окружность радиусом равным половине длины диагонали, отсекающую на прямых точки A , B , C и D — вершины прямоугольника. Соединяя попрано вершины. Искомый прямоугольник построен.



414. а) Диагонали ромба перпендикулярны друг другу и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно строим две взаимно перпендикулярные прямые, и из точки их пересечения O проводим две окружности отсекающие на прямых попарно симметричные точки A , B , C и D – являющиеся вершинами ромба $ABCD$. Соединяем попарно вершины. Искомый ромб построен.



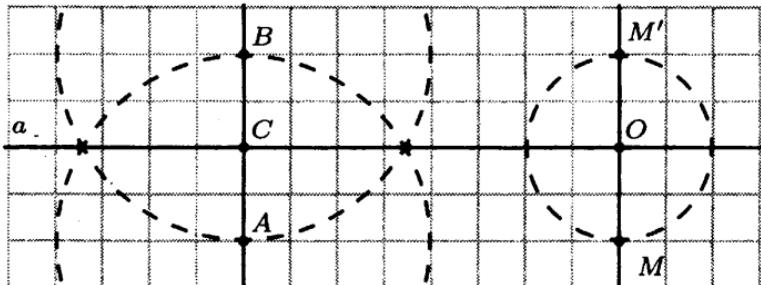
б) У ромба все стороны равны, а противолежащие друг другу – параллельны. Строим заданную сторону AB и заданный $\angle A$. Из центра в точке A , на стороне угла, отмечаем точку D , AD – вторая сторона ромба. Достраиваем ромб с помощью параллельных сторонам прямых. Искомая фигура построена.



415. а) Задачу можно решить аналогично задаче 413 а), принимая, что заданные стороны равны.

б) Задачу можно решить аналогично задаче 414 а), принимая, что заданные диагонали равны.

416. Сначала строится прямая a , относительно которой точки A и B — симметричны (п. 43 учебника). Если точка M лежит на прямой a , то она симметрична сама себе, если нет, то проводится прямая, проходящая через точку M перпендикулярно прямой a и из точки из пересечения O_1 откладывается отрезок O_1M' , равный отрезку O_1M . Таким образом точка M' — симметрична точке M , относительно прямой a .



417. а) Отрезок имеет две оси симметрии — прямую на которой он лежит и срединный (серединный) перпендикуляр.

б) Прямая имеет бесконечной множество осей симметрии — сама прямая и множество перпендикулярных к ней прямых (так как прямая бесконечна).

в) Луч имеет одну ось симметрии — прямую на которой он лежит.

Ответ: а) две; б) бесконечное множество; в) одну.

418. Если рассматривать только самую общую геометрию букв, то буквы **А** и **Е** имеют одну ось симметрии, а буква **О** — две.

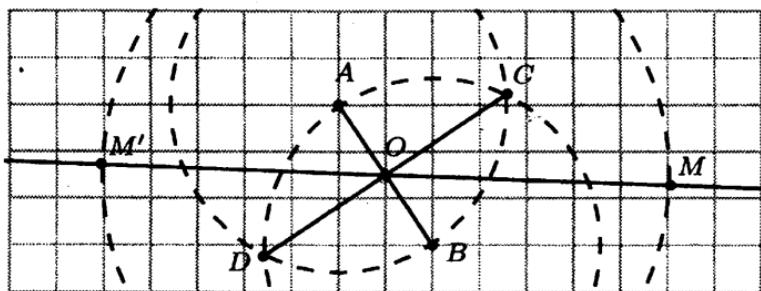
Ответ: А, Е, О.

419. Прямая проходящая через середины сторон прямоугольника делит его на два равных прямоугольника

(боковые стороны равны по определению, стороны делятся пополам по условию, углы равны 90°), следовательно прямая — ось симметрии.

420. Прямая, содержащая биссектрису равнобедренного треугольника делит его на два равных прямоугольных треугольника (основание делится пополам, боковые стороны равны, угол биссектрисы и основания 90°), следовательно прямая — ось симметрии.

421. Находим середину отрезка AB — точку O . Через точки O и M проводим прямую. Откладываем отрезок $OM' = OM$. Искомая точка построена.



- 422.** а) Центр симметрии отрезка — его середина.
б) У луча нет центра симметрии.
в) Центр симметрии пары пересекающиеся прямых — точка их пересечения.
г) Центр симметрии квадрата — точка пересечения диагоналей.

Ответ: а) да; б) нет; в) да; г) нет.

423. Если рассматривать только самую общую геометрию букв, то буквы **О** и **Х** имеют центр симметрии.

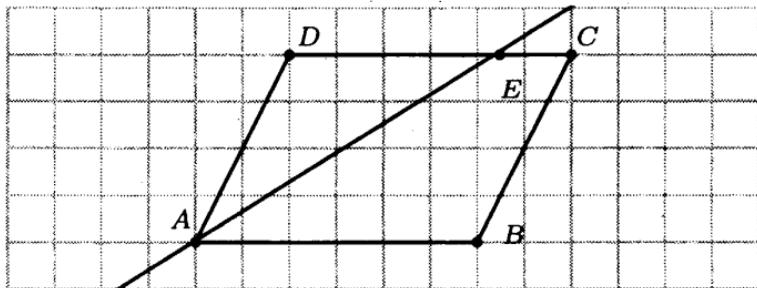
Ответ: О, Х.

Дополнительные задачи

424. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360° . Если у выпуклого четырехугольника углы не равны друг другу и среди них нет тупого угла ($< 90^\circ$), то их

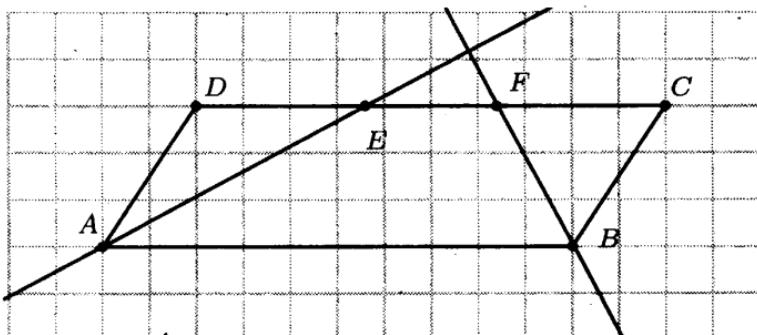
сумма будет меньше 360° . Следовательно один из углов тупой.

425. Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $AB = BC = 14$ см, и так как $AD = BC$ и $P_{ABCD} = 2(AB + AD)$, то $AD = P_{ABCD} : 2 - AB = 46 : 2 - 14 = 9$ см. Из того, что $\triangle AED$ – равнобедренный, $\Rightarrow AD = DF$ и $DE < DC$, то $E \in DC$ и $EC = DC - DE = 14 - 9 = 5$ см.



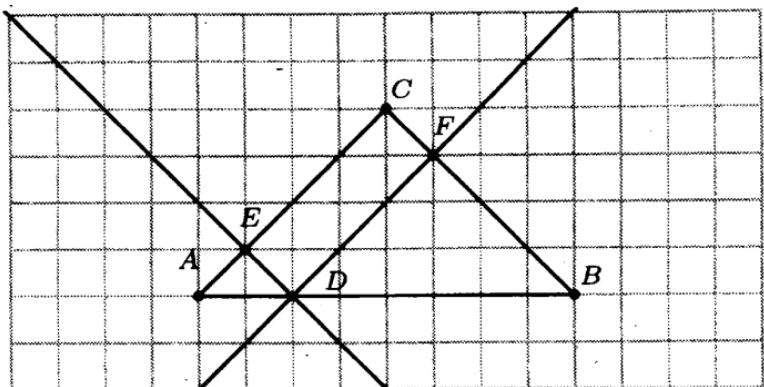
Ответ: биссектриса пересекает противоположную AB сторону DC ; 9 и 5 см.

426. $ABCD$ – параллелограмм, следовательно $DC = AB = 10$ см и $AD = BC = 3$ см. $\triangle ADE$ и $\triangle BCF$ – равнобедренные, т.е. $DE = AD = 3$ см и $FC = CB = 3$ см. $DC = DE + EF + FC \Rightarrow EF = DC - DE - FC = 10 - 3 - 3 = 4$ см.

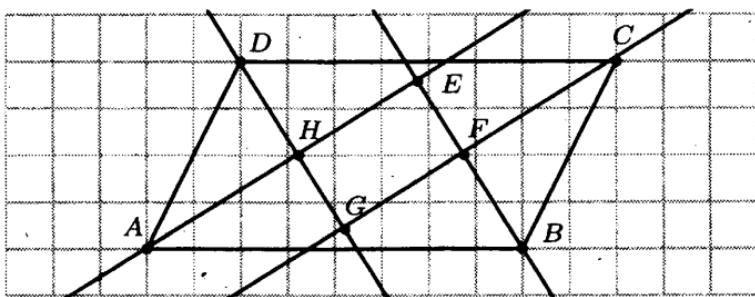


Ответ: 3, 4 и 3 см.

427. $\triangle AED$ и $\triangle DFB$ – равнобедренные ($\angle EAD = \angle EDA$, $\angle FDB = \angle FBD$), значит $ED = AE$ и $FD = FB$. $P_{CEDF} = CE + ED + CF + FD = CE + EA + CF + FB = AC + CB$.



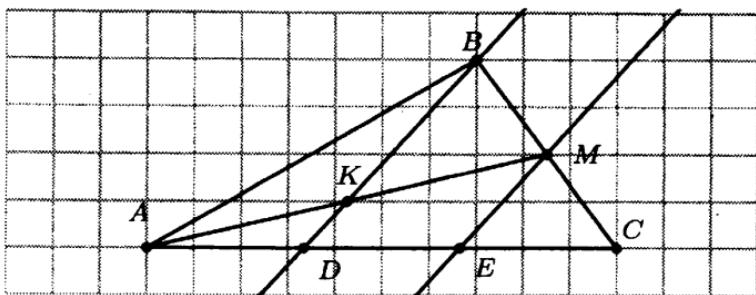
428. Так как $\angle A + \angle D = 180^\circ$ и $\angle B + \angle C = 180^\circ$, $\angle ADH + \angle HAD = \angle A/2 + \angle D/2 = 90^\circ$ и $\angle FCB + \angle CBF = \angle C/2 + \angle B/2 = 90^\circ$ то $\triangle ADH$ и $\triangle CBF$ – прямоугольные, т.е. $\angle DHA = \angle CFB = 90^\circ$. Следовательно углы четырехугольника $EFGH$ – прямые и $EFGH$ – прямоугольник.



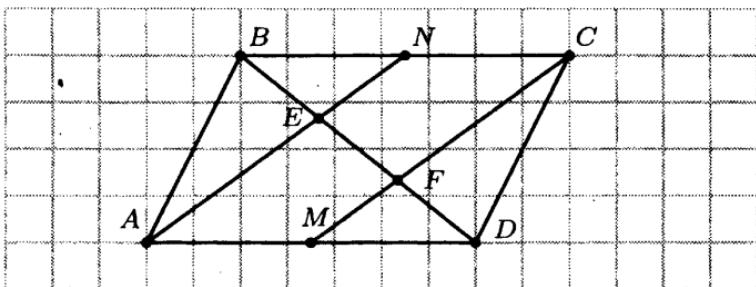
429. Из условий задачи $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle A + \angle D = 180^\circ$, $\angle D + \angle C = 180^\circ$, $\angle C + \angle B = 180^\circ \Rightarrow \angle B = \angle D$ и $\angle A = \angle C \Rightarrow AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$ (как односторонние углы при пересечении прямых и секущей), следовательно $ABCD$ – параллелограмм.

430. Если $\angle B = \angle D$ и $\angle A = \angle C \Rightarrow AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$ (как односторонние углы при пересечении прямых и секущей), следовательно $ABCD$ – параллелограмм.

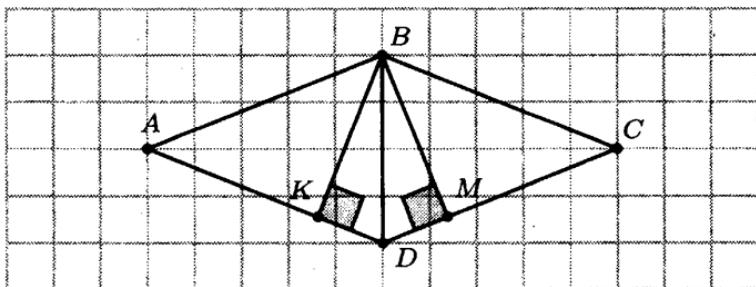
431. Проведем через точку M прямую ME , параллельную BK . Тогда согласно теореме Фалеса $AD = DE = CE$. Так как $AC = AD + DE + CE = 3AD \Rightarrow AD = \frac{1}{3}AC$.



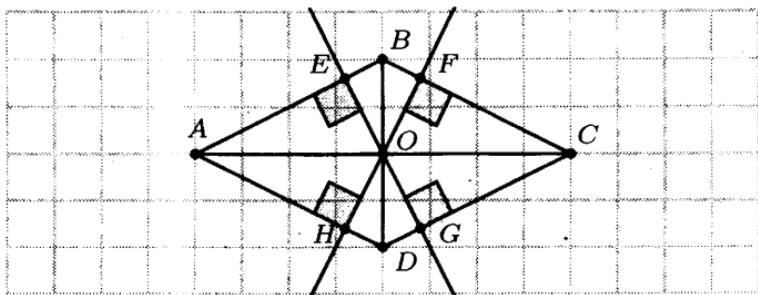
432. Так как $NC \parallel AM$, то $ANCM$ – параллелограмм и следовательно $AN \parallel CM$. Тогда по теореме Фалеса $BE = AF$ и $FD = AF$ (рассматривая $\triangle AED$ и $\triangle BFC$), следовательно $BE = AF = FD = \frac{1}{3}BD$.



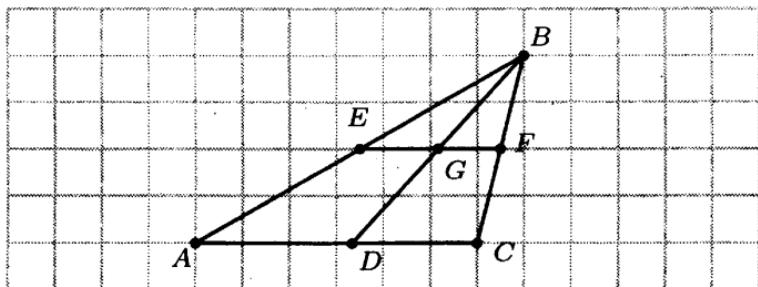
433. Диагонали ромба делят его углы пополам, следовательно $\angle BDK = \angle BDM \Rightarrow \triangle BDK \cong \triangle BDM \Rightarrow \angle KBD = \angle MBD$, т.е. BD – биссектриса $\angle KBM$.



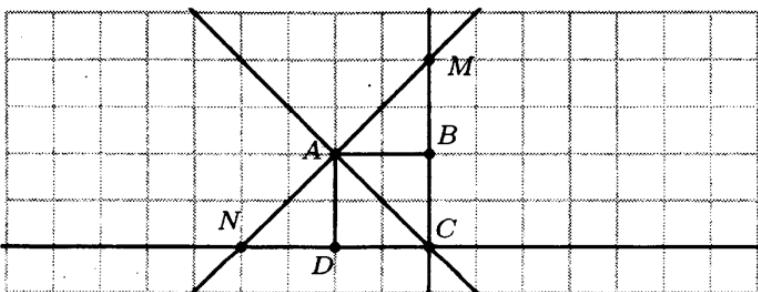
434. Диагонали ромба делятся точкой их пересечения пополам, и являются биссектрисами его углов (см. 433), следовательно $\triangle AEO \cong \triangle AOH \cong \triangle CFO \cong \triangle CGO$ (по гипotenузе и острому углу), значит, перпендикуляры $OE = OF = OG = OH$. То есть точка пересечения диагоналей O равноудалена от сторон ромба $ABCD$.



435. Пусть точка G — середина отрезка BD . Проведем $EF \parallel AC$. $BE = EA$ и $BF = FC$ (см. 384), следовательно G лежит на отрезке EF , концы которого являются серединами сторон.

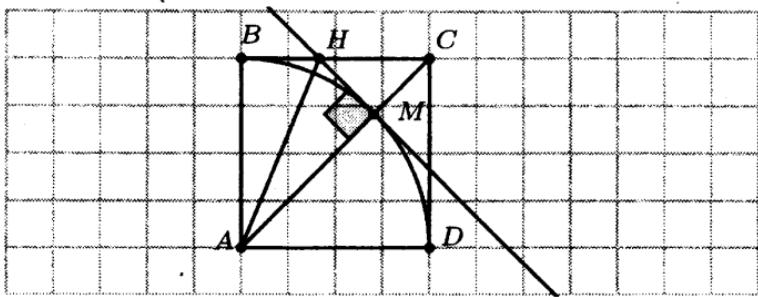


436. Так как $ABCD$ — квадрат, то AC делит угол пополам, значит $\angle MCA = \angle NCA = 45^\circ \Rightarrow \triangle ANC = \triangle AMC$ — равнобедренные и $CA = MA = AN \Rightarrow MN = 2AC = 2 \cdot 18,4 = 36,8$ см.

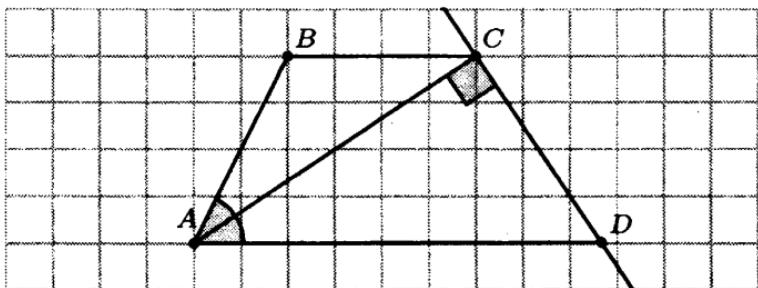


Ответ: 36,8 см.

437. $\triangle ABH = \triangle AMH$ ($AB = AM$ по условию, AH общая, $\angle ABH = \angle AMH = 90^\circ$). $\triangle HMC$ — прямоугольный и равнобедренный, значит $BH = HM = MC$.

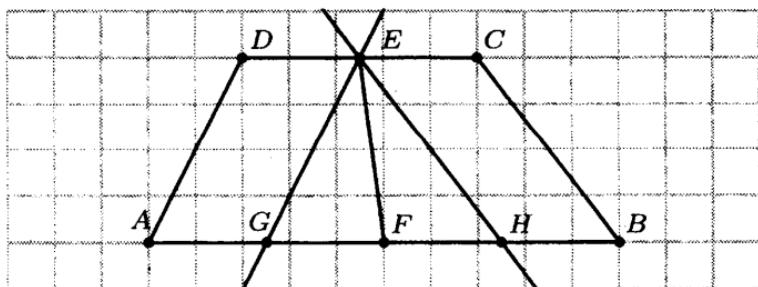


438. $\triangle ACD$ — прямоугольный, $\angle D = 60^\circ \Rightarrow \angle CAD = 30^\circ \Rightarrow \angle A = 60^\circ \Rightarrow AB = CD$. Так как $\angle CAD = 30^\circ \Rightarrow AD = 2CD = 2AB$. $\angle BCA = \angle BCD - 90^\circ = (360^\circ - 60^\circ - 60^\circ) : 2 - 90^\circ = 30^\circ \Rightarrow BC = AB$. $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 5AB = 20$ см $\Rightarrow AB = 4$ см $\Rightarrow AD = 2AB = 2 \cdot 4 = 8$ см.



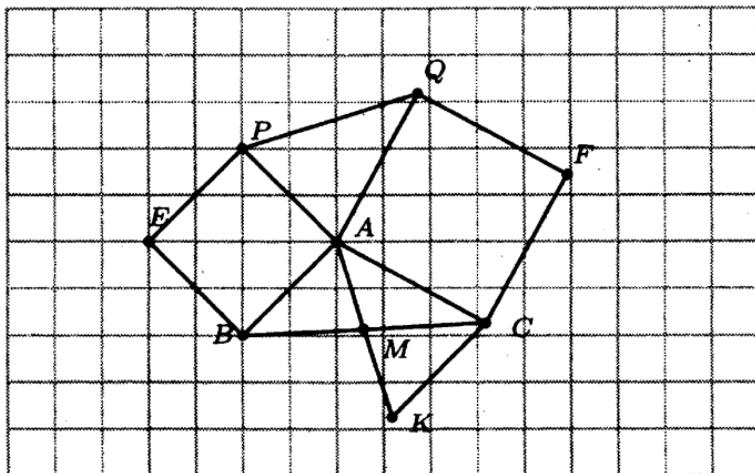
Ответ: 8 см.

439*. Проведем $EG \parallel AD$ и $EH \parallel CB \Rightarrow AG = HB \Rightarrow GF = FH \Rightarrow GH = AB - DC$. $\angle EGH = \angle DAB$ и $\angle EHG = \angle CBA \Rightarrow GEH = 90^\circ$ ($\angle DAB + \angle CBA = 90^\circ$ по условию), следовательно EF — медиана $\triangle GEH \Rightarrow EF = \frac{1}{2}GH$ (см. задачу 404) $\Rightarrow EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$.



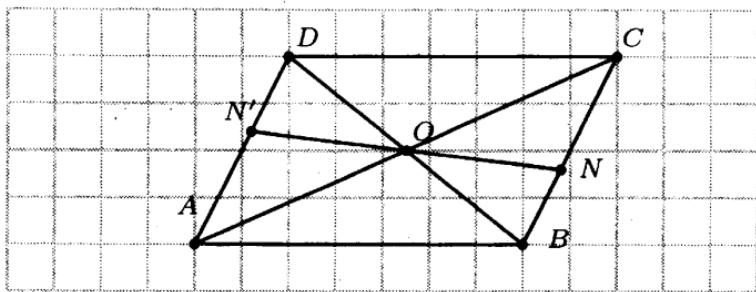
440*. Пусть AP и AQ — указанные стороны квадратов $APEB$ и $AQFC$, AM — медиана треугольника ABC .

Отметим на продолжении медианы AM за точку M , симметричную точке A относительно точки M . Тогда $CK = AB = AP$, $AC = AQ$, $\angle PAQ = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle BAC = \angle KCA$. Значит, треугольники ACK и QAP равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AK = PQ$ и $AM = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}PQ$.



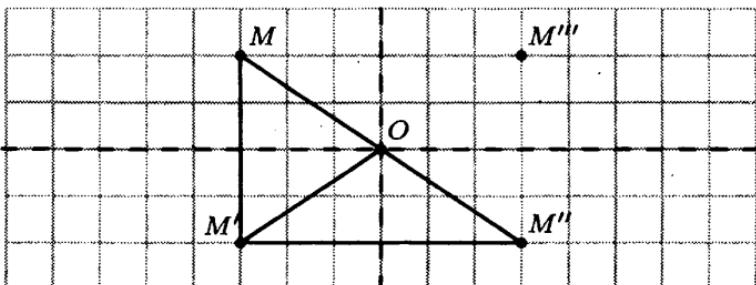
441. Диагональ ромба делит его на два равнобедренных треугольника и является биссектрисой угла треугольников. Так как биссектриса равнобедренного треугольника является его осью симметрии (см. задачу 420), то она является и осью симметрии ромба.

442. Так как диагонали параллелограмма $ABCD$ делятся их точкой пересечения O пополам, то противолежащие вершины параллелограмма симметричны относительно нее. Любая другая точка N на стороне параллелограмма равноудалена от симметрично расположенной точки N' относительно O (это вытекает из равенства треугольников $\triangle NBO = \triangle DON'$). Следовательно O — центр симметрии $ABCD$.



443. Прямая параллельная паре параллельных прямых и находящаяся на равных расстояниях от этих прямых будет их осью симметрии, а любая точка точки на этой прямой — центром симметрии. Поэтому таких точек будет бесконечно много.

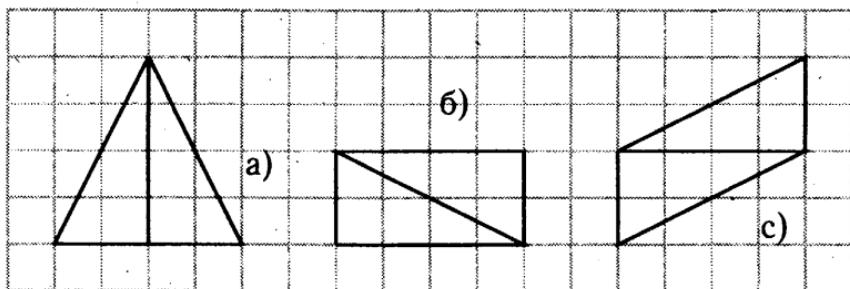
444. Любая точка фигуры будет иметь симметричную относительно оси симметрии, так как осей симметрии две, то таких точек будет четыре. Можно показать, что $OM = OM''$ или $OM' = OM'''$ (из равенства треугольников), следовательно O — центр симметрии.



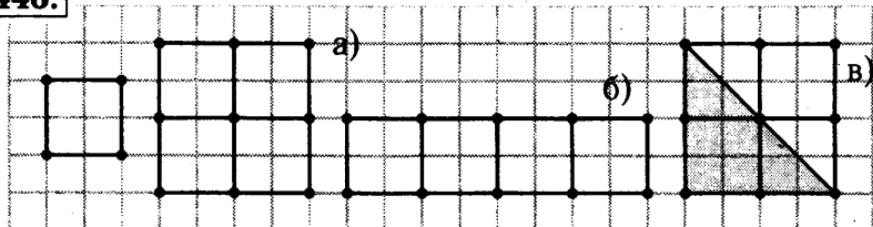
Глава VI. Площадь

§ 1. Площадь многоугольника

445. Площадь двух треугольников одинакова (по 1°, п. 49 учебника) Площадь всех составленных многоугольников равна площади двух треугольников (по 2°, п. 49 учебника), следовательно площадь этих фигур одинакова.

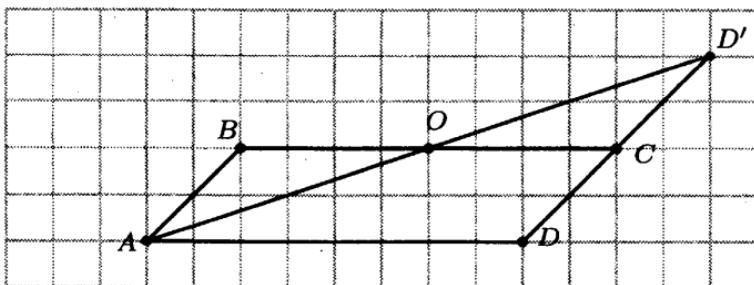


446.



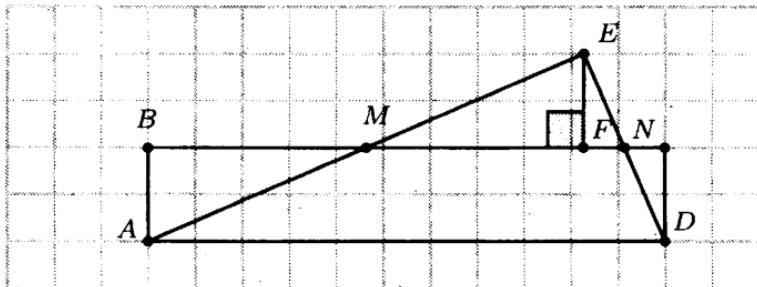
447. $\triangle ABO = \triangle MCO$ ($AB = CD = CM$ по условию, $\angle BAO = \angle CMO$, $\angle ABO = \angle MCO$ как накрест лежащие), следовательно $S_{ABO} = S_{MCO}$ (по свойству площадей).

$$S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{AOCD}, \quad S_{ADM} = S_{MOC} + S_{AOCD} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{ADM}.$$



448. Проведем $EF \perp BC$. $\triangle ABM = \triangle EFM$ ($AM = ME$ по условию, $\angle AMB = \angle EMF$, как вертикальные), поэтому $S_{ABM} = S_{EFM}$. $\triangle DCN = \triangle EFN$ ($CD = AB = EF$, $\triangle ABM = \triangle EFM \Rightarrow \angle CDN = \angle FEN$ как накрест). Следовательно, $S_{DCN} = S_{EFN}$.

$S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{AMND} + S_{DCN}$, $S_{AED} = S_{EFM} + S_{AMND} + S_{EFN}$. Так как $S_{ABM} = S_{EFM}$, $S_{DCN} = S_{EFN} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{AED}$.



449. $S = a^2$: а) $S = (1,2 \text{ см})^2 = 1,44 \text{ см}^2$; б) $5 = (3/4 \text{ дм}) = 9/16 \text{ дм}^2$; в) $S = (3\sqrt{2} \text{ м})^2 = 18 \text{ м}^2$.

Ответ: а) $1,44 \text{ см}^2$; б) $9/16 \text{ дм}^2$; в) 18 м^2 .

450. $S = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{S}$: а) $s = \sqrt{16} = 4 \text{ см}$; б) $a = \sqrt{2,25} = 1,5 \text{ дм}$; в) $a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ м}$.

Ответ: а) 4 см ; б) $1,5 \text{ дм}$; в) $2\sqrt{3} \text{ м}$.

451. а) $S = 24 \text{ см}^2 = 24 \cdot 100 \text{ мм}^2 = 2400 \text{ мм}^2$; б) $S = 24 \text{ см}^2 = 24 : 100 \text{ дм}^2 = 0,24 \text{ дм}^2$.

Ответ: а) 2400 мм^2 ; б) $0,24 \text{ дм}^2$.

452. $S = a \cdot b$: а) $S = ab = 8,5 \cdot 3,2 = 27,2 \text{ см}^2$; б) $S = ab = 2\sqrt{2} \cdot 3 = 6\sqrt{2} \text{ см}^2$; в) $S = ab \Rightarrow b = S/a$; $b = 684,8 : 32 = 21,4 \text{ см}$; г) $S = ab \Rightarrow a = S/b$; $a = 12,15 : 4,5 = 2,7 \text{ см}$.

Ответ: а) $27,2 \text{ см}^2$; б) $6\sqrt{2} \text{ см}^2$; в) $21,4 \text{ см}$; г) $2,7 \text{ см}$.

453. $S = ab$: а) $S_1 = 2 \cdot b = 2ab$, $S_1 : S = 2ab : ab = 5$; б) $S_1 = 2a \cdot 2b = 4ab$, $S_1 : S = 4ab : ab = 4$; в) $S_1 = 2a \cdot b/2 = ab$, $S_1 : S = ab : ab = 1$.

Ответ: а) увеличится в 2 раза; б) увеличится в 4 раза; в) останется без изменений.

454. а) $a = 2,5b$, $S = 250 \text{ см}^2 \Rightarrow S = ab = 2,5b^2 \Rightarrow 250 \text{ см}^2 = 2,5b^2 \Rightarrow b = 10 \text{ см} \Rightarrow a = 2,5 \cdot 10 \text{ см} = 25 \text{ см};$
б) $S = ab = 9 \text{ м}^2$, $P = 2(a + b) = 12 \text{ м} \Rightarrow ab = 9 \text{ м}^2$ и $a + b = 6 \text{ м} \Rightarrow a = b = 3 \text{ м}.$

Ответ: а) 25 см, 10 см; б) $a = b = 3 \text{ м}.$

455. Площадь пола $S = 5,5 \cdot 6 = 33 \text{ м}^2 = 330000 \text{ см}^2$. Площадь одной дощечки $S_i = 30 \cdot 5 \text{ см} = 150 \text{ см}^2$. Потребуется $S : S_i = 330000 : 150 \text{ см}^2 = 2200$ дощечек.

Ответ: потребуется 2200 дощечек.

456. Площадь стены $S = 3 \cdot 2,7 = 8,1 \text{ м}^2 = 81000 \text{ см}^2$. Площадь одной плитки $S_i = (15)^2 = 225 \text{ см}^2$. Потребуется $81000 : 225 \text{ см}^2 = 360$ плиток.

Ответ: потребуется 360 плиток.

457. Площадь прямоугольника $S_a b = 8 \cdot 18 = 144 \text{ м}^2$, площадь квадрата $S_a = a^2 = 144 \text{ м}^2 \Rightarrow a = \sqrt{144} = 12 \text{ м}.$

Ответ: 12 м.

458. Площадь прямоугольного участка $S_1 = 220 \cdot 160 = 35200 \text{ м}^2$. Периметр участков $P_1 = P_2 = 2(220 + 160) = 760 \text{ м}$. Периметр квадратного участка $P_2 = 4a = 760 \text{ м} \Rightarrow a = 760 : 4 = 190 \text{ м} \Rightarrow S_2 = s^2 = 190^2 = 36100 \text{ м}^2$. $S_2 - S_1 = 36100 - 35200 = 900 \text{ м}^2$.

Ответ: площадь квадратного участка больше площади прямоугольного на 900 м².

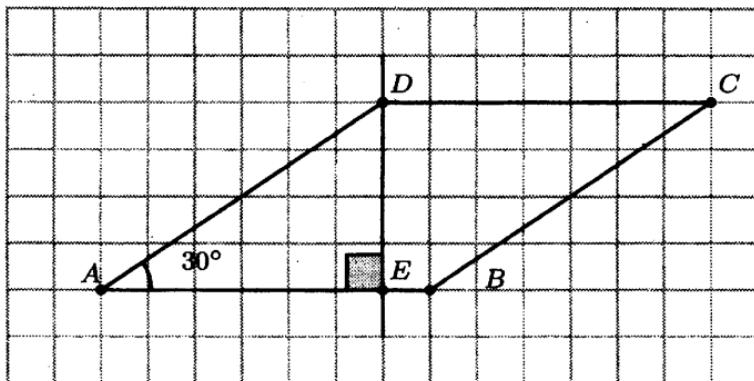
§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

459. $S = ah$: а) $S = 15 \cdot 12 = 180 \text{ см}^2$;
б) $S = ah \Rightarrow s = S : h = 34 : 8,5 = 4 \text{ см}$;
в) $S = ah = a \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow s = \sqrt{2S} = \sqrt{2 \cdot 162} = \sqrt{342} = 18 \text{ см}$;
г) $h = 3a \Rightarrow a = \frac{1}{3}h$, $S = ah = \frac{1}{3}h^2 \Rightarrow h = \sqrt{3S} = \sqrt{3 \cdot 27} \sqrt{81} = 9$.
Ответ: а) 180 см²; б) 4 см; в) 18 см; г) 9.

460. $S = a \cdot h = 12 \cdot 13 = 156 \text{ см}^2$.

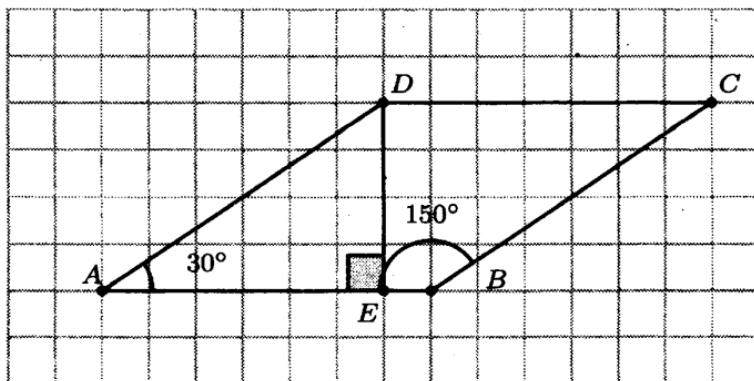
Ответ: 156 см².

461. $DE \perp AB \Rightarrow DE = h, h = \frac{1}{2}AD$ (так как $\angle BAD = 30^\circ$) $S_{ABCD} = AB \cdot h = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 = 84 \text{ см}^2$.



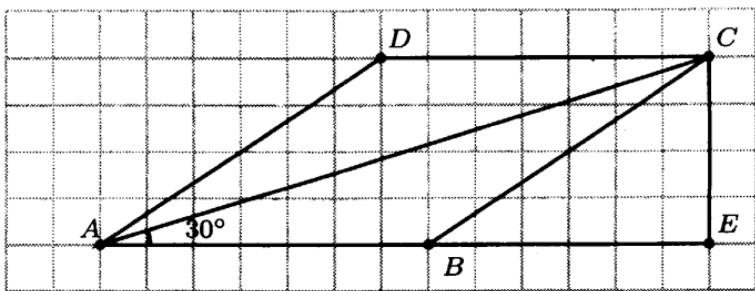
Ответ: 84 см².

462. Так как сумма $\angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow \angle A = 30^\circ \Rightarrow DE = h = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ см. } S_{ABCD} = AB \cdot h = 6 \cdot 3 = 18 \text{ см}^2$.



Ответ: 18 см².

463. $CE \perp AE, CE = h, CE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7 \text{ см. } S_{ABCD} = 8,1 \cdot 7 = 56,7 \text{ см}^2$.



Ответ: 56,7 см².

464. $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b \Rightarrow a > b \rightarrow h_a = h_1 < h_b = h_2$:

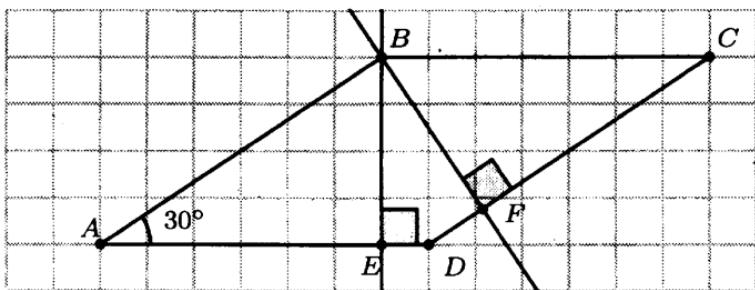
а) так как $h_2 > h_1$ и $a = 18$ см, $b = 30$ см, т. е. $b > a \Rightarrow h_1 = h_b \Rightarrow ah_2 = bh_1 \Rightarrow h_2 = bh_1/a = (30 \times 6)/18 = 10$ см;

б) аналогично $h_1 = ah_2/b = (10 \cdot 6)/15 = 4$ см;

в) аналогично $h_1 = S/a = 54/5,4 = 12$ см, $h_2 = S/b = 54/6 = 9$ см.

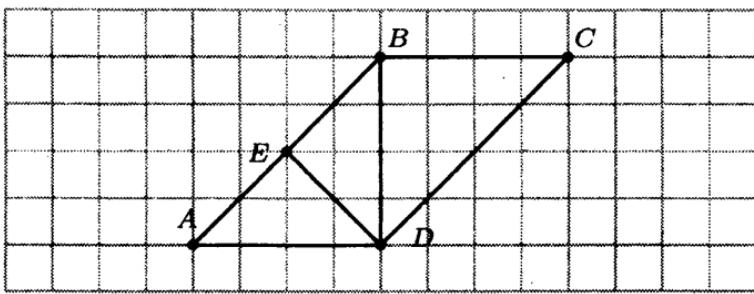
Ответ: а) 10 см; б) 4 см; в) 12 см, 9 см.

465. Пусть $\angle A = 30^\circ$, $BE = 2$ см и $BF = 3$ см. $\triangle ABE$ – прямоугольный $\Rightarrow AB = 2BE = 2 \cdot 2 = 4$ см, $AB = CD$. $S_{ABCD} = CD \cdot BF = 4 \cdot 3 = 12$ см².



Ответ: 12 см².

466. Пусть $\angle A = 45^\circ \Rightarrow \angle ABD = 45^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ$. AB – гипотенуза $\triangle ABD \Rightarrow AB > AD$, $AB = 15,2$ см. $DE \perp AB$, DE – высота и медиана $\triangle ABD \Rightarrow DE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 15,2 = 7,6$ см. $S_{ABCD} = AB \cdot DE = 15,2 \times 7,6 = 115,52$ см².



Ответ: 115,52 см².

467. Пусть S_{\square} — площадь квадрата, S_{\diamond} — площадь ромба. $P_{\square} = P_{\diamond} \Rightarrow a_{\square} = a_{\diamond} = a$. $S_{\square} = a^2$, $S_{\diamond} = ah$, где h — высота ромба. Так как ромб не квадрат, то $h < a$, следовательно $S_{\diamond} < S_{\square}$.

Ответ: площадь ромба меньше.

468. $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$: а) $S_{\Delta} = ah = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 11 \text{ см}^2 = 38,5 \text{ см}^2$;

б) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot ah = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 5 = 5\sqrt{3} \text{ см}^2$;

в) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot ah \Rightarrow h = 2S/a = 2 \cdot 37,8/14 = 5,4 \text{ см}$;

г) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot ah \Rightarrow a = 2S/h = 2 \cdot 12/3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ см}$.

Ответ: а) 38,5 см²; б) $5\sqrt{3}$ см²; в) 5,4 см; г) $4\sqrt{2}$ см.

469. Пусть AE и CD — высоты треугольника. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}BC \cdot AE \Rightarrow AE = AB \cdot CD/BC = 16 \times 11/22 = 8 \text{ см}$.

Ответ: 8 см.

470. Меньшая высота h треугольника проведена к большей стороне. Из равенства площадей треугольника $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$ получаем $7,5 \cdot 2,4 = 3,2 \cdot h \Rightarrow h = 7,5 \cdot 2,4 : 3,2 = 5,625 \text{ см}$.

Ответ: 5,625 см.

471. $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab$:

a) $S = \frac{1}{2} \cdot ab = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 11 = 22 \text{ см}^2$;

б) $S = \frac{1}{2} \cdot ab = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 3 = 1,8 \text{ дм}^2$.

Ответ: а) 22 см²; б) 1,8 дм².

472. По условию $a : b = 7 : 12$, где a и b — катеты прямоугольного треугольника. $S = \frac{1}{2}ab$, $a = 7b/12 \Rightarrow S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12}b \cdot b = \frac{7}{24}b^2 \Rightarrow b = \sqrt{24S : 7} = \sqrt{24 \cdot 168 : 7} = \sqrt{576} = 24 \text{ см}$, $a = 7b/12 = 7 \cdot 24/12 = 14 \text{ см}$.

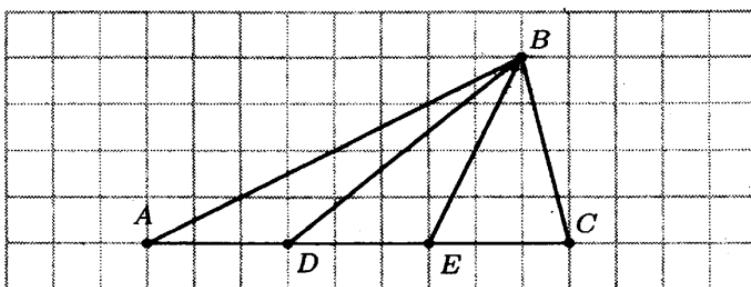
Ответ: 24 см, 14 см.

473. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot h$. Так как согласно п. 38 учебника все точки прямой m равноудалены от AB . Следовательно высота h для всех треугольников одинакова, а значит и их площади равны.

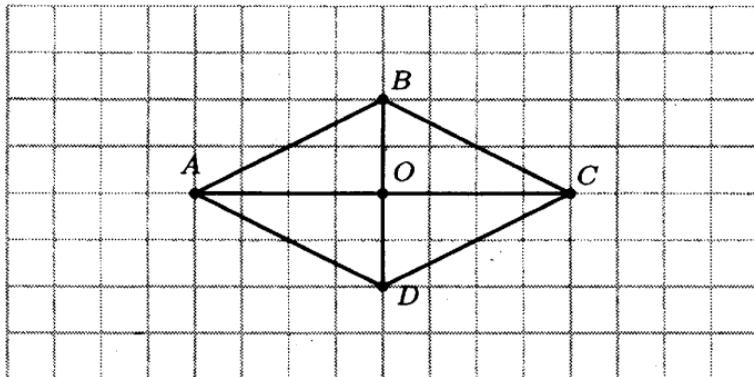
474. Так как высоты двух треугольников образованных его медианой одинаковы, а основания равны друг другу, то и их площади будут равны.

Ответ: площади таких треугольников равны.

475. Из выражения $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$ следует, что для того, чтобы их площади были одинаковы необходимо, чтобы у них были одинаковые основания и высота. Для этого основание AC треугольника ABC поделим на три равные части $AD = DE = EC$. Так как у этих треугольников одинаковая высота, то $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta DBE} = S_{\Delta BEC}$.



476. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO$, $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot DO \Rightarrow S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO + \frac{1}{2}AC \cdot DO = \frac{1}{2}AC \cdot (BO + DO) = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.



a) $S = \frac{1}{2} \cdot 3,2 \cdot 1,4 = 2,24 \text{ дм}^2$

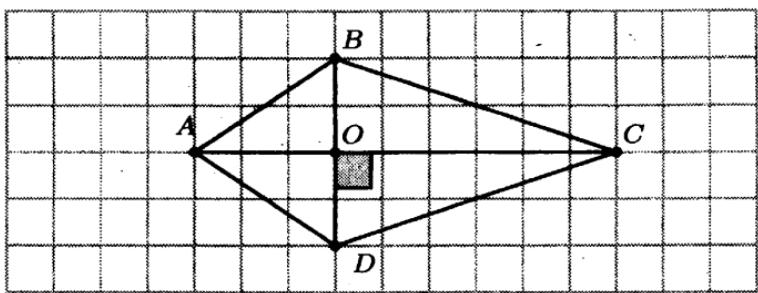
б) $S = \frac{1}{2} \cdot 4,6 \cdot 2 = 4,6 \text{ дм}^2$.

Ответ: а) 2,24 дм²; б) 4,6 дм².

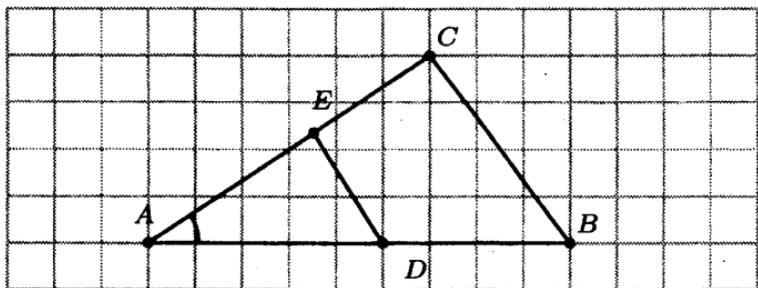
477. $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$, $d_2 = 1,5d_1 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 1,5d_1^2 = \frac{3}{4}d_2^2 \Rightarrow d_1 = \sqrt{4S/3} = \sqrt{4 \cdot 27/3} = \sqrt{36} = 6 \text{ см}$, $d_2 = 1,5d_1 = 1,5 \times 6 = 9 \text{ см}$.

Ответ: 6 см и 9 см.

478. Пусть в выпуклом четырехугольнике диагонали $AC \perp BD$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO$, $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot OD$. Значит, $S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO + \frac{1}{2}AC \cdot OD = \frac{1}{2}AC \times (BO + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.



479. Так как у $\triangle ADE$ и $\triangle ABC$ $\angle A$ — общий, то, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих этот угол (теорема п. 53 учебника) $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = (AD \cdot AE) : (AB \cdot AC) \Rightarrow AD = S_{\triangle ADE} \times AB \cdot AC : (S_{\triangle ABC} \cdot AE)$.



$$\text{a)} S_{ADE} = S_{ABC} \cdot (AD \cdot AE) : (AB \cdot AC) = 10 \cdot (3 \cdot 2) : (5 \cdot 6) = 2 \text{ см}^2;$$

$$\text{б)} AD = S_{\triangle ADE} \cdot AB \cdot AC : (S_{\triangle ABC} \cdot AE) = (2 \cdot 8 \cdot 3) : (10 \cdot 2) = 2,4 \text{ см.}$$

Ответ: а) 2 см²; б) 2,4 см.

$$\text{480. а)} S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot BH = (21 + 17) \cdot 7 = 133 \text{ см}^2.$$

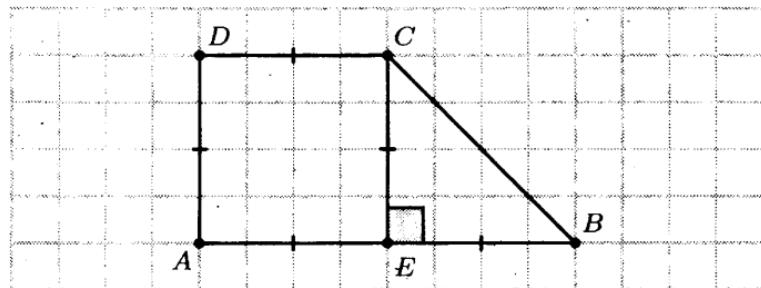
б) Пусть AE — высота трапеции. $\triangle ADE$ — прямоугольный. Так как $AD = 30^\circ$, то $AE = \frac{1}{2}AD = 4 \text{ см.}$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(2 + 10) \cdot 4 = 24 \text{ см}^2.$$

в) Так как $BC \perp AB$, то BC — высота трапеции, следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot BC = \frac{1}{2}(5 + 13) \times 8 = 72 \text{ см}^2$.

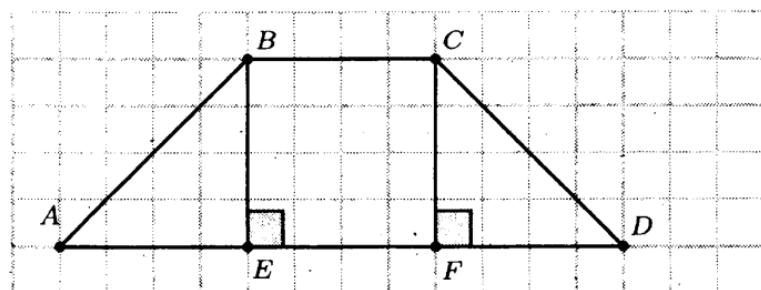
Ответ: а) 133 см²; б) 24 см²; в) 72 см².

481. Площадь такой трапеции можно представить как сумму квадрата и прямоугольного треугольника. Так как $\angle BCD = 135^\circ \Rightarrow \angle ECB = 45^\circ \Rightarrow BE = AE = BC = AD = 6$ см. $S_{ABCD} = S_{\square} + S_{\triangle} = 6 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 36 + 18 = 54$ см².



Ответ: 54 см².

482. Из условий задачи $S_{ABE} = S_{CDF}$, $S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{CDF} + S_{BCEF} = 2S_{ABE} + S_{BCEF} = AF \cdot CF$. Так как $\angle ABC = \angle BCD = 135^\circ \Rightarrow AE = BE = CF = DF = 1,4$ см, $AF = 3,4$ см. $S_{ABCD} = 1,4 \cdot 3,4 = 4,76$ см².



Ответ: 4,76 см².

§ 3. Теорема Пифагора

483. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$, следовательно: а) $= \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$; б) $= \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$; в) $=$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{16}{49}} = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}; \text{ г) } = \\ = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 3 \cdot 64} = \sqrt{4 \cdot 64} = 2 \cdot 8 = 16.$$

Ответ: а) 10; б) $\sqrt{61}$; в) $\frac{5}{7}$ г) 16.

484. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$, следовательно: а) $b = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$; б) $b = \sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{81 - 49} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$; в) $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (2b)^2 = 12^2 + b^2 \Rightarrow 4b^2 = 144 + b^2 \Rightarrow 3b^2 = 144 \Rightarrow b^2 = 48 \Rightarrow b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$; г) $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (2b)^2 = (2\sqrt{3})^2 + b^2 \Rightarrow 4b^2 = 12 + b^2 \Rightarrow 3b^2 = 12 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$; д) $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (2\sqrt{10})^2 = (3b)^2 + b^2 \Rightarrow 40 = 9b^2 + b^2 \Rightarrow 10b^2 = 40 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$.

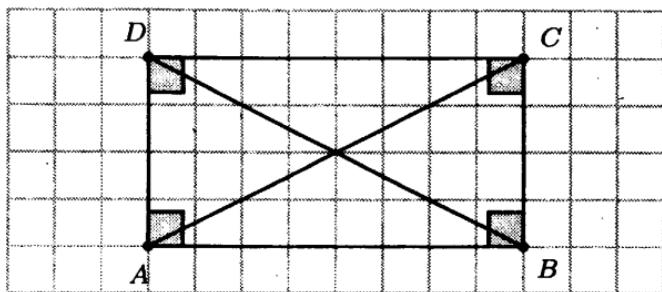
Ответ: а) 5; б) $4\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{3}$; г) 2; д) 2.

485. Так один угол прямоугольника треугольника равен 60° , то другой его угол равен 30° . Значит катет лежащий напротив угла в 30° равен $c/2$ (2° , п. 35 учебника). Следовательно катет лежащий напротив угла в 60° — b , по теореме Пифагора, равен $b = \sqrt{c^2 - (c/2)^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{c}c$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{c}c$.

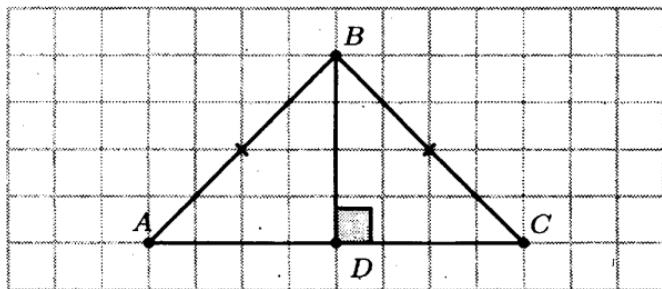
486. Так как $ABCD$ — прямоугольник, то $AB = CD$, $AD = BC$ и $AC = BD$.

$$\text{а) } AD^2 + AB^2 = BD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12. \\ \text{б) } BC = \sqrt{2,5^2 - 1,5^2} = \sqrt{6,25 - 2,25} = \sqrt{4} = 2. \text{ в) } CD = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8.$$



Ответ: а) 12; б) 2; в) 8.

487. Пусть AC – основание, а BD – высота, проведенная к основанию. Из теоремы п. 18 следует что, $AD = DC = 8$ см. Следовательно из прямоугольного $\triangle ABD$, по теореме Пифагора $h = BD = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = 225 = 15$ см.

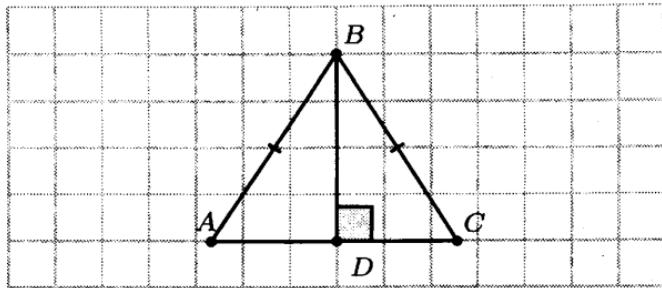


Ответ: 15 см.

488. Равносторонний треугольнике ABC является равнобедренным, поэтому высота $h = BD$ делит сторону $AC = a$ пополам. Следовательно по теореме Пифагора $h^2 + (a/2)^2 = a^2$.

$$\text{а)} \quad h^2 + (a/2)^2 = a^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & h^2 + (a/2)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - (a/2)^2 = a^2 - a^2/4 = \\ & = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{3}h^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4}{3}h^2} = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \\ & = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ см.} \end{aligned}$$



Ответ: а) $3\sqrt{3}$ см; б) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см.

489. Из результатов задачи **488** имеем $h^2 + (a/2)^2 = a^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Основание треугольника a , значит $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

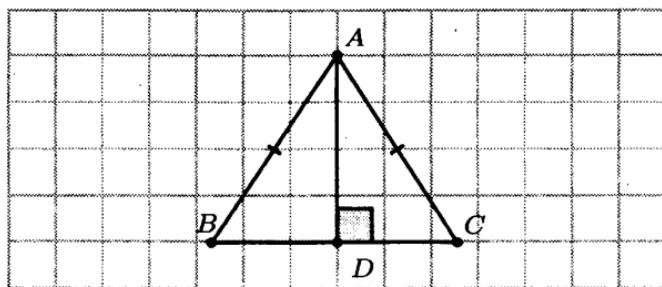
$$\text{а)} S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2;$$

$$\text{б)} S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1,2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1,44\sqrt{3}}{4} = 0,36\sqrt{3} \text{ см}^2;$$

$$\text{в)} S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} \text{ дм}^2.$$

Ответ: а) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ см²; б) $0,36\sqrt{3}$ см²; в) $2\sqrt{3}$ дм².

490. Пусть дан равнобедренный $\triangle ABC$ с основанием BC и высотой AD :



$$\text{a) } BC = 12 \text{ см, } AD = 8 \text{ см} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \\ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ см}^2.$$

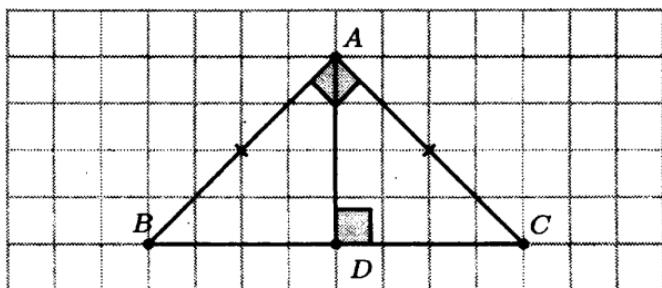
Высота делит основание равнобедренного треугольника пополам, поэтому и теоремы Пифагора находим $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ см.}$

б) Так как $\triangle ABC$ – равнобедренный, то его высота AD является и биссектрисой, поэтому $\angle BAD = \angle CAD = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = 30^\circ \Rightarrow AB = 2 \cdot AD$. По теореме Пифагора $AB^2 = AD^2 + BD^2$ ($BD = \frac{1}{2}BC = 9 \text{ см} \Rightarrow 4AD^2 = AD^2 + 9^2 \Rightarrow AD^2 = 27 \Rightarrow AD = 3\sqrt{3} \text{ см} \Rightarrow AC = 6\sqrt{3} \text{ см.}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

в) Так как $\triangle ABC$ – равнобедренный, а $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = \angle C = \angle BAD = \angle DAC = 45^\circ \Rightarrow DC = BD = AD = 7 \text{ см} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 7 = 49 \text{ см}^2$.

Из $\triangle ADB \Rightarrow AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{2 \cdot 7^2} = 7\sqrt{2} \text{ см.}$



Ответ: а) 10 см и 48 см^2 ; б) $6\sqrt{3} \text{ см}$ и $27\sqrt{3} \text{ см}^2$; в) $7\sqrt{2} \text{ см}$ и 49 см^2 .

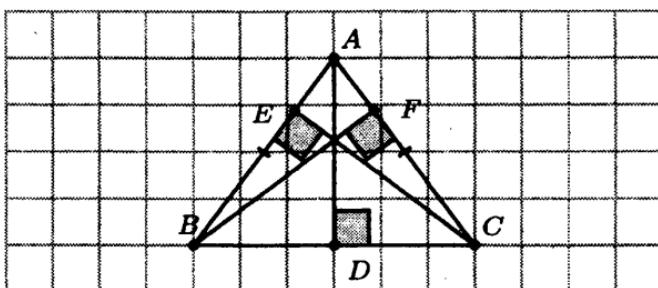
491. Так как треугольник прямоугольный, то $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch \Rightarrow h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$:

$$\text{а) } \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{5 \cdot 12}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{60}{13} = 4\frac{8}{13};$$

$$6) \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{12 \cdot 16}{\sqrt{12^2 + 16^2}} = \frac{192}{20} = 9\frac{3}{5}.$$

Ответ: а) $4\frac{8}{13}$; б) $9\frac{3}{5}$.

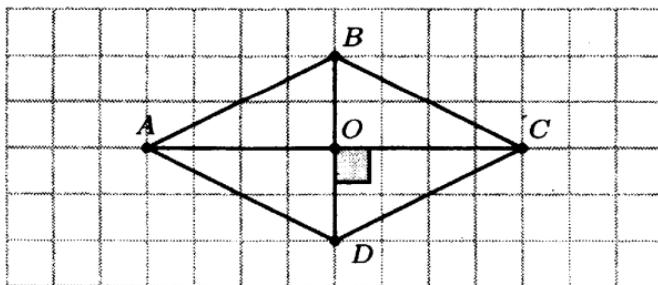
492. $AB = AC = 10$ см, $BC = 12$ см. Рассмотрим $\triangle ADB \Rightarrow BD = DC = 6$ см $\Rightarrow h_1 = AD = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ см. Следовательно площадь $\triangle ABC$ $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ см², или $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BF \Rightarrow h_2 = h_3 = CE = BF = 2S/AB = 2 \cdot 48/10 = 9,6$ см.



Ответ: 8 см, 9,6 см, 9,6 см.

493. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам ($AO = OC = 12$ см, $BO = OD = 5$ см), следовательно $\triangle AOB$ — прямоугольный. $AB = BC = CD = DA =$ |по теореме Пифагора| $= \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{196} = 13$ см.

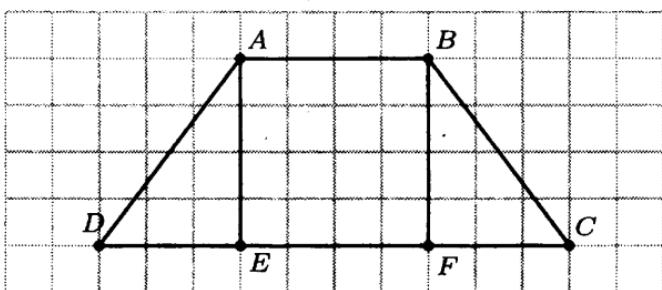
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120 \text{ см}^2.$$



Ответ: 13 см и 120 см².

494. $AC = 12$ см, $AB = BC = CD = DA = 10$ см. O – точка пересечения диагоналей $\Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = 6$ см. $\triangle ABO$ – прямоугольный $\Rightarrow OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ см $\Rightarrow BD = 2AO = 2 \cdot 8 = 16$ см. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$ см².
Ответ: 16 см, 96 см².

495. В трапеции $ABCD$ проведем высоты $h = AE = BF$.
 $S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2}h$.



а) Так $BC = DA$, то трапеция равнобедренная, следовательно $DE = CF = (DC - AB)/2 = (20 - 10)/2 = 5$ см.

Из $\triangle AED$ по теореме Пифагора $h = AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ см.

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2}h = \frac{20 + 10}{2} \cdot 12 = 15 \cdot 12 = 180 \text{ см}^2.$$

б) Так как $\angle C = \angle D = 60^\circ$, то $\angle DAE = \angle CBF = 30^\circ \Rightarrow DE = CF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = 4$ см. $CD = DE + FE + CF = DE + AB + CF = 4 + 8 + 4 = 16$ см. $h = AE = BF = \sqrt{BC^2 - CF^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ см.

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2}h = \frac{8 + 16}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 12 \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

в) Так как $\angle C = \angle D = 45^\circ \Rightarrow \angle A = \angle B = 135^\circ \Rightarrow \angle DAE = \angle CBF = 45^\circ \Rightarrow AE = BF = DE = CF \Rightarrow$

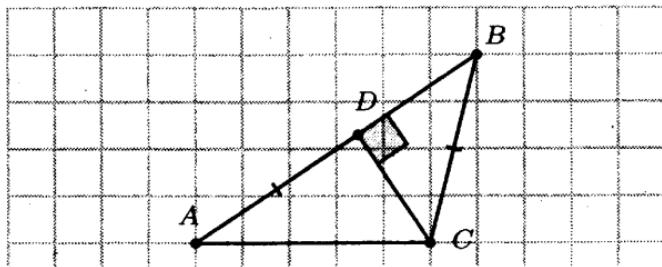
$BC^2 = CF^2 + BF^2 = 2BF^2 \Rightarrow BF^2 = BC^2/2 \Rightarrow h = BF = \sqrt{BC^2/2} = \sqrt{(9\sqrt{2})^2/2} = 9$ см. $DC = ED + EF + CF = 9 + 6 + 9 = 24$ см.

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot h = \frac{6 + 24}{2} \cdot 9 = 15 \cdot 9 = 135 \text{ см}^2.$$

Ответ: а) 180 см²; б) $48\sqrt{3}$ см²; в) 135 см².

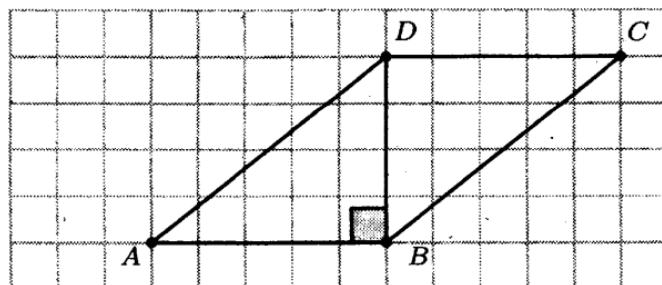
496. Пусть $AD = BC = x \Rightarrow$ тогда из $\triangle DBC \Rightarrow BC^2 = DC^2 + DB^2 \Rightarrow x^2 = (\sqrt{3})^2 + (3 - x)^2 = 3 + 9 - 6x + x^2 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = AD = BC = 2$ см.

Из $\triangle ACD$ находим $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}$ см.



Ответ: $\sqrt{7}$.

497. По условию $AD - AB = 1$ см. Так как $P_{ABCD} = 2(AD + AB) \Rightarrow AD + AB = \frac{1}{2}P_{ABCD}$. Из $\triangle ABD$ имеем $AD^2 = AB^2 + BD^2 \Rightarrow BD^2 = AD^2 - AB^2 \Rightarrow BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{(AD + AB)(AD - AB)} = \sqrt{\frac{P_{ABCD}}{2} \cdot (AD - AB)} = \sqrt{(50/2) \cdot 1} = \sqrt{25} = 5$ см.



Ответ: 5 см.

498. По теореме обратной теореме Пифагора (см. п. 56 учебника), если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный. Поэтому:

а) $10^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow 100 = 36 + 64 = 100$ — треугольник прямоугольный;

б) $7^2 \neq 5^2 + 6^2 \Rightarrow 49 \neq 25 + 36 = 61$ — треугольник не прямоугольный;

в) $15^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow 225 = 81 + 144 = 225$ — треугольник прямоугольный;

г) $26^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow 676 = 100 + 576 = 676$ — треугольник прямоугольный;

д) $6^2 \neq 3^2 + 4^2 \Rightarrow 36 \neq 9 + 16 = 25$ — треугольник не прямоугольный;

е) $13^2 = 9^2 + 11^2 \Rightarrow 169 \neq 81 + 121 = 202$ — треугольник не прямоугольный;

ж) $25^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow 625 = 225 + 400 = 625$ — треугольник прямоугольный.

Ответ: а) да; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) нет; ж) да.

499. а) Так как сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату его третьей стороны $24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 = 25^2$, то данный треугольник — прямоугольный. Следовательно два его катета являются высотами данного треугольника, а третья высота, проведенная к гипотенузе, будет наименьшей. Так как $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch \Rightarrow h = ab/c = 24 \cdot 7 : 25 = 6\frac{18}{25}$ см.

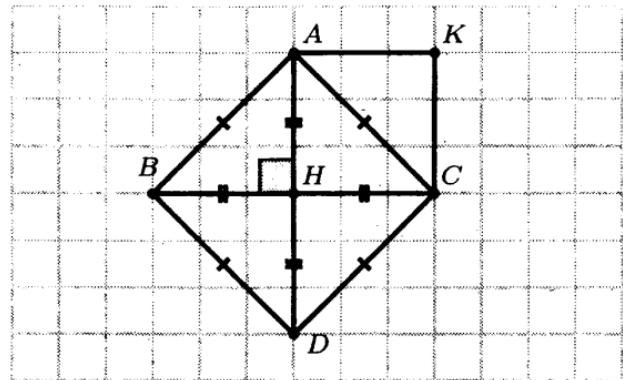
б) Аналогично а) получаем: $h = ab/c = 15 \cdot 8 : 17 = 7\frac{1}{17}$ см.

Ответ: а) $6\frac{18}{25}$ см; б) $7\frac{1}{17}$ см.

Дополнительные задачи

500. Пусть ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник, а AH — высота, проведенная к гипотенузе BC ,

$ABDC$ – квадрат, построенный на катете AB , $AHKC$ – квадрат построенный на высоте AH .



Высота AH – медиана треугольника ABC , поэтому $BH = HC = AH = HD$. Следовательно диагонали квадрата разбивают четырехугольник $ABCD$ на четыре равных друг другу треугольник, а AC разбивает $AHKC$ на два равных им треугольника ($\triangle ABC = \triangle ACH = \triangle BHD = \triangle HCD = \triangle AKC$).

Значит, $S_{ABCD} = 2S_{AHCK}$, что и требовалось доказать.

501. а) Так как $1 \text{ га} = 10000 \text{ м}^2$, то $27 \text{ га} = 270000 \text{ м}^2$.

б) Так как $1 \text{ га} = 0,01 \text{ км}^2$, то $27 \text{ га} = 0,27 \text{ км}^2$.

Ответ: а) 270000 м^2 ; б) $0,27 \text{ км}^2$.

502. Пусть в параллелограмме $ABCD$ стороны $AB = CD = a$, а $BC = DA = b$, а приведенные к ним высоты равны соответственно $h_a = 5 \text{ см}$ и $h_b = 4 \text{ см}$.

Тогда периметр параллелограмма равен $P = 2(a + b) = 42 \text{ см}$, а его площадь $S_{ABCD} = h_a \cdot a = 4 \cdot h_b = b = 5 \cdot a = 4 \cdot b$. Из уравнений получаем, что $a = \frac{4}{5}b$,

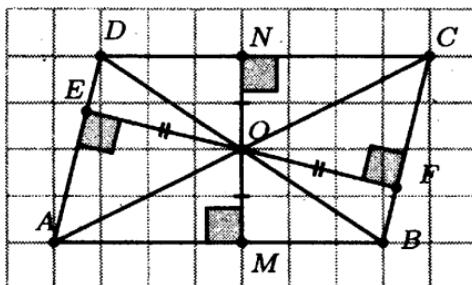
поэтому $2\left(b + \frac{4}{5}b\right) = 42 \text{ см}$, следовательно $b = \frac{35}{3} \text{ см}$, и $S = 4 \cdot b = 4 \cdot \frac{35}{3} \text{ см}^2 = 46\frac{2}{3} \text{ см}^2$.

Ответ: $46\frac{2}{3} \text{ см}^2$.

503. Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , $OM = ON = 2$ см — перпендикуляры к стороне AB и CB , тогда $MN = 4$ см — высота параллелограмма, следовательно $S_{ABCD} = AB \cdot MN$, или $24 \text{ см}^2 = 4 \text{ см} \cdot AB$, $\rightarrow AB = 6 \text{ см}$.

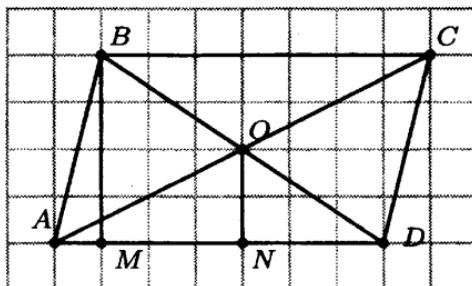
Аналогично, $OE = OF = 3$ см, тогда $EF = 6$ см, и $S_{ABCD} = AD \cdot EF$, или $24 \text{ см}^2 = 6 \text{ см} \cdot AD$, $\rightarrow AD = 4 \text{ см}$.

Следовательно $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(6 + 4) = 20$ (см).



Ответ: $P = 20$ см.

504. Пусть дан параллелограмм $ABCD$ в котором $AB < AD$, $AB = 29$ см, ON — перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей O к стороне AD , $AN = 33$ см, $ND = 12$ см.



Проведем высоту BM данного параллелограмма. Так как $BO = OD$ и $BM \parallel ON$, то $MN = ND = 12$ см (так как ON — срединная линия) и, следовательно, $AM = AN - NM = 33 \text{ см} - 12 \text{ см} = 21 \text{ см}$.

По теореме Пифагора: $AB^2 = BM^2 + AM^2 \rightarrow BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{8 \cdot 50} = \sqrt{20} \text{ см}$, $S_{ABCD} = AD \cdot BM = 45 \cdot 20 = 900 \text{ см}^2$.

Ответ: 900 см^2 .

505. Пусть дан треугольник ABC у которого $BC = a$, $AC = b$, $AD = h_a$ — высота треугольника. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$.

Если стороны AC и BC не перпендикулярны, то $h_a = AD < AC$, т.е. $h_a < b$ и поэтому $S_{ABC} < \frac{1}{2}ab$.

Если же $AC \perp BC$, то сторона $AC = AD = h_a$, т.е. $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab$.

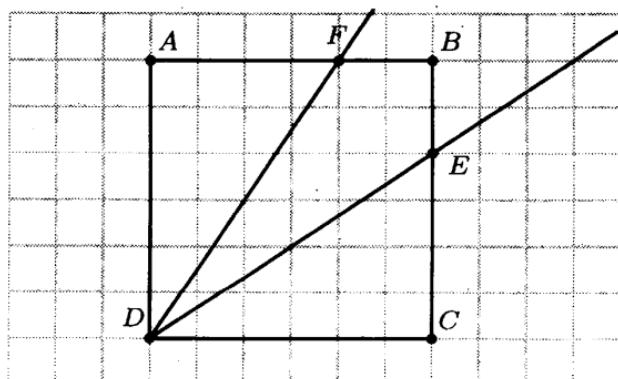
Следовательно, наибольшую площадь имеет тот треугольник, у которого стороны перпендикулярны.

506. Площадь квадрата $S_{ABCD} = a^2$, где a — длина стороны квадрата.

Из анализа условий задачи следует, что двумя из иско-мых фигур будут одинаковые треугольники. Следовательно площадь такого треугольника $S_{\Delta} = \frac{1}{3}S_{ABCD} = \frac{1}{3}a^2$.

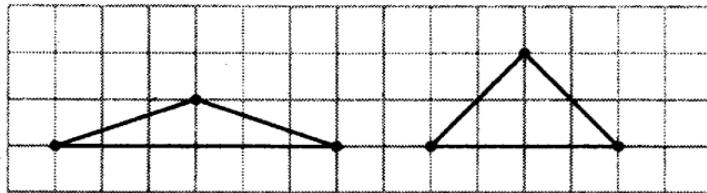
Так как одной из сторон такого треугольника является сторона квадрата a , а вторая сторона будет его высотой h , и $S_{\Delta} = \frac{1}{2}h \cdot a = \frac{1}{3}S_{ABCD} = \frac{1}{3}a^2 \rightarrow \frac{1}{2}h \cdot a = \frac{1}{3}a^2 \rightarrow h = \frac{2}{3}a$.

Следовательно прямые проведенные из вершины должны делить стороны квадрата в отношении $1 : 2$.



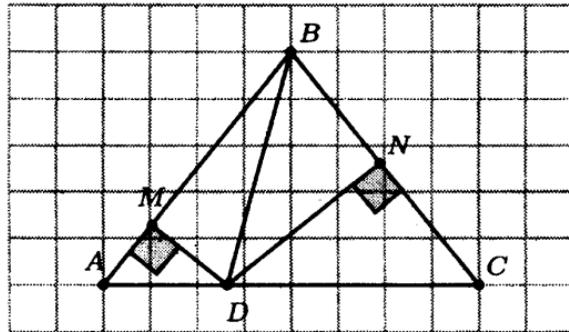
507*. Рассмотри треугольнике на рисунке. Очевидно, что стороны первого треугольника больше сторон второго треугольника, однако площадь первого треугольника 3 клеточки.

ки, а площадь второго 4 клеточки. Следовательно данное утверждение не верно.



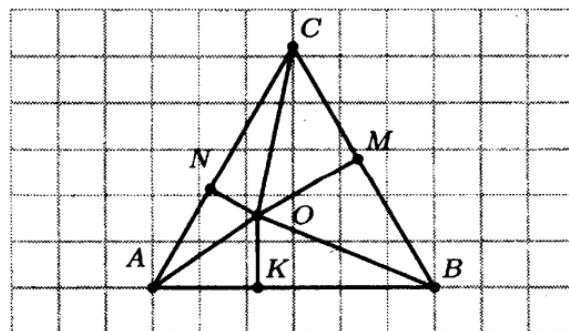
Ответ: нет.

508*.

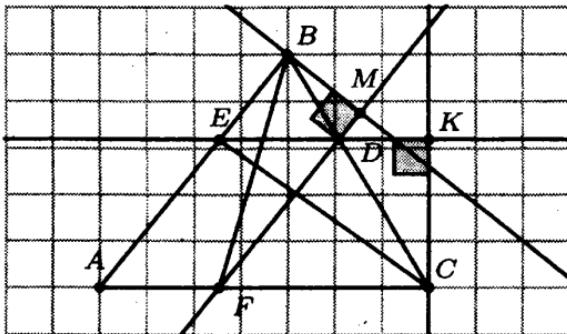


$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{CBD} = \frac{1}{2}AB \cdot DN + \frac{1}{2}BC \cdot DN = \\ = \frac{1}{2}AB(DM + DN) \rightarrow (DM + DN) = \frac{2S_{ABC}}{AB}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

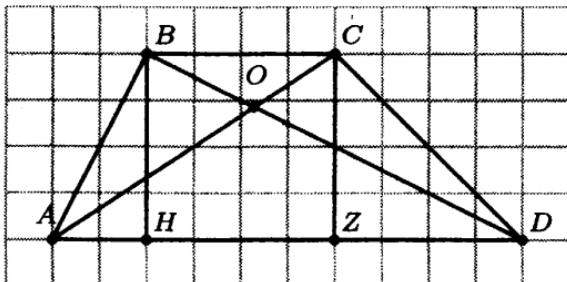
509. Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC = CD = a$, тогда $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = \frac{1}{2}(a \cdot ON + a \cdot OM + a \cdot OK) = \\ = \frac{a}{2}(ON + OM + OK) \rightarrow (ON + OM + OK) = \frac{2S_{ABC}}{a}$, что и требовалось доказать.



510*. Пусть BM и CK — высоты треугольников BDF и CDE . Так как BM и CK равны высотам параллелограмма $AEDF$, то $S_{BDF} = \frac{1}{2} \cdot S_{AEDF}$ $S_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot S_{AEDF}$, следовательно, $S_{BDF} = S_{CDE}$, что и требовалось доказать.



511.



а) Пусть $BH = CZ$ — высоты треугольников ACD и ABD . Так как AD — общая сторона, то $S_{ACD} = S_{ABD}$.

б) $S_{ABD} = S_{ABO} + S_{AOD}$, $S_{ACD} = S_{CDO} + S_{AOD}$. Так как $S_{ACD} = S_{ABD}$, то $S_{ABO} = S_{CDO}$.

в) $\angle COD = \angle BOA$, следовательно $S_{ABO} : S_{CDO} = (OA \cdot OB) : (OC \cdot OD)$.

Так как $S_{ABO} = S_{CDO}$, то $OA \cdot OB = OC \cdot OD$, что и требовалось доказать.

Ответ: а) площади треугольников равны; б) площади треугольников равны.

512*. Площадь данной трапеции $S = \frac{1}{2}(a + b)h$. Пусть длина отрезка x . Из условий задачи следует, что $\frac{a+x}{2} \times h_1 = \frac{b+x}{2} \cdot h_2$ — равенство площадей образованных

трапеций, и $\frac{a+b}{2} \cdot (h_1 + h_2) = (b+x) \cdot h_1$ — площадь трапеции в два раза больше площади одной образованной трапеции.

Разделим оба эти уравнения на h_1 и зададим $y = \frac{h_2}{h_1}$.
Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} b+x = (a+x)y, \\ (a+b)(1+y) = 2(b+x). \end{cases}$$

Исключая из этих двух уравнений переменную y , получаем:

$$(a+b) \left(1 + \frac{b+x}{a+x} \right) = 2(b+x).$$

$$a+b + \frac{b(a+b)}{a+x} + \frac{(a+b)x}{a+x} = 2b+2x$$

$$(a+b)(a+x) + b(a+b) + (a+b)x = 2(b+x)(a+x)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2ax + 2bx = 2ab + 2ax + 2bx + 2x^2$$

$$a^2 + b^2 - 2x^2 = 0$$

Из чего следует, $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Ответ: $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

513. Пусть дан ромб $ABCD$, где AB — его сторона, AC и BD — диагонали.

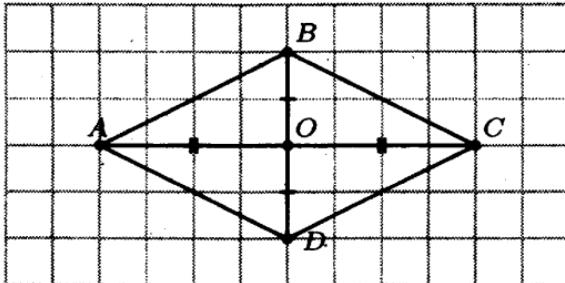
Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, поэтому по теореме Пифагора длина стороны ромба равна $AB = \sqrt{(18/2)^2 + (24/2)^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ м.

Периметр ромба равен $P = 4 \cdot 15 = 60$ м.

С одной стороны $S_{ABCD} = AB \cdot h$, где h — высота ромба и расстояние между параллельными сторонами. С другой стороны $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ (см. задачу 476).

Значит $S_{ABCD} = AB \cdot h = \frac{1}{2}AC \cdot BD \rightarrow h = \frac{AC \cdot BD}{2AB} =$
 $= \frac{24 \cdot 18}{2 \cdot 15} = \frac{432}{30} = 14,4 \text{ м.}$
 Ответ: 60 м и 14,4 м.

514.



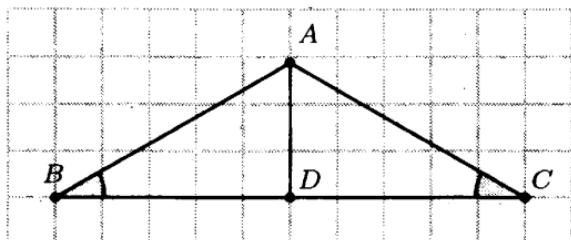
Так как $S_{ABCD} = AC \cdot BD$ (см. задачу 476), то $BD = \frac{2S_{ABCD}}{AC} = \frac{2 \cdot 540}{45} = 24 \text{ см.}$

$\triangle AOB$ — прямоугольный, $OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12 \text{ см}$
 и $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 45 = 22,5 \text{ см.}$ Поэтому по теореме
 Пифагора $AB^2 = OB^2 + OA^2 \rightarrow AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} =$
 $= \sqrt{12^2 + 22,5^2} = \sqrt{650,25} = 25,5 \text{ см.}$

Так как $S_{ABCD} = AB \cdot h \rightarrow h = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{540}{25,5} =$
 $= \frac{360}{17} \text{ см, то } \frac{h}{2} = \frac{180}{17} = 10\frac{10}{17} \text{ см.}$

Ответ: $10\frac{10}{17} \text{ см.}$

515. а) Пусть дан равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC = 20 \text{ см}$, $\angle B = \angle C = 30^\circ$, отрезок $h = AD$ — высота. Тогда $BD = DC = \frac{1}{2}BC$. Из $\triangle ABD$ находим: $AD = \frac{1}{2}AB = 10 \text{ см}$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).



Поэтому по теореме Пифагора $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{400 - 100} = 10\sqrt{3}$ (см) и $BC = 2BD = 20\sqrt{3}$ см.

Следовательно $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 20\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$ см.

б) Пусть дан равнобедренный $\triangle ABC$ с основанием BC в котором проведена высота BD к боковой стороне AC . Пусть $BD = 6$ см, $\angle DBC = 45^\circ$.

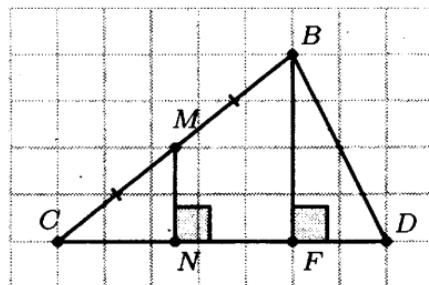
Треугольник BDC – прямоугольный (так как BD – высота), с $\angle DBC = 45^\circ$, поэтому $\angle C = 45^\circ$.

Так как $\triangle ABC$ – равнобедренный, то и $\angle ABC = 45^\circ$, значит, $\angle DBC = \angle ABC$, т.е. $\triangle ABC$ – прямоугольный треугольник с катетами $AB = AC = 6$ см.

Следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ см².

Ответ: а) $100\sqrt{3}$ см²; б) 18 см².

516. Проведем высоту BD данного треугольника. Так как M – середина BC и $MN \parallel BD$, то $DN = NC$ (см. задачу 384).

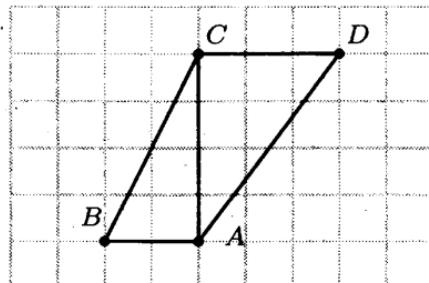


В треугольнике BCD : $BC = 34$ см, $DC = 2NC = 30$ см, значит, по теореме Пифагора $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{34^2 - 30^2} = \sqrt{64 \cdot 4} = 16$ см.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} = (AN + NC) \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 40 \times 16 = 320 \text{ см}^2.$$

Ответ: 320 см².

517.



Четырехугольник $ABCD$ разбивается на два треугольника ABC и ACD .

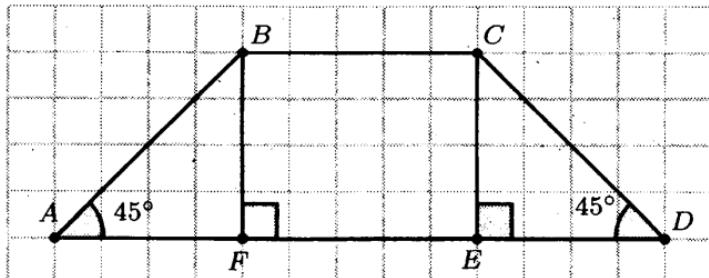
Так как $AB = 5$ см, $BC = 13$ см и $AC = 12$ см, и $13^2 = 12^2 + 5^2$, то по теореме обратной теореме Пифагора $\triangle ABC$ — прямоугольный, и его площадь равна $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30$ см².

Аналогично, так как $AC = 12$ см, $AD = 9$ см и $DA = 15$ см, и $15^2 = 12^2 + 9^2$, то по теореме обратной теореме Пифагора $\triangle ACD$ — прямоугольный, и его площадь равна $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 108 = 54$ см².

Следовательно, $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 30 + 54 = 84$ см².

Ответ: 84 см².

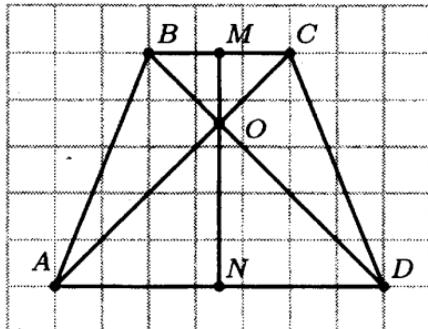
518. а) $\triangle ABE$ — прямоугольный с острым углом в 45° , поэтому он равнобедренный и, значит, $AF = BF = 9$ см.



Так как $ABCD$ равнобедренная трапеция, то $AF = ED = 9$ см и $FE = BC$, то $AD = AF + FE + ED = 9 + 18 + 9 = 36$ см.

Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot (36 + 18) \cdot 9 = 243$ см².

6)



$\triangle ABD = \triangle DCA$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle CAD = \angle BDA$. Так как $\angle BCA = \angle CAD$, $\angle CBD = \angle BDA$ (так как $BC \parallel AD$), то $\angle BCA = \angle CBD$. Отсюда следует, что треугольники AOD и BOC – равнобедренные, а так как $AC \perp BD$, то и прямоугольные, а следовательно $ON = \frac{1}{2}AD$ и $OM = \frac{1}{2}BC$. Значит $MN = ON + OM = \frac{1}{2}(AD + BC)$ и $S_{ANCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \times \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{4}(AD + BC)^2 = \frac{1}{4}(16 + 30)^2 = 529$ см².

Ответ: а) 243 см²; б) 529 см².

519. Из предыдущей задачи (см. 518, б) следует, что высота такой трапеции равна полусумме ее оснований $h = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

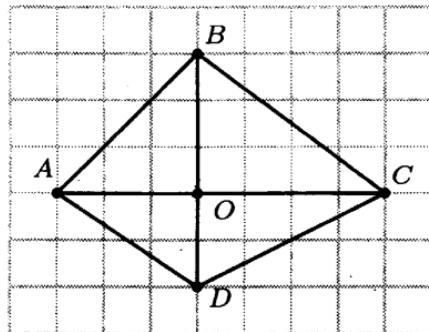
Тогда $S = \frac{1}{2} \cdot 2h \cdot h = h^2$.

Ответ: $S = h^2$.

520. Из предыдущей задачи (см. 518, б) следует, что высота такой трапеции равна полусумме ее оснований $h = \frac{1}{2}(AD + BC)$, следовательно $h = a$, и $S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = a^2$

Ответ: $S = a^2$.

521.



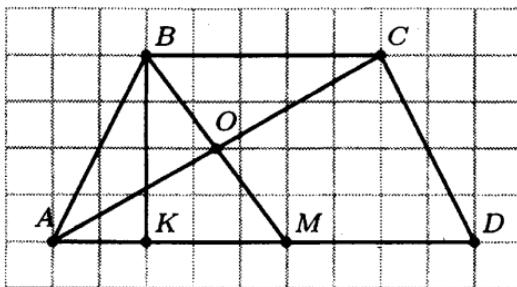
Из теоремы Пифагора следует, что

$$AD^2 + BC^2 = (OD^2 + OA^2) + (OB^2 + OC^2)$$

$$AB^2 + CD^2 = (OA^2 + OB^2) + (OC^2 + OD^2)$$

Значит, $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$, что и требовалось доказать.

522. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, а BK — ее высота, а точка O — середина диагонали .



$\triangle AOM = \triangle COB$ ($AO = OC$, $\angle AOM = \angle COB$, $\angle MAO = \angle BCO$), значит, $AM = BC = 5$ см, и $MD = AD - AM = 17 - 5 = 12$ см.

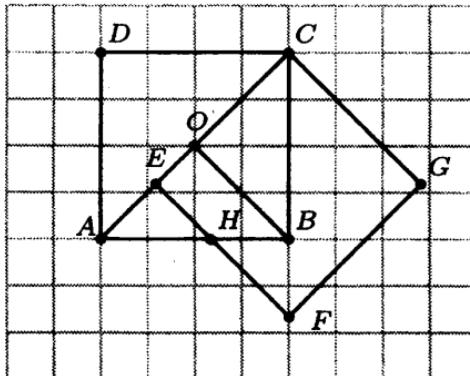
Так как $ABCD$ равнобедренная трапеция, то $AK = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(17 - 5) = 6$ см.

$\triangle ABK$ — прямоугольный, следовательно, из теоремы Пифагора находим $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ см.

$$S_{BDM} = \frac{1}{2}MD \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ см}^2.$$

Ответ: 48 см².

523.



$\triangle AEH$ — прямоугольный с $\angle A = 45^\circ$. $AE = AC - KC = \sqrt{2}a - a = (\sqrt{2} - 1)a$.

$$\text{Значит, } S_{AEH} = \frac{1}{2}((\sqrt{2} - 1)a)^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}a^2$$

$$S_{ECBH} = S_{ACB} - S_{AEH} = \frac{a^2}{2} - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}a^2 = (\sqrt{2} - 1)a^2$$

Ответ: $(\sqrt{2} - 1)a^2$.

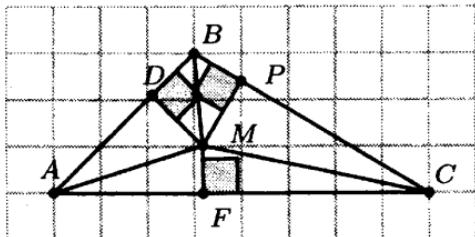
524. Полупериметр треугольника $p = (13 + 5 + 12)/2 = 15$ см.

По формуле Герона получаем (п. 57 учебника), что $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \sqrt{15 \cdot (15 - 13) \cdot (15 - 5) \cdot (15 - 12)} = \sqrt{900} = 30$ см².

Ответ: 30 см.

$$13 + 14 + 15 = 42$$

525. По формуле Герона (п. 57 учебника) находим: $p = (13 + 14 + 15)/2 = 21$ см, и $S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot (21 - 13) \cdot (21 - 14) \cdot (21 - 15)} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 7\sqrt{7056} = 84$ см².



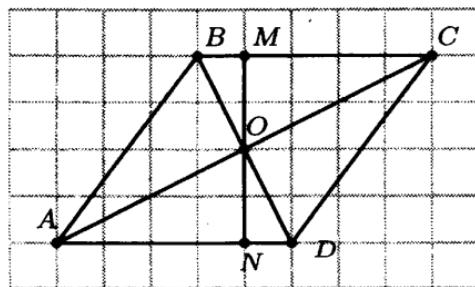
Соединим точку M с вершинами треугольника ABC и проведем высоты MD , MF и MP в образовавшихся треугольниках.

$$S_{ABC} = S_{AMB} + S_{AMC} + S_{BMC} = \frac{1}{2}AB \cdot MD + \frac{1}{2}AC \times \\ \times MF + \frac{1}{2}BC \cdot MP = \frac{1}{2}(13 \cdot 6 + 15 \cdot 2 + 14 \cdot MP) = 84 \rightarrow MP = \\ = (84 \cdot 2 - (13 \cdot 6 + 15 \cdot 2 + \cdot)) : 14 = 4\frac{2}{7} \text{ см.}$$

Ответ: $4\frac{2}{7}$ см.

526.

$$MN = \frac{2}{3}AC \rightarrow AC = \frac{3}{2}MN = \frac{3}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ см,} \\ OC = OA = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ см, } OM = \frac{1}{2}MN = \frac{2\sqrt{2}}{9} \text{ см.}$$



$\triangle BOC$ — прямоугольный (так как диагонали ромба пересекаются под прямым углом) следовательно по теореме

$$\text{Пифагора } BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{OB^2 + \frac{2}{9}}.$$

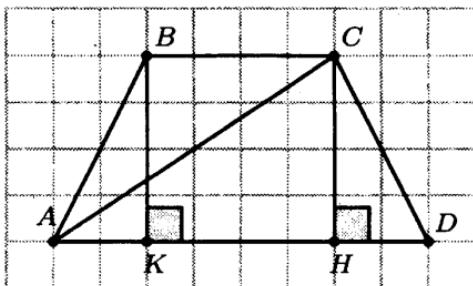
Из $S_{BOC} = \frac{1}{2}OB \cdot OC = \frac{\sqrt{2}}{6}OB$ и $S_{BOC} = \frac{1}{2}OM \cdot BC = \frac{\sqrt{2}}{9}\sqrt{OB^2 + \frac{2}{9}}$, следует, что $\frac{\sqrt{2}}{6}OB = \frac{\sqrt{2}}{9}\sqrt{OB^2 + \frac{2}{9}} \rightarrow 3OB = 2\sqrt{OB^2 + \frac{2}{9}} \rightarrow 9OB^2 = 4(OB^2 + \frac{2}{9}) \rightarrow OB = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$ → $BD = 2OB = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \text{ (см. задача 476)}, S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{45} \text{ см}^2.$$

Ответ: $\frac{8\sqrt{5}}{45}$ см².

527.

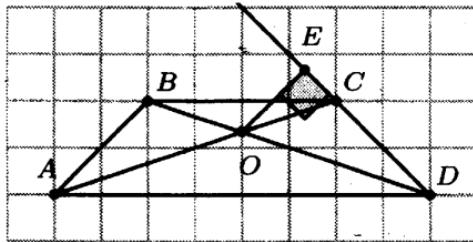
$\triangle ACH$ — прямоугольный (CH — высота), следовательно по теореме Пифагора $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ см.



Так как трапеция равносторонняя, то $AK = HD$, $KH = BC$, следовательно $AH = \frac{1}{2}(AD+BC)$, и, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CH = AH \cdot CH = 8 \cdot 6 = 48$ см².

Ответ: 48 см².

528.

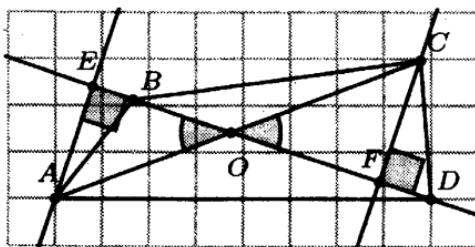


Из точки O — опустим высоту на сторону , тогда
 $S_{COD} = \frac{1}{2}CD \cdot OE = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30 \text{ см}^2$.

$S_{AOB} = S_{COD}$ (см. задачу 511), следовательно, $S_{AOB} = 30 \text{ см}^2$.

Ответ: 30 см^2 .

529.



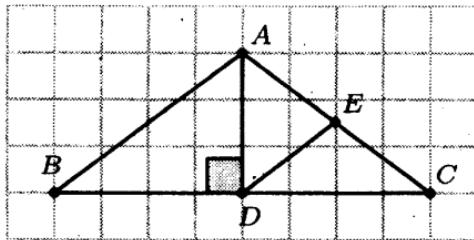
Так как $\angle AOB = \angle COD = 30^\circ$, то $AE = \frac{1}{2}AO$ и
 $CF = \frac{1}{2}OC$ (2° , п. 35 учебника).

Следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2}BD \cdot AE = \frac{1}{2}BD \cdot \frac{1}{2} \cdot AO = \frac{1}{4}BD \cdot AO$, $S_{BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot CF = \frac{1}{2}BD \cdot \frac{1}{2} \cdot OC = \frac{1}{4}BD \times OC$.

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{4}BD \cdot AO + \frac{1}{4}BD \cdot OC = \frac{1}{4}BD \cdot (AO + OC) = \frac{1}{4}BD \cdot AC = \frac{1}{4} \cdot 16 \cdot 20 = 80 \text{ см}^2$.

Ответ: 80 см^2 .

530.



$DM = \frac{1}{2}AC$ (см. задачу 404), значит $AC = 2DM = 2 \cdot 8 = 16$ см.

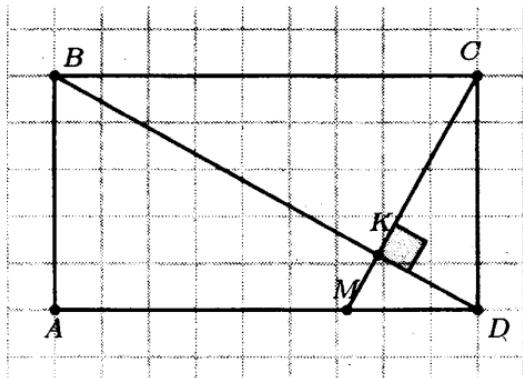
Так как $\triangle ADC$ – прямоугольный, по теореме Пифагора находим: $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{256 - 64} = \sqrt{172} = 8\sqrt{3}$ см.

Так как $\triangle ABC$ – равнобедренный, то AD – высота и медиана, поэтому $BC = 2DC = 2 \cdot 8\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ см.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = 8\sqrt{3} \cdot 8 = 64\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Ответ: $64\sqrt{3}$ см 2 .

531.



Из рисунка следует, что искомая площадь равна $S_{ABKM} = S_{ABD} - S_{KMD}$.

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ см}^2.$$

$\triangle BCD$ – прямоугольный, поэтому $CK = \frac{BC \cdot CD}{\sqrt{BC^2 + CD^2}} = \frac{6 \cdot 8}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{48}{10} = 4,8$ см (см. задачу 491).

По теореме Пифагора $KD = \sqrt{CD^2 - CK^2} = \sqrt{6^2 - 4,8^2} = \sqrt{12,96} = 3,6$ см.

$\triangle CDM$ — прямоугольный, поэтому $KD = \frac{CD \cdot DM}{\sqrt{CD^2 + DM^2}} \rightarrow KD \cdot \sqrt{CD^2 + DM^2} = CD \cdot DM \rightarrow 3,6\sqrt{36 + DM^2} = 6DM \rightarrow 12,96 \cdot (36 + DM^2) = 6DM \rightarrow 466,56 + 12,96DM^2 = 36DM^2 \rightarrow 23,04DM^2 = 466,56 \rightarrow DM = 4,5$ см.

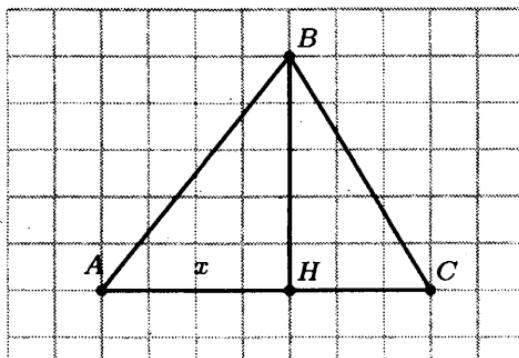
По теореме Пифагора $KM = \sqrt{DM^2 - KD^2} = \sqrt{4,5^2 - 3,6^2} = \sqrt{20,25 - 12,96} = \sqrt{7,29} = 2,7$ см.

Значит, $S_{KMD} = \frac{1}{2}KM \cdot KD = \frac{1}{2} \cdot 2,7 \cdot 3,6 = 4,86$ см².

$$S_{ABKM} = S_{ABD} - S_{KMD} = 24 - 4,86 = 19,14 \text{ см}^2.$$

Ответ: 19,14 см².

532.



В треугольнике ABC с высотой BH зададим. Высота BH — общий катет двух прямоугольных треугольников ABH и BCH .

а) Для $\triangle ABH$ имеем $BH^2 = AB^2 - AH^2$. Для $\triangle BCH$ имеем $BH^2 = BC^2 - HC^2$, откуда $AB^2 - AH^2 = BC^2 - HC^2 \rightarrow BC^2 = AB^2 - AH^2 + HC^2 = AB^2 + (AC - AH)^2 - AH^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH + AH^2 - AH^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$. Что и требовалось доказать.

В случае, если $\angle C = 90^\circ$ ($\triangle ABC$ — прямоугольный), то $AH = AC$ и $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH = AB^2 - AC^2$, что выражает теорему Пифагора.

б) Для $\triangle ABH$ имеем $BH^2 = AB^2 - AH^2$. Для $\triangle BHC$ имеем $BH^2 = BC^2 - HC^2$, откуда $AB^2 - AH^2 = BC^2 - HC^2 \rightarrow BC^2 = AB^2 - AH^2 + HC^2 = AB^2 + (AC + AH)^2 - AH^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH + AH^2 - AH^2 = = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$. Что и требовалось доказать.

Глава VII. Подобные треугольники

§ 1. Определение подобных треугольников

533. $\frac{AB}{CD} = \frac{15 \text{ см}}{20 \text{ см}} = \frac{3}{4}$.

Если длины отрезков выразить в миллиметрах, то отношение не изменится: $\frac{AB}{CD} = \frac{150 \text{ мм}}{200 \text{ мм}} = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$; не изменится.

534. Пусть единицу измерения отрезков — отрезок MM_1 , тогда $MM_1 = 1$, $MM_2 = 3$, $M_1M_2 = 2$, $AB = 9$, $AC = 12$, $BC = 3$, $BD = 9$, $CD = 6$.

а) $\frac{AC}{M_1M_2} = \frac{12}{2} = 6$, $\frac{CD}{MM_1} = \frac{6}{1} = 6$, следовательно, $\frac{AC}{M_1M_2} = \frac{CD}{MM_1}$, т.е. отрезки AC и CD пропорциональны отрезкам M_1M_2 и MM_1 .

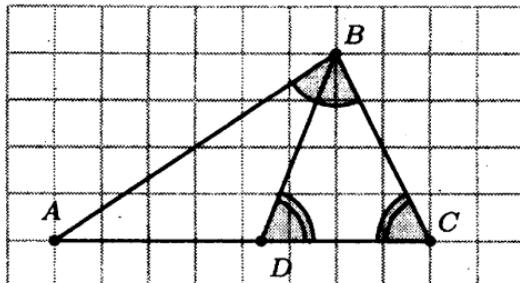
б) Аналогично п. а) получаем: $\frac{AB}{MM_2} = \frac{BC}{MM_1} = \frac{CD}{M_1M_2} = 3$, т.е. отрезки AB , BC и CD пропорциональны отрезкам MM_2 , MM_1 и M_1M_2 .

в) $\frac{AB}{MM_1} = \frac{9}{1}$, $\frac{BD}{M_1M_2} = \frac{9}{2}$, следовательно, $\frac{AB}{MM_1} \neq \frac{BD}{M_1M_2}$, т.е. отрезки AB и BD не пропорциональны отрезкам MM_1 и M_1M_2 .

Ответ: а) да; б) да; в) нет.

535. Задача решена в учебнике.

536.



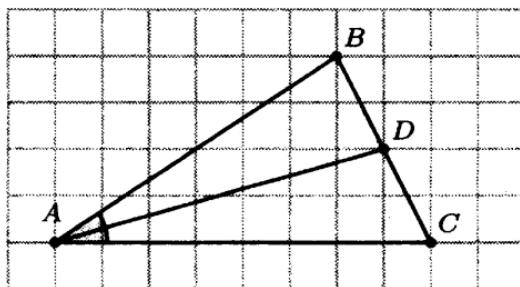
a) Так как BD — биссектриса $\triangle ABC$, то $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ (см. задачу 535). Отсюда получаем: $AB = \frac{AD \cdot BC}{DC} = \frac{7,5 \cdot 9}{4,5}$ см = 15 см.

б) Так как $\angle BDC = \angle C$, то треугольник BDC — равнобедренный, т.е. $BC = BD = 16$.

Из равенства $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ следует: $DC = \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{20 \cdot 16}{30} = 10\frac{2}{3}$.

Ответ: а) 15 см; б) $10\frac{2}{3}$.

537.



Пусть $BD = x$, тогда $DC = BC - BD = 20$ см — x .

Так как AD — биссектриса $\triangle ABC$, то $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$,

$$\text{или } \frac{x}{20 \text{ см} - x} = \frac{14}{21}$$

Следовательно: $21x = 14(20 \text{ см} - x) \rightarrow 35x = 280 \text{ см} \rightarrow x = 8 \text{ см.}$

Итак, $BD = 8 \text{ см}$, $DC = 20 \text{ см} - 8 \text{ см} = 12 \text{ см.}$

Ответ: $BD = 8 \text{ см}$, $DC = 12 \text{ см.}$

538. $BC = BD + CD = 13,5 \text{ см} + 4,5 \text{ см} = 18 \text{ см.}$

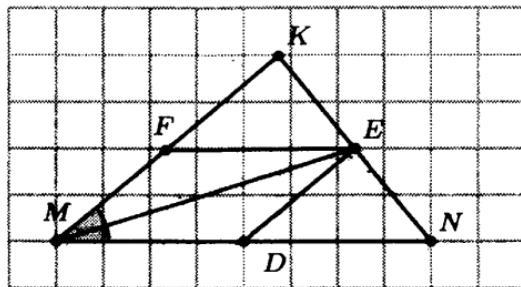
$$AB + AC = 42 \text{ см} - 18 \text{ см} = 24 \text{ см};$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{13,5}{4,5} = 3, \text{ откуда } AB = 3AC.$$

Так как, $3AC + AC = 24 \text{ см}$, то $AC = 6 \text{ см}$ и $AB = 18 \text{ см.}$

Ответ: $AB = 18 \text{ см}$, $AC = 6 \text{ см.}$

539.



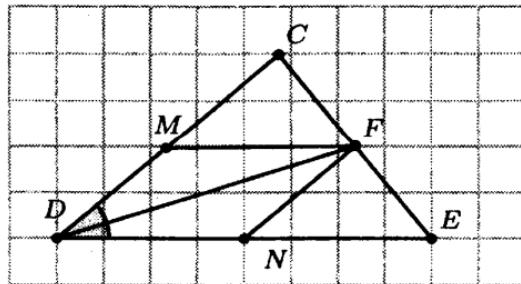
Диагональ ME ромба делит его углы пополам, поэтому отрезок ME — биссектриса.

Следовательно, $\frac{NE}{EK} = \frac{MN}{MK}$, или $\frac{NE}{6 \text{ см} - NE} = \frac{7}{5}$.

Отсюда находим: $5 \cdot NE = 42 \text{ см} - 7 \cdot NE \rightarrow 12 \cdot NE = 42 \text{ см} \rightarrow NE = 3,5 \text{ см} \rightarrow EK = 6 \text{ см} - NE = 2,5 \text{ см.}$

Ответ: $NE = 3,5 \text{ см}$, $EK = 2,5 \text{ см.}$

540.



Диагональ DF ромба является биссектрисой $\triangle CDE$, поэтому

$$\frac{CD}{DE} = \frac{CF}{FE} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \text{ откуда } CD = \frac{2}{3}DE.$$

Так как $CE = CF + FE = 8 \text{ см} + 12 \text{ см} = 20 \text{ см}$ и $CD + DE = 55 \text{ см} - CE = 35 \text{ см}$, то $\frac{2}{3}DE + DE = 35 \text{ см}$,

откуда $DE = 21 \text{ см}$, и $CD = \frac{2}{3} \cdot 21 \text{ см} = 14 \text{ см}$.

Ответ: $CD = 14 \text{ см}$, $DE = 21 \text{ см}$.

541. $\angle A = \angle E$; $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$, т.е. $\angle C = \angle F$; $\angle D = 180^\circ - (\angle E + \angle F) = 180^\circ - 146^\circ = 34^\circ$, т.е. $\angle B = \angle D$.

Итак, углы треугольников ABC и DEF соответственно равны.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{5,2}{15,6} = \frac{1}{3}, \quad \frac{AC}{EF} = \frac{4,4}{13,2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{BC}{DF} = \frac{7,6}{22,8} = \frac{1}{3}.$$

Отсюда следует, что $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{DF}$, т.е. стороны $\triangle ABC$ пропорциональны сходственным сторонам $\triangle DEF$. Следовательно, треугольники ABC и DEF подобны.

Ответ: да.

542. $KM = 2,1 \cdot AB = 2,1 \cdot 4 \text{ см} = 8,4 \text{ см}$;

$$\frac{MN}{BC} = 2,1, \text{ откуда } MN = 2,1 \cdot BC = 10,5 \text{ см};$$

$$\frac{KN}{AC} = 2,1, \text{ откуда } KN = 2,1 \cdot AC = 14,7 \text{ см}.$$

Ответ: $KM = 8,4 \text{ см}$; $MN = 10,5 \text{ см}$; $KN = 14,7 \text{ см}$.

543. Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB : A_1B_1 = k$ — коэффициент подобия, h и h_1 — высоты, проведенные к сходственным сторонам AB и A_1B_1 . Тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2, \text{ т.е. } \frac{\frac{1}{2}AB \cdot h}{\frac{1}{2}A_1B_1 \cdot h_1} = k^2 \rightarrow \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)\left(\frac{h}{h_1}\right) = k^2,$$

$$= k^2, \text{ или } k\left(\frac{h}{h_1}\right) = k^2 \rightarrow \frac{h}{h_1} = k.$$

Итак, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{h}{h_1}$, что и требовалось доказать.

544. Пусть k — коэффициент подобия треугольников. Тогда $\frac{75}{300} = k^2$, откуда $k^2 = \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{2}$. Искомая сторона равна $k \cdot 9$ м, т.е. 4,5 м.

Ответ: 4,5 м.

545. $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = (\frac{6}{5})^2 = \frac{36}{25}$, откуда $S_{ABC} = \frac{36}{25}S_{A_1B_1C_1}$.

По условию $S_{ABC} - S_{A_1B_1C_1} = 77$ см², т.е. $\frac{36}{25}S_{A_1B_1C_1} - S_{A_1B_1C_1} = 77$ см² $\rightarrow \frac{11}{25}S_{A_1B_1C_1} = 77$ см² $\rightarrow S_1 = 175$ см².
 $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} + 77$ см² = 252 см².

Ответ: $S_{ABC} = 252$ см², $S_{A_1B_1C_1} = 175$ см².

546. $\frac{87,5}{S} = k^2$, где $k = \frac{1}{\sqrt{100000}}$.

Следовательно $S = (100000)^2 \cdot 87,5$ см² = 87,5 км².

Ответ: $S = 87,5$ км².

547. Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, т.е. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$ — коэффициент подобия).

Тогда $AB = k \cdot A_1B_1$, $BC = k \cdot B_1C_1$, $CA = k \cdot C_1A_1$.

Складывая равенства, получим: $AB + BC + CA = k \times (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)$.

Следовательно $\frac{AB + BC + CA}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1} = k$, что и требовалось доказать.

548. Коэффициент подобия $k = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{140 \text{ см}}{56 \text{ см}} = 2,5$.

Ответ: 2,5.

549. Отношение периметров данных треугольников равно коэффициенту подобия k : $k = \frac{15 + 20 + 30}{26} = 2,5$.

Стороны треугольника, подобного данному, в k раз меньше сторон данного треугольника, т.е. искомые стороны равны $15 \text{ см} : 2,5 = 6 \text{ см}$, $20 \text{ см} : 2,5 = 8 \text{ см}$, $30 \text{ см} : 2,5 = 12 \text{ см}$.

Ответ: 6 см, 8 см, 12 см.

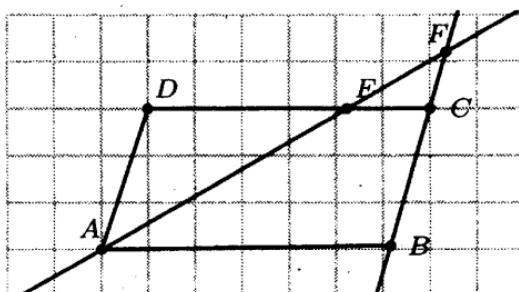
§ 2. Признаки подобия треугольников

550. Решение. а) На рисунке 193, а прямоугольные треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников (они имеют по равному прямому углу и по равному острому углу α). Из подобия треугольников следует пропорциональность сходственных сторон: $\frac{x}{12} = \frac{6}{8}$, откуда $x = 9$.

б) На рисунке 193, б прямоугольные треугольники также подобны, поэтому $\frac{y}{\sqrt{10^2 - 8^2}} = \frac{28}{8}$, откуда $y = \frac{28 \cdot 6}{8} = 21$.

Ответ: $x = 9$, $y = 21$.

551.



Треугольники ADE и FCE подобны по первому признаку подобия треугольников ($\angle EAD = \angle CFE$ как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AD и BF секущей AF , $\angle AED = \angle CEF$ равны как вертикальные).

Из подобия треугольников следует, что $\frac{EF}{AE} = \frac{FC}{AD} = \frac{EC}{DE}$.

$$\text{a)} EF = \frac{AE \cdot EC}{DE} = \frac{10 \cdot 4}{8} \text{ см} = 5 \text{ см},$$

$$FC = \frac{AD \cdot EC}{DE} = \frac{7 \cdot 4}{8} \text{ см} = 3,5 \text{ см}.$$

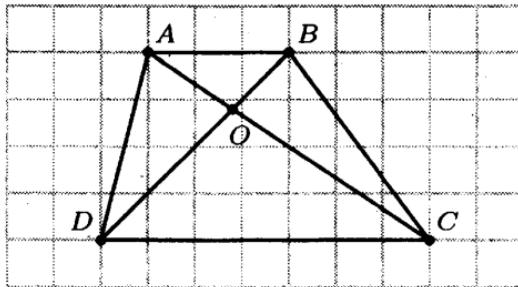
$$\text{б)} \frac{EC}{DE} = \frac{FC}{AD} = \frac{2}{5}, \text{ откуда } EC = \frac{2}{5}DE.$$

Так как $DE + EC = DC = AB = 8$ см, то $DE + \frac{2}{5}DE = 8$ см.

$$\text{Отсюда } DE = \frac{40}{7} \text{ см} = 5\frac{5}{7} \text{ см}; EC = \frac{2}{5}DE = \frac{2}{5} \times \frac{40}{7} \text{ см} = 2\frac{2}{7} \text{ см}.$$

Ответ: а) $EF = 5$ см, $FC = 3,5$ см; б) $DE = 5\frac{5}{7}$ см,
 $EC = 2\frac{2}{7}$ см.

552.



Треугольники AOB и COD подобны по двум углам ($\angle ABO = \angle ODC$ равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AB и DC секущей BD , $\angle AOB = \angle DOC$ равны как вертикальные).

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}.$$

$$\text{а)} AB = \frac{DC \cdot BO}{OD} = \frac{25 \cdot 4}{10} \text{ см} = 10 \text{ см};$$

$$\text{б)} \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{a}{b};$$

$$\text{в)} \frac{AB}{DC} = \frac{AO}{AC - AO} \rightarrow \frac{96}{24} = \frac{AO}{15 \text{ см} - AO} \rightarrow 4(15 \text{ см} - AO) = AO \rightarrow AO = 12 \text{ см.}$$

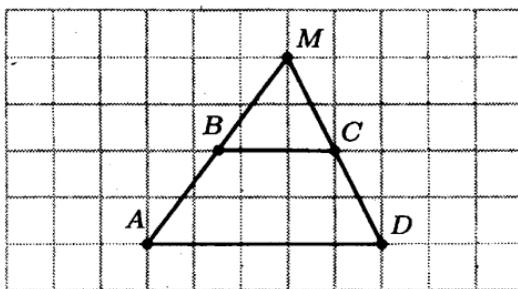
Ответ: а) 10 см; б) $\frac{a}{b}$; в) 12 см.

553. а) Два равнобедренных треугольника, имеющие по равному острому углу, могут не быть подобными. Например, равнобедренный треугольник с углом в 50° при основании и равнобедренный треугольник с углом в 50° между боковыми сторонами не подобны, так как углы первого треугольника равны $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$, а второго $50^\circ, 65^\circ, 65^\circ$.

б), в) Если два равнобедренных треугольника имеют по равному тупому углу (или по прямому углу), то эти равные углы лежат между боковыми сторонами треугольника. Боковые стороны одного равнобедренного треугольника пропорциональны боковым сторонам другого равнобедренного треугольника. Следовательно, указанные треугольники подобны по второму признаку подобия треугольников.

Ответ: а) не всегда; б) да; в) да.

554.



Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями $AD = 8$ см, $BC = 5$ см и боковыми сторонами $AB = 3,9$ см, $CD = 3,6$ см. Требуется найти MB и MC .

Треугольники AMD и BMC подобны по двум углам ($\angle M$ — общий; $\angle A = \angle MBC$, так как эти углы являются соответственными при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AM).

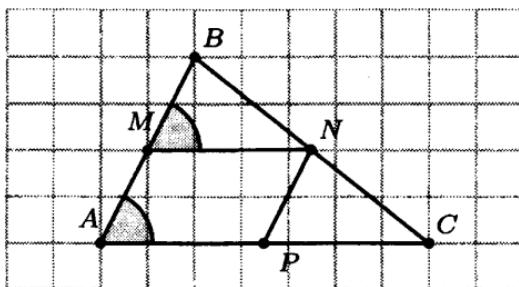
Из подобия треугольников следует: $\frac{MB}{MA} = \frac{BC}{AD}$, или

$$\frac{MB}{MB + 3,9 \text{ см}} = \frac{5}{8} \rightarrow 8MB = 5MB + 19,5 \text{ см} \rightarrow MB = 6,5 \text{ см.}$$

Аналогично: $\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{AD} \rightarrow \frac{MC}{MC + 3,6 \text{ см}} = \frac{5}{8} \rightarrow MC = 6 \text{ см.}$

Ответ: 6,5 см и 6 см.

555.



а) Четырехугольник $AMNP$ — параллелограмм, поэтому $AM = PN$, $AP = MN$ и, следовательно, $\frac{AM}{MN} = \frac{10 \text{ см}}{15 \text{ см}} = \frac{2}{3}$.

$\triangle ABC \sim \triangle MBN$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle A = \angle BMN$), поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MN} \rightarrow \frac{10}{15} = \frac{10 \text{ см} - AM}{MN}$.

Следовательно, $\frac{2}{3} = \frac{10 \text{ см}}{MN} - \frac{2}{3} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{10 \text{ см}}{MN} \rightarrow MN = \frac{2}{3} MN = \frac{2}{3} \cdot 7,5 \text{ см} = 5 \text{ см.}$

Значит, $MN = AP = 7,5 \text{ см}$; $AM = PN = 5 \text{ см}$.

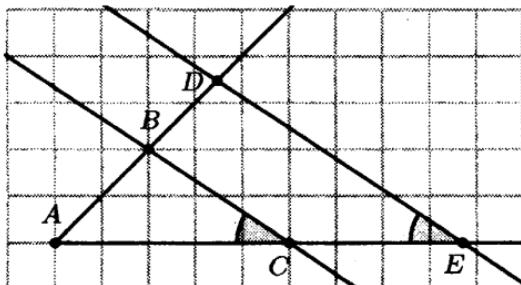
б) Так как $AM = AP$, то $\frac{AM}{AP} = \frac{AM}{MN} = 1$.

Из $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MN} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a - AM}{MN} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a}{MN} - 1$.

Следовательно, $MN = \frac{ab}{a+b}$ $\rightarrow AM = MN = NP = AP = \frac{ab}{a+b}$.

Ответ: а) 7,5 см, 5 см, 7,5 см, 5 см; б) все стороны равны $\frac{ab}{a+b}$.

557.



$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по двум углам (угол A — общий, $\angle C = \angle E$).

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AC} &= \frac{AD}{AE} = \frac{AB + BD}{AC + CE} \Rightarrow AB(AC + CE) = \\ &= AC(AB + BD) \rightarrow AB \cdot AC + AB \cdot CE = AC \cdot AB + \\ &+ AC \cdot BD \rightarrow AB \cdot CE = AC \cdot BD \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \text{ и} \\ \frac{DE}{BC} &= \frac{AE}{AC}. \end{aligned}$$

а) $AB = AD - BD = 14$ см, $AC = \frac{AB \cdot CE}{BD} = \frac{14 \cdot 10}{8}$ см = 17,5 см.

б) $BD = \frac{AB \cdot CE}{AC} = \frac{10 \cdot 4}{8}$ см = 5 см.

$$DE = \frac{AE \cdot BC}{AC} = \frac{(AC + CE) \cdot BC}{AC} = \frac{(8 + 4) \cdot 4}{8}$$
 см = 6 (см).

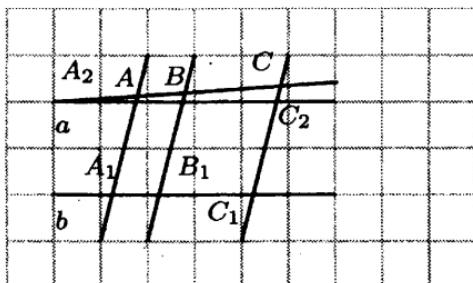
в) Так как $AB : BD = 2 : 1$, то $AB = 2 \cdot BD$. Поэтому $\frac{AD}{AB} = \frac{AB + BD}{AB} = \frac{3BD}{2BD} = \frac{3}{2}$.

Из подобия треугольников ADE и ABC следует:

$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$, или $\frac{12 \text{ см}}{BC} = \frac{3}{2}$,
откуда $BC = \frac{12 \cdot 2}{3} \text{ см} = 8 \text{ см.}$

Ответ: а) 17,5 см; б) 5 см и 6 см; в) 8 см.

558.



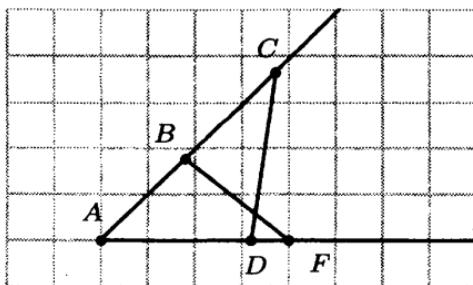
Если $a \parallel b$, то четырехугольники ABB_1A_1 и BCC_1B_1 – параллелограммы, и поэтому $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$, откуда следует, что $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$

Если прямые a и b не параллельны, то через точку A проведем прямую b_1 , параллельную прямой b . Она пересекает прямую BB_1 в некоторой точке B_2 , а прямую CC_1 – в точке C_2 . Четырехугольники $AB_2B_1A_1$ и $B_2C_2C_1B_1$ – параллелограммы и потому $AB_2 = A_1B_1$ и $B_2C_2 = B_1C_1$.

Имеет место равенство $\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$ (см. задачу 556).

Отсюда, используя предыдущие равенства, получаем $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

559.



Так как $\frac{AC}{AF} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$ и $\frac{AD}{AB} = \frac{8}{5}$, то $\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AB}$.

Значит стороны AC и AD $\triangle ACD$ пропорциональны сторонам AF и AB $\triangle AFB$.

$\angle A$ — общий угол треугольников ACD и AFB , заключенный между сторонами AC и AD $\triangle ACD$ и также между сторонами AF и AB $\triangle AFB$. Следовательно, $\triangle ACD \sim \triangle AFB$ по второму признаку подобия треугольников.

Ответ: да.

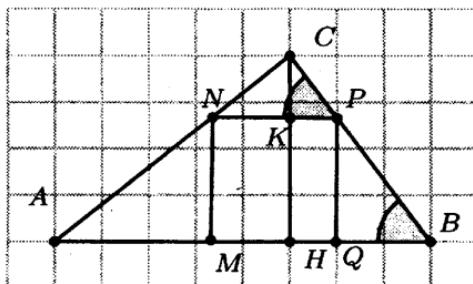
560. а) Так как $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{3}{4,5} = \frac{2}{3}$, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{5}{7,73}$, $\frac{CA}{C_1A_1} = \frac{7}{10,5} = \frac{2}{3}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по третьему признаку подобия треугольников.

б) Так как $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = \frac{1}{200}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по третьему признаку подобия треугольников.

Ответ: а) да; б) да.

561. Три стороны одного равностороннего треугольника пропорциональны трем сторонам другого равностороннего треугольника. Поэтому два равносторонних треугольника подобны по третьему признаку подобия треугольников.

562.

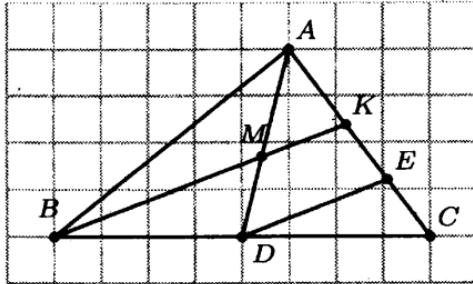


Пусть $MNPQ$ — квадрат, вписанный в треугольник ABC . Тогда $NP \parallel AB$, и поэтому если CH — высота $\triangle ABC$, то CK — высота $\triangle NPC$. Пусть $NP = x$, тогда $CK = CH - KH = h - x$.

Треугольники ABC и NPC подобны по двум углам (угол C — общий; $\angle B = \angle CPN$, так как $NP \parallel AB$).

Отсюда, согласно задаче 543, следует, что $\frac{NP}{AB} = \frac{CK}{CH} \rightarrow \frac{x}{a} = \frac{h-x}{h} \rightarrow xh = a(h-x) \rightarrow x = \frac{ah}{a+h}$.
 Ответ: $\frac{ah}{a+h}$.

563.



Пусть $DE \parallel BK$. Тогда, $\frac{BD}{DC} = \frac{KE}{EC}$ и $\frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KE}$ (см. задачу 556), а так как $BD = DC$, то $KE = EC$.

а) Так как точка M – середина отрезка AD , то $AM = MD$, и поэтому $AK = KE$. Итак, $AK = KE = EC$, следовательно, $KC = 2AK$, $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}$.

б) Так как $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$, то $\frac{AK}{KE} = \frac{1}{2}$, т.е. $KE = 2AK$, а поскольку $KE = EC$, то $KC = 2KE = 4AK$. Поэтому $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{4}$.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$.

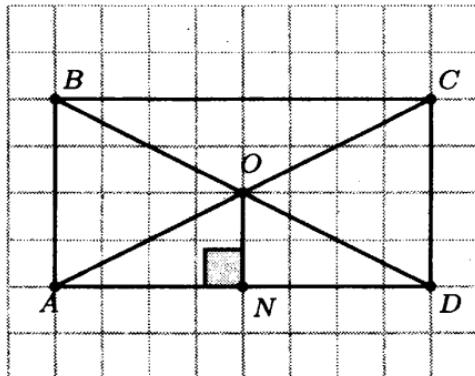
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

564. Сторонами треугольника с искомым периметром являются средние линии данного треугольника, каждая из которых равна половине соответствующей стороны данного треугольника (теорема п. 64).

Искомый периметр равен $\frac{1}{2}(8 + 5 + 7)$ см = 10 см.

Ответ: 10 см.

565.



Пусть ON — перпендикуляр, проведенный из точки O пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ к его большей стороне AD . Тогда $OM \parallel AB$ и так как точка O — середина отрезка BD , то ON — средняя линия $\triangle ABD$. Поэтому $AB = 2OM$, а так как по условию $OM = 2,5$ см, то $AB = 5$ см. Итак, меньшая сторона прямоугольника равна 5 см.

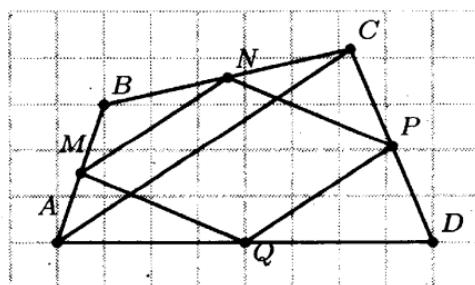
Ответ: 5 см.

566. Так как P и Q — середины сторон AB и AC , то $AB = 2AP$, $AC = 2AQ$, а поскольку отрезок PQ — средняя линия $\triangle ABC$, то $BC = 2PQ$.

Следовательно, $P_{ABC} = AB + BC + CA = 2(AP + AQ + PQ) = 2 \cdot 21$ см = 42 см.

Ответ: $P_{ABC} = 42$ см.

567.



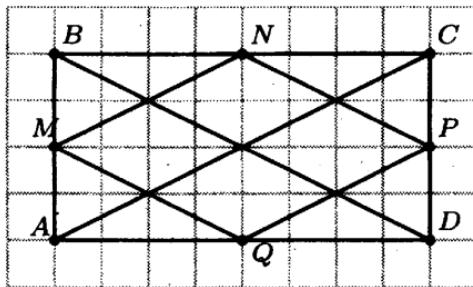
Пусть точки M, N, P, Q — середины сторон четырехугольника $ABCD$. Тогда MN и PQ — средние линии треугольников ABC и ADC .

Поэтому $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$ и $PQ \parallel AC$, $PQ = \frac{1}{2}AC$.

Значит, что $MN \parallel PQ$ и $MN = PQ$. Следовательно, четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм.

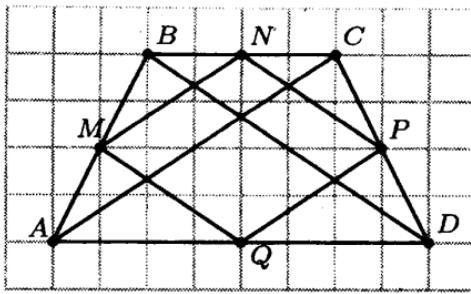
568. а) Пусть точки M, N, P, Q — середины сторон прямоугольника $ABCD$. Тогда четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм, причем $MN = PQ = \frac{1}{2}AC$, $MQ = NP = \frac{1}{2}BD$ (см. задачу 567). Но в прямоугольнике диагонали равны, т.е. $AC = BD$.

Следовательно, $MN = PQ = MQ = NP$, т.е. $MNPQ$ — ромб.

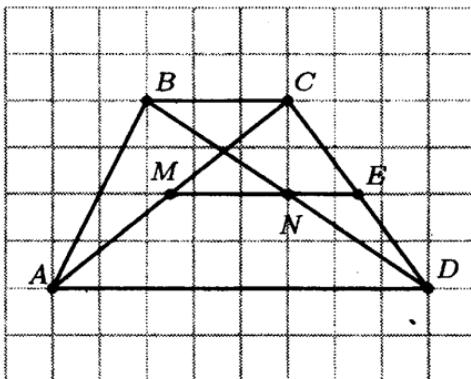


б) Пусть точки M, N, P, Q — середины сторон равнобедренной трапеции $ABCD$. Тогда четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм, причем $MN = PQ = \frac{1}{2}AC$, $MQ = NP = \frac{1}{2}BD$ (см. задачу 567). Но в равнобедренной трапеции диагонали равны, т.е. $AC = BD$ (см. задачу 388).

Следовательно, $MN = PQ = MQ = NP$, т.е. $MNPQ$ — ромб.



569. Пусть точки M и N — середины диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , причем $AD > BC$. Проведем через точку M прямую ME , параллельную AD . Тогда отрезок ME — средняя линия $\triangle ACD$, и значит, точка E — середина стороны CD и $ME = \frac{1}{2}AD$.

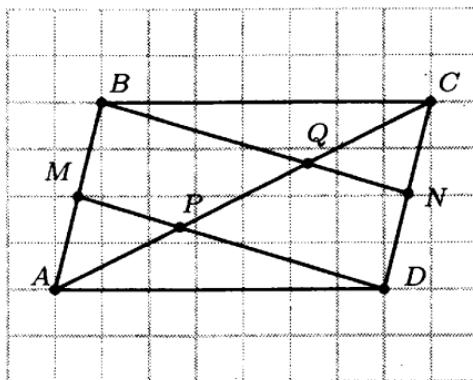


Так как прямая ME проходит через середину стороны CD и $ME \parallel BC$, то прямая ME пересекает диагональ BD в ее середине, т.е. в точке N . Поэтому отрезок NE — средняя линия $\triangle DBC$ и, следовательно, $NE = \frac{1}{2}BC$.

$$MN = ME - NE = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD - BC).$$

Итак, отрезок MN параллелен основаниям трапеции и равен их полуразности, что и требовалось доказать.

570. Пусть точка N — середина стороны CD , P и Q — точки пересечения отрезков DM и BN с диагональю AC .



Так как $MB = DN$ и $MB \parallel DN$, то $MBND$ — параллелограмм и, следовательно, $DM \parallel BN$. Поэтому $MP \parallel BQ$ и так как точка M — середина AB , то отрезок MP — средняя линия $\triangle ABQ$. Значит, $AP = PQ$.

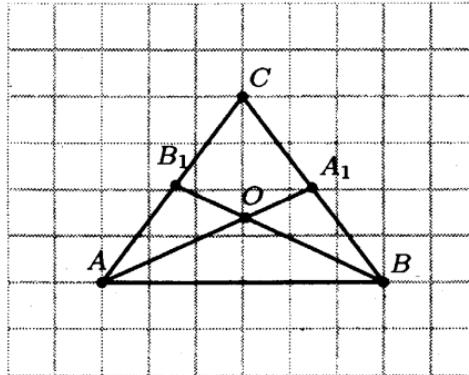
Аналогично из $\triangle CPD$, находим $CQ = PQ$.

Следовательно, $AP = PQ = CQ$.

Отсюда получаем, что $AP \frac{1}{3} AC = 6$ см, $PC = 12$ см.

Ответ: $AP = 6$ см, $PC = 12$ см.

571.



Так как $BO : OB_1 = 2 : 1$ и так как треугольники AOB и AOB_1 имеют общую высоту, проведенную из вершины A , то $S_{AOB} : S_{AOB_1} = 2 : 1$ (см. задачу 1, п. 64).

Значит, $S_{AOB_1} = \frac{1}{2}S$, $S_{ABB_1} = S_{AOB} + S_{AOB_1} = \frac{3}{2}S$.

Так как медиана BB_1 разделяет треугольник ABC на два треугольника с равными площадями, то $S_{ABC} = 2S_{ABB_1} = 3S$.

Ответ: $3S$.

Обозначения в условиях задач **572–574** см. учебник.

572. а) $h = \sqrt{a_c b_c} = \sqrt{25 \cdot 16} = 20;$

$$a = \sqrt{c \cdot a_c} = \sqrt{(a_c + b_c)a_c} = \sqrt{41 \cdot 16} = 4\sqrt{41};$$

$$b = \sqrt{c \cdot b_c} = \sqrt{41 \cdot 25} = 5\sqrt{41}.$$

б) $h = \sqrt{36 \cdot 64} = 48;$

$$a = \sqrt{(36 + 64)64} = 80;$$

$$b = \sqrt{100 \cdot 36} = 60.$$

в) Из равенства $b = \sqrt{c \cdot b_c} \rightarrow c = \frac{b^2}{b_c} = \frac{12^2}{6} = 24;$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{24^2 - 12^2} = 12\sqrt{3}.$$

Из равенства $a = \sqrt{c a_c} \rightarrow a_c = \frac{a^2}{c} = \frac{(12\sqrt{3})^2}{24} = 18.$

г) $c = \frac{a^2}{a_c} = \frac{8^2}{4} = 16;$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16^2 - 8^2} = 8\sqrt{3}; b_c = \frac{b^2}{c} = \frac{(8\sqrt{3})^2}{16} =$$

= 12.

д) $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5};$

$$a_c = \frac{a^2}{c} = \frac{6^2}{9} = 4; b_c = \frac{b^2}{c} = \frac{(3\sqrt{5})^2}{9} = 5;$$

$$h = \sqrt{a_c \cdot b_c} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

Ответ: а) 20, $4\sqrt{41}$ и $5\sqrt{41}$; б) 48, 80 и 60; в) $12\sqrt{3}$, 24 и 18; г) $8\sqrt{3}$, 16 и 12; д) $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$, 4 и 5.

573. Из $a = \sqrt{c a_c}$ и $b = \sqrt{c b_c}$ следует:

$$a_c = \frac{a^2}{c}, b_c = \frac{b^2}{c}.$$

Ответ: $a_c = \frac{a^2}{c}, b_c = \frac{b^2}{c}.$

574. а) Площадь S прямоугольного треугольника: $S = \frac{1}{2}ab$

и $S = \frac{1}{2}ch.$

Значит, $ab = ch$, или $h = \frac{ab}{c}.$

6) Из Формул $a_c = \frac{a^2}{c}$ и $b_c = \frac{b^2}{c}$ (см. задачу 573)

следует: $c = \frac{a^2}{a_c}$ и $c = \frac{b^2}{b_c}$.

Следовательно, $\frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$.

575. По условию $b : a = 3 : 4$, $c = 50$ мм. Используя равенства из задачи 573 $a_c = \frac{a^2}{c}$, $b_c = \frac{b^2}{c}$ (см.), получаем: $\frac{b_c}{a_c} = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{9}{16}$, т.е. $b_c = \frac{9}{16}a_c$.

Так как $a_c + b_c = c$, то $a_c + \frac{9}{16}a_c = 50$ мм, откуда $a_c = 32$ мм, $b_c = 18$ мм.

Ответ: 32 мм и 18 мм.

576. Пусть $a_c = b_c + 11$ см. Так как $a_c > b_c$, то $\sqrt{c \cdot a_c} > \sqrt{c \cdot b_c}$, т.е. $a > b$.

Согласно условию $a : b = 6 : 5$, но $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{c \cdot a_c}}{\sqrt{c \cdot b_c}} = \sqrt{\frac{a_c}{b_c}}$ и, значит, $\sqrt{\frac{a_c}{b_c}} = \frac{6}{5}$, откуда $\frac{a_c}{b_c} = \frac{36}{25}$, т.е. $a_c = \frac{36}{25}b_c$.

Следовательно, $\frac{36}{25}b_c = b_c + 11$ см. Отсюда находим: $b_c = 25$ см, $a_c = b_c + 11$ см = 36 см, $c = a_c + b_c = 61$ см.

Ответ: 61 см.

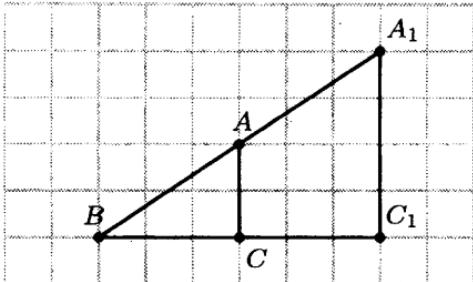
577. Так как $5^2 + 12^2 = 13^2$, то данный треугольник — прямоугольный, причем гипотенуза равна 13 см. Пусть $a = 12$ см, $b = 5$ см. Требуется найти a_c и b_c .

Из равенства задачи 574 $\frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$, б) следует, что

$\frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{144}{25}$, т.е. $a_c = \frac{144}{25}b_c$.

Так как $a_c + b_c = c = 13$ см, то $\frac{144}{25}b_c + b_c = 13$ см, откуда
находим: $b_c = \frac{25}{13}$ см = $1\frac{12}{13}$ см, $a_c = \frac{144}{13}$ см = $11\frac{1}{13}$ см.
Ответ: $11\frac{1}{13}$ см и $1\frac{12}{13}$ см.

579.



$\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$ (угол B — общий, углы C и C_1 — прямые), поэтому $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BC_1}{BC}$, откуда $A_1C_1 = \frac{AC \cdot BC_1}{BC} = \frac{1,7 \cdot 6,3}{3,4} = 3,15$ м.

Ответ: 3,15 м.

580. Пусть A_1C_1 — высота дерева, AC — высота человека, BC_1 — длина тени дерева, BC — длина тени человека. Тогда $A_1C_1 = \frac{AC \cdot BC_1}{BC} = \frac{1,7 \cdot 10,2}{2,5} = 6,936$ м.

Ответ: 6,936 м.

581. Треугольники ABD и EFD подобны по двум углам ($\angle 1 = \angle 2$ по условию, углы A и E — прямые).

Поэтому $\frac{AB}{AD} = \frac{EF}{DE} \rightarrow \frac{165 - 12}{120} = \frac{EF}{480 \text{ см}} \rightarrow EF = 612 \text{ см} = 6,12 \text{ м.}$

Ответ: 6,12 м.

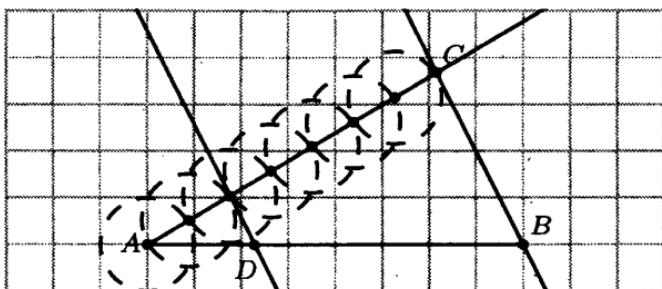
582. Из подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, откуда $AB = \frac{A_1B_1 \cdot AC}{A_1C_1} = \frac{7,2 \cdot 42}{6,3} = 45$ м.

Ответ: 48 м.

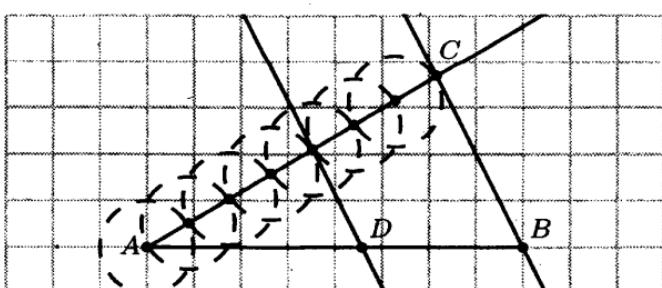
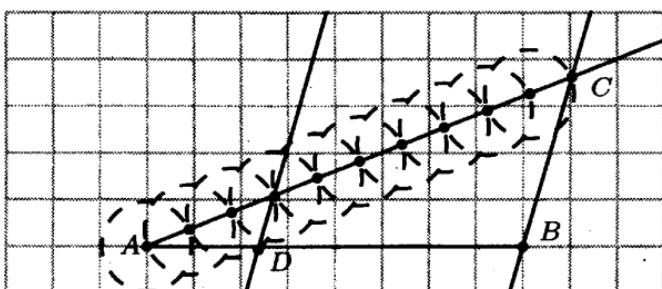
583. Из подобия треугольников ABC и AB_1C_1 следует, что $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$, или $\frac{34text + BB_1}{34text} = \frac{100}{32}$. Значит, $BB_1 = 72,25$ м.
Ответ: 72,25 м.

Задачи на построение

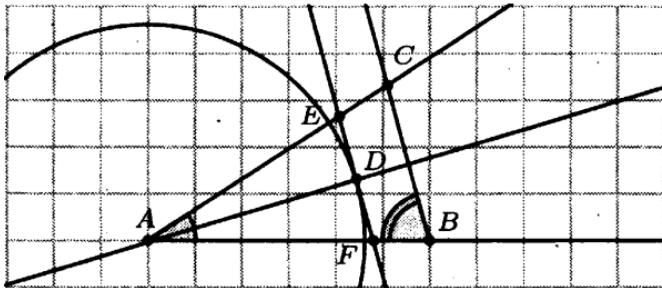
585. а) Проведем луч AC , и с помощью циркуля отложим на нем 7 равных отрезков. Проведем прямую CD и от конца 2 отрезка проведем прямую параллельную CB , пересекающую AB в точке D . По теореме Фалеса отрезок AB будет разделен в искомом отношении.



б), в) Построение выполняется аналогично.

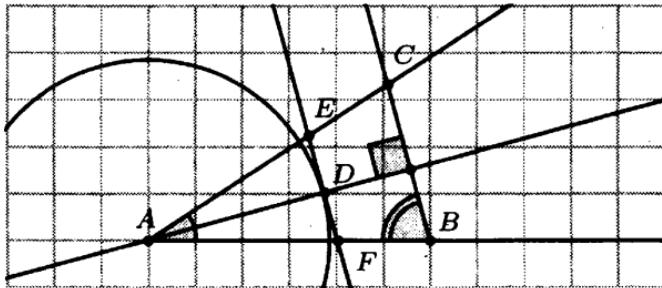


586. Сначала построим $\triangle ABC$ по двум заданным углам. Затем проведем заданную биссектрису $\angle A$, отмерим на ней ее заданную длину AD , и через точку D проведем прямую параллельную стороне CB . Она пересекает стороны $\angle A$ в некоторых точках E и F . $\triangle AEF$ — искомый.

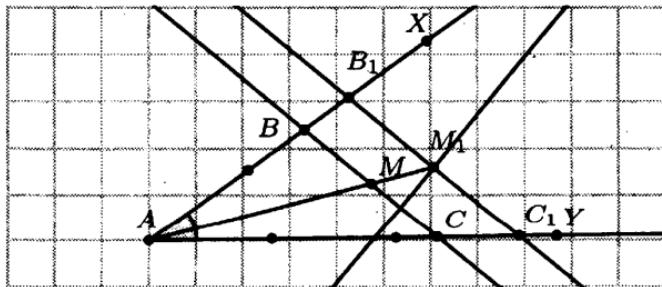


Задача имеет единственное решение, если сумма двух данных углов меньше 180° , и не имеет решений, если эта сумма больше или равна 180° .

587. Задача решается аналогично предыдущей, только вместо биссектрисы проводится высота.



588.



Построим угол XAY , равный данному углу. Затем возьмем какой-нибудь отрезок и на луче AX отложим

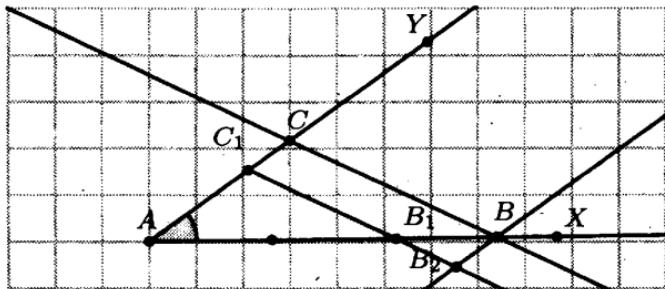
отрезок AB_1 , равный 2 таким отрезкам, а на луче AY — отрезок AC_1 , равный 3 таким отрезкам.

Проведем отрезок B_1C_1 , построим его середину и обозначим ее буквой M_1 .

На луче AM_1 отложим отрезок AM , равный данному отрезку, и через точку M проведем прямую, параллельную B_1C_1 . Она пересекает лучи AX и AY в некоторых точках B и C . Треугольник ABC — искомый.

Задача имеет единственное решение если данный угол не является развернутым.

589.



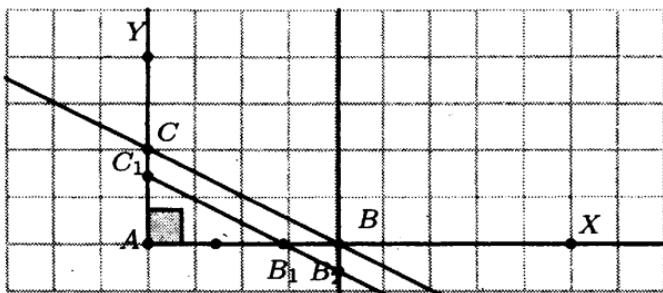
Построим угол XAY , равный данному углу. Затем возьмем какой-нибудь отрезок и отложим на луче AX отрезок AB_1 , равный 2 таким отрезкам, а на луче AY — отрезок AC_1 , равный одному такому отрезку.

На луче C_1B_1 отложим отрезок C_1B_2 , равный данному отрезку, и через точку B_2 проведем прямую, параллельную AC_1 . Она пересекает луч AX в некоторой точке B .

Через точку B проведем прямую, параллельную C_1B_1 . Эта прямая пересекает луч AY в некоторой точке C . Треугольник ABC — искомый.

Задача имеет единственное решение если данный угол не является развернутым.

590. Задана решается таким же образом, как и задача 589, при условии, что $\angle A = 90^\circ$.



§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

591. а) $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}$; $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{15}{17}$;

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} A &= \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{8}{15}; \quad \cos B = \frac{BC}{AB} = \sin A = \frac{8}{17}; \quad \sin B = \\&= \cos A = \frac{15}{17}; \quad \operatorname{tg} B = \frac{15}{8}.\end{aligned}$$

б) $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29$; $\sin A =$
 $= \cos B = \frac{21}{29}$; $\cos A = \sin B = \frac{20}{29}$; $\operatorname{tg} A = \frac{21}{20}$; $\operatorname{tg} B = \frac{20}{21}$.

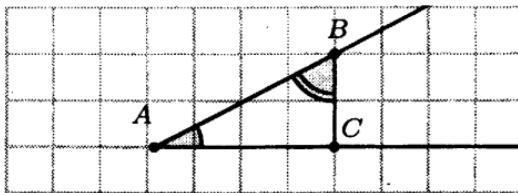
в) $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{5}$; $\sin A = \cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}$;
 $\cos A = \sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} B = 2$.

г) $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{24}{25}$; $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} B =$
 $= \frac{24}{7}$; $\cos A = \sin B = \frac{24}{25}$; $\sin A = \cos B = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} A = \frac{7}{24}$.

Ответ: а) $\sin A = \cos B = \frac{8}{17}$, $\cos A = \sin B = \frac{15}{17}$,
 $\operatorname{tg} A = \frac{8}{15}$, $\operatorname{tg} B = \frac{15}{8}$; б) $\sin A = \cos B = \frac{21}{29}$, $\cos A =$
 $= \sin B = \frac{20}{29}$, $\operatorname{tg} A = \frac{21}{20}$, $\operatorname{tg} B = \frac{20}{21}$; в) $\sin A = \cos B =$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos A = \sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} B = 2$; г)

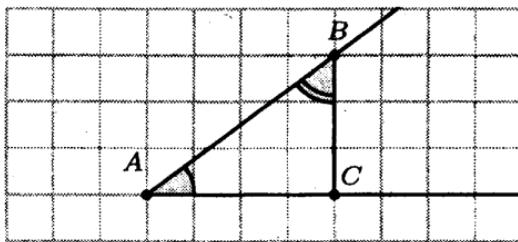
$$\sin A = \cos B = \frac{7}{25}, \cos A = \sin B = \frac{24}{25}, \operatorname{tg} A = \frac{7}{24}, \operatorname{tg} B = \frac{24}{7}.$$

592. а)



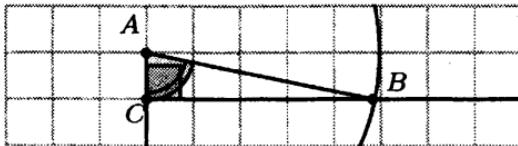
$$\operatorname{tg} a\alpha = \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}.$$

б)



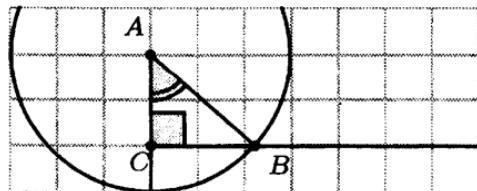
$$\operatorname{tg} a\alpha = \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}.$$

в)



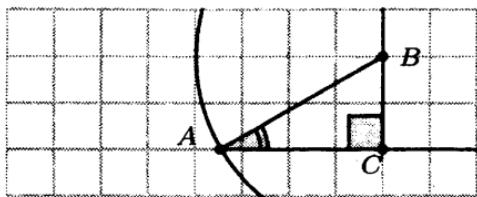
$$\cos \alpha = \cos A = \frac{AC}{AB} = 0,2.$$

г)



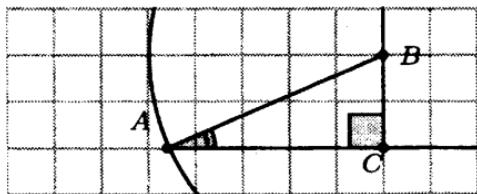
$$\cos \alpha = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}.$$

д)



$$\sin \alpha = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}.$$

e)



$$\sin \alpha = \sin A = \frac{BC}{AB} = 0,4.$$

593. a) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{3}$;

б) $\sin \alpha = \sqrt{1 - (\frac{2}{3})^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

в) $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$;

г) $\cos \alpha = \sqrt{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

Ответ: а) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; б) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; г) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

594. а) Пусть a — другой катет, α — противолежащий ему угол, а c — гипотенуза; тогда

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta, \alpha + \beta = 90^\circ, \frac{b}{c} = \sin \beta,$$

6) Если $b = 10$ см, $\beta = 50^\circ$, то $a = \frac{10 \text{ см}}{\tg 50^\circ} \approx 8,39$ см,

$\alpha = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$, $c = \frac{10 \text{ см}}{\sin 50^\circ} \approx 13,05$ см.

Ответ: а) $\frac{b}{\tg \beta}$, $90^\circ - \beta$, $\frac{b}{\sin \beta}$; б) $\approx 8,39$ см, 40° , $\approx 13,05$ см.

595. а) Пусть a — второй катет, β — прилежащий к нему угол, c — а гипотенуза; тогда $\frac{a}{b} = \tg \alpha$, $\alpha + \beta = 90^\circ$,

$\frac{b}{c} = \cos \alpha$, $\rightarrow a = b \tg \alpha$, $\beta = 90^\circ - \alpha$, $c = \frac{b}{\cos \alpha}$.

б) Если $b = 12$ см, $\alpha = 42^\circ$, то $a = 12 \text{ см} \cdot \tg 42^\circ \approx 11$ см, $\beta = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$, $c = \frac{12 \text{ см}}{\cos 42^\circ} \approx 16$ см.

Ответ: а) $b \tg \alpha$, $90^\circ - \alpha$, $\frac{b}{\cos \alpha}$; б) ≈ 11 см, 48° , ≈ 16 см.

596. Пусть β — второй острый угол, a и b — катеты, причем катет a лежит против угла α ; тогда $\beta = 90^\circ - \alpha$, $a = c \cdot \sin \alpha$, $b = c \cdot \cos \alpha$.

Если $c = 24$ см, $\alpha = 35^\circ$, то $\beta = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$, $a = 24 \text{ см} \cdot \sin 35^\circ \approx 14$ см, $b = 24 \text{ см} \cdot \cos 35^\circ \approx 20$ см.

Ответ: $90^\circ - \alpha$, $c \sin \alpha$, $c \cos \alpha$; 55° , ≈ 14 см, ≈ 20 см.

597. Пусть c — гипотенуза, α — угол, лежащий против катета, равного a , β — другой острый угол.

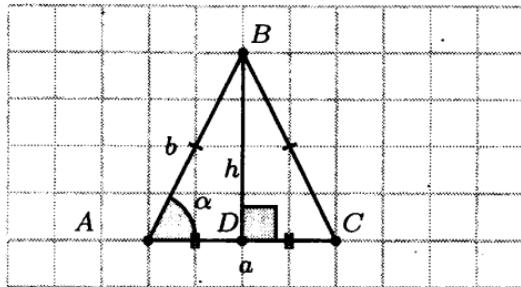
Тогда

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tg \alpha = \frac{a}{b}, \quad \tg \beta = \frac{b}{a}.$$

Если $a = 12$, $b = 15$, то $c = \sqrt{12^2 + 15^2} \approx 19$, $\tg \alpha = \frac{12}{15}$, $\tg \beta = \frac{15}{12} \rightarrow \alpha \approx 38^\circ 39'$, $\beta \approx 51^\circ 21'$

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\tg \alpha = \frac{a}{b}$, $\tg \beta = \frac{b}{a}$; 19, $\approx 38^\circ 39'$, $\approx 51^\circ 21'$

598.



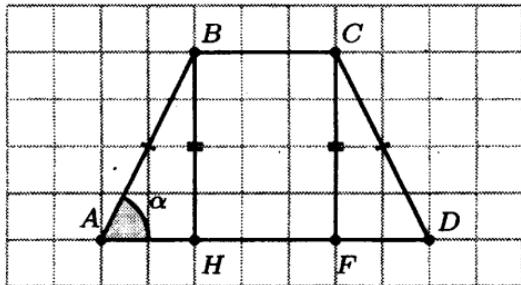
a) $h = b \cdot \sin \alpha$ — высота треугольника, $a = 2b \cdot \cos \alpha$ — основание треугольника.

Поэтому площадь треугольника $S = \frac{1}{2}ah = b^2 \sin \alpha \cos \alpha$.

$$б) h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha, \text{ поэтому } S = \frac{1}{2}ah = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

Ответ: а) $b^2 \sin \alpha \cos \alpha$; б) $\frac{a^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$.

599.



Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция, где $BC = 2$ см, $AD = 6$ см, $\angle A = \alpha$, BH и CF — высоты.

Тогда $\triangle ABH \cong \triangle DCF$ (по гипотенузе и катету), поэтому $AH = FD$, а так как $HF = DC = 2$ см, то $AH = \frac{1}{2}(AD - HF) = 2$ см.

Из $\triangle ABH$ находим: $BH = AH \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha$ см.

$$\text{Следовательно, } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH = 8 \operatorname{tg} \alpha \text{ см}^2$$

Ответ: $8 \operatorname{tg} \alpha$ см².

600. Если из концов верхнего основания трапеции, изображенной на рисунке 209, провести высоты от верхнего основания трапеции к нижнему разобьют нижнее основание на три отрезка.

Средний отрезок равен 60 м, а каждый из крайних отрезков равен $\frac{12}{\operatorname{tg} 60^\circ} \text{ м} = 4\sqrt{3} \text{ м}$.

Следовательно, ширина насыпи в нижней ее части равна $(60 + 4\sqrt{3})4\sqrt{3} + \approx 73,8 \text{ м}$.

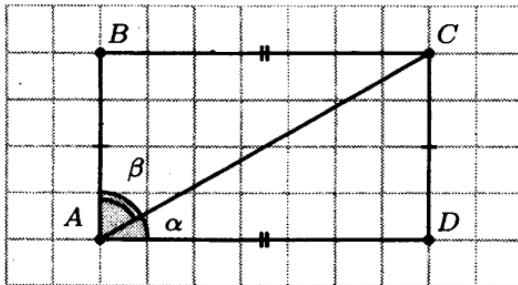
Ответ: $\approx 73,8 \text{ м}$.

601. Диагонали ромба разделяют ромб на четыре равных прямоугольных треугольника с катетами и, равными $\sqrt{3}$ и 1.

Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 60^\circ$ и, значит, $\beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, а углы ромба в два раза больше углов треугольника, т.е. 120° , 60° , 120° и 60°

Ответ: 120° , 60° , 120° , 60°

602.



Так как $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 30^\circ$, и $\beta = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$.

Ответ: 30° и 60°

603. $AB = AD \cdot \cos 47^\circ 50' = 12 \text{ см} \cdot \cos 47^\circ 50' \approx 12 \cdot 0,67 = 8,1 \text{ см}$ — сторона параллелограмма, $h = BD = 12 \text{ см} \times \sin 47^\circ 50' \approx 12 \cdot 0,74 = 8,88 \text{ см}$.

Следовательно,

$$S_{ABCD} = AB \cdot BD = 12^2 \text{ см}^2 \cdot 8,1 \cdot 8,9 \approx 72 \text{ см}^2$$

Ответ: $\approx 72 \text{ см}^2$.

Дополнительные задачи

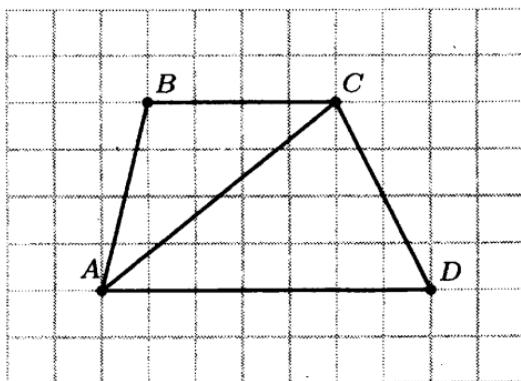
604. По условию коэффициент подобия треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC равен $k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$.

Так как в треугольнике ABC наибольшей стороной является CA , то в треугольнике $A_1B_1C_1$ наибольшей стороной будет сходственная сторона C_1A_1 . Поэтому $k = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{7,5}{10} = \frac{3}{4}$.

Значит, $A_1B_1 = k \cdot AB = \frac{3}{4} \cdot 6$ см = 4,5 см, $B_1C_1 = k \times BC = \frac{3}{4} \cdot 9$ см = 6,75 см.

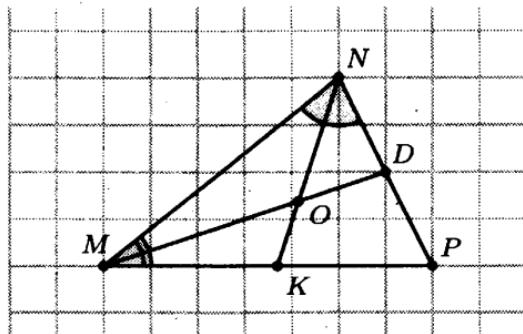
Ответ: 4,5 см и 6,75 см.

605.



Пусть $AD = a$ и $BC = b$. По условию $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ и, следовательно, углы этих треугольников соответственно равны. Так как $AD \parallel BC$, то $\angle CAD = \angle BCA$, а так как AB и CD не параллельны, то $\angle BAC \neq \angle ACD$. Значит, $\angle BAC = \angle ADC$, $\angle B = \angle ACD$.

Из отношения сходственных сторон, получаем: $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC}$, или $\frac{AC}{a} = \frac{b}{AC}$, откуда $AC^2 = ab$.

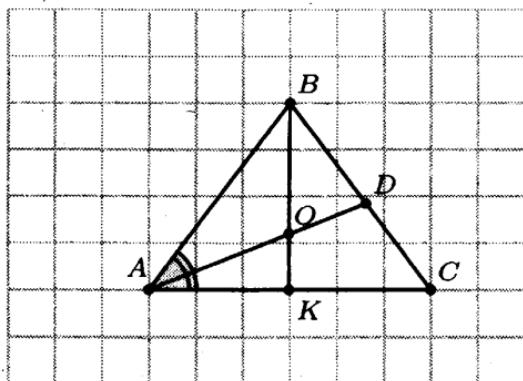
606.

Пусть $MK = x$, тогда $KP = 7 \text{ см} - x$.

$$\frac{MK}{KP} = \frac{MN}{NP} \text{ (см. задачу 535), или } \frac{x}{7 \text{ см} - x} = \frac{5}{3} \rightarrow x = \frac{35}{8}, \text{ т.е. } MK = \frac{35}{8} \text{ см.}$$

Так как MO — биссектриса $\triangle MKN$, то $\frac{OK}{ON} = \frac{MK}{MN} = \frac{35}{8} : 5 = 7 : 8$.

Ответ: 7 : 8.

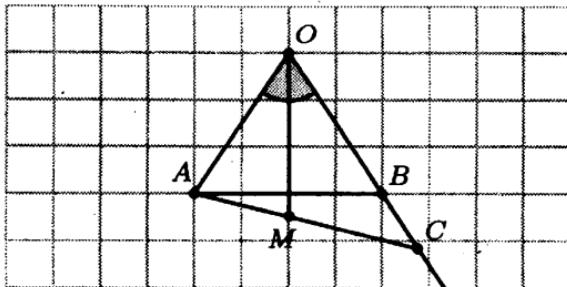
607.

По условию $AC : AB = 4 : 3$, поэтому $AH : AB = 2 : 3$.

Так как AO — биссектриса треугольника ABH , то $OH : OB = AH : AB = 2 : 3$ (см. задачу 535). По условию $BH = 30 \text{ см}$, следовательно, $OH = \frac{30 \text{ см}}{5} \cdot 2 = 12 \text{ см}$, $OB = BH - OH = 18 \text{ см}$.

Ответ: 12 см и 18 см.

608.



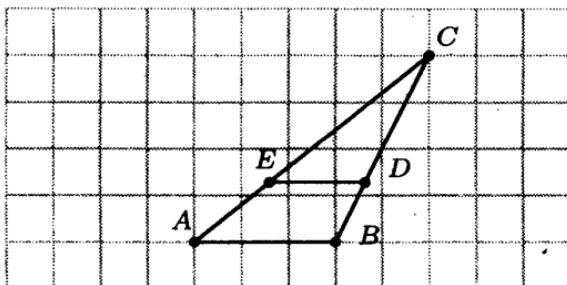
Так как OM — биссектриса $\triangle AOC$, то $\frac{AM}{MC} = \frac{OA}{OC}$ (см. задачу 535).

По условию $OA = OB$, поэтому $OA < OC$ и, следовательно, $\frac{OA}{OC} < 1$. Значит, и $\frac{AM}{MC} < 1$, т.е. $AM < MC$, что и требовалось доказать.

609. Из $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$ следует, что $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Но биссектриса угла A делит сторону BC в том же отношении $\frac{AB}{AC}$ (задача 535), поэтому AD — биссектриса $\triangle ABC$.

610.



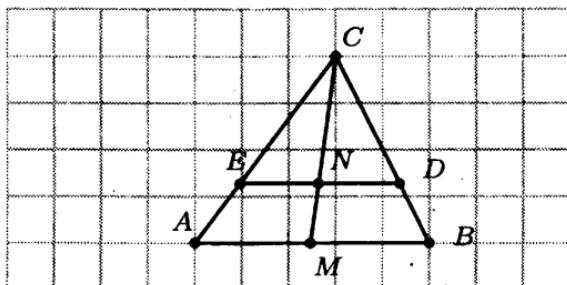
Пусть $ED \parallel AB$, $AE : EC = 2 : 7$ и $EC = x$, тогда $AE = 21,6 \text{ см} - x$, $\frac{21,6 \text{ см} - x}{x} = \frac{2}{7} \rightarrow x = 16,8 \text{ см}$, т.е. $EC = 16,8 \text{ см}$.

Так как $EB \parallel AB$, то $\triangle EDC \sim \triangle ABC$ (по двум углам), поэтому $\frac{ED}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{EC}{AC} \rightarrow \frac{ED}{10 \text{ см}} = \frac{16,8}{18 \text{ см}} = \frac{16,8}{21,6} \rightarrow$

$$\rightarrow ED = 7\frac{7}{9} \text{ см и } DC = 14 \text{ см.}$$

Ответ: 16,8 см, $7\frac{7}{9}$ см, 14 см.

611.



Примем, что $DE \parallel BC$, DE и AM пересекаются в точке N . Требуется доказать, что $DN = NE$.

Так как $DE \parallel BC$, то $\triangle ADN \sim \triangle ABM$, $\triangle ANE \sim \triangle AMC$, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

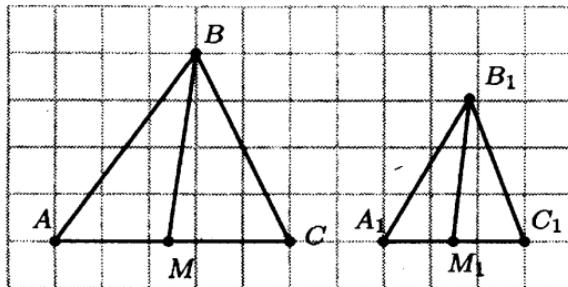
Следовательно, $\frac{DN}{BM} = \frac{AD}{AB}$, $\frac{NE}{MC} = \frac{AE}{AC}$, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

Получаем: $\frac{DN}{BM} = \frac{NE}{MC}$. Но $BM = MC$, так как AM – медиана треугольника. Следовательно, $DN = NE$.

612. а) Пусть точка P – основание перпендикуляра, проведенного из точки O к прямой AC . Тогда $\triangle AOP \sim \triangle ADC$ (по двум углам), поэтому $\frac{AP}{AC} = \frac{OP}{DC}$, или $\frac{m}{d} = \frac{x}{b}$.

Аналогично, из подобия треугольников COP и CBA следует: $\frac{CP}{CA} = \frac{OP}{BA}$, или $\frac{n}{d} = \frac{x}{a}$.

б) Складывая почленно равенства $\frac{x}{a} = \frac{n}{d}$ и $\frac{x}{b} = \frac{m}{d}$, учитывая, что $m + n = d$, получаем: $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{n+m}{d} = 1 \rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$, т.е. x не зависит от d .

613.

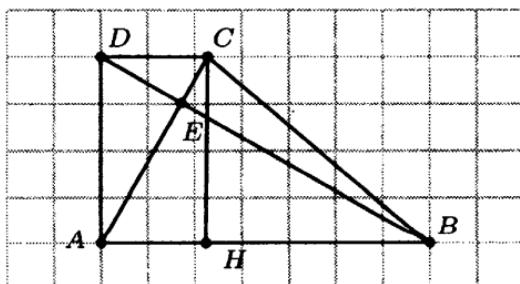
a) Так как $AC = 2AM$, $A_1C_1 = 2A_1M_1$, то $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AM}{A_1M_1}$, и учитывая условие задачи, получаем: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AM}{A_1M_1} = \frac{BM}{B_1M_1}$.

Следовательно, $\triangle ABM \sim \triangle A_1B_1M_1$ (по третьему признаку подобия треугольников).

Следовательно, что $\angle A = \angle A_1$, а значит, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по второму признаку подобия треугольников.

б) Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABH \sim \triangle A_1B_1H_1$ (по двум углам). Отсюда следует, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BH}{B_1H_1}$, а так как по условию $\frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Поэтому $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по второму признаку подобия треугольников).

614.

По теореме Пифагора $DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ см.

Так как $\angle ADB + \angle BDC = \angle D = 90^\circ$, то $\angle ADB = 90^\circ - \angle BDC$, а так как $\angle BDC + \angle ACD = 90^\circ$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника), то $\angle ACD = 90^\circ - \angle BDC$.

Следовательно, $\angle ADC = \angle ACD$ и поэтому $\triangle ADC \sim \triangle BAD$ по двум углам ($\angle D = \angle A = 90^\circ$, $\angle ACD = \angle ADB$).

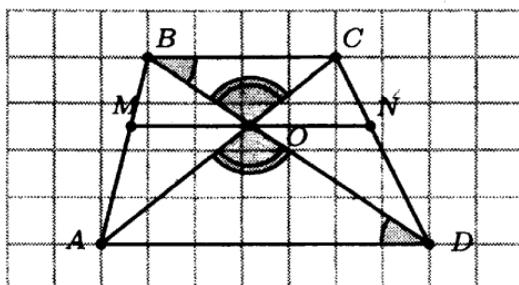
Из подобия этих треугольников следует, что $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{AD} \rightarrow DC = \frac{AD^2}{AB} = \frac{16}{6} \text{ см} = 2\frac{2}{3} \text{ см.}$

Тогда высота трапеции равна $CH = AD = 4 \text{ см}$, и $BH = AB - AH = AB - DC = 6 \text{ см} - 2\frac{2}{3} \text{ см} = 3\frac{1}{3} \text{ см.}$

По теореме Пифагора $CB = \sqrt{CH^2 + BH^2} = \sqrt{4^2 + \left(3\frac{1}{3}\right)^2} \text{ см} = \frac{2}{3}\sqrt{61} \text{ см.}$

Ответ: $DC = 2\frac{2}{3} \text{ см}$, $DB = 2\sqrt{13} \text{ см}$, $CB = \frac{2}{3}\sqrt{61} \text{ см.}$

615.



Пусть $AD = b$, $BC = a$.

Так как $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ (по двум углам), то $\frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{b}$

Значит, $\frac{OC}{OA} + 1 = \frac{a}{b} + 1 \rightarrow \frac{OC + OA}{OA} = \frac{a+b}{b} \rightarrow \frac{AC}{AO} = \frac{a+b}{b}$.

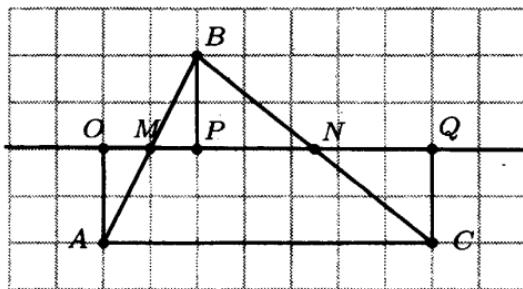
Так как $MO \parallel BC$, то $\triangle AMO \sim \triangle ABC$ и, следовательно, $\frac{BC}{MO} = \frac{AC}{AO} \rightarrow \frac{a}{MO} = \frac{a+b}{b} \rightarrow MO = \frac{ab}{a+b}$.

Аналогично, $ON = \frac{ab}{a+b}$.

Следовательно, $MN = MO + ON = \frac{2ab}{a+b}$.

Ответ: $\frac{2ab}{a+b}$

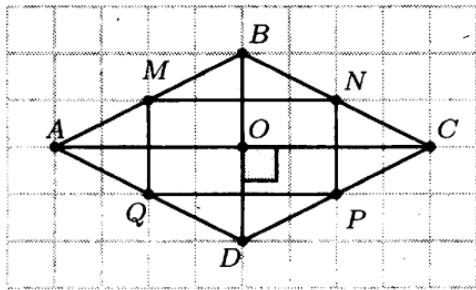
616.



В $\triangle ABC$ проведем среднюю линию MN , и AO , BP , CQ — перпендикуляры, проведенные к ней.

$\triangle AOM \sim \triangle BPM \sim \triangle BPN \sim \triangle CQN$ (по гипotenузе и острому углу), поэтому $AO = BP$ и $BP = CQ$, т.е. вершины треугольника равноудалены от его средней линии.

617.

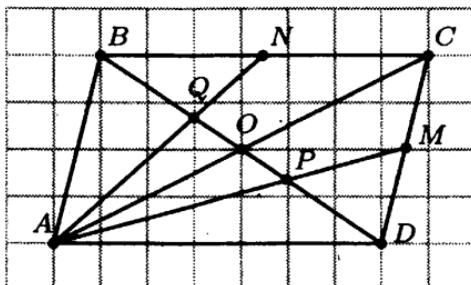


Пусть $ABCD$ — ромб, а точки M , N , P , Q — середины его сторон. Тогда четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм (см. задачу 567).

Так как MN и MQ — средние линии треугольников ABC и ABD , то $MN \parallel AC$ и $MQ \parallel BD$. Отсюда следует,

что $MSOR$ — параллелограмм, а так как угол SOR прямой (диагонали ромба взаимно перпендикулярны), то $MSOR$ — прямоугольник. Следовательно, угол RMS — также прямой, а значит, параллелограмм $MNPQ$ является прямоугольником.

618.



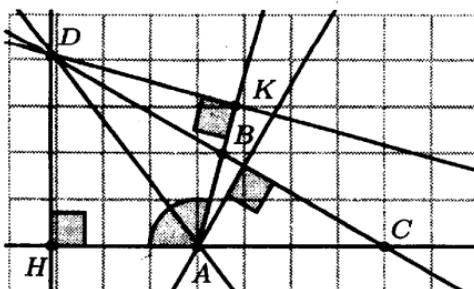
Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD , а P и Q — точки пересечения отрезков AM и AN с диагональю BD .

Так как отрезки AN и BO — медианы $\triangle ABC$, то $BQ : QO = 2 : 1 \rightarrow BQ = \frac{2}{3}BO$, а поскольку $BO = OD = \frac{1}{2}BD \rightarrow BQ = \frac{1}{3}BD$.

Аналогично, $PD = \frac{1}{3}BD \rightarrow QP = BD - (BQ + PD) = BD - \frac{2}{3}BD = \frac{1}{3}BD$.

Следовательно, $BQ = QP = PD$.

619.



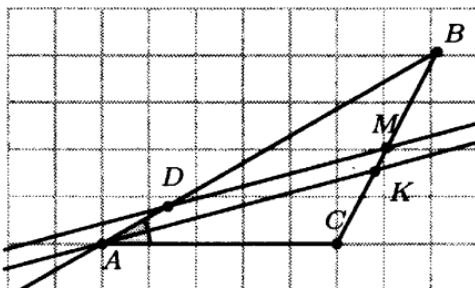
Треугольники ABD и ACD имеют общую высоту, проведенную из вершины A , поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{DC}$ (см. следствие 2 п. 53).

Пусть DK и DH — перпендикуляры к прямым AB и AC . Так как $\triangle ADK \sim \triangle ADH$ (по гипotenузе и острому углу), то $DK = DH$, т.е. высоты в треугольниках ABD и ACD , проведенные из вершины D , равны.

Поэтому, $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC}$ (см. следствие 2 п. 53).

Из равенств этих равенств следует, что $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

620.



Пусть $AB < AC$, отрезок AK — биссектриса $\triangle ABC$, точка M — середина стороны BC , $MD \parallel AK$.

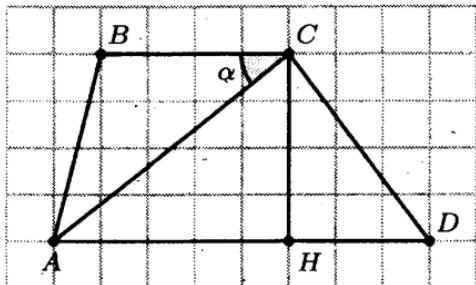
$$\frac{KB}{AB} = \frac{KC}{AC} \text{ (см. задачу 535).}$$

Так как $MD \parallel AK$, то $\triangle ABK \sim \triangle DBM$ и $\triangle ECM \sim \triangle ACK \rightarrow \frac{KB}{AB} = \frac{BM}{BD}$ и $\frac{CM}{CE} = \frac{KC}{AC}$.

Из равенств следует, что $\frac{BM}{BD} = \frac{CM}{CE}$.

Так как $BM = CM$ (по условию), то $BD = CE$, что и требовалось доказать.

621.

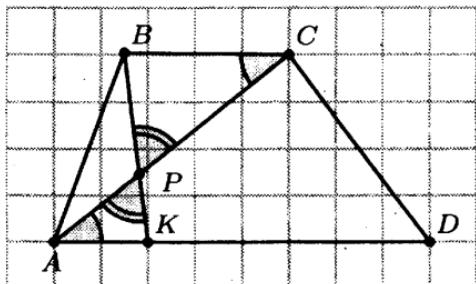


Так как $AD \parallel BC$, то $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$. Из прямоугольного $\triangle ACH$ — прямоугольный получаем: $CH = a \sin \alpha$.

Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CH = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$.

Ответ: $\frac{1}{2}ab \sin \alpha$.

622.



$\triangle CPB \sim \triangle APK$ по двум углам, поэтому $\frac{BP}{PK} = \frac{BC}{AK}$.

Так как $AK = \frac{1}{4}KD$, то $AK = \frac{1}{5}AD = \frac{1}{5}BC \rightarrow \frac{BC}{AK} = 5 \rightarrow \frac{BP}{PK} = 5$.

Так как PK — общая высота треугольников APK и APB , то $\frac{S_{APB}}{S_{APK}} = \frac{BP}{PK} = 5 \rightarrow S_{APB} = 5S_{APK} = 5 \text{ см}^2$

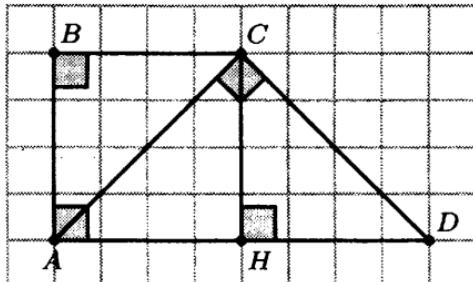
$\triangle CPB \sim \triangle APK$ и их коэффициент подобия равен $\frac{BC}{AK} = 5$, значит $\frac{S_{CPB}}{S_{APK}} = 25$, т.е. $S_{CPB} = 25 \text{ см}^2$

$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{CPB} = 5 \text{ см}^2 + 25 \text{ см}^2 = 30 \text{ см}^2$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 60 \text{ см}^2.$$

Ответ: 60 см².

623.



Проведем прямую CH — высоту трапеции. Тогда $AH = BC = 4$ см, $HD = AD - AH = 12$ см.

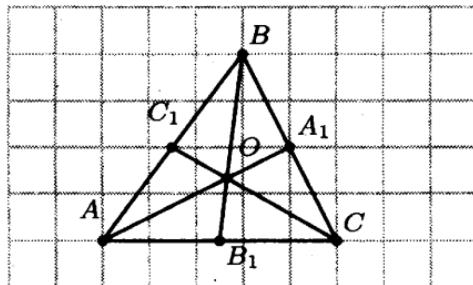
Так как, $CH = \sqrt{AH \cdot HD} = \sqrt{4 \cdot 12}$ см = $4\sqrt{3}$ см (см. 1°, п. 63).

Из прямоугольного $\triangle CHD$ имеем: $\operatorname{tg} D = \frac{CH}{HD} = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Следовательно, $\angle D = 30^\circ$, а $\angle BCD = 180^\circ - \angle D = 150^\circ$.

Ответ: 30° и 150° .

624.



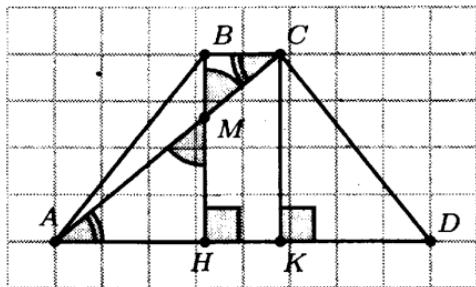
Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 $\triangle ABC$ пересекаются в точке O . Тогда $S_{ABB_1} = S_{CBB_1}$ и $S_{AOB_1} = S_{COB_1}$ (см. задачу 474).

Отсюда следует, что $S_{AOB} = S_{BOC}$. Аналогично, $S_{BOC} = S_{COA}$.

Но $S_{AOB} = 2S_{AOC_1} = 2S_{BOC_1}$, $S_{BOC} = 2S_{BOA_1} = 2S_{COA_1}$, $S_{COA} = 2S_{COB_1} = 2S_{AOB_1}$, значит $S_{AOC_1} =$

$= S_{BOC_1} = S_{BOA_1} = S_{COA_1} = S_{COB_1} = S_{AOB_1}$, что и требовалось доказать.

625.



По условию $AD = 5BC$. Пусть $CK \perp AD$, тогда $HK = BC$, $AH = \frac{AD - HK}{2} = \frac{5BC - BC}{2} = 2BC$, $\frac{AH}{BC} = 2$.

Так как $\triangle AMH \sim \triangle CMB$ (по двум углам), то $\frac{MH}{MB} = \frac{AH}{BC} = 2$, т.е. $MH = 2MB$.

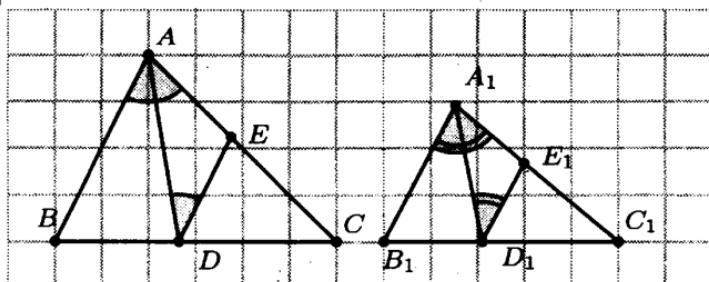
Значит, что $BH = \frac{3}{2}MH$.

По условию $S_{AMH} = \frac{1}{2}AH \cdot MH = 4 \text{ см}^2$, а так как $AH = 2BC$, то $BC \cdot MH = 4 \text{ см}^2$.

следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH = \frac{1}{2}(5BC + BC) \cdot \frac{3}{2}MH = 4,5 \cdot BC \cdot MH = 4,5 \cdot 4 \text{ см}^2 = 18 \text{ см}^2$.

Ответ: 18 см^2 .

626*.



Пусть $DE \parallel AB$ и $D_1E_1 \parallel A_1B_1$. Тогда, $\frac{CE}{AE} = \frac{CD}{DB}$ (см. задачу 556), а так как AD — биссектриса треугольника, то $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}$ (задача 535).

Следовательно, $\frac{CE}{AE} = \frac{AC}{AB}$.

Аналогично из $\triangle A_1B_1C_1$: $\frac{C_1E_1}{E_1A_1} \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$.

Из условия задачи $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, поэтому $\frac{CE}{EA} = \frac{C_1E_1}{E_1A_1} \rightarrow \frac{CE}{EA} + 1 = \frac{C_1E_1}{E_1A_1} + 1$, т.е. $\frac{AC}{EA} = \frac{A_1C_1}{E_1A_1}$.

Отсюда имеем: $\frac{EA}{E_1A_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, а так как по условию

$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$, то $\frac{EA}{E_1A_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$.

В треугольнике AED $\angle DAE = \angle ADE$ (это следует из того, что $\angle BAD = \angle DAE$, так как AD — биссектриса, и $\angle BAD = \angle ADE$, так как эти углы — накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AB и DE секущей AD), поэтому $DE = EA$.

Аналогично, $D_1E_1 = E_1A_1$ и, следовательно, B силу равенства $\frac{EA}{E_1A_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ имеем: $\frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$.

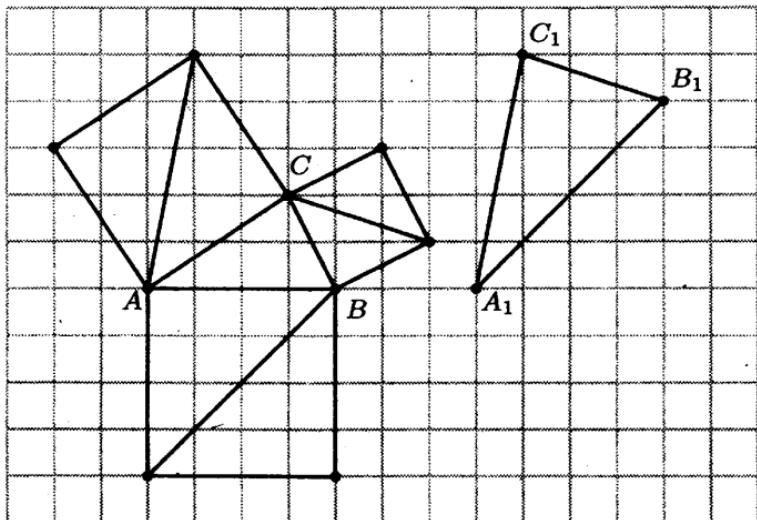
Отсюда следует, что $\triangle AED \sim \triangle A_1E_1D_1$, а значит, $\angle DAE = \angle D_1A_1E_1$ и поэтому $\angle A = \angle A_1$.

Из равенств $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ и $\angle A = \angle A_1$

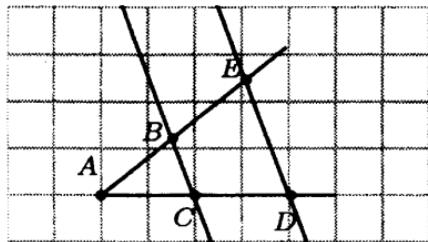
получаем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по второму признаку подобия треугольников), что и требовалось доказать.

627. Так как $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2 = 2 \rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \sqrt{2} \rightarrow A_1B_1 = \sqrt{2}AB$, т.е. коэффициент подобия k равен $\sqrt{2}$. Значит стороны искомого треуголь-

ника равны длине диагоналей квадратов построенных на сторонах треугольника ABC .

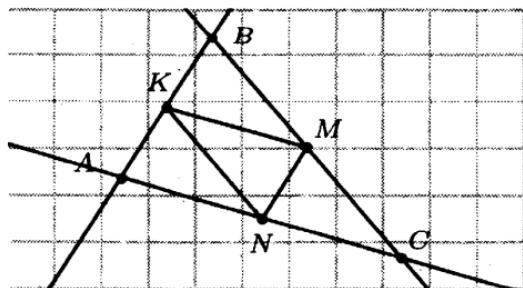


628.



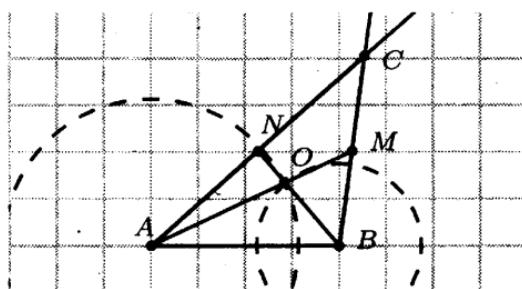
Построим угол A . На одной стороне угла отложим отрезки $AC = c$ и $CD = a$, а на другой стороне угла — отрезок $AB = b$. Проведем прямую BC , а затем через точку D проведем прямую, параллельную прямой BC . Она пересекает луч AB в некоторой точке E . Отрезок BE — искомый (см. задаче **556**).

629.



Проведем прямые KM , MN , NK , а затем через точки K , M , N проведем прямые, параллельные соответственно прямым MN , NK , KM . Точки пересечения A , B , C — вершины искомого треугольника.

630.



Построим сначала треугольник AOB по трем сторонам: AB — данная сторона, AO и BO — $\frac{2}{3}$ от данных медиан.

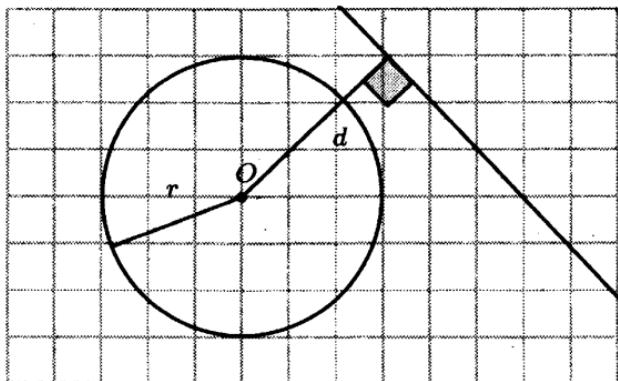
Затем на лучах AO и BO отложим отрезки AM и BN , равные соответствующим данным медианам.

Проведем прямые AN и BM . Они пересекаются в некоторой точке C . Треугольник ABC — искомый.

Глава VIII. Окружность

§ 1. Касательная к окружности

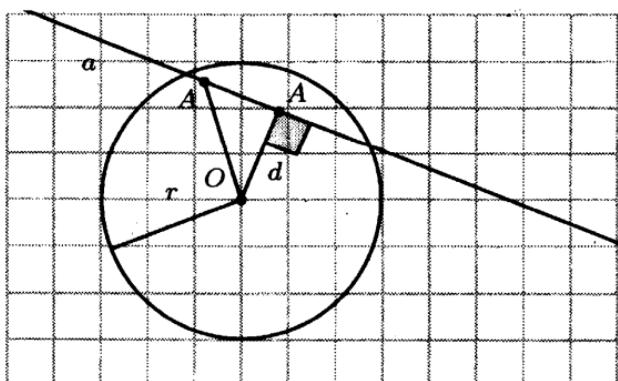
631.



- a) $d < r$ — прямая и окружность имеют две общие точки.
- б) $d < r$ — прямая и окружность имеют две общие точки;
- в) $d < r$ — прямая и окружность имеют две общие точки;
- г) $d > r$ — прямая и окружность не пересекаются;
- д) $d = r$ — прямая и окружность имеют только одну общую точку.

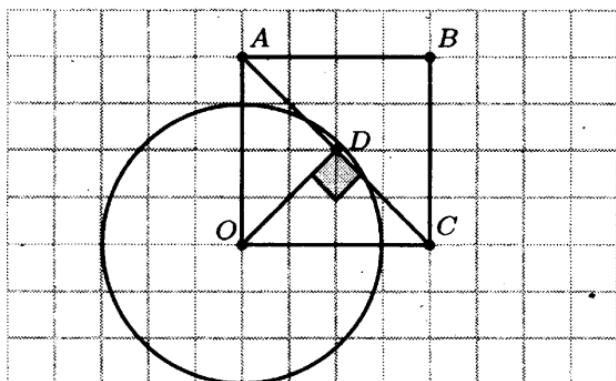
Ответ: а), б), в) прямая пересекает окружность; г) прямая лежит вне окружности; д) прямая касается окружности.

632.



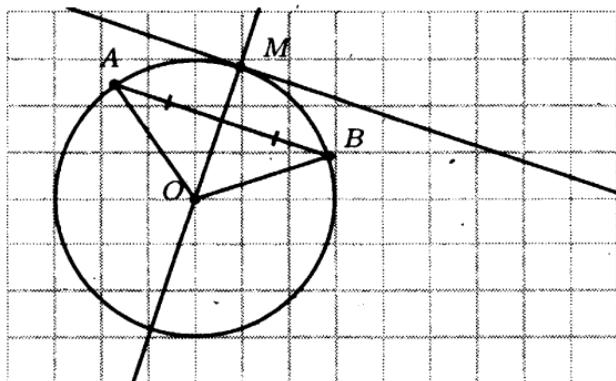
Пусть O — центр данной окружности, r — ее радиус, d — расстояние от центра окружности до прямой a . По условию $d < r$. Если $a \perp OA$, то $d = OA$; если же отрезок OA проведен наклонно к a то в этом случае $d < OA$. Следовательно $d < r$, поэтому прямая p и окружность имеют две общие точки.

633.



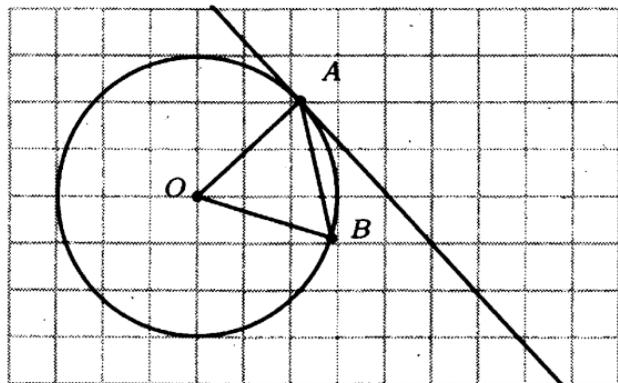
Прямая OA проходит через центр окружности и $AO = 6$ см > 5 см, поэтому эта прямая является секущей. Прямые AB и BC находятся на расстояниях $OA = 6$ см > 5 см и $OC = 6$ см > 5 см, а значит, эти прямые не секущие. Расстояние от точки O до прямой AC равно половине диагонали данного квадрата, т.е. $\frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 3\sqrt{2}$ см $\approx 4,24$ см < 5 см, следовательно AC тоже является секущей. Ответ: OA и AC .

634.



$\triangle AOB$ — равнобедренный ($OA = OB$), OM — его медиана, поэтому $AB \perp OM$ и $p \perp OM$. Следовательно, прямые AB и p параллельны.

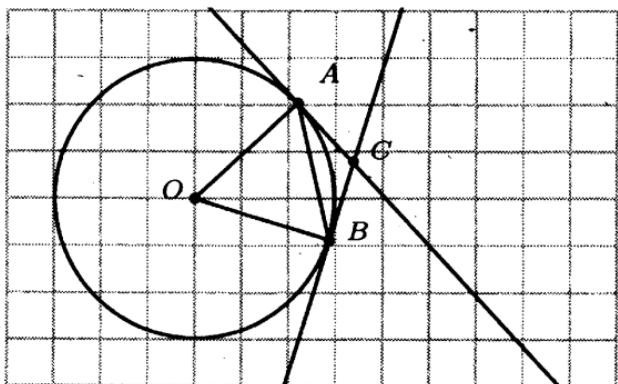
635.



Так как $OA = AB = BO$, то $\triangle OAB$ — равносторонний, и поэтому угол OAB равен 60° , а искомый угол равен $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Ответ: 30° .

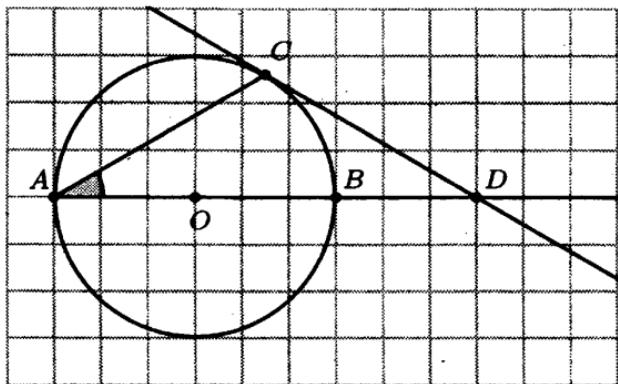
636.



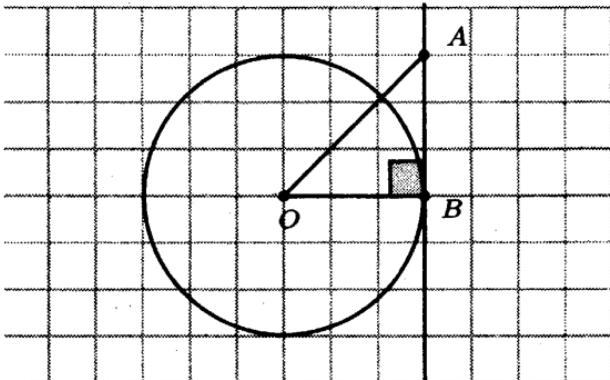
Так как $OA = AB = BO$, то $\triangle OAB$ — равносторонний, и поэтому угол OAB равен 60° .

Следовательно, $\angle CAB = \angle CBA = 90^\circ - \angle AOB = 30^\circ$, и $\angle ACB = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

Ответ: $\angle ACB = 120^\circ$.

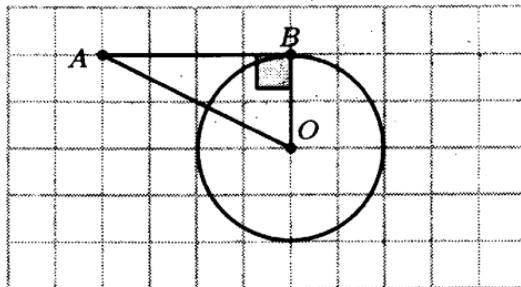
637.

$\triangle ACO$ – равнобедренный ($OA = OC$), следовательно $\angle OCA = \angle OAC = 30^\circ$. Угол BOC – внешний угол этого $\triangle ACO$, а значит, $\angle BOC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$. $\triangle OCD$ – прямоугольный ($\angle OCD = 90^\circ$), а следовательно $\angle COD = 60^\circ$, поэтому $\angle CDO = 30^\circ$. Таким образом, $\angle CDA = \angle CAD$, следовательно, этот $\triangle ACD$ – равнобедренный.

638.

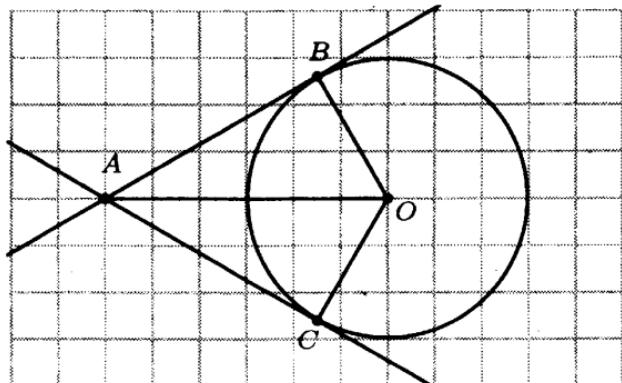
$\triangle AOB$ – прямоугольный с прямым углом B , где $OB = r = \frac{3}{2}$ см. По теореме Пифагора $OA^2 = AB^2 + OB^2 = AB^2 + r^2$, откуда $AB = \sqrt{OA^2 - r^2} = \sqrt{4 - \frac{9}{4}} \text{ см} = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ см.}$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см.

639.

$\triangle AOB$ — прямоугольный угол $B = 90^\circ$. Поэтому $AB = OB \operatorname{tg} 60^\circ = r \operatorname{tg} 60^\circ = r\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ см.

Ответ: $12\sqrt{3}$ см.

640.

$\triangle AOB$ и $\triangle AOC$ — прямоугольные ($\angle B$ и $\angle C$ прямые по условию). Гипотенуза $OA = 9$ см в два раза больше катетов $OB = OC = 4,5$ см. Следовательно, $\angle OAB = \angle OAC = 30^\circ$. Значит, $\angle BAC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

641. $\triangle AOB$ и $\triangle AOC$ — прямоугольные ($\angle B = \angle C = 90^\circ$, по условию). Так как $OA : OB = 2 : 1$ и $OA = OC = 2 : 1$, то $\angle OAB = \angle OAC = 30^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

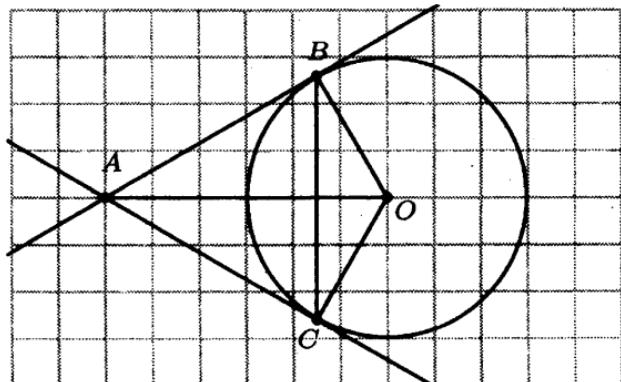
Ответ: $\angle BAC = 60^\circ$.

642. В прямоугольном треугольнике AOB гипотенуза $OA = 6$ см в два раза больше катета $OB = 3$ см. Следо-

вательно, $\angle 3 = 30^\circ$. Аналогично $\angle 4 = 30^\circ$. Далее, $AB = AC = OA \cos 30^\circ = OA \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ см.

Ответ: $AB = 3\sqrt{3}$ см, $AC = 3\sqrt{3}$ см, $\angle 3 = 30^\circ$, $\angle 4 = 30^\circ$.

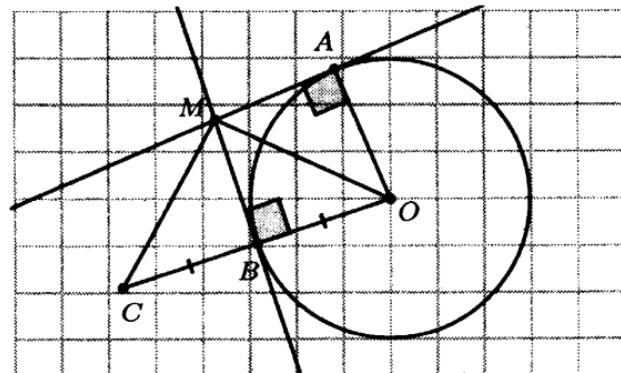
643.



Так как $\triangle ABO = \triangle ACO$ (AO – общая, $OB = OC$, $\angle B = \angle C = 90^\circ$), то $AB = AC$, $\angle OAB = \angle OAC = 30^\circ$ и, следовательно, $\angle BAC = 60^\circ$, значит $\triangle ABC$ равносторонний, и $BC = AB = 5$ см.

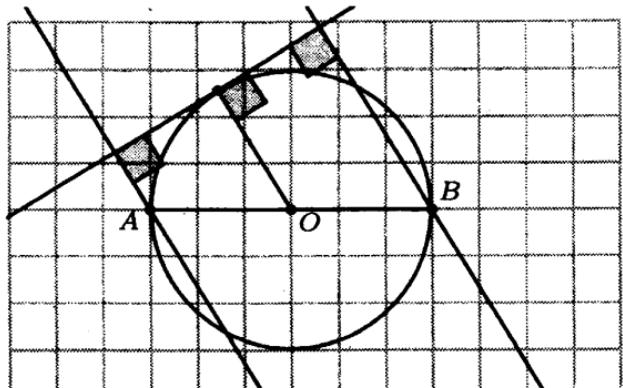
Ответ: 5 см.

644.



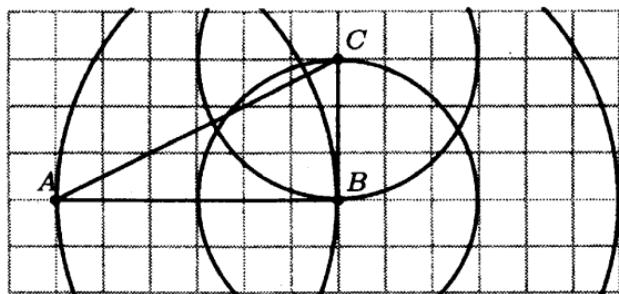
$\triangle OMB$ и $\triangle CMB$ – прямоугольные и равны друг другу по двум катетам, поэтому $\angle BMO = \angle BMC$. С другой стороны, $\angle AMO = \angle BMO$ ($\triangle MAO = \triangle MBO$), а значит, $\angle AMC = 3\angle BMC$.

645.



Прямые AA_1 , BB_1 и ON перпендикулярны к касательной, поэтому они параллельны. С другой стороны, $OA = OB$. Следовательно, по теореме Фалеса, $NA_1 = NB_1$ (так как $AO = OB$).

646.

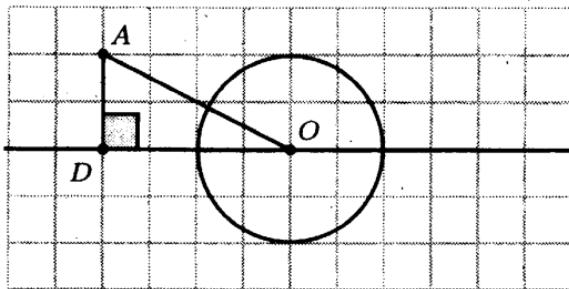


а) Так как расстояние от прямой BC до центра A окружности равно AB , т.е. радиусу этой окружности и $AB \perp BC$, то прямая BC является касательной к данной окружности.

б) Так как расстояние от прямой AB до центра C окружности равно CB , т.е. радиусу этой окружности и $AB \perp CB$, то прямая AB является касательной к данной окружности.

в) расстояние от прямой AC до центра B окружностей меньше радиусов BA и BC этих окружностей, так как отрезки BA и BC являются наклонным. Следовательно, прямая AC не является касательной к данным окружностям.

647.



а) Найдем расстояние OH от центра окружности до прямой AH . По теореме Пифагора: $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = = 3$ см.

Так как OH равно радиусу окружности, то прямая AH — касательная.

б) Найдем расстояние OH от центра окружности до прямой AH : $OH = OA \sin 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ см.

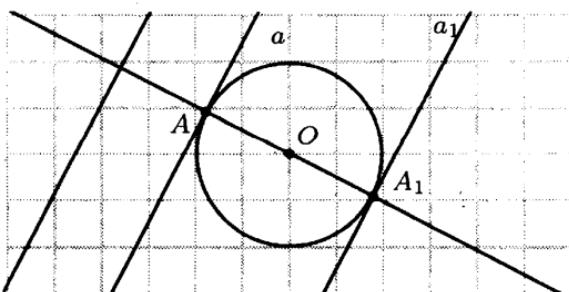
Так как OH меньше радиусу этой окружности, то прямая AH касательной не является.

в) Найдем расстояние OH от центра окружности до прямой AH : $OH = OA \sin 30^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ см.

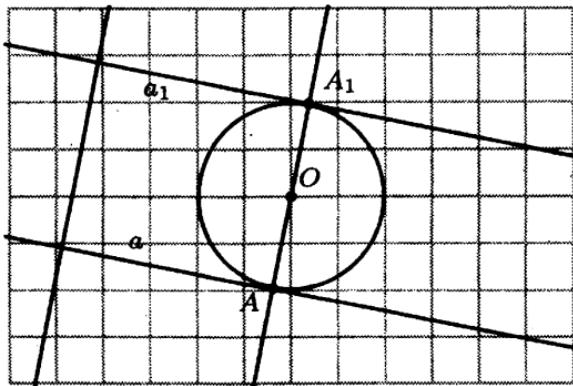
Так как OH равно радиусу окружности, то прямая AH — касательная.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

648. а) Через точку O проведем прямую перпендикулярную к данной прямой. Обозначим буквами a и A и A_1 точки пересечения этой прямой с окружностью. Через точки A и A_1 проведем прямые a и a_1 , перпендикулярные к прямой AA_1 . Прямые a и a_1 — искомые касательные.

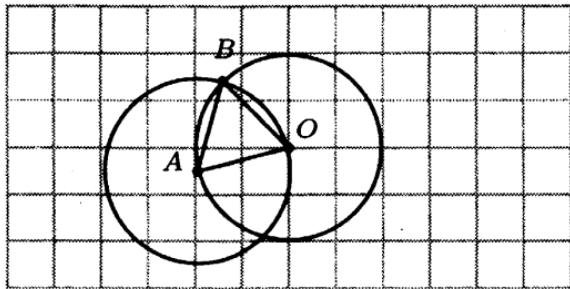


б) Через точку O проведем прямую, параллельную данной прямой, и обозначим буквами A и A_1 точки пересечения этой прямой с данной окружностью. Через точки A и A_1 проведем прямые a и a_1 , перпендикулярные к прямой AA_1 . Прямые a и a_1 — искомые касательные.



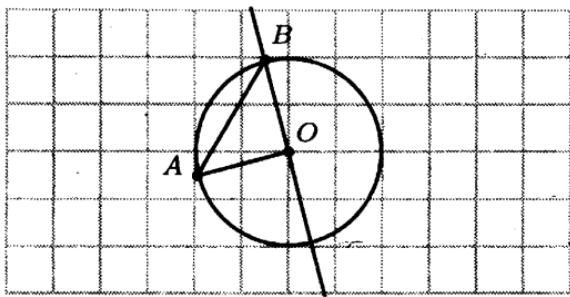
§ 2. Центральные и вписанные углы

649. а) Проведем окружность с центром A радиуса OA и обозначим буквой B одну из точек пересечения этой окружности с исходной окружностью. AB — искомая хорда.



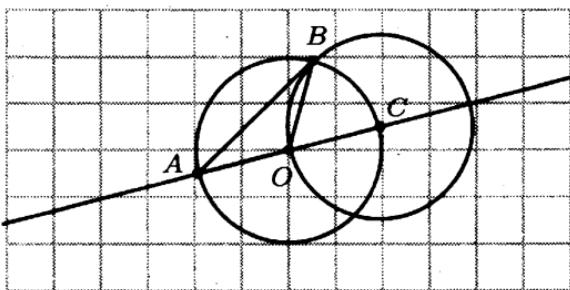
Так как $\triangle AOB$ — равносторонний, то $\angle OAB = 60^\circ$.

б) Проведем через точку O прямую, перпендикулярную к прямой AO , и обозначим буквой B одну из точек пересечения этой прямой с окружностью. AB — искомая хорда.



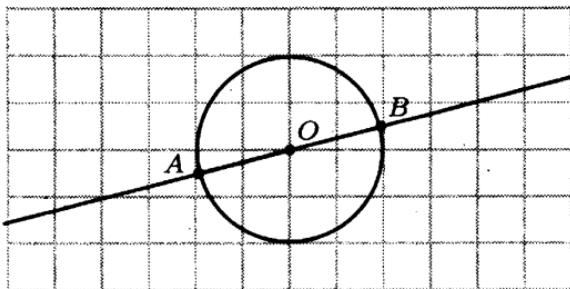
Так как прямые перпендикулярны по построению, то $\angle AOB = 90^\circ$.

в) Продолжим отрезок AO за точку O до пересечения с окружностью в точке C . Затем построим хорду CB так, чтобы угол COB был равен 60° . AB — искомая хорда.



Так как $\angle AOC = 180^\circ$, то $\angle AOB = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ$.

г) Продолжим отрезок AO за точку O до пересечения с окружностью в точке B . AB — искомая хорда.



$\angle AOB$ — развернутый, а значит $\angle AOB = 180^\circ$.

650. а) Так как $\angle AOB = 60^\circ$, то $\triangle AOB$ — равносторонний и $AB = 16$;

б) так как $\angle AOB = 90^\circ$, то $\triangle AOB$ — прямоугольный и $AB = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$;

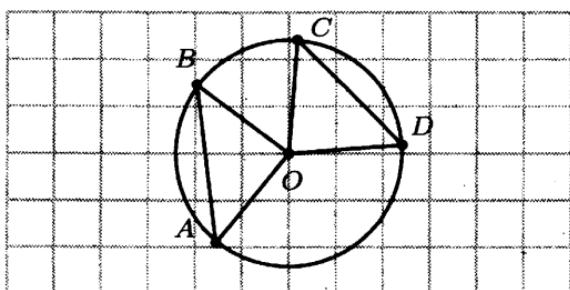
в) так как $\angle AOB = 1800^\circ$, то отрезок AB — диаметр окружности, поэтому $AB = 2OA = 32$.

Ответ: а) 16; б) $16\sqrt{2}$; в) 32.

651. а) Возможно два случая.

Случай 1. Хорды AB и CD — диаметры, значит каждая из стягиваемых ими дуг — полуокружность, и эти дуги равны.

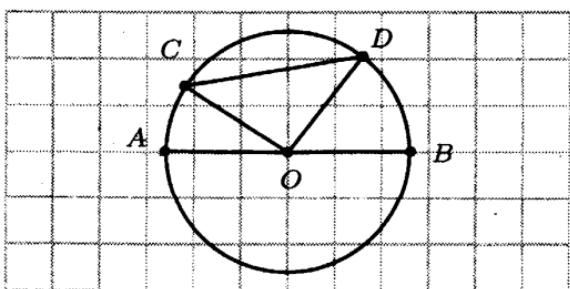
Случай 2. Хорды AB и CD — диаметрами не являются. Значит $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ (по трем сторонам), а следовательно $\angle AOB = \angle COD$ (меньшая дуга) и $360^\circ - \angle AOB = 360^\circ - \angle COD$ (большая дуга), т.е. $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.



б) $\widehat{AB} = 112^\circ$ или $\widehat{AB} = 360^\circ - 112^\circ = 248^\circ$. Следовательно, дуга с концами и $\widehat{CD} = 112^\circ$ или $\widehat{CD} = 248^\circ$

Ответ: б) 112° и 248° .

652.



Так как \widehat{AD} — полуокружность, то $\widehat{AB} = 180^\circ$ и $\widehat{CD} = \widehat{AB} - \widehat{AC} - \widehat{BD} = 180^\circ - 37^\circ - 23^\circ = 120^\circ$, а значит, $\angle COD = 120^\circ$.

$$\triangle COD \text{ — равнобедренный, а значит } CD = 2CO \sin \frac{120^\circ}{2} = 2 \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ см.}$$

Ответ: $15\sqrt{3}$ см.

653. $\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ (теорема п. 73, учебника).

а) $\angle ABC = \frac{48^\circ}{2} = 24^\circ$;

б) $\angle ABC = \frac{57^\circ}{2} = 28^\circ 30'$;

в) $\angle ABC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$;

г) $\angle ABC = \frac{124^\circ}{2} = 62^\circ$;

д) $\angle ABC = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

Ответ: а) 24° ; б) $28^\circ 30'$; в) 45° ; г) 62° ; д) 90° .

654. а) $x = \frac{360^\circ - 80^\circ - 152^\circ}{2} = 64^\circ$;

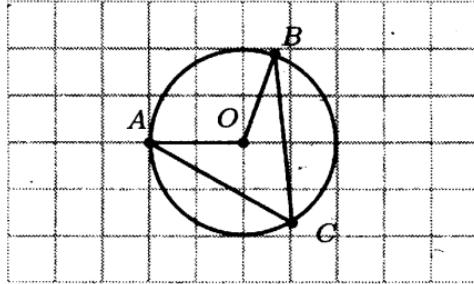
б) $x = 360^\circ - 125^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 175^\circ$;

в) $x = \frac{360^\circ - 180^\circ - 112^\circ}{2} = 34^\circ$;

г) $x = 360^\circ - 215^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 105^\circ$.

Ответ: а) 64° ; б) 175° ; в) 34° ; г) 105°

655.

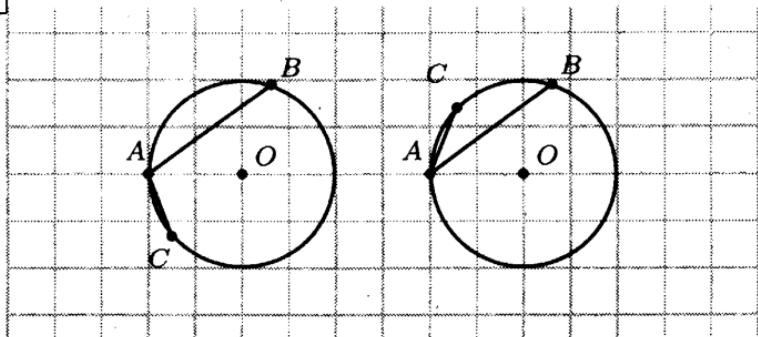


Пусть $\angle AB = x$ — градусная мера вписанного угла, тогда $\angle AOB = 2x$ — градусная мера центрального угла, если угол опирается на меньшую дугу, и равна $360^\circ - 2x$, если он опирается на большую дугу. Получаем, что $2x - x = 30^\circ$ или $360^\circ - 2x - x = 30^\circ$, откуда $x = 30^\circ$ или

$x = 110^\circ$ — вписанный угол, а значит центральный угол равен 60° или 140° .

Ответ: 60° и 30° или 140° и 110° .

656.



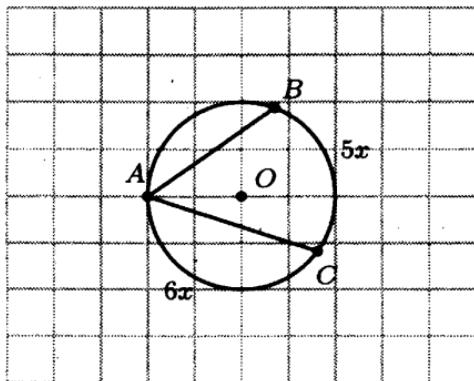
Точка C может лежать на дуге AB большей или меньшей полукружности.

В первом случае угол BAC опирается на дугу в $360^\circ - 115^\circ - 43^\circ = 202^\circ$, а значит, угол BAC равен 101° .

Во втором случае угол BAC опирается на дугу в $115^\circ - 43^\circ = 72^\circ$, а значит, угол BAC равен 36° .

Ответ: 101° или 36° .

657.

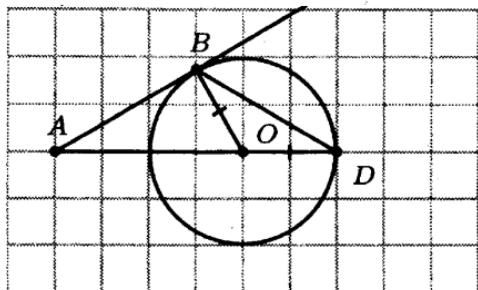


$$\angle AOB = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ.$$

Пусть $\angle AOM = 6x$ и $\angle BOM = 5x$, тогда $6x + 5x = 220^\circ \rightarrow 11x = 220^\circ \rightarrow x = 20^\circ$, значит, $\angle BOM = 5x = 100^\circ$, а $\angle BAM = \frac{1}{2} \angle BOM = 50^\circ$.

Ответ: 50° .

658.

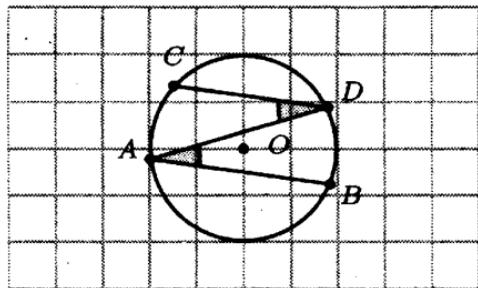


$\angle BOD = 110^\circ 20'$ (по условию). Поскольку $\triangle OAB$ – прямоугольный, то его внешний угол $BAD =$ равен $\angle BOD - 90^\circ = 20^\circ 20'$.

Так как $\triangle BOD$ – равнобедренный, где $\angle OBD = \angle BDO = \angle ADB$, то $\angle ADB = \frac{180^\circ - \angle BOD}{2} = 34^\circ 50'$.

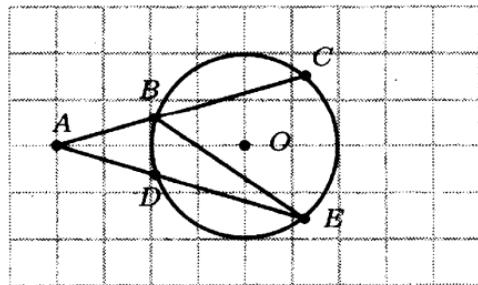
Ответ: $20^\circ 20'$ и $34^\circ 50'$.

659.



Пусть $AB \parallel CD$, тогда вписанные углы ADC и DAB равны (как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ секущей AD). Следовательно, градусные меры дуг AC и BD , на которые опираются эти углы, также равны.

660.



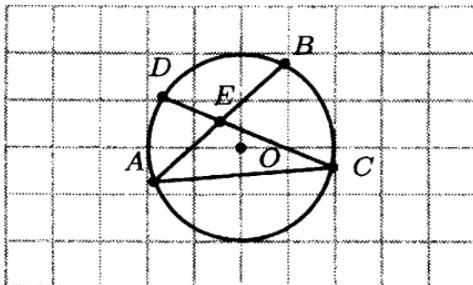
$\angle CBE$ – вписанный, следовательно он равен $\frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$. Он же является внешним углом $\triangle ABE$. Следовательно, $\angle BEA = 50^\circ - \angle A = 50^\circ - 32^\circ = 18^\circ$, а значит, $\angle BD = 2\angle BEA = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ$.

Ответ: 36° .

661. $\angle CBE$ – вписанный, равный $\frac{1}{2} \angle CEA = 140^\circ : 2 = 70^\circ$, а $\angle BED = \frac{1}{2} \angle BD = 52^\circ : 2 = 26^\circ$. Так как $\angle CBE$ внешний угол $\triangle ABE$, то $\angle BAE = 70^\circ - \angle BED = 70^\circ - 26^\circ = 44^\circ$.

Ответ: 44° .

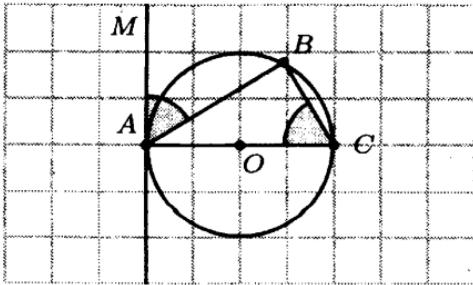
662.



$\angle BEC$ – внешний угол $\triangle AEC$, поэтому $\angle BEC = \angle A + \angle C$. Так как $\angle A = \angle \frac{BC}{2} = 35^\circ$, а $\angle C = \angle \frac{AD}{2} = 27^\circ$, то $\angle BEC = 35^\circ + 27^\circ = 62^\circ$.

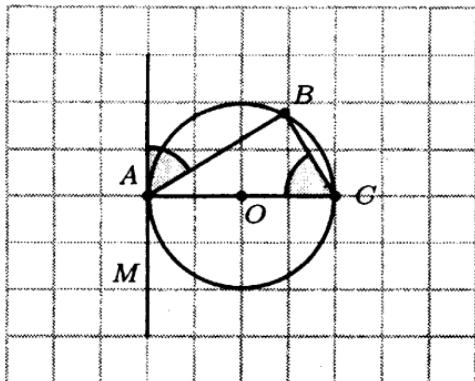
Ответ: 62° .

663.



$\angle ABC$ – прямой, так как опирается на полуокружность. Угол MAC также прямой. Поэтому $\angle ACB + \angle BAC = 90^\circ$ и $\angle MAB + \angle BAC = 90^\circ$. Следовательно, $\angle MAB = \angle ACB$.

664.



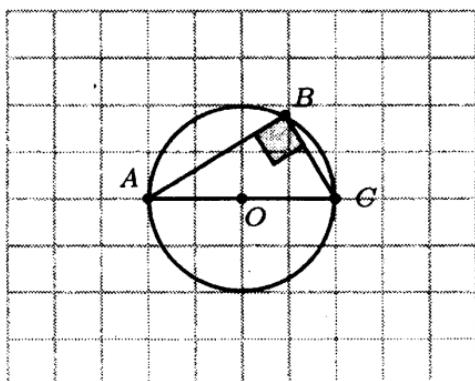
Проведем диаметр AC .

Согласно задаче 663, $\angle MAB = \angle ACB$, а значит, $\angle MAB = \angle ACB = \frac{1}{2} \text{ } \widehat{AB}$ — если угол MAB — острый.

Если же угол MAB тупой, то $\angle MAB = 180^\circ - \angle ACB = \frac{360^\circ - 2\angle ACB}{2} = \frac{1}{2} \text{ } \widehat{ACB}$.

Если же хорда AB является диаметром окружности, то дуга, расположенная внутри угла MAB , равна 180° , а $\angle MAB = 90^\circ = \frac{180^\circ}{2}$.

665.



Так как $\angle C$ опирается на полуокружность, то он прямой. Значит, $\angle A$ и $\angle B$ — острые, а значит, $\angle C > \angle A$ и $\angle C > \angle B$.

666. $AE \cdot BE = CE \cdot ED$, следовательно $ED = \frac{AE \cdot BE}{CE}$

(по теореме о пересекающихся хордах, п. 73, учебника).

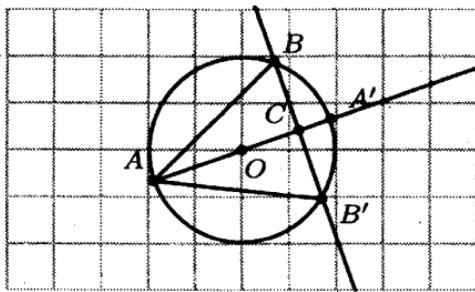
a) $ED = \frac{2 \cdot 5}{2,5} = 4$;

б) $ED = \frac{16 \cdot 9}{ED} \rightarrow ED = 12$;

в) $ED = \frac{0,2 \cdot 0,5}{0,4} = 0,25$.

Ответ: а) 4; б) 12; в) 0,25.

667.



Пусть O — центр окружности. $\triangle OBB_1$ — равнобедренный ($OB = OB_1$), следовательно OC — его высота, а значит, и медиана. Поэтому $BC = CB_1 = \frac{BB_1}{2}$.

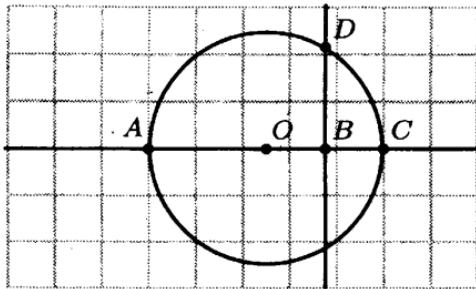
По теореме о пересекающихся хордах $AC \cdot CA_1 = BC \times CB_1 = \frac{BB_1^2}{4}$, откуда $BB_1 = 2\sqrt{AC \cdot CA_1} = 2\sqrt{4 \cdot 8} = 2\sqrt{32} = 8\sqrt{2}$ см.

Ответ: $8\sqrt{2}$ см.

668. Пусть BC — перпендикуляр, проведенный из точки B к диаметру AA_1 , BB_1 — хорда, содержащая этот перпендикуляр.

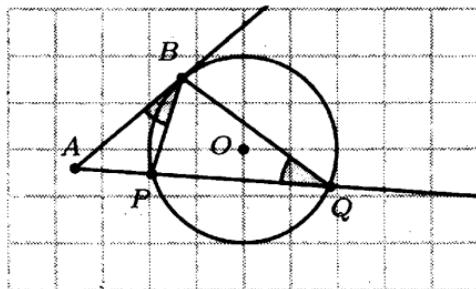
По теореме о пересекающихся хордах $AC \cdot CA_1 = BC \times CB_1 = \frac{BB_1^2}{4}$, откуда $BB_1 = 2\sqrt{AC \cdot CA_1}$ (задача 667),

и следовательно $BC = \frac{BB_1}{2} = \sqrt{AC \cdot CA_1}$.

669.

На произвольной прямой отложим последовательно два заданных отрезка AB и BC . Найдем середину отрезка AC — точку O , и построим окружность диаметром AC . Через точку B проведем прямую, перпендикулярную AC . Пусть одна из точек пересечения этой прямой с окружностью — D .

Тогда согласно задаче 668, отрезок BD — средний пропорциональный между заданными отрезками.

670.

$\triangle ABP$ и $\triangle ABQ$ подобны, поскольку $\angle A$ — общий, $\angle ABP = \angle AQB = \frac{1}{2} \angle BOP$ (см. задачу 664). Следовательно согласно теореме о пересекающихся хордах $\frac{AB}{AQ} = \frac{AP}{AB}$ откуда $AB^2 = AP \cdot AQ$.

671. $AB^2 = AC \cdot AD$ (см. задачу 670).

a) $AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{4 \cdot 4}{2} \text{ см} = 8 \text{ см} \rightarrow CD = AD - AC = 6 \text{ см};$

6) $AC = \frac{AB^2}{AD} = \frac{5 \cdot 5}{10}$ см = 2,5 см $\rightarrow CD = AD - AC = 7,5$ см.

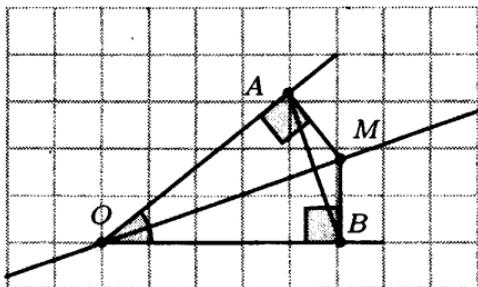
Ответ: а) 6 см; б) 7,5 см.

672. Пусть AD — касательная. Тогда $AD^2 = AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$ (см. задачу **670**).

673. Задача решена в учебнике.

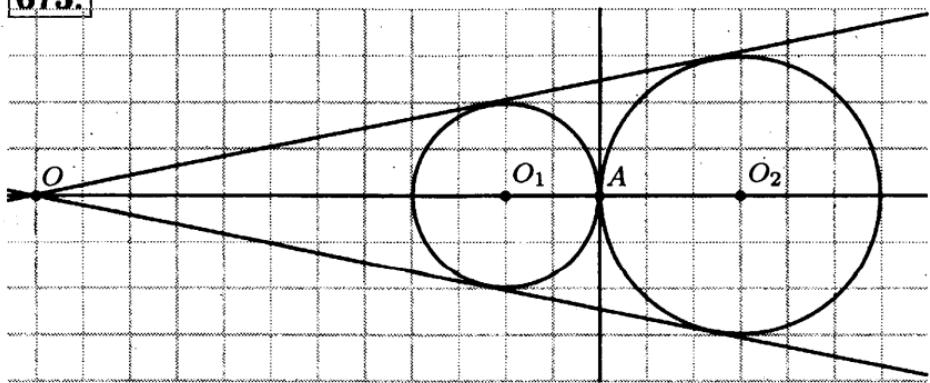
§ 3. Четыре замечательные точки треугольника

674.



$\triangle OAM \cong \triangle OBM$ ($\angle OBM$ и $\angle OAM$ — прямые, OM — общая, $\angle BOM = \angle AOM$), поэтому $OA = OB$, значит $\triangle OAB$ — равнобедренный, следовательно OM — биссектриса и высота, и $AB \perp OM$.

675.

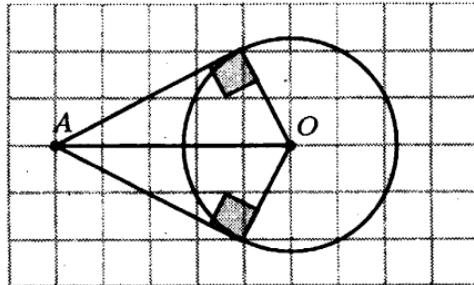


Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей. Каждая из этих точек равноудалена от сторон угла O , так как расстояние до сторон угла равно радиусам окружностей

и, следовательно, лежит на биссектрисе этого угла. Отрезки O_1A и O_2A перпендикулярны к общей касательной, поэтому точки O_1 , A и O_2 лежат на одной прямой.

Следовательно O , O_1 , A и O_2 — лежат на одной прямой.

676.



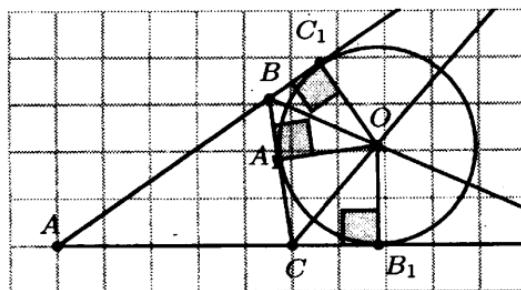
Так как точка O равноудалена от сторон угла A , то луч AO — биссектриса этого угла. Следовательно:

$$a) OA = \frac{r}{\sin 30^\circ} = 10 \text{ см};$$

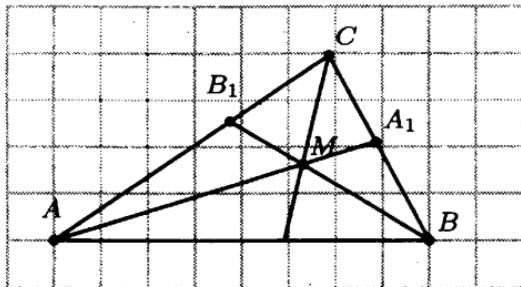
$$6) r = OA \sin 45^\circ = 7\sqrt{2} \text{ дм.}$$

Ответ: а) 10 см; 6) $7\sqrt{2}$ дм.

677.



Проведем из точки O перпендикуляры OA_1 , OB_1 и OC_1 к прямым BC , CA и AB . Поскольку точка O лежит на биссектрисе угла A_1BC_1 , то она равноудалена от прямых AB и BC , а значит, $OA_1 = OC_1$. Аналогично, $OA_1 = OB_1$. Следовательно, окружность радиуса OA_1 проходит через точки B_1 и C_1 . Прямые BC , CA и AB касаются этой окружности в точках A_1 , B_1 и C_1 , так как они перпендикулярны соответственно к радиусам OA_1 , OB_1 и OC_1 .

678.

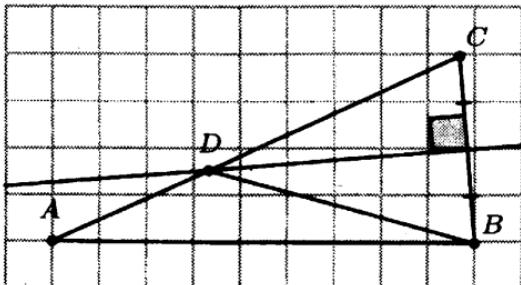
Так как M – точка пересечения биссектрис углов A и B $\triangle ABC$, то луч CM – биссектриса угла C этого треугольника.

Следовательно, $\angle ACM = \angle BCM = \frac{\angle C}{2} = \frac{180^\circ - \angle A - \angle B}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle B}{2} = 90^\circ - (180^\circ - \angle AMB) = \angle AMB - 90^\circ$.

Значит:

- $\angle ACM = \angle BCM = \angle AMB - 90^\circ = 16^\circ - 90^\circ = 46^\circ$;
- $\angle ACM = \angle BCM = \angle AMB - 90^\circ = 111^\circ - 90^\circ = 21^\circ$.

Ответ: а) 46° и 46° ; б) 21° и 21° .

679.

Точка D равноудалена от концов отрезка CB , т.е. $BD = CD$ (из равенства треугольников).

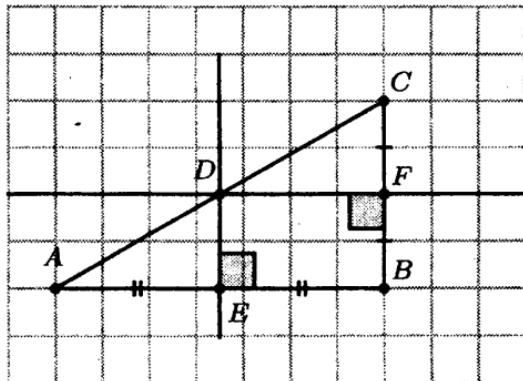
Следовательно:

- $CD = BD = 5$ см, $AD = AC - CD = 8,5$ см – 5 см = $3,5$ см;

- $AC = AD + CD = AD + BD = 3,2$ см + $11,4$ см = $14,6$ см.

Ответ: а) $3,5$ см и 5 см; б) $14,6$ см.

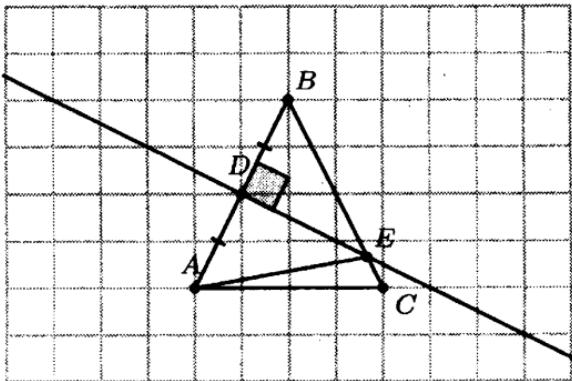
680.



a) Так как $DE \perp AB$ и $AE = EB$, то $AD = BD$. Аналогично $AD = CD$. Следовательно, $BD = CD$, а значит, точка D — середина отрезка BC .

б) Поскольку $AD = BD$, то $\triangle ABD$ — равнобедренный, а значит, $\angle BAD = \angle B$. Аналогично $\angle CAD = \angle C$. Поэтому $\angle A = \angle BAD + \angle CAD = \angle B + \angle C$, что и требовалось доказать.

681.

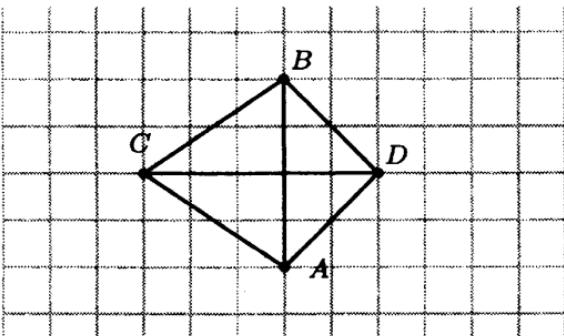


$\triangle ABC$ — равнобедренный, поэтому $BC = AB = 18$ см. Точка E лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB , а значит, $AE = BE$.

Получаем: $AC = (AC + AE + EC) - (AE + EC) = (AC + AE + EC) - (BE + EC) = (AC + AE + EC) - BC = 27$ см — 18 см = 9 см.

Ответ: 9 см.

682.



Поскольку $\triangle ABC$ равнобедренный, то точка C равноудалена от концов отрезка AB , а значит, лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку. Аналогично, точка D лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB . Следовательно, прямая CD и есть указанный серединный перпендикуляр, поэтому прямая CD проходит через середину отрезка AB .

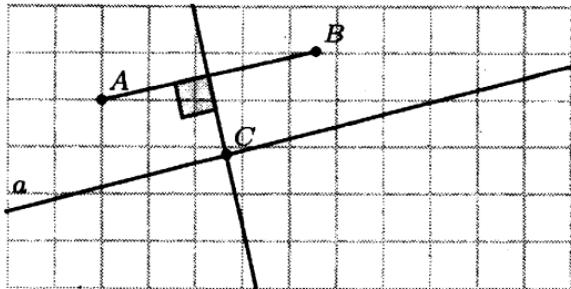
683. Предположим, что медиана AM — высота. Тогда она является серединным перпендикуляром к отрезку BC и, следовательно, точка A равноудалена от концов отрезка BC . Но по условию задачи $AB \neq AC$. Поэтому медиана AM треугольника ABC не может быть высотой.

684. Каждый из углов A и B $\triangle ABM$ равен половине угла при основании треугольника ABC (в силу свойства биссектрисы), а значит $\angle A = \angle B$. Следовательно, $\triangle ABM$ — также равнобедренный. Поэтому прямая CM — серединный перпендикуляр к отрезку AB (см. задачу 682).

685. По теореме о пересечении высот треугольника (п. 76 учебника) прямая MC — высота равнобедренного треугольника ABC , а значит, и его медиана. Следовательно MC — серединный перпендикуляр к отрезку AB .

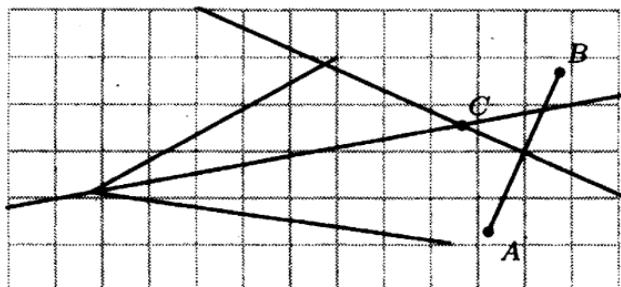
686. Задача решена в учебнике.

687.



Строим серединный перпендикуляр к отрезку AB (см. задачу **686**) и отмечаем точку пересечения этого перпендикуляра с прямой a . Точка M — искомая.

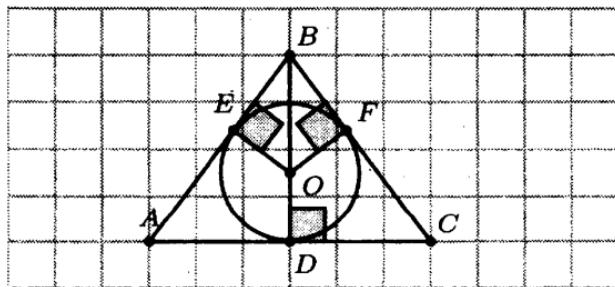
688.



Строим биссектрису заданного угла и серединный перпендикуляр к данному отрезку AB . Их точка пересечения C — искомая.

§ 4. Вписанная и описанная окружности

689.



Луч BO — биссектриса угла, противолежащего основанию равнобедренного треугольника, поэтому прямая BO

является серединным перпендикуляром к основанию AC . Отрезок OD перпендикулярен к стороне AC .

Следовательно, точка D лежит на прямой OB и является серединой основания AC , а значит, $AD = 5$ см. По теореме Пифагора $BD = \sqrt{AB^2 - (AC/2)^2} = \sqrt{169 - 25}$ см $= 12$ см.

Прямоугольные треугольник и BOE и BAD подобны, так как имеют общий острый угол B . Поэтому $\frac{r}{5 \text{ см}} = \frac{12 \text{ см} - r}{13 \text{ см}} \rightarrow 13r = 60 - 5r \rightarrow 18r = 60 \rightarrow r = 3\frac{1}{3}$ см.

Ответ: $3\frac{1}{3}$ см.

690. Пусть $BO = 12x$, тогда радиус вписанной окружности $r = 5x$, а высота треугольника ABC , проведенная к основанию $BD = 17x$.

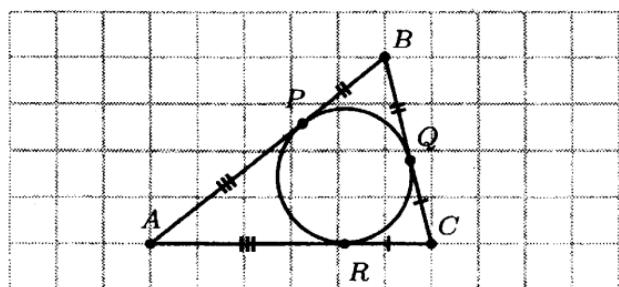
Из подобия треугольников BOE и BAD (см. задачу 689) находим: $\frac{5x}{AC/2} = \frac{12x}{60 \text{ см}} \rightarrow 600x = 12x \cdot AC \rightarrow AC = 600 : 12 = 50$ см.

Ответ: 50 см.

691. Из условия задачи следует, что боковая сторона треугольника $AB = 3 \text{ см} + 4 \text{ см} = 7 \text{ см}$. Поскольку отрезки касательных, проведенных из вершины основания равны (свойство касательных отрезков), то основание $AC = 3 \text{ см} + 3 \text{ см} = 6 \text{ см}$. Следовательно, периметр треугольника равен $7 \text{ см} + 7 \text{ см} + 6 \text{ см} = 20 \text{ см}$.

Ответ: 20 см.

692.

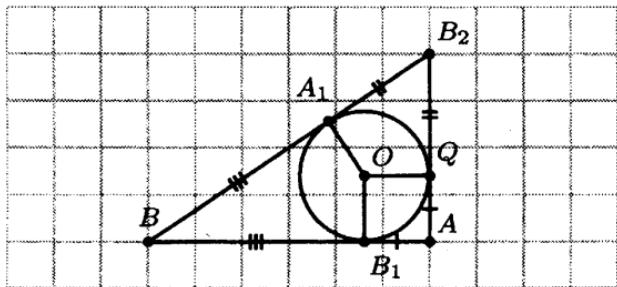


Так как $AP = RA$, $PB = BQ$, $QC = CR$ (по свойству касательных отрезков), то, $AP + PB = AB = 10$ см, $BQ + QC = BC = 12$ см, $QC + AP = CA = 5$ см.

Из этих трех равенств получаем, что: $AP = 1,5$ см, $PB = 8,5$ см, $CR = 3,5$ см, а значит, $RA = 1,5$ см, $BQ = 8,5$ см, $CR = 3,5$ см.

Ответ: $AP = 1,5$ см, $PB = 8,5$ см, $BQ = 8,5$ см, $QC = 3,5$ см, $CR = 3,5$ см, $RA = 1,5$ см.

693.



a) Четырехугольник AB_1OC_1 — квадрат, поэтому $AB_1 = AC_1 = r = 4$ см.

Имеем: $P_{ABC} = AB + BC + CA = AC_1 + C_1B + BA_1 + A_1C + CB_1 + B_1A$.

Поскольку $C_1B = BA_1$ и $CB_1 = A_1C$ (по свойству касательных отрезков), то $P_{ABC} = AB + BC + CA = 2r + 2BA_1 + 2A_1C = 2r + 2BC = 8$ см + 52 см = 60 см.

б) Аналогично получаем: $P_{ABC} = AB + BC + CA = 10$ см + 24 см + 2r.

По теореме Пифагора $(r+5 \text{ см})^2 + (r+12 \text{ см})^2 = (5 \text{ см} + 12 \text{ см})^2$, откуда находим: $r = 3$ см.

Таким образом, $P_{ABC} = 10 \text{ см} + 24 \text{ см} + 2 \cdot 3 \text{ см} = 40$ см.

Ответ: а) 60 см; б) 40 см.

694. Так как $P_{ABC} = AB + BC + CA = AC_1 + C_1B + BA_1 + A_1C + CB_1 + B_1A$, $C_1B = BA_1$ и $CB_1 = A_1C$ (по свойству касательных отрезков), то $P_{ABC} = AB + BC + CA = 2r + 2BA_1 + 2A_1C \rightarrow c + m = d + 2c \rightarrow d = m - c$.

Ответ: $m - c$.

695. Пусть $a + c = 15$ см, $b + d = 15$ см, тогда $P = a + b + c + d = 15 \text{ см} + 15 \text{ см} = 30$ см.

Ответ: 30 см.

696. Если в параллелограмм со смежным и сторонам и a и b можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны: $2a = 2b$ (свойство сторон описанного четырехугольника), откуда $a = b$. Следовательно все стороны параллелограмма равные, т.е. он — ромб.

697. Центр вписанной окружности соединенный отрезками с вершинами многоугольника разделяет его на треугольники, в каждом из которых основание — сторона многоугольника, а высота — радиус r вписанной окружности.

Таким образом площадь многоугольника равна сумме площадей таких треугольников, т.е. $S_{\text{мн-ка}} = \sum S_i = r \times \frac{1}{2} P_{\text{мн-ка}}$.

698. В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (свойство сторон описанного четырехугольника), поэтому периметр четырехугольника равен $P_{ABCD} = 2 \cdot 12 \text{ см} = 24 \text{ см}$.

$$S_{ABCD} = r \frac{1}{2} P_{ABCD} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 = 60 \text{ см}^2 \text{ (см. задачу 697).}$$

Ответ: 60 см^2 .

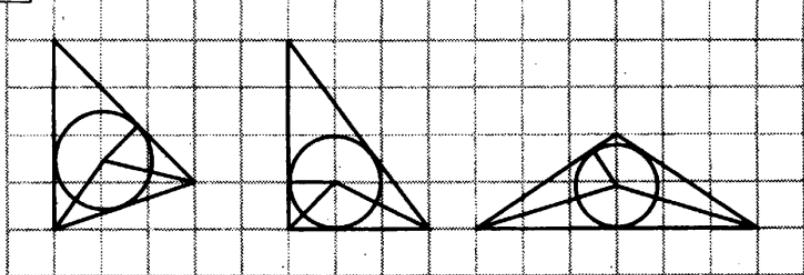
699. В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (свойство сторон описанного четырехугольника), поэтому периметр четырехугольника равен $P_{ABCD} = 2 \cdot 10 \text{ см} = 20 \text{ см}$.

$$S_{ABCD} = r \frac{1}{2} P_{ABCD} \text{ (см. задачу 697), следовательно, } r = 2S_{ABCD} : P_{ABCD} = 24 : 20 \text{ см} = 1,2 \text{ см.}$$

Ответ: $1,2 \text{ см}$.

700. Так как суммы противоположных сторон ромба равны, то в любой ромб можно вписать окружность (см. задачу 724).

701.



Строим биссектрисы двух углов треугольника. Точка их пересечения — центр вписанной окружности. Из этой точки проводим перпендикуляр к какой-нибудь стороне. Искомая вписанная окружность — окружность с найденным центром, проходящая через основание этого перпендикуляра.

702. Вписанный $\angle C$ опирается на полуокружность, следовательно $\angle C = 90^\circ$.

По теореме о вписанном угле:

$$\text{а) } \angle A = \frac{134^\circ}{2} = 67^\circ, \text{ а значит, } \angle B = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ;$$

$$\text{б) } \angle B = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ, \text{ а значит, } \angle A = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ.$$

Ответ. а) $\angle A = 67^\circ$, $\angle B = 23^\circ$ и $\angle C = 90^\circ$; б) $\angle A = 55^\circ$, $\angle B = 35^\circ$ и $\angle C = 90^\circ$.

$$\text{703. } \angle A = \frac{102^\circ}{2} = 51^\circ \text{ или } \angle A = \frac{360^\circ - 102^\circ}{2} = 129^\circ$$

(по теореме о вписанном угле), а значит, $\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 51^\circ}{2} = 64^\circ 30'$ или $\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 129^\circ}{2} = 25^\circ 30'$.

Ответ: 51° , $64^\circ 30'$, $64^\circ 30'$ или 129° , $25^\circ 30'$, $25^\circ 30'$.

704. а) Вписанный прямой угол опирается на полуокружность. Поэтому гипотенуза — диаметр, а значит, точка O — середина гипотенузы.

б) Гипотенуза треугольника равна d , а значит, его катеты равны $d \sin \alpha$ и $d \cos \alpha$.

Ответ: б) d , $d \sin \alpha$, $d \cos \alpha$.

705. Вписанный прямой угол опирается на полуокружность. Поэтому гипотенуза — диаметр, а значит радиус

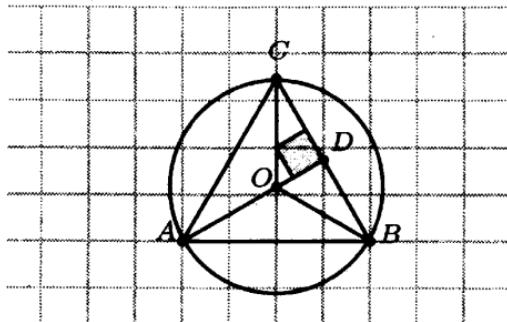
описанной окружности равен половине гипотенузы, т.е. равен $r = \frac{AB}{2}$. Имеем:

a) $AB = \sqrt{64 + 36}$ см = 10 см, $r = \frac{AB}{2} = 5$ см;

б) $AB = 36$ см, $r = \frac{AB}{2} = 18$ см.

Ответ: а) $r = 5$ см; б) $r = 18$ см.

706.

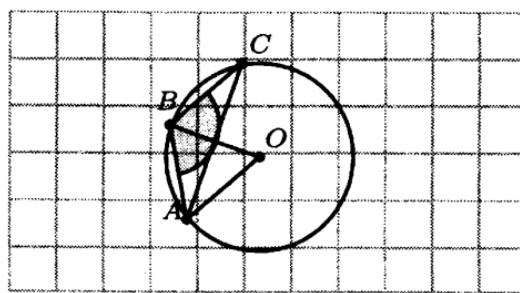


$\triangle KDO$ — прямоугольный, $\angle OCD = \frac{1}{2}\angle ABC = 60^\circ :$

: 2 = 30°, следовательно $BD = OB \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ см, а $BC = 2BD = 2 \cdot 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ см.

Ответ: $10\sqrt{3}$ см.

707.



Так как $\angle OBA = \angle OBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 60^\circ$.

$\triangle OAB$ — равносторонний, значит радиус OA описанной окружности равен 8 см, а ее диаметр — 16 см.

Ответ: 16 см.

708. а) Сумма противоположных углов прямоугольника равна 180° , следовательно согласно утверждению п. 78 учебника окружность можно описать.

б) Сумма противоположных углов равнобедренной трапеции равна 180° , следовательно согласно утверждению п. 78 учебника окружность можно описать.

709. В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° (свойство п. 78).

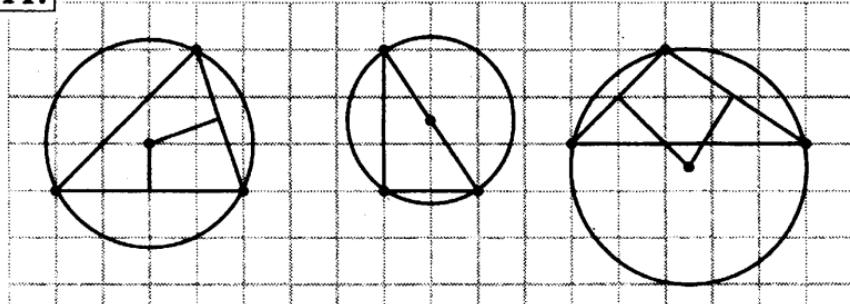
В параллелограмме противоположные углы равны.

Следовательно, если около параллелограмма можно описать окружность, то все его углы равны 90° , а значит, этот параллелограмм — прямоугольник.

710. Если около трапеции можно описать окружность, то дуги, стягиваемые ее боковым и сторонами, равны (см. задачу 659).

Поэтому вписанные углы при основании трапеции опираются на равные дуги и, следовательно, равны. Из этого следует, что трапеция равнобедренная (см. задачу 389).

711.



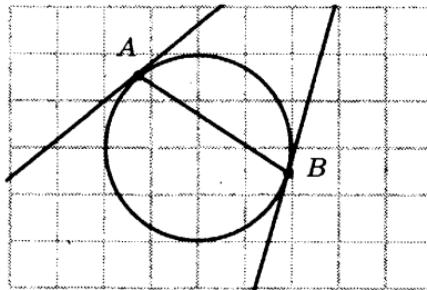
Для нахождения центра описанной окружности построим серединные перпендикуляры к двум сторонам и найти точку их пересечения — центр описанной окружности.

В случае прямоугольного треугольника построение центра описанной окружности будет находиться в середине гипотенузы.

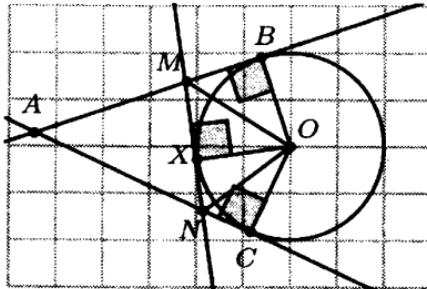
Дополнительные задачи

712. Хорда AB образует с каждой из касательных угол, равный половине дуги AB . Сумма этих углов равна $\angle A B$.

Но $\angle AOB \neq 180^\circ$, следовательно, касательные пересекаются.



713.



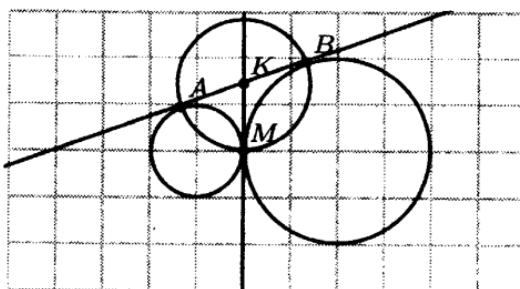
$\triangle OXM = \triangle OBM$ (по гипotenузе и катету). Следовательно, $MX = MB$ и $\angle MOX = \angle MOB$.

$\triangle OXN = \triangle OCN$. Следовательно, $XN = CN$ и $\angle NOX = \angle NOC$.

Имеем: $P = AM + MN + AN = AM + MX + XN + NA = AM + MB + CN + NA = AB + AC$ и $\angle MON = \angle MOX + \angle NOX = \frac{\angle BOX + \angle XOC}{2} = \frac{\angle BOC}{2}$.

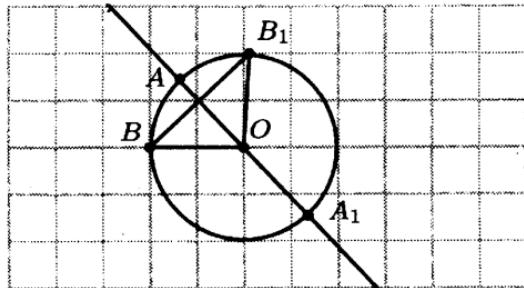
Следовательно периметр треугольника AMN и угол MON не зависят от выбора точки X на дуге BC .

714*.



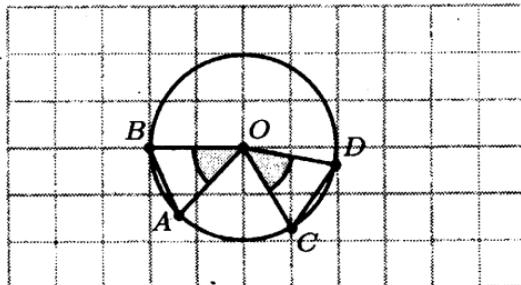
Проведем через точку M общую касательную и обозначим буквой K точку ее пересечения с прямой AB . Так как $KA = KM$ и $KB = KM$ (как отрезки касательных к окружности, проведенных из точки K). Следовательно, точка M лежит на окружности с диаметром AB .

715.



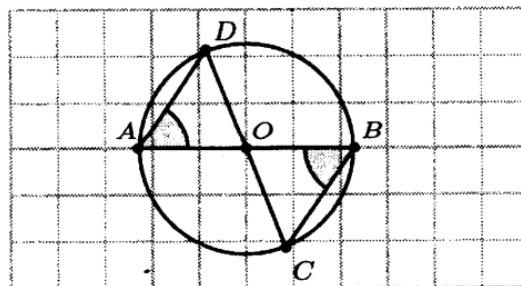
Прямая AA_1 содержит высоту равнобедренного треугольника OBB_1 , а значит, и его биссектрису. Следовательно, центральные углы AOB и AOB_1 равны, а значит, равны и дуги, на которые опираются эти углы.

716.



Равнобедренные треугольник и OAB и OCD равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $AB = CD$.

717.



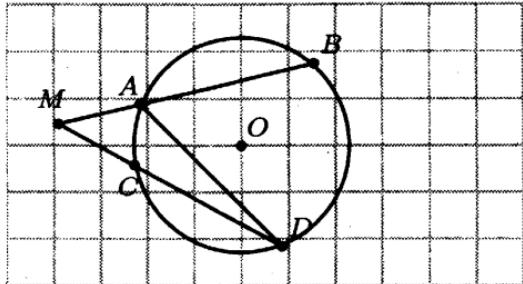
$\angle DAB = \angle ABC$ (как накрест лежащие, при пересечении прямых BC и AD секущей AB), поэтому $\angle AC = \angle BD$.

Имеем:

$$\angle CD = \angle CB + \angle BD = (\angle AB - \angle AC) + \angle BD = \angle AB = 180^\circ.$$

Следовательно, хорда CD — диаметр окружности.

719.



Пусть две прямые на которых лежат секущие AB и BC пересекаются в точке M . $\angle BAD$ — внешний угол $\triangle ADM$, поэтому $\angle BAD = \angle AMD + \angle ADM$, следовательно $\angle AMD = \angle BAD - \angle ADM = \frac{\angle BD}{2} - \frac{\angle AC}{2} = \frac{\angle BD - \angle AC}{2}$.

720. Вершина треугольника не может лежать на серединном перпендикуляре к той стороне, концом которой она является. Если бы вершина разностороннего треугольника лежала на серединном перпендикуляре к противолежащей стороне, то медиана, проведенная из этой вершины, была бы высотой, что невозможно.

Ответ: нет.

721. Если в прямоугольник со смежным и сторонам a и b можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны: $2a = 2b$, следовательно $a = b$, а значит, этот прямоугольник квадрат.

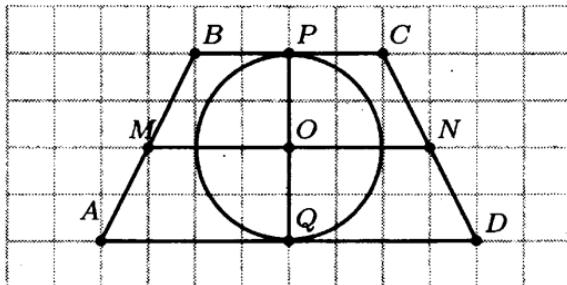
722. Площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружно-

сти (см. задачу 697). Поэтому периметр четырехугольника $ABCD$ равен $P_{ABCD} = \frac{2S}{r}$.

Следовательно, $AB + CD = AD + BC = \frac{S}{r}$. Отсюда находим: $AB = \frac{2S}{5r}$, $BC = \frac{S}{3r}$, $CD = \frac{3S}{5r}$, $AD = \frac{2S}{3r}$.

Ответ: $\frac{2S}{5r}, \frac{S}{3r}, \frac{3S}{5r}, \frac{2S}{3r}$.

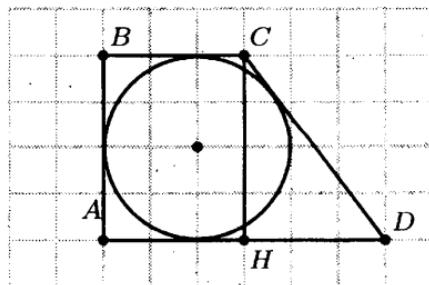
723.



Пусть P и Q — точки, в которых окружность касается оснований BC и AD трапеции $ABCD$, O — центр этой окружности. Прямая OP перпендикулярна к прямой BC . Следовательно, она перпендикулярна и к прямой AD , а значит, проходит через точку Q (иначе из точки O оказалось бы проведено два перпендикуляра к прямой AD , что невозможно). Иными словами, отрезок PQ — диаметр окружности.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции. Следовательно, по теореме Фалеса, она пересекает отрезок PQ в его середине, т.е. проходит через центр O окружности.

725.



Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями и AD и BC ($AD > BC$), $AB \perp AD$, r — радиус вписанной в нее окружности.

Проведем высоту CH и, учитывая, что $CH = 2r$, $DH = a - b$ и $CD = (a - r) + (b - r) = a + b - 2r$, применим теорему Пифагора к треугольнику CDH : $(a - b)^2 + 4r^2 = (a + b - 2r)^2 \rightarrow r = \frac{ab}{a + b}$.

Ответ: $r = \frac{ab}{a + b}$.

726. Рассмотрим серединный перпендикуляр к той стороне треугольника, к которой проведена данная медиана. Из условия задачи следует, что центр описанной окружности является общей точкой этого серединного перпендикуляра и данной медианы. Возможны два случая.

Случай 1. Рассматриваемый серединный перпендикуляр и данная медиана совпадают. В этом случае вершина, из которой проведена медиана, равноудалена от концов противолежащей стороны, а значит, данный треугольник — равнобедренный.

Случай 2. Рассматриваемый серединный перпендикуляр и данная медиана не совпадают. В этом случае серединный перпендикуляр и медиана имеют единственную общую точку — середину стороны, к которой проведена медиана. Тем самым центр описанной окружности лежит на середине стороны треугольника, а значит, этот треугольник прямоугольный (см. решение задачи 665).

727. Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе, проведенной к основанию треугольника. Эта биссектриса является медианой и высотой, т.е. серединным перпендикуляром к основанию треугольника. Следовательно, обе точки O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к основанию треугольника.

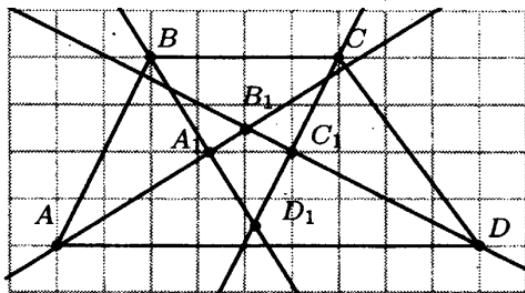
728. Противоположные углы ромба равны. если около ромба можно описать окружность, то эти углы составляют

в сумме 180° . Следовательно, каждый из них равен 90° , а значит, этот ромб — квадрат.

729. Задача решена в учебнике.

730. Каждый из углов A и B четырехугольника $ACBO$ равен 90° , а значит, сумма этих углов равна 180° . Поэтому (см. задачу 729) около четырехугольника $ACBO$ можно описать окружность.

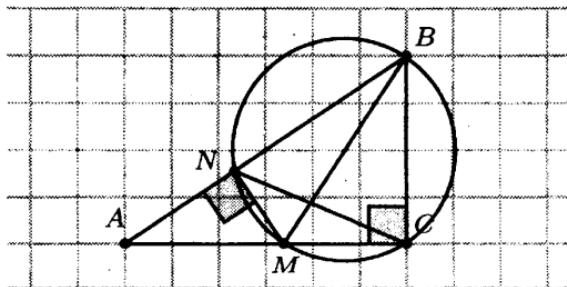
731.



Пусть $ABCD$ — данная трапеция. Угол A_1 четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ равен $180^\circ - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle B}{2}$, где $\angle A$ и $\angle B$ — углы трапеции. Но $\angle A + \angle B = 180^\circ$.

Следовательно, $\angle A_1 = 90^\circ$. Аналогично, $\angle C_1 = 90^\circ$. Таким образом, в четырехугольнике $A_1B_1C_1D_1$ сумма противоположных углов A_1 и C_1 равна 180° . Поэтому (см. задачу 729) около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

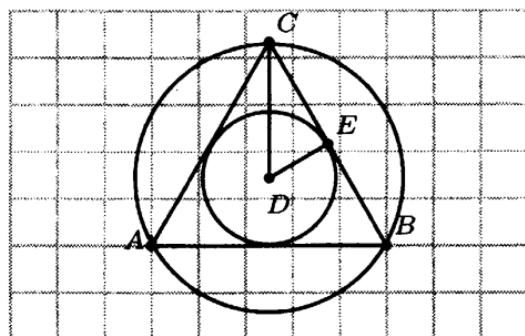
732.



В четырехугольнике $BCMN$ противоположные углы C и N прямые, а значит, сумма этих углов равна 180° . Поэтому (см. задачу 729) около этого четырехугольника

можно описать окружность. Вписанные углы MHC и MBC равны, так как они опираются на одну и ту же дугу MC .

733.



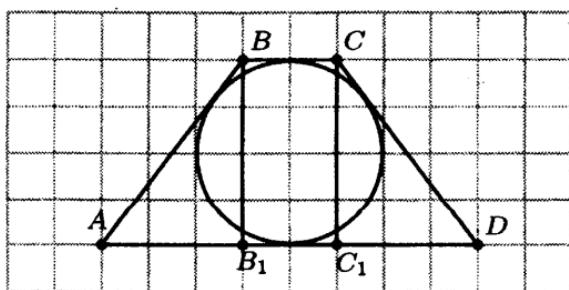
Так как треугольник равносторонний, то центры указанных окружностей совпадают.

$\angle DCE = 30^\circ$, следовательно $DE = \frac{1}{2}CD$, а значит радиус вписанной окружности в два раза меньше радиуса описанной окружности, т.е. равен $10 : 2 = 5$ см.

Ответ: 5 см.

734. Если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм — прямоугольник (см. задачу 709). Если же в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат (см. задачу 721).

735.



Пусть в трапеции $ABCD$ основания $AD = a$ и $BC = b$ ($a > b$). Поскольку около данной трапеции можно описать окружность, то эта трапеция равнобедренная (см. задачу 710), т.е. $AB = CD$. С другой стороны, поскольку в

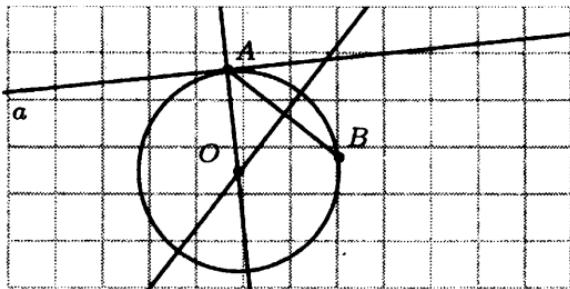
этую трапецию можно вписать окружность, то $AB + CD = 2AB = a + b$, откуда $AB = \frac{a+b}{2}$.

Пусть BB_1 и CC_1 — перпендикуляры, проведенные из точек B и C к основанию AD . Тогда, очевидно, $BB_1 = CC_1 = 2r$, где r — радиус окружности, вписанной в трапецию. Следовательно, прямоугольные треугольники ABB_1 и DCC_1 равны по гипотенузе и катету. Поэтому $AB_1 = C_1D$, а поскольку $B_1C_1 = BC = b$, то $AB_1 = \frac{a-b}{2}$.

По теореме Пифагора из $\triangle ABB_1$ получаем: $4r^2 + \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4} \rightarrow r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$.

Ответ: $r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$.

736.



Построим серединный перпендикуляр к отрезку AB и прямую, проходящую через точку A перпендикулярно к прямой a . Найдем точку их пересечения O . Окружность с центром O радиуса OA — искомая.

737. Через произвольную точку A одной прямых проведем прямую, перпендикулярную к этой прямой. Пусть B — точка пересечения проведенной прямой со второй данных прямых. Найдем середину O отрезка AB и проведем серединный перпендикуляр. Ясно, что центр искомой окружности будет лежать на данной прямой.

Очевидно, что радиус искомой окружности $\frac{AB}{2}$. Из данной точки проведем окружность радиуса $\frac{AB}{2}$, пересе-

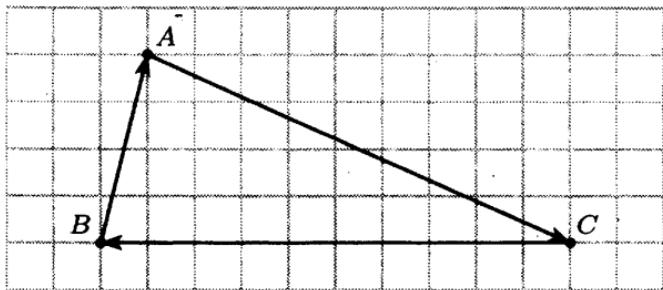
кающая срединный перпендикуляр в точках O_1 и O_2 —
искомых центрах окружностей.

Таким образом задача имеет два решения, если точка
находится между прямыми, а в противном случае не имеет
ни одного решения.

Глава IX. Векторы

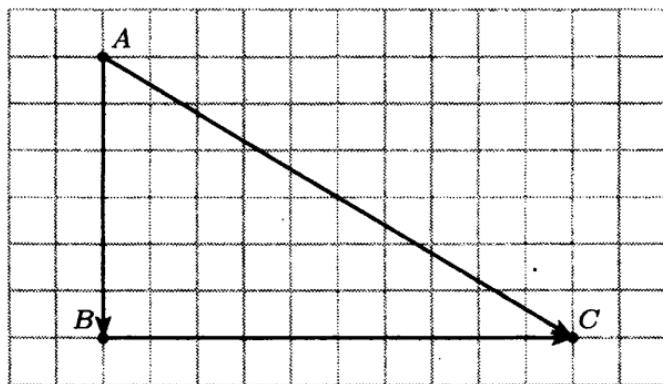
§ 1. Понятие вектора

738.

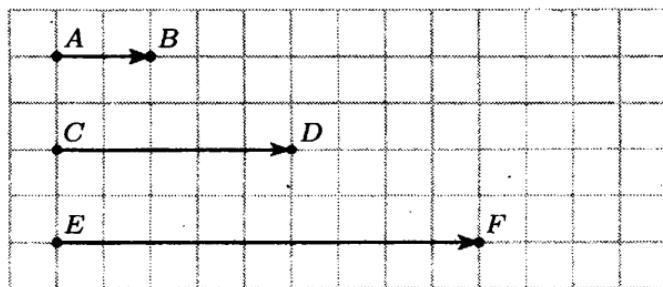


$$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}$$

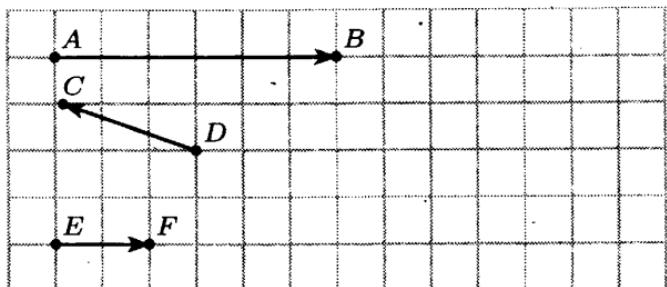
739.



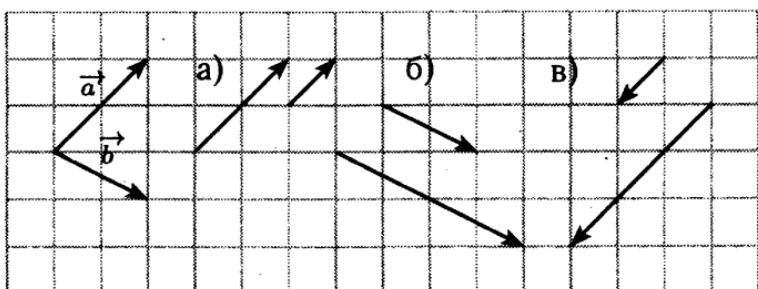
740. a)



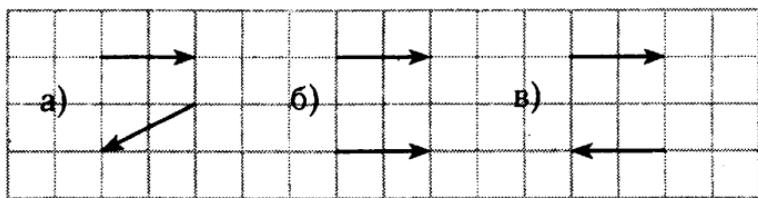
б)



741.

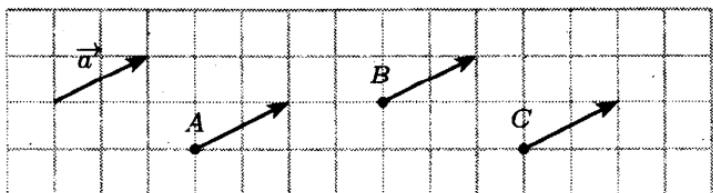


742.



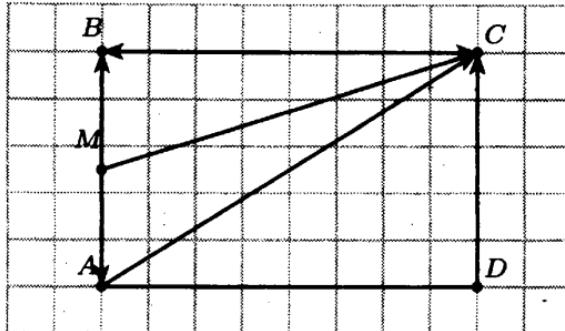
Векторы равны в случае в).

743.



744. Ответ. Векторными величинами являются скорость и сила.

745.



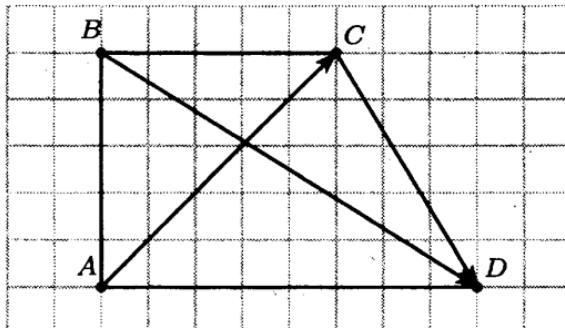
$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = 3 \text{ см}, |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CB}| = 4 \text{ см}.$$

По теореме Пифагора: $|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{1,5^2 + 4^2} = \sqrt{18,25} \text{ см.}$

$$|MA| = \frac{1}{2}BA = 1,5 \text{ см}, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ см.}$$

Ответ. $|\overrightarrow{AB}| = 3 \text{ см}, |\overrightarrow{BC}| = 4 \text{ см}, |\overrightarrow{DC}| = 3 \text{ см}, |\overrightarrow{MC}| = \sqrt{18,25} \text{ см}, |MA| = 1,5 \text{ см}, |\overrightarrow{CB}| = 4 \text{ см}, |\overrightarrow{AC}| = 5 \text{ см.}$

746.



$$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ см.}$$

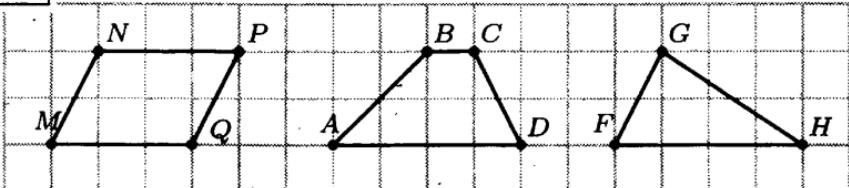
Так как $\angle D = 45^\circ$, то $CH = HD = 5 \text{ см}$, и по теореме Пифагора $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{CH^2 + HD^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ см.}$

$$BC = AH = AD - DH = 12 - 5 = 7 \text{ см.}$$

По теореме Пифагора $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$

Ответ. 13 см, $5\sqrt{2}$ см, $\sqrt{74}$ см.

747.



а) Коллинеарные векторы: \overrightarrow{MQ} и \overrightarrow{NP} , \overrightarrow{MQ} и \overrightarrow{PN} , \overrightarrow{QM} и \overrightarrow{NP} , \overrightarrow{QM} и \overrightarrow{PN} , \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{QP} , \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{QP} , \overrightarrow{NM} и \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{NM} и \overrightarrow{QP} .

Сонаправленные векторы: $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{NM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{MQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{QM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{PN}$.

Противоположно направленные векторы: $\overrightarrow{MN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{NM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{MQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{QM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{NP}$.

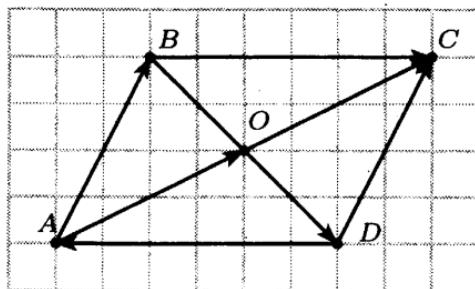
б) Коллинеарные векторы: \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{CB} и \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{CB} и \overrightarrow{AD} .

Сонаправленные векторы: $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DA}$.

Противоположно направленные векторы: $\overrightarrow{BC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD}$.

в) Нет коллинеарных векторов, и следовательно нет сонаправленных и противоположно направленных векторов.

748.



а) Так как $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$, то векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{DC} равны;

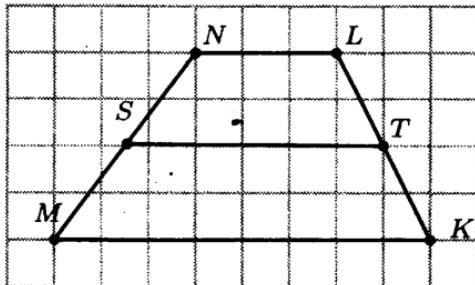
б) так как $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DA}$, то векторы \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{DF} не равны;

в) Так как $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OC}|$ и $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC}$, то векторы \overrightarrow{AO} и \overrightarrow{OC} равны;

г) так как векторы \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{BD} не коллинеарны, то они не равны.

Ответ: а) да; б) нет; в) да; г) нет.

749.



а) Векторы \overrightarrow{NL} и \overrightarrow{KE} не коллинеарны, поэтому векторы не равны.

б) $|\overrightarrow{MS}| = |\overrightarrow{SN}|$ и $\overrightarrow{MS} \uparrow\uparrow \overrightarrow{SN}$, поэтому векторы равны.

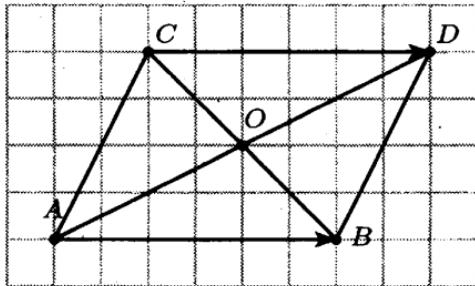
в) Векторы \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{KL} не коллинеарны, поэтому векторы не равны.

г) $|\overrightarrow{TS}| \neq |\overrightarrow{KM}|$, поэтому векторы не равны.

д) $|\overrightarrow{TL}| = |\overrightarrow{KT}|$ и $\overrightarrow{TL} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KT}$, поэтому векторы равны.

Ответ: а) нет; б) да; в) нет; г) нет; д) да.

750.



Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, поэтому $ABCD$ — параллелограмм (п. 43 учебника). По свойству параллелограмма его диагонали точкой пересечения делятся пополам, поэтому середины отрезков AD и BC совпадают, что и требовалось доказать.

Докажем обратное утверждение: пусть точка O — середина отрезков AD и BC . Тогда эти отрезки делятся

пополам и $ABCD$ – параллелограмм (3° , п. 44), следовательно $AB = CD$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, т.е. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, что и требовалось доказать.

751. а) Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, то $AB \parallel DC$ и $AB = DC$, следовательно $ABCD$ – параллелограмм (1° , п. 44). А из $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ следует, что т. е. $AB = BC$. Значит $ABCD$ – ромб.

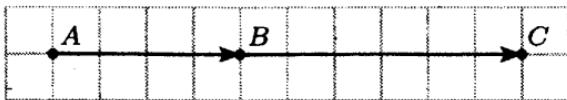
б) Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, то $AB \parallel DC$ и так как \overrightarrow{AD} и \overrightarrow{BC} не коллинеарны, то $ABCD$ – трапеция (по определению, п. 45).

Ответ: а) ромб; б) трапеция.

752. Ответ: а) верно; б) верно; в) неверно; г) неверно; д) верно.

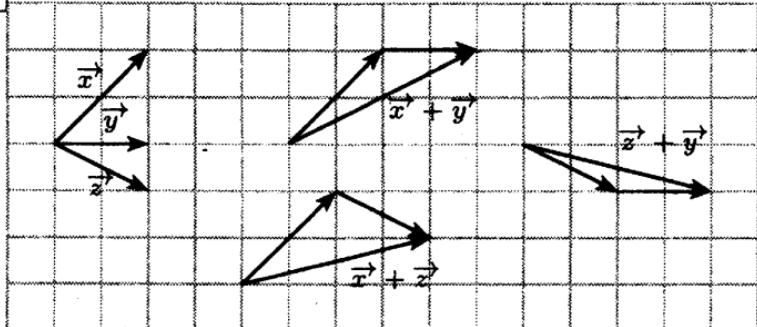
§ 2. Сложение и вычитание векторов

753.

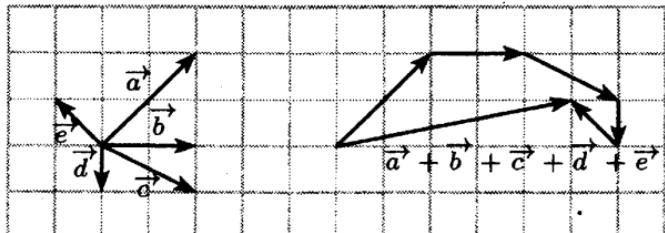


Ответ: да, векторы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ и \overrightarrow{AC} равны.

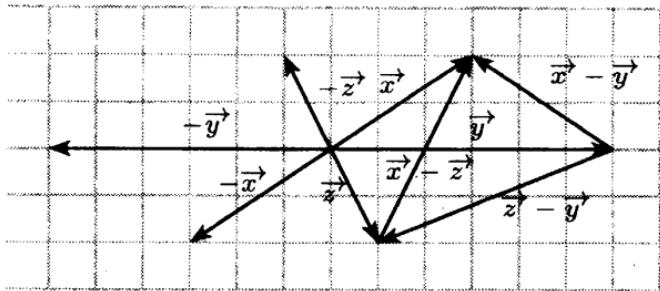
754.



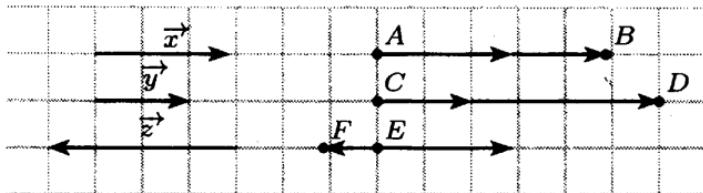
755.



756.

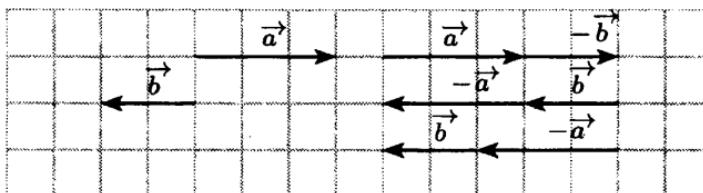


757.

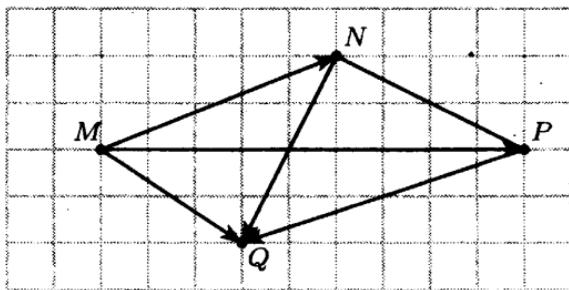


$$\overrightarrow{AB} = \vec{x} + \vec{y}, \overrightarrow{CD} = \vec{y} - \vec{z}, \overrightarrow{EF} = \vec{x} + \vec{z}$$

758.



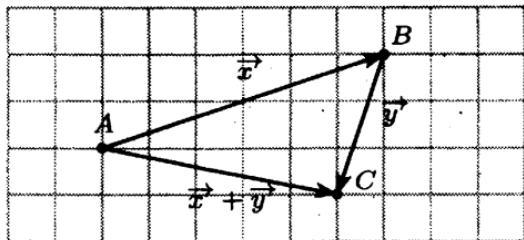
759.



a) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MQ}$ и $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ}$ (по правилу треугольника). Следовательно, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}$.

б) Аналогично: $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP}$. Следовательно, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP}$.

760.



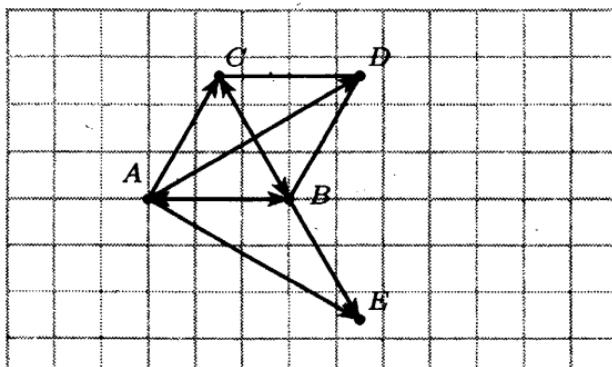
При сложении векторов \vec{x} и \vec{y} по правилу треугольника получаем, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, где $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{x} + \vec{y}$.

Так как векторы $\vec{x} \uparrow \downarrow \vec{y}$, то ABC — треугольник. Из неравенства треугольника (п. 34) следует, что $AC < AB + BC$.

Но $AC = |\vec{x} + \vec{y}|$, $AB = |\vec{x}|$, $BC = |\vec{y}|$, поэтому $|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

761. По правилу треугольника получаем, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. что и требовалось доказать.

762.



$$a) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = a.$$

б) Пусть O — середина стороны BC $\triangle ABC$, тогда $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.

$\triangle AOB$ — прямоугольный, $OC = OB = \frac{1}{2}a$, откуда по теореме Пифагора получаем $AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Поэтому $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AO}| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

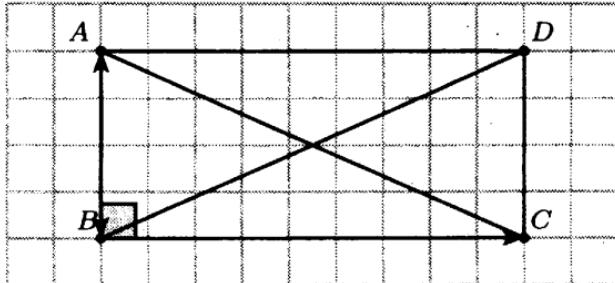
в) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

г) Так как $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$, то $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = a$.

д) Так как $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, то $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = a$.

Ответ: а) a ; б) $a\sqrt{3}$; в) $a\sqrt{3}$; г) a ; д) a .

763.



а) $|\overrightarrow{BA}| - |\overrightarrow{BC}| = BA - BC = -2$; так как $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$, то $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = CA = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$ (по теореме Пифагора).

б) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = AB + BC = 14$; так как $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, то $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$.

в) $|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}| = BA + BC = 6 + 8 = 14$; так как $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$, то $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 10$.

г) $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}| = AB - BC = 6 - 8 = -2$; так как $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$, то $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 10$.

Ответ: а) -2 и 10 ; б) 14 и 10 ; в) 14 и 10 ; г) -2 и 10 .

764. а) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{KD}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DK}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AK}$.

б) $(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) - (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KD}) = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KM}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM}$.

Ответ: а) \overrightarrow{AK} ; б) \overrightarrow{AM} .

765. $\vec{p} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{ZZ} = \vec{0}$.

$\vec{q} = (\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{XZ}) + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{XX} = \vec{0}$.

$$\vec{r} = (\overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{XY}) - \overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{ZY} + \overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{ZZ} = \vec{0}.$$

Что и требовалось доказать.

- 766.** $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CY}$ (по правилу многоугольника).

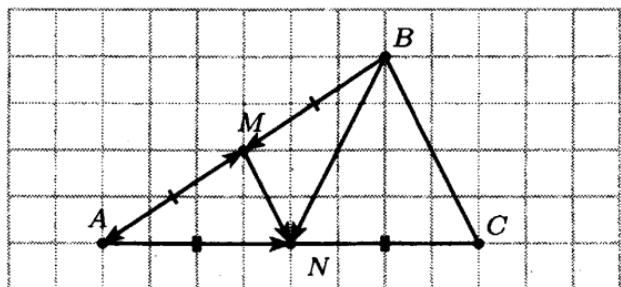
Так как $\overrightarrow{XA} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{CY} = \vec{d}$,
то $\overrightarrow{XY} = -(\vec{a}) + (-\vec{b}) + \vec{c} + \vec{d}$.

Ответ: $-(\vec{a}) + (-\vec{b}) + \vec{c} + \vec{d}$.

- 767.** По правилу треугольника $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{b}$, поэтому $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\vec{b}$.

Ответ: $-\vec{b}$.

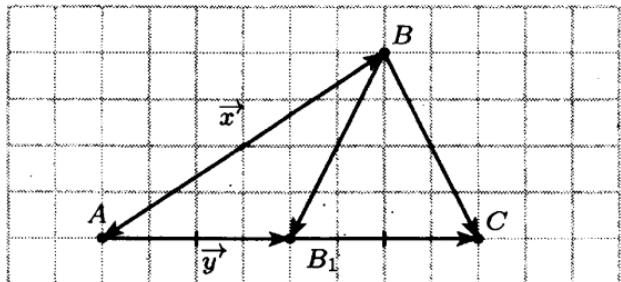
- 768.**



Так как $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} = -\vec{a}$;
 $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AN} = \vec{b}$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a}$; $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} = -\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})$ (по правилу треугольника).

Ответ, $\overrightarrow{BM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{NC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BN} = -\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})$.

- 769.**



$$\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{AB_1} = \vec{x}, \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB} = -\vec{x} - \vec{y},$$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{y}; \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C} = (\vec{x} - \vec{y}) + \vec{x}.$$

Ответ. $\overrightarrow{B_1C} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BB_1} = -\vec{x} - \vec{y}$, $\overrightarrow{BA} = -\vec{y}$, $\overrightarrow{BC} = (\vec{x} - \vec{y}) + \vec{x}$.

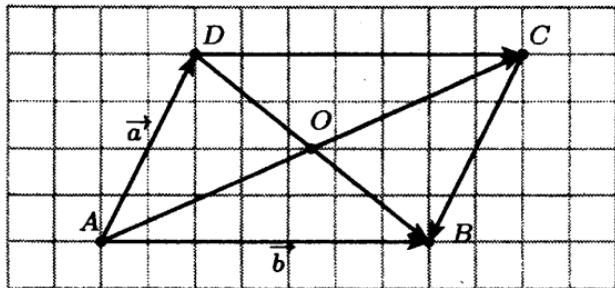
770. а) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.

б) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{b}$ (по правилу параллелограмма), следовательно, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = -(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$.

в) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{DA}) = \vec{a} - \vec{b}$ (по правилу параллелограмма).

Ответ: а) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; б) $\overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b}$; в) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b}$.

771.



Так как $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, то $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$.

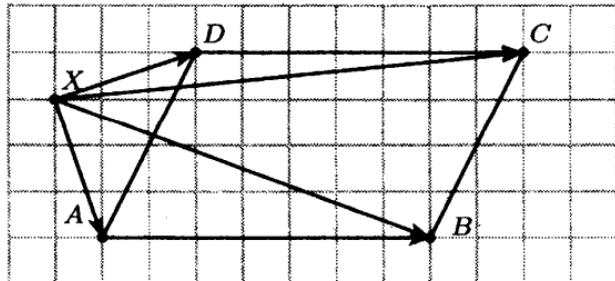
Так как $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, то $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{b}$.

$\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{B2} = -\vec{a}$.

$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{B2} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = -\vec{a} + \vec{b}$.

772.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA} \text{ и } \overrightarrow{vec DC} = \overrightarrow{XC} - \overrightarrow{XD} \rightarrow \\ \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XC} - \overrightarrow{XD} \rightarrow \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}.$$

Что и требовалось доказать.

773. 1. Если \vec{x} и \vec{y} не коллинеарны то $|\vec{x} - \vec{y}|$ – третья сторона треугольника и по неравенству треугольника (п. 34) $|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

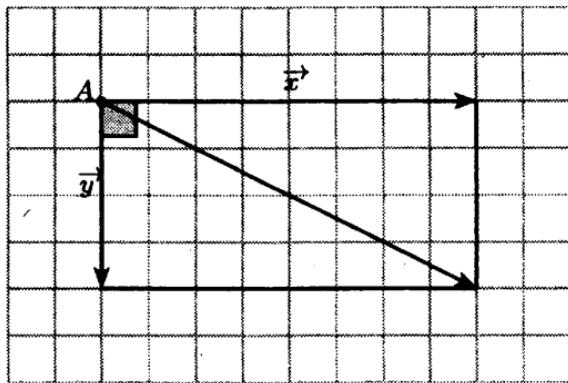
2. Если \vec{x} и \vec{y} коллинеарны и $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$, то $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$, так как в данном случае векторы \vec{x} и $-\vec{y}$ направлены в одну сторону.

3. Если \vec{x} и \vec{y} коллинеарны и $\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{y}$, то $|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$, так как в данном случае векторы \vec{x} и $-\vec{y}$ направлены в разные стороны.

4. Пусть $\vec{x} = 0$, то $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{y}|$, т.е. $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

Ответ. $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$ если $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$ или когда один из векторов \vec{x} и \vec{y} – нулевой.

774.



Пусть \vec{y} – вектор скорости парашютиста по вертикали, а \vec{x} – вектор скорости парашютиста по горизонтали. Так как угол между векорами \vec{x} и \vec{y} равен 90° , то по теореме Пифагора $|\vec{x} + \vec{y}| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$ м/с.

Так как $|\vec{x} + \vec{y}| : |\vec{y}| = 2$, то угол спуска парашютиста к горизонтали равен 30° , а искомый угол равен 60° .

Ответ. 60° .

§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

775.–778. Выполните задание самостоятельно.

779. Так как $3 > 0$, то $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{a} \rightarrow |\vec{p}| = |3||\vec{a}| \rightarrow |\vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{p}|$.

Аналогично: $-\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{p}$, $|- \vec{a}| = |\vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{p}|$; $\frac{1}{2}\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{p}$, $|\frac{1}{2}\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{a}| = \frac{1}{6}|\vec{p}|$; $-2\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{p}$, $|-2\vec{a}| = 2|\vec{a}| = \frac{2}{3}|\vec{p}|$; $6\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{p}$, $|6\vec{a}| = 6|\vec{a}| = 2|\vec{p}|$.

Ответ: $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $\vec{p} \uparrow\downarrow -\vec{a}$, $\vec{p} \uparrow\uparrow \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{p} \uparrow\downarrow -2\vec{a}$, $\vec{p} \uparrow\uparrow 6\vec{a}$; $|\vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{p}|$, $|- \vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{p}|$, $|\frac{1}{2}\vec{a}| = \frac{1}{6}|\vec{p}|$, $|-2\vec{a}| = \frac{2}{3}|\vec{p}|$, $|6\vec{a}| = 2|\vec{p}|$.

780. а) Так как $|1 \cdot \vec{a}| = |1||\vec{a}| = |\vec{a}|$ и $1 > 0$, то $1 \cdot \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, следовательно $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

б) Так как $|(-1) \cdot \vec{a}| = |-1||\vec{a}| = |\vec{a}|$ и $-1 < 0$ то $(-1) \cdot \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, следовательно $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

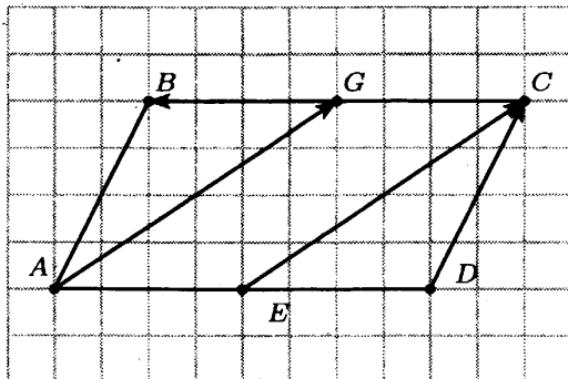
781. а) $2\vec{x} - 2\vec{y} = 2(\vec{x} - \vec{y}) = 2((\vec{m} + \vec{n}) - (\vec{m} - \vec{n})) = 2(2\vec{n}) = 4\vec{n}$.

б) $2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} = 2(\vec{m} + \vec{n}) + \frac{1}{2}(\vec{m} - \vec{n}) = 2\vec{m} + 2\vec{n} + \frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} = \frac{5}{2}\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n}$.

в) $-\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y} = -(\vec{m} + \vec{n}) - \frac{1}{3}(\vec{m} - \vec{n}) = -\vec{m} - \vec{n} - \frac{1}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}\vec{n} = -\frac{4}{3}\vec{m} - \frac{2}{3}\vec{n}$.

Ответ: а) $2\vec{x} - 2\vec{y} = 4\vec{n}$; б) $2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} = \frac{5}{2}\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n}$;

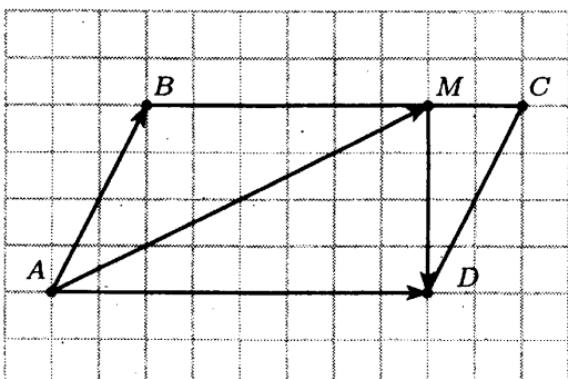
в) $-\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y} = -\frac{4}{3}\vec{m} - \frac{2}{3}\vec{n}$.

782.

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{a}, \text{ следовательно } \overrightarrow{EC} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{ED} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

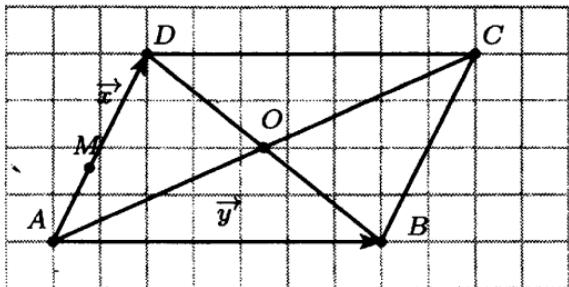
$$\text{Ответ: } \overrightarrow{EC} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{AG} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

783.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\vec{a}, \overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}.$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}.$$

$$\text{Ответ: } \overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}, \overrightarrow{MD} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}.$$



$$\text{a) } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{x} + \vec{y}.$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}).$$

$$\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}).$$

$$\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{y} - \vec{x}).$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{x}.$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{y}).$$

$$\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{x} - \vec{y}.$$

$$\text{б) } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{x}.$$

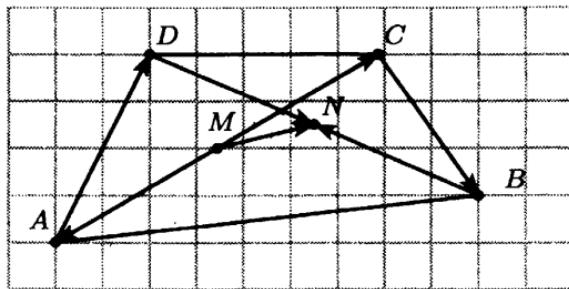
$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\vec{x} + \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{x} + \vec{y}.$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{x} - \vec{y}.$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}) + \frac{1}{3}\vec{x} = -\frac{1}{6}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}.$$

Ответ. а) $\overrightarrow{AC} = \vec{x} + \vec{y}$, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$, $\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$, $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{y} - \vec{x})$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\vec{x}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{y})$, $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AO} = -\vec{x} - \vec{y}$; б) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{x}$, $\overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}\vec{x} + \vec{y}$, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\vec{x} - \vec{y}$, $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{6}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$.

785.



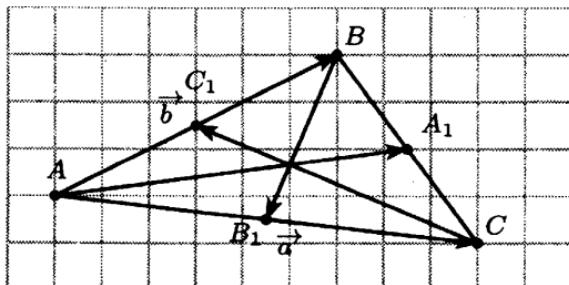
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}$ (по правилу многоугольника).

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}) = 2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BN}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$

Так как точки N и M середины сторон, то $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ и $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BN}$.

Следовательно $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$, что и требовалось доказать.

786.



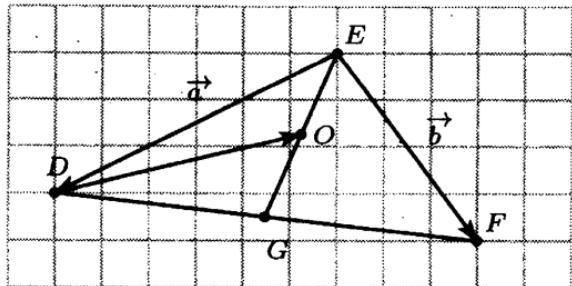
$\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA_1}$, так как $\overrightarrow{BA_1} = -\overrightarrow{CA_1}$, то $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{a} \rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$;

Аналогично:

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b};$$

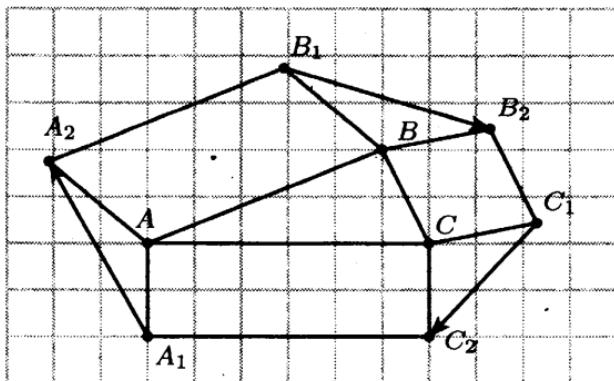
$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = -\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CC_1} = -\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$.

787.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{DO} &= \overrightarrow{EO} - \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG}) - \overrightarrow{ED} = \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}) - \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED})) - \overrightarrow{ED} = \\
 &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})) - \vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}) - \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \\
 &+ \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{a} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 1)\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}$.

788. Задача решена в учебнике.**789.**

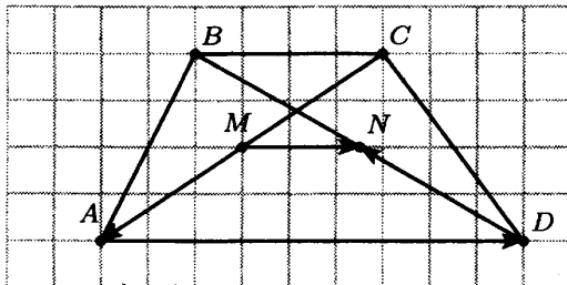
Если такой треугольник существует, то сумма векторов отложенных на сторонах такого треугольника равна нулевому вектору. Или иначе, при перемещении по сторонам треугольника мы вернемся в начальную точку.

То есть надо доказать, что $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{0}$.

Так как $\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{AA_2} - \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{B_1 B_2} = \overrightarrow{BB_2} - \overrightarrow{BB_1}$,
 $\overrightarrow{C_1 C_2} = \overrightarrow{CC_2} - \overrightarrow{CC_1}$, и $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_2}$, $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_2}$, $\overrightarrow{AA_1} =$
 $= \overrightarrow{CC_2}$, получаем $\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{B_1 B_2} + \overrightarrow{C_1 C_2} = \overrightarrow{AA_2} - \overrightarrow{AA_1} +$
 $+ \overrightarrow{BB_2} - \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_2} - \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$.

Что и требовалось доказать.

790.



Пусть точки M и N — середины диагоналей AC и BD , следовательно $AO = OC$ и $BO = OD$.

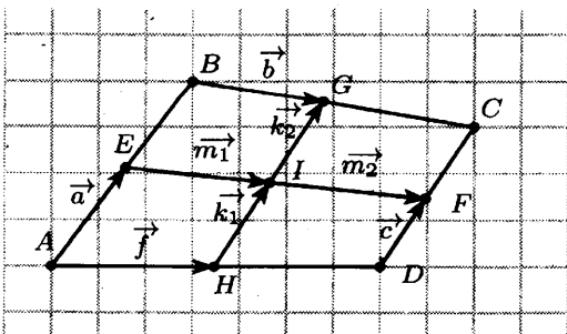
Очевидно, что $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} =$
 $= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Поэтому $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} =$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$.

Так как $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$, то
 $MN \parallel AD \parallel BC$, и $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2} |(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})| = \frac{AD - BC}{2}$.

Что и требовалось доказать.

791.



Пусть дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, и точки E, G, F, H — середины его сторон и отрезки HG и EF соединяющие середины противоположных сторон. Обозначим векторы как указано на рисунке.

Очевидно, что

$$\begin{cases} 2\vec{f} + \vec{c} - \vec{a} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 \\ \vec{f} + \vec{k}_1 - \vec{a} = \vec{m}_1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{f} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \\ \vec{a} + \vec{m}_1 - \vec{f} = \vec{k}_1 \end{cases}$$

Выражая из вторых уравнений \vec{m}_1 и \vec{k}_1 , и подставляя их в первые, получим

$$\begin{cases} 2\vec{f} + \vec{c} - \vec{a} = \vec{f} + \vec{k}_1 - \vec{a} + \vec{m}_2 \\ 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{f} = \vec{a} + \vec{m}_1 - \vec{f} + \vec{k}_2 \end{cases}$$

Откуда,

$$\begin{cases} \vec{f} + \vec{c} = \vec{k}_1 + \vec{m}_2 \\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{m}_1 + \vec{k}_2 \end{cases}$$

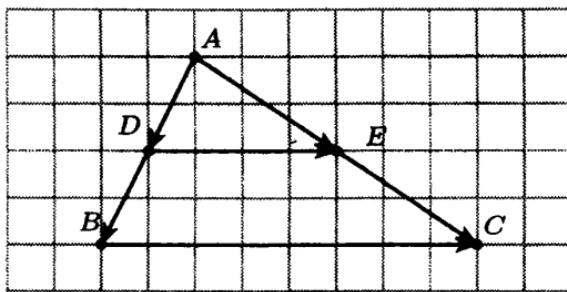
Так как $2(\vec{f} + \vec{c}) = 2(\vec{a} + \vec{b})$, то $\vec{k}_1 + \vec{m}_2 = \vec{m}_1 + \vec{k}_2$, или $\vec{k}_1 - \vec{k}_2 = \vec{m}_1 - \vec{m}_2$.

Так как $\vec{k}_1 \parallel \vec{k}_2$, $\vec{m}_1 \parallel \vec{m}_2$ и векторы \vec{k} и \vec{m} не коллинеарны, то $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ и $\vec{m}_1 = \vec{m}_2$.

Следовательно отрезки пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

792. Очевидно, что $\vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

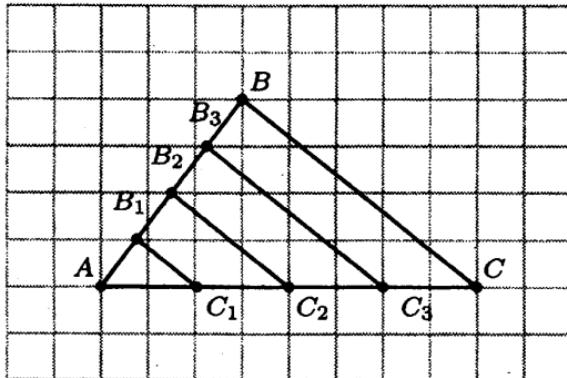
$\vec{DE} \parallel \vec{BC}$ и $|\vec{DE}| = \frac{1}{2}|\vec{BC}|$, $DE = \frac{1}{2}BC$, что и требовалось доказать.



793. Сумма оснований трапеции равна $48 \text{ см} - (13 + 15) \text{ см} = 20 \cdot \text{см}$, поэтому ее средняя линия равна полу-
сумме оснований, т.е. $20 \text{ см} : 2 = 10 \text{ см}$.

Ответ: 10 см.

794.



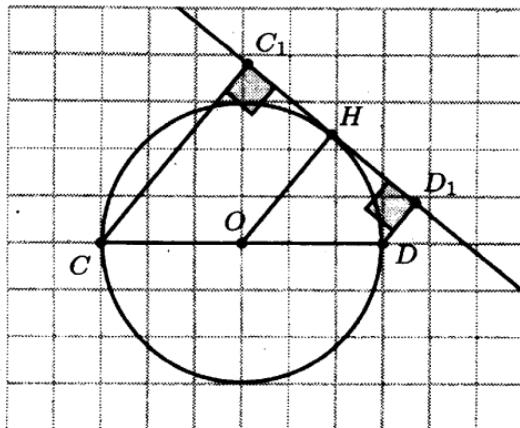
Так как $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3B$, и B_1, B_2, B_3 параллельны CB , то C_1B_1 — средняя линия $\triangle AC_2B_2$ и по условию $C_1B_1 = 3,4$, поэтому $C_2B_2 = 2 \cdot C_1B_1 = 2 \times 3,4 = 6,8$.

C_2B_2 — средняя линия $\triangle ACB$, поэтому $CB = 2 \times C_2B_2 = 2 \cdot 6,8 = 13,6$.

C_3B_3 — средняя линия трапеции BCB_2C_2 , значит $C_3B_3 = \frac{1}{2}(C_2B_2 + BC) = \frac{1}{2}(6,8 + 13,6) = 10,2$.

Ответ: 6,8 и 10,2.

795.



Четырехугольник CC_1D_1D — трапеция с основаниями CC_1 и DD_1 ($CC_1 \parallel DD_1$). $OH \parallel CC_1$ и $OH \parallel DD_1$ и $CO = OD$, следовательно $C_1H = D_1H$ и OH — средняя линия этой трапеции.

Значит $OH = \frac{1}{2}(CC_1 + DD_1) = \frac{1}{2}(12 + 18) = 15$, а диаметр окружности $2 \cdot 15 = 30$ см.

Ответ: 30 см.

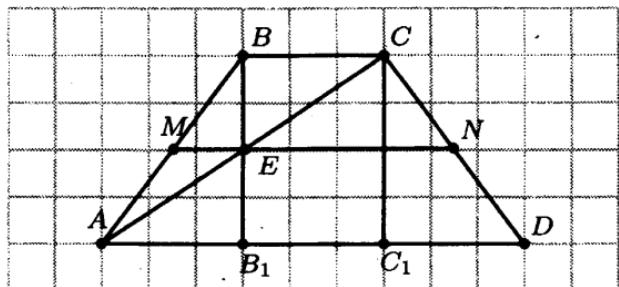
796. Так как $CC_1 \perp C_1B_1$ и $DD_1 \perp D_1B_1$, то $CC_1 \parallel DD_1$, следовательно AA_1D_1D — трапеция. OH — отрезок, соединяющий центр O окружности с точкой H касания. $OH \parallel CC_1 \parallel DD_1$, следовательно OH — средняя линия трапеции (по теореме Фалеса $C_1H = D_1H$) и OH — радиус окружности, т.е. $OH = \frac{1}{2}CD = 27 : 2 = 13,5$ см.

Из $OH = \frac{1}{2}(CC_1 + DD_1) \rightarrow DD_1 = 2 \cdot OH - CC_1 = 27 - 11 = 16$ см.

Ответ. 16 см.

797. Средняя линия трапеции параллельна основаниям, следовательно она проходит и через средины сторон треугольников образованных из диагоналей трапеции (по теореме Фалеса).

798.



Так как MN — средняя линия трапеции $ABCD$, то по теореме Фалеса точка пересечения E диагонали AC и средней линии MN делит ее пополам. А следовательно $ME = \frac{1}{2}BC$ и $EN = \frac{1}{2}AD$ (так как MN — совпадает со средней линией треугольников ABC и ACD). Отсюда находим $BC = 2ME = 2 \cdot 11 = 22$ см и $AD = 2EN = 2 \times 35 = 70$ см.

Проведем отрезки BB_1 и CC_1 — высоты трапеции. Тогда из треугольника ABB_1 получаем $AB = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(70 - 22) = 24$ см (так как трапеция равносторонняя).

Отсюда следует, что противолежащий $AC : AB_1 = 2$, а значит $\angle ABB_1 = 30^\circ$. Следовательно, $\angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$, а $\angle BAD = \angle CDA = 120^\circ$.

Ответ: $60^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 60^\circ$.

799. $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(AB_1 + B_1C_1 + C_1D + BC)$. Так как трапеция равнобедренная, то $AB_1 = C_1D$, $BC = B_1C_1$, и следовательно $MN = \frac{1}{2}(2 \cdot C_1D + 2 \cdot B_1C_1) = C_1D + B_1C_1 = B_1D = 7$ см.

Ответ: $MN = 7$ см.

Дополнительные задачи

800. Пусть $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$. Зададим, что $\vec{m} = k \cdot \vec{i}$ и $\vec{n} = p \cdot \vec{i}$, где k и p — некоторые числа, а \vec{i} — вектор сонаправленный с векторами \vec{n} и \vec{m} .

Тогда $\vec{m} + \vec{n} = (k+p)\vec{i}$ и следовательно $|\vec{m} + \vec{n}| = |(k+p)\vec{i}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$.

Пусть теперь $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$. Зададим, что $\vec{m} = k \cdot \vec{i}$ и $\vec{n} = -p \cdot \vec{i}$, где k и p — некоторые числа, а \vec{i} — вектор коллинеарный векторам \vec{n} и \vec{m} .

Тогда $\vec{m} + \vec{n} = (k-p)\vec{i}$ и следовательно $|\vec{m} - \vec{n}| = |(k-p)\vec{i}| = |k\vec{i}| - |p\vec{i}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$.

801. Если $\vec{x} = \vec{0}$ или $\vec{y} = \vec{0}$, то неравенство очевидно.

Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$, тогда $|\vec{x}| = AB$, $|\vec{y}| = BC$, $|\vec{x} + \vec{y}| = AC$.

Пусть \vec{x} и \vec{y} — не коллинеарны, тогда векторы \vec{x} , \vec{y} и $\vec{x} + \vec{y}$ можно представить как стороны некоторого треугольника.

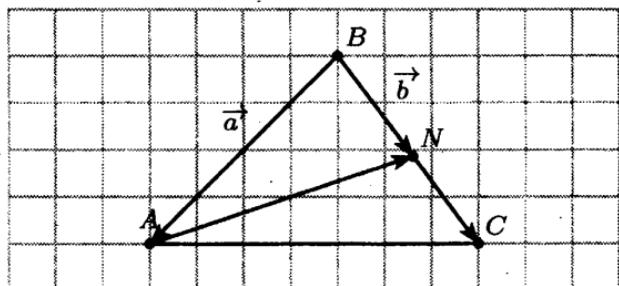
Из неравенства треугольника следует, что $AC < AB + BC \rightarrow |\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$ и $AB < AC + BC \rightarrow AC > AB - BC \rightarrow |\vec{x} + \vec{y}| > |\vec{x}| - |\vec{y}|$, следовательно $|\vec{x}| - |\vec{y}| < |\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

Пусть теперь $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$ тогда $|\vec{x} + \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (см. задачу 800).

И при $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$ получаем $|\vec{x} + \vec{y}| = |\vec{x}| - |\vec{y}|$ (см. задачу 800).

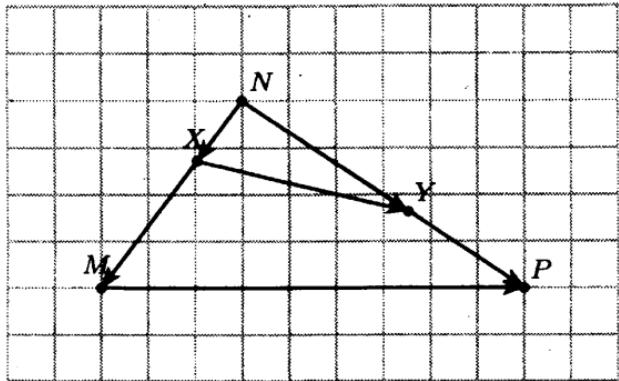
Значит в общем случае $|\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

802.



Очевидно, что $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}$.

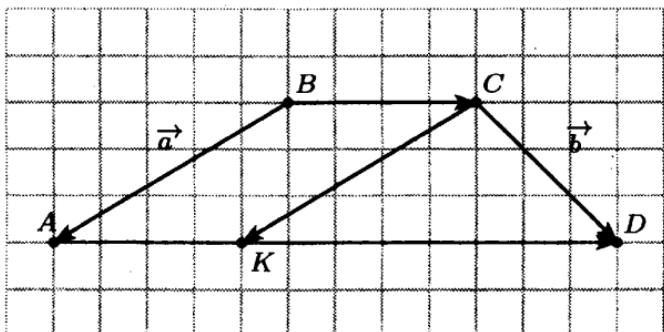
Ответ: $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}$.

803.

Из условий задачи следует, что $\overrightarrow{NX} = \frac{2}{5}\overrightarrow{NM} = \frac{2}{5}\vec{a}$,
 $\overrightarrow{NY} = \frac{3}{5}\overrightarrow{NP} = \frac{3}{5}\vec{b}$.

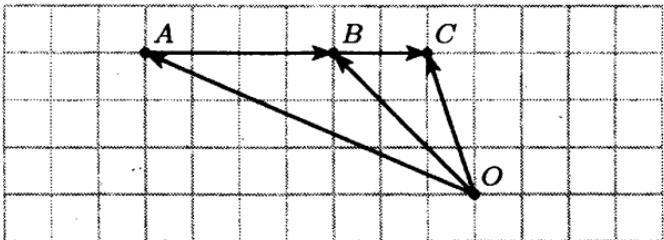
Следовательно $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{NY} - \overrightarrow{NX} = \frac{3}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a}$, и $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NP} - \overrightarrow{NM} = \vec{b} - \vec{a}$.

Ответ: $\overrightarrow{XY} = \frac{3}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a}$, $\overrightarrow{MP} = \vec{b} - \vec{a}$.

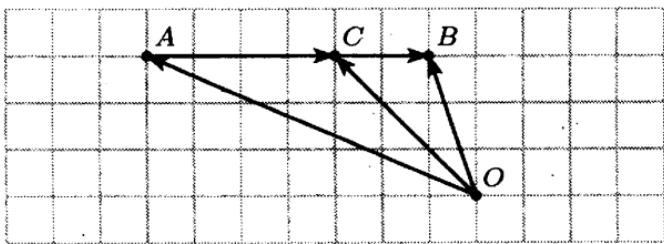
804.

По условию $AK = \frac{1}{3}AD = BC$, следовательно $ABCK$ – параллелограмм ($BC \parallel AK$, 1° п. 44). Следовательно $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CK} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$.

Ответ: $\overrightarrow{CK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{KD} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$.

805.

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$, следовательно $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$.

806.

По условию $AC : CB = \frac{m}{n} \rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$.

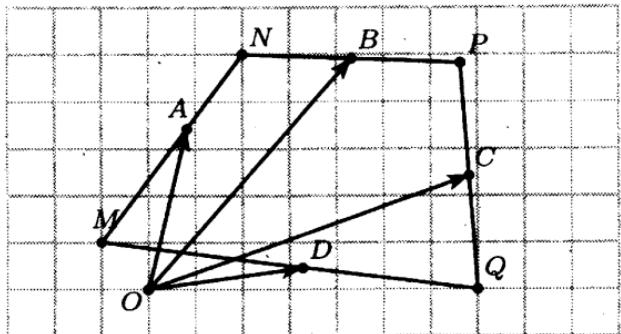
Но так как $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, то $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \frac{m}{n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$.

Из чего следует $\overrightarrow{OC} + \frac{m}{n}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{n}\overrightarrow{OB} \rightarrow \frac{m+n}{n}\overrightarrow{OC} = \frac{n\cdot\overrightarrow{OA} + m\cdot\overrightarrow{OB}}{n} \rightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$

807. Из задачи 786 следует, что $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$,

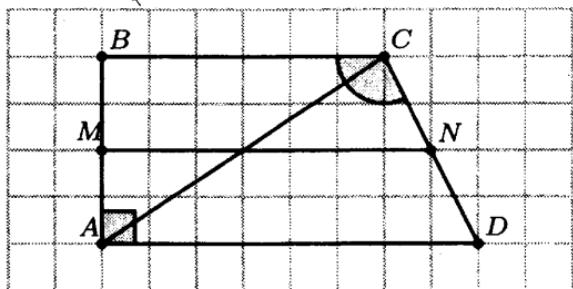
$\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Значит, $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

808.

Согласно задаче 786 $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$, поэтому $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$.

Аналогично, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$, следовательно, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

809.

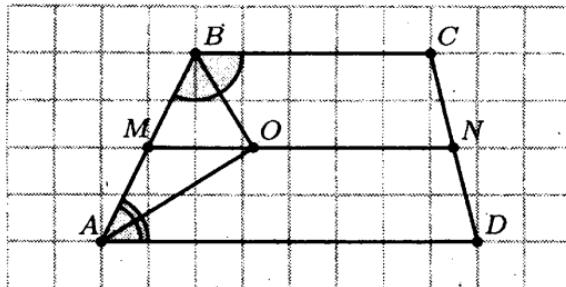
$\angle A = \angle B = 90^\circ$, $\angle = 120^\circ$, следовательно $\angle D = 60^\circ$ так как $AC = CD$ (по условию), то треугольник ACD равнобедренный, следовательно, $\angle CAD = 60^\circ$, $\angle ACD = 60^\circ$, поэтому $AC = CD = AD = a$, т.е. треугольник ACD – равносторонний.

Так как $\angle BAC + \angle BCA = 90^\circ$, то $\angle BAC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, поэтому $BC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$.

$$\text{Значит, } MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}a\right) = \frac{3}{4}a.$$

Ответ: $MN = \frac{3}{4}a$.

810.



Точка O равноудалена от прямых BC и AB , а также от прямых AB и AD (см. первую теорему п. 74), поэтому она равноудалена от параллельных прямых AD и BC . Следовательно она лежит на прямой равноудаленной от оснований трапеции, т. е. на средней линии MN .

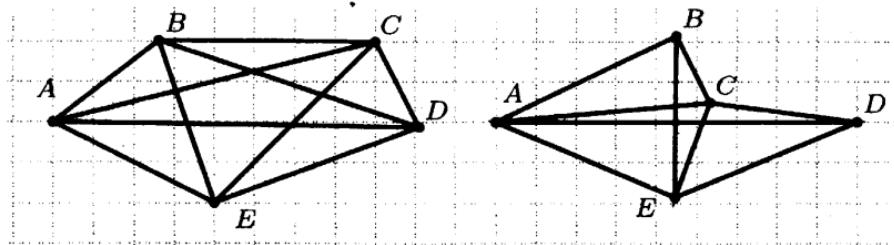
Рабочая тетрадь

Глава V. Четырехугольники

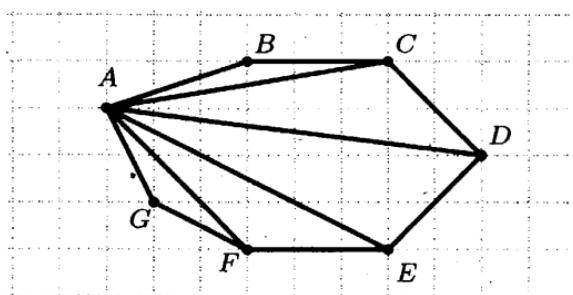
§ 1. Многоугольники

1. Ответ. а) Фигуры, изображенные на рисунках а, б, в, д, е, ж; б) Многоугольники, изображенные на рисунках б, ж.

2. Ответ. а) AC, AD, BE, BD, CE ; б) AC, AD, BE, CE .



3.



Ответ. а) 5; б) 900° .

4. а) одиннадцатиугольника $S_{11} = 180^\circ \cdot 9 = 1620^\circ$
б) двадцатидвухугольника $S_{22} = 180^\circ \cdot 20 = 3600^\circ$
Ответ. а) 1620° ; б) 3600° .

5. б) $150^\circ \cdot n = (n - 2) \cdot 180^\circ \rightarrow 150^\circ \cdot n = 180 \cdot n - 360^\circ \rightarrow 30 \cdot n = 360 \rightarrow n = 12$

Ответ. б) $n = 12$.

6. По условию $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 22$ см, $BC = AB - 2$ см, $CD = DA = AB + 2$ см.

Итак, 22 см $= AB + (AB - 2) + 2(AB + 2) = = 4AB + 2$, откуда $AB = 5$ см, а $BC = 3$ см.

Ответ. $BC = 3$ см.

7. Так как по условию $\angle A$ и $\angle B$, то $\angle A + \angle B = 35^\circ \cdot 2 = = 70^\circ$. Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360° , поэтому $\angle C + \angle D = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

По условию $\angle C = \angle D$, значит, каждый из них равен 145°

Ответ. $\angle B = 35^\circ$, $\angle C = 145^\circ$, $\angle D = 145^\circ$

§ 2. Параллелограмм и трапеция

8. а) По свойству параллелограмма $AB = CD$, $BC = = AD$ и $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. По условию $P_{ABCD} = = 64$ см, следовательно, $2(AB + BC) = 64$ см, откуда $AB + BC = 32$ см, но BC на 8 см больше AB , поэтому $AB + AB + 8 = 32$ см, откуда $AB = 12$ см, $BC = AB + + 8$ см $= 20$ см.

б) По условию $\angle A = 38^\circ$, а так как $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то $\angle B = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$.

Ответ. а) $AB = CD = 12$ см, $BC = AD = 20$ см;

б) $\angle C = 38^\circ$, $\angle B = \angle D = 142^\circ$.

9. Диагонали параллелограмма точкой пересечения **делятся пополам**, поэтому $AO = OC = 12$ см. Треугольник AOE — прямоугольный с гипотенузой AO и острым углом A , равным 30° . Поэтому катет OE , лежащий против угла

в 30° , равен $\frac{1}{2}AO$, т. е. $OE = AO : 2$ см $= 6$ см.

Ответ. 6 см.

10. 1) $\angle 1 = \angle 2$, так как луч AP — **биссектриса** $\angle A$, $\angle 2 = \angle 3$, так как эти углы **накрест лежащие** при пересечении параллельных прямых AD и BC и секущей AP . Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

2) Треугольник ABP – **равнобедренный**, так как его углы 1 и 3 равны, поэтому $AB = BP$.

3) По условию $BP = PC$, следовательно, $BC = 2BP = 2AB$.

Итак, $P_{ABCD} = 2(AB + 2BP) = 6AB$.

Так как периметр параллелограмма равен 54 см, то $6AB = 54$ см, откуда $AB = 9$ см и $BC = 18$ см.

Ответ. $AB = DC = 9$ см.

$BC = AD = 18$ см.

[11.] 1) Так как $\angle 1 = \angle 30$, а эти углы – **накрест лежащие** при пересечении прямых AD и BC секущей AC , то прямые AD и BC параллельны.

2) Так как $\angle 2 = \angle 4$, то прямые AB и CD также параллельны.

Итак, четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм, так как его стороны **параллельны**.

[12.] б) В четырёхугольнике $ABCD$: $\angle 1 = \angle 2 = 70^\circ$, $\angle 3 = 105^\circ$ по условию, тогда $\angle 4 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$, т. е. $\angle 2 \neq \angle 4$. Следовательно четырёхугольник $ABCD$ не является параллелограммом.

Ответ. б) нет.

[13.] Так как по условию $ABCD$ – параллелограмм, то его противоположные стороны BC и AD – **параллельны и равны**, т.е. $BC \parallel AD$, $BC = AD$. Так как $MC = BC - BM$, $AN = AD - ND$, и так как $BM = DN$, то $MC = AN$.

Таким образом в четырёхугольнике $AMCN$ две противоположные стороны **параллельны и равны** ($AN \parallel MC$, $AN = MC$), следовательно, $AMNC$ – параллелограмм.

[14.] 1) Так как $EFPK$ – параллелограмм, то по свойствам параллелограмма $\angle F = \angle P$, $\angle E = \angle K$ и $EF = PK$, $EP = FK$. По условию $FM = PT$, $EL = KN$ и $EM = EF - FM$, $KT = PK - PT$, поэтому $EM = KT$, $PL = FN$.

2) $\triangle MEL = \triangle NTK$ по первому признаку равенства треугольников. Из равенства этих треугольников следует равенство сторон $ML = NT$.

3) Аналогично $\triangle MFN = \triangle LPT$, откуда $MN = LT$.

Итак, в четырёхугольнике $MLTN$ противоположные стороны ML и NT , MN и TL попарно **равны**, следовательно, $MLTN$ — параллелограмм.

15. По свойству параллелограмма диагонали MP и NQ точкой пересечения O **делятся пополам**, т.е. $MO = PO$ и $NO = QO$, поэтому $OA = OC = \frac{1}{3}MO$, аналогично $OB = OD = \frac{2}{3}NO$.

Итак, в четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD точкой пересечения O **делятся пополам**, поэтому $ABCD$ — **параллелограмм**.

16. Углы M и N , P и Q — **односторонние** при пересечении параллельных прямых MQ и NP секущими MN и PQ , поэтому $\angle M + \angle N = 180^\circ$, $\angle P + \angle Q = 180^\circ$. Так как по условию $\angle N = 109^\circ$, $\angle Q = 37^\circ$, п. $\angle M = 180^\circ - \angle N = 71^\circ$, $\angle P = 180^\circ - \angle Q = 143^\circ$.

Ответ. $\angle M = 71^\circ$, $\angle P = 143^\circ$.

17. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$, где AD и BC — основания, $\angle B = 115^\circ$. Так как углы при каждом основании равнобедренной трапеции **равны**, то $\angle C = \angle B = 115^\circ$, а так как сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° , то $\angle A = \angle D = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.

Ответ. $\angle A = \angle D = 65^\circ$, $\angle C = 115^\circ$.

18. Проведем прямую CE , параллельную стороне AB . Полученный четырёхугольник $ABCD$ — **параллелограмм**, так как его стороны попарно **равны**. Поэтому $AE = BC = 10$ см, $CE = AB = 12$ см, и так как $CD = AB$, то $CE = CD = 10$ см.

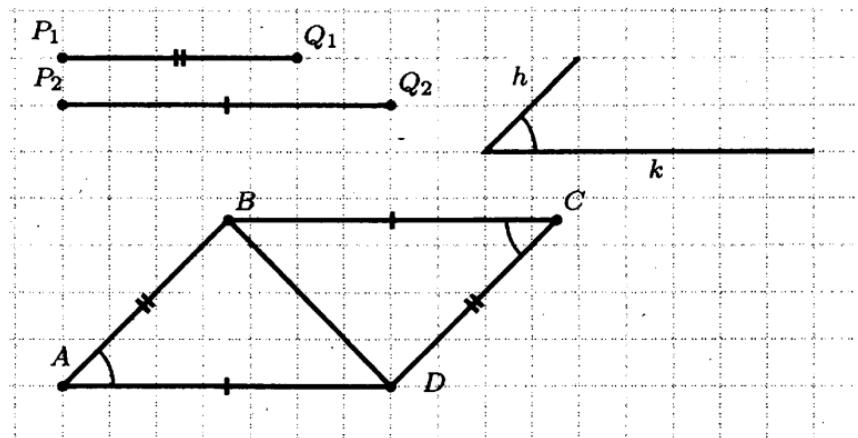
Треугольник CDE – равнобедренный ($CE = CD$) с углом при основании в 60° , следовательно, этот треугольник – равносторонний и $ED = CD = 12$ см. Значит, $AD = AE + ED = 10$ см + 12 см = 22 см.

Ответ. $AD = 22$ см.

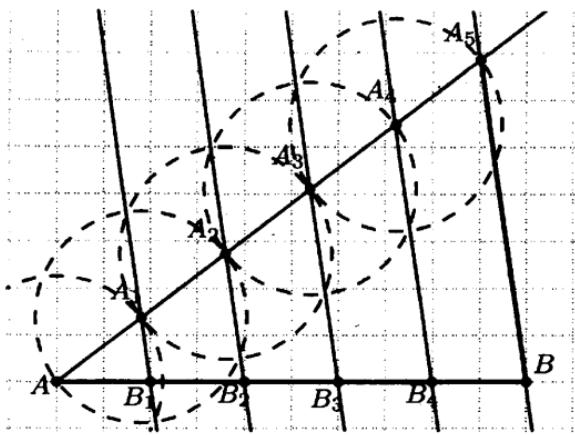
19. 1) На рисунке б построим треугольник ABD по углу AK и двум сторонам так, что $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$ и $\angle A = \angle hk$.

Построим треугольник BCD по трем сторонам (сторона BD построена, $BC = AD = P_2Q_2$, $CD = AB = P_1Q_1$) так, чтобы точки A и C лежали по разные стороны от прямой BD .

Четырёхугольник $ABCD$ – искомый. Действительно, так как по построению $AB = P_1Q_1$ и $BC = AD$, то $ABCD$ – параллелограмм. А так как $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$ и $\angle A = \angle hk$ по построению, то параллелограмм $ABCD$ отвечает всем условиям задачи.



20. На рисунке проведем луч AX не лежащий на прямой AB , и на нем от точки A отложим пять **равных** друг другу отрезков $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$. Проведем прямую A_5B и построим прямые, проходящие через точки A_1, A_2, A_3, A_4 и параллельные прямой A_5B . Эти прямые пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, B_3, B_4 , которые по теореме Фалеса (задача 385) делят отрезок AB на **5 равных частей**.



§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат

21. 1) Так как $ABCD$ — прямоугольник, то $AD \parallel BC$ и поэтому $\angle 2 = \angle 3$. Но $\angle 2 = \angle 1$ по условию, следовательно, $\angle 1 = \angle 3$ и $\triangle ABE$ — **равнобедренный** с основанием BE . Значит, $AB = AE = 17$ см.

2) $AD = AE + ED = 17$ см + 21 см = 38 см; $P_{ABCD} = 2(AD + AB) = 2(38 \text{ см} + 17 \text{ см}) = 2 \cdot 55 \text{ см} = 110 \text{ см}$.

Ответ. $P_{ABCD} = 110$ см.

22. 1) В прямоугольном треугольнике ABD $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, поэтому $\angle D = 30^\circ$, и по свойству катета, лежащего против угла 30° , имеем: $BD = 2 \cdot AB = 24$ см.

2) Так как в прямоугольнике диагонали **равны**, то $AC = BD = 24$ см.

Ответ. $AC = 24$ см.

23. 1) Так как $ABCD$ — прямоугольник, то его диагонали **равны** и точкой пересечения O делятся пополам, откуда следует, что $\triangle AOB$ — **равнобедренный** и $\angle BAO = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$.

2) $\angle DAO = \angle A - \angle BAO = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

Ответ. $\angle DAO = 20^\circ$.

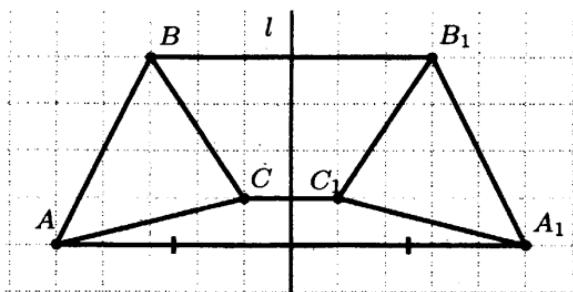
24. 1) Так как диагонали ромба делят угол **пополам**, пj $\angle ABD = \angle DBC = 60^\circ$.

2) В треугольнике ABD сторона $AB = AD$ (так как стороны ромба **равны**) и $\angle ABD = 60^\circ$, следовательно, этот треугольник **равносторонний** и $AB = BD = AD = 15$ см.

3) $P_{ABCD} = 4 \cdot 15 \text{ см} = 60 \text{ см}.$

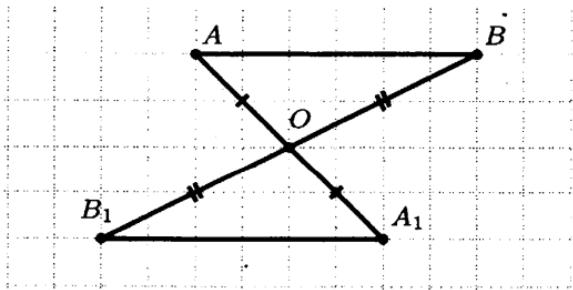
Ответ. $P_{ABCD} = 60$ см.

25. Точка A_1 , изображенная на рисунке, симметрична точке A относительно прямой l , так как прямая l — серединный перпендикуляр к отрезку AA_1 . Через точки B и C проведем прямые **перпендикулярные** к прямой l , и отметим на них точки B_1 и C_1 так, чтобы прямая l была **срединным перпендикуляром** к отрезкам BB_1 и CC_1 .



26. Проведем прямую AO и отметим на ней точку A_1 так, чтобы точка O была **серединой** отрезка AA_1 . Точка A_1 **симметрична** точке A относительно точки O .

Аналогичным образом построим точку B_1 , **симметричную** точке B относительно **точки** O . Отрезок A_1B_1 — искомый.



Глава VI. Площадь

§ 1. Площадь многоугольника

[27.] 1) $\triangle BEF = \triangle CDF$ по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AB = CD = BE$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, так как эти углы **накрест лежащие** при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими ED и BC), поэтому $S_{BEF} = S_{FCD}$.

2) $S_{ABCD} = S_{ABFD} + S_{FCD}$, $S_{ADE} = S_{ABFD} + S_{BEF}$, поэтому $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

[28.] а) $S = (3,2 \text{ см})^2 = 10,24 \text{ см}^2$;

б) $S = (2\sqrt{3} \text{ дм})^2 = 12 \text{ дм}^2$;

Ответ. а) **10,24 см²**;

б) **12 дм²**.

[29.] Так как площадь S квадрата со стороной a равна a^2 , то $a = \sqrt{S}$.

а) $a = \sqrt{64} \text{ см}^2 = 8 \text{ см}$;

б) $a = \sqrt{1,69 \text{ дм}^2} = 1,3 \text{ дм}$.

Ответ. а) **8 см**; б) **1,3 дм**.

[30.] $S = 4,2 \text{ см} \cdot 3,5 \text{ см} = 14,7 \text{ см}^2$.

Ответ. **14,7 см²**.

[31.] $192 \text{ см}^2 = 12 \text{ см} \cdot b$, откуда $b = 192 \text{ см}^2 : 12 \text{ см} = 16 \text{ см}$.

Ответ. **$b = 16 \text{ см}$** .

[32.] 1) $\triangle ADM = \triangle ECM$ по **3 признаку равенства треугольников** ($DM = CM$ по условию, $\angle D = \angle C = 90^\circ$, $\angle AMD = \angle CME$, так как эти углы **вертикальные**), поэтому $S_{ADM} = S_{ECM}$.

2) $S_{ABE} = S_{ABC} + S_{CME} = S_{ABC} + S_{ECM} = S_{ABCD} = S_{ABE}$.

Ответ. $S_{ABE} = S_{ABCD}$.

§ 2. Площадь Параллелограмм, треугольника, трапеции

33. а) $S = 16 \text{ см} \cdot 9 \text{ см} = 144 \text{ см}^2$;

б) $48 \text{ см}^2 = a \cdot 4,8 \text{ см}$, откуда $a = 48 \text{ см}^2 : 4,2 \text{ см} = 10 \text{ см}$;

в) $14 \text{ дм}^2 = 3,5 \text{ дм} \cdot h$, откуда $h = 14 \text{ дм}^2 : 3,5 \text{ дм} = 4 \text{ дм}$.

Ответ. а) $S = 144 \text{ см}^2$; б) $a = 10 \text{ см}$; в) $h = 4 \text{ дм}$.

34. 1) $\angle A = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, так как сумма углов, прилежащих к стороне параллелограмма, равна 180° .

2) $\triangle ABE$ — прямоугольный с острым углом A , равным 30° , поэтому $BE = \frac{1}{2}AB = 6,5 \text{ см}$.

3) $S_{ABCD} = 16 \text{ см} \cdot 6,5 \text{ см} = 104 \text{ см}^2$.

Ответ. $S_{ABCD} = 104 \text{ см}^2$.

35. 1) $\triangle ABE$ — прямоугольный и $\angle A = 45^\circ$, следовательно, $\angle B = 45^\circ$ и $\triangle ABE$ — равнобедренный. Поэтому $AE = BE = 3,2 \text{ см}$.

2) Так как по условию $AE = ED$, то $AD = 2AE = 6,4 \text{ см}$.

3) $S_{ABCD} = 6,4 \text{ см} \cdot 3,2 \text{ см} = 20,48 \text{ см}^2$.

Ответ. $S_{ABCD} = 20,48 \text{ см}^2$.

36. а) $S = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}5,4 \text{ см} \cdot 6 \text{ см} = 16,2 \text{ см}^2$;

б) $h = 2S : a = 2 \cdot 42 : 12 = 7 \text{ см}$;

в) $a = 2S : h = 2 \cdot 4,32 \text{ дм}^2 : 2,4 \text{ дм} = 3,6 \text{ дм}$.

Ответ. а) $S = 16,2 \text{ см}^2$; б) $h = 7 \text{ см}^2$; в) $a = 3,6 \text{ дм}$.

37. 1) Пусть $AB = 6 \text{ см}$, $AD = 10 \text{ см}$, $\angle A = 30^\circ$. Так как диагональ параллелограмма делит его на два **равных треугольника**, то $\triangle ABC = \triangle ADC$, и поэтому $S_{ABC} = S_{ADC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

2) $S_{ABCD} = AD \cdot BE$, где BE — высота параллелограмма. Остается найти BE . $\triangle ABE$ — прямоугольные и $\angle A = 30^\circ$, поэтому катет BE , лежащий против гипotenузы AB , равен ее половине, т.е. $BE = \frac{1}{2}AB = 3 \text{ см}$,

$S_{ABCD} = 10 \text{ см} \cdot 3 \text{ см} = 30 \text{ см}^2$, а $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 30 \text{ см}^2 = = 15 \text{ см}^2$.

Ответ. $S_{ABC} = 15 \text{ см}^2$.

38. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC , изображенном на рисунке, $BC = \frac{3}{4}AC$.

Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, то $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \times BC = \frac{1}{2}AC \cdot \frac{3}{4}AC = \frac{3}{8}AC^2$.

По условию $S_{ABC} = 96 \text{ см}^2$, поэтому $96 \text{ см}^2 = \frac{3}{8}AC^2$, откуда $AC^2 = 256 \text{ см}^2$ и $AC = 16 \text{ см}$, а $BC = 12 \text{ см}$.

Ответ. 16 см и 12 см.

39. Треугольники ABC и CDE имеют по равному углу ($\angle ACB = \angle DCE$, так как эти углы вертикальные), поэтому по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, получаем $S_{CDE} : S_{ABC} = = 10 \text{ см} \cdot 4 \text{ см} : 8 \text{ см} \cdot 12 \text{ см} = 40 : 96$, откуда $S_{CDE} = = \frac{49}{96}S_{ABC}$. Так как по условию $S_{ABC} = 48 \text{ см}^2$, то $S_{CDE} = = \frac{40}{96} \cdot 48 \text{ см}^2 = 20 \text{ см}^2$.

Ответ. $S_{CDE} = 20 \text{ см}^2$.

40. Треугольники ABM и ABC имеют общую высоту BD , поэтому их площади относятся как основания AM и AC . Так как по условию $AM : MC = 2 : 3$, то $AM : AC = 2 : 5$ и $S_{ABM} : S_{ABC} = 2 : 5$, откуда $S_{ABM} = = \frac{2}{5}S_{ABC} = \frac{2}{5} \cdot 180 \text{ см}^2 = 72 \text{ см}^2$.

Ответ. 72 см².

41. По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, $S_{ABC} : S_{MNC} = AC \cdot BC : NC \cdot MC$.

Так как по условию $CM = \frac{2}{3}BC$, $CN = \frac{1}{2}AC$ и $S_{MNC} = 18 \text{ см}^2$, то $S_{ABC} = 18 \text{ см}^2 \cdot \frac{AC \cdot BC}{\frac{2}{3}BC \cdot \frac{1}{2}AC} = 18 \text{ см}^2 \cdot \frac{1}{2/6} = 54 \text{ см}^2$.

Ответ. $S_{ABC} = 54 \text{ см}^2$.

[42.] 1) $\triangle ABH$ — прямоугольный, $\angle H = 90^\circ$ по построению, $\angle A = 30^\circ$ по условию, поэтому $BH = \frac{1}{2}AB = 6 \text{ см}$.

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BH = \frac{(7 + 15) \cdot 6}{2} \text{ см}^2 = 66 \text{ см}^2$.

Ответ. 66 см^2 .

[43.] 1) $ABCD$ — квадрат, так как у прямоугольника $ABCF$ смежные стороны AB и BC равны, поэтому $AF = CF = 9 \text{ см}$.

2) $\triangle CFD$ — прямоугольный, $\angle F = 90^\circ$ по построению, $\angle D = 45^\circ$ по условию, поэтому $\angle DCF = 45^\circ$ и, следовательно, $\triangle CFD$ — равнобедренный и $DF = CF = 9 \text{ см}$.

3) $AD = AF + DF = 9 \text{ см} + 9 \text{ см} = 18 \text{ см}$ и $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CF = \frac{1}{2}(9 + 18) \cdot 9 = 121,5 \text{ см}^2$.

Ответ. $121,5 \text{ см}^2$.

[44.] 1) Так как трапеция $ABCD$ — равнобедренная, то $DP = AH = 2,8 \text{ см}$, поэтому $HP = HD - DP = 6,8 \text{ см} - 2,8 \text{ см} = 4 \text{ см}$; $AD = AH + HD = 2,8 \text{ см} + 6,8 \text{ см} = 9,6 \text{ см}$.

2) Четырёхугольник $HBCP$ — прямоугольник, поэтому $BC = HP = 4 \text{ см}$.

3) $\angle HBC = 90^\circ$, а так как $\angle ABC = 135^\circ$, то $\angle ABH = \angle ABC - \angle HBC = 45^\circ$. $\triangle ABH$ — прямоугольный ($\angle H = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$) и равнобедренный, поэтому $BH = AH = 2,8 \text{ см}$.

$$4) S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BH = \frac{1}{2}(4 + 9,6) \text{ см} \times \\ \times 2,8 \text{ см} = 19,04 \text{ см}^2.$$

Ответ. $19,04 \text{ см}^2$.

§ 3. Теорема Пифагора

45. а) $b^2 = c^2 - a^2$, откуда $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{144 - 64} =$
 $= \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$;

б) $c^2 = a^2 + b^2$, откуда $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{32 + 49} =$
 $= \sqrt{81} = 9$;

в) $a^2 = c^2 - b^2$, откуда $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{75 - 27} =$
 $= \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Ответ. а) $4\sqrt{5}$, б) 9, в) $4\sqrt{3}$.

46. 1) Так как $\triangle ABC$ – равнобедренный с основанием AC , то $AB = BC$ и высота BH является **медианой**, значит, $AH = \frac{1}{2}AC = 8 \text{ см}$.

2) Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора находим: $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} =$
 $= \sqrt{64 + 36} \text{ см} = 10 \text{ см}$.

Ответ. 10 см.

47. 1) Пусть a – второй катет прямоугольного треугольника, тогда по теореме Пифагора $a = \sqrt{c^2 - b^2} =$
 $= \sqrt{196 - 49} = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$.

2) Площадь S прямоугольного треугольника равна $\frac{1}{2}ab$, а с другой стороны, $S = \frac{1}{2}ch$, поэтому $ab = ch$, откуда

$$h = a \cdot b : c = 7\sqrt{3} \cdot 7 : 14 = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

48. 1) Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то $BD \perp AC$ и $\triangle ABO$ – **прямоугольный**, причем

гипотенуза $AB = 13$ см по условию, а катет $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 10$ см = 5 см. По теореме Пифагора находим: $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2}$ см = 12 см, $AC = 2 \cdot AO = 2 \cdot 12$ см = 24 см.

2) Площадь ромба можно вычислить по формуле $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$, откуда $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 24$ см $\cdot 10$ см = 120 см².

Ответ. 120 см².

49. Так как $25^2 = 20^2 + 15^2$ ($625 = 400 + 225$), то по теореме, обратной теореме Пифагора, данный треугольник — **прямоугольный**. Гипотенуза является наибольшей стороной этого треугольника, а высота h , проведенная к гипотенузе, **наименьшая**.

Так как $h \cdot 25 = 15 \cdot 20$, то $h = 15 \cdot 20 : 25 = 12$.

Ответ. 12.

50. 1) Так как $15^2 = 12^2 + 9^2$ и $25^2 = 20^2 + 15^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольники ABC и DAC — **прямоугольные**.

2) $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CAD} = \frac{1}{2}BC \cdot AB + \frac{1}{2}AC \cdot AD = 204$ (см²).

Ответ. 204 см².

Глава VII. Подобные треугольники

§ 1. Определение подобных треугольников

51. 2) Так как $\frac{CD}{MN} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, $\frac{EF}{KL} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, то $\frac{CD}{MN} = \frac{EF}{KL}$, т.е. отрезки CD и EF пропорциональны отрезкам MN и KL .

3) Так как $\frac{AB}{CD} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, $\frac{KL}{PQ} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$, то $\frac{AB}{CD} = \frac{KL}{PQ}$, т.е. отрезки AB и KL пропорциональны отрезкам CD и PQ .

Ответ. Отрезки AB и MN пропорциональны отрезкам EF и PQ . Отрезки CD и EF пропорциональны отрезкам MN и KL . Отрезки AB и KL пропорциональны отрезкам CD и PQ .

52. 1) $\angle A = \angle D = 98^\circ$ по условию. В треугольнике ABC имеем: $\angle C = 180^\circ - (98^\circ + 44^\circ) = 38^\circ$, поэтому $\angle C = \angle F = 38^\circ$. В треугольнике DEF имеем: $\angle E = 180^\circ - (98^\circ + 38^\circ) = 44^\circ$, поэтому $\angle B = \angle E = 44^\circ$.

Итак углы треугольников ABC и DEF соответственно равны.

2) Рассмотрим отношения сходственных сторон треугольников ABC и DEF : $\frac{AB}{DE} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1}$, $\frac{AC}{DF} = \frac{21}{7} = \frac{3}{1}$, $\frac{BC}{EF} = \frac{30}{10} = \frac{3}{1}$, поэтому $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, т.е. стороны треугольника ABC пропорциональны сторонам $\triangle DEF$.

Итак, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ по теореме подобия.

Ответ. Треугольники ABC и DEF подобны.

53. В подобных треугольниках ABC и EDF стороны BC и DF являются сходственными по условию, поэтому

коэффициент k подобия этих треугольников равен $\frac{BC}{DF}$, т.е. $k = 15 : 5 = 3$.

Следовательно, $AB = k \cdot ED = 3 \cdot 3$ см = 9 см, $AC = f \cdot EF = 3 \cdot 7$ см = 21 см.

Ответ. $AB = 9$ см, $AC = 21$ см.

54. Пусть k — коэффициент подобия треугольников, тогда по теореме об отношении площадей подобных треугольников получим: $k^2 = 315$ дм² : 35 дм² = 9, откуда $k = 3$. Искомая сторона a второго треугольника в 3 раза больше сходственной ей стороне первого треугольника, т.е. $a = 3 \cdot 14$ дм = 42 дм.

Ответ. 42 дм.

§ 2. Признаки подобия треугольников

55. 1) $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle A = \angle D$, так как эти углы — односторонние при пересечении параллельных прямых AC и DE секущей AB).

2) Так как коэффициент k подобия треугольников ABC и DBE равен отношению сходственных сторон, то $k = AB : BD$.

$DB = AB - AD = 21$ см - 7 см = 14 см, и поэтому $k = 21$ см : 14 см = $\frac{3}{2}$.

Ответ. $\frac{3}{2}$.

56. $\triangle CPQ \sim \triangle CBA$ по двум углам ($\angle C$ — общий, $\angle PQC = \angle A$ по условию). Стороны CP и CB , CQ и AC — сходственные стороны этих подобных треугольников, поэтому коэффициент k подобия равен $CP : CB = 6$ см : 18 см = $\frac{1}{3}$ и $CQ : AC = \frac{1}{3}$, откуда $AC = 3CQ = 12$ см.

Ответ. 12 см.

57. 1) $\triangle ABF \sim \triangle CDF$ по двум углам ($\angle B = \angle D$ по условию, $\angle AFB = \angle DFC$, так как эти углы вертикальные).

2) AF и FC — сходственные стороны подобных треугольников ABF и CDF , поэтому коэффициент k подобия равен $AF : CF = \frac{3}{2}$.

3) Так как BF и DF тоже являются сходственными сторонами, то $BF : DF = \frac{3}{2}$, откуда $DF = \frac{2}{3}BF = \frac{2}{3} \cdot 15 \text{ см} = 10 \text{ см}$.

Ответ. 10 см.

58. 1) $\triangle AOD \sim \triangle COB$ по второму признаку ($\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$ так как эти углы — соответственные при пересечении параллельных прямых BC и AD секущими AC и BD).

2) OD и OB — сходственные стороны подобных треугольников AOD и COB , поэтому $k = OD : OB = 6,4 \text{ см} : 3,2 \text{ см} = 2$.

3) AD и BC также сходственные стороны этих треугольников, поэтому $AD : BC = k$, откуда $AD = k \cdot BC = 2 \cdot 4,8 \text{ см} = 9,6 \text{ см}$.

Ответ. 9,6 см.

59. $\angle C$ — общий угол треугольников ABC и MNC . Рассмотрим отношения сторон, заключающих этот угол: $AC : CN = 12 \text{ см} : 6 \text{ см} = 2$, $BC : CM = 18 \text{ см} : 9 \text{ см} = 2$. Эти отношения равны, поэтому стороны AC и BC треугольника ABC пропорциональны сторонам CN и CM треугольника MNC . Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle MNC$ по второму признаку подобия треугольников.

60. Так как $MN : CD = 7,5 \text{ см} : 30 \text{ см} = \frac{1}{4}$, $MP : CE = 4,5 \text{ см} : 18 \text{ см} = \frac{1}{4}$ и $NP : DE = 6 \text{ см} : 24 \text{ см} = \frac{1}{4}$, то стороны MN , MP и NP треугольника MNP пропорциональны сторонам CD , CE и DE треугольника

DBC. Следовательно, по **третьему признаку подобия треугольников** $\triangle MNP \sim \triangle CDE$.

§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

61. Докажем, что точка O — середина стороны BD треугольника ABD . По условию задачи $DK = \frac{1}{2}AD$ и $BM = \frac{1}{2}BC$. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, следовательно, $AD = BC$, поэтому и $KD = BM$.

Так как $AD \parallel BC$, то $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Следовательно, $\triangle OKD \sim \triangle OBM$. Отсюда получаем: $OD = BO$.

Итак, точки K и O — **середина** сторон AD и BD треугольника ABD , поэтому KO — его **средняя линия**, что и требовалось доказать.

62. а) Так как OT — **средняя линия** треугольника ABC , то $OT \parallel AB$, поэтому $\angle CTO = \angle CAB = \angle C$. Следовательно, треугольник COT — **равнобедренный**.

б) Так как OT — средняя линия треугольника ABC , то $OT = \frac{1}{2}AB$, $CO = \frac{1}{2}BC$ и $CT = \frac{1}{2}AC$. Следовательно,

$$P_{COT} = OT + CO + CT = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}P_{ABC} = 9 \text{ см.}$$

Ответ. 9 см.

63. а) Проведем диагональ AC четырёхугольника $ABCD$. В треугольнике ABC точки K и M — **середина** сторон AB и BC , поэтому отрезок KM — его **средняя линия**, и следовательно, $KM \parallel AC$ и $KM = \frac{1}{2}AC$.

Аналогично отрезок OT — **средняя линия** треугольника ADC , поэтому $OT \parallel AC$ и $OT = \frac{1}{2}AC$. Отсюда следует,

что $KM \parallel OT$ и $KM = OT$, а значит, четырёхугольник $KMOT$ являются параллелограммом.

б) По доказанному $KM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ см

и $OT = KM = 6$ см. Проведем диагональ BD . В треугольниках ABD и BCD отрезки KT и MO — средние

линии треугольников, следовательно, $KT = \frac{1}{2}BD = 8$ см

и $MO = \frac{1}{2}BD = 8$ см. Итак, $KT = MO = 8$ см и $KM = OT = 6$ см, следовательно, $P_{Kmot} = 2 \cdot KM + 2 \cdot KT = 28$ см.

Ответ. 28 см.

64. а) Так как точки P , T , O — середины сторон, то отрезки PT , TO и PO — средние линии треугольника ABC , следовательно, $PT \parallel BC$ и $TO \parallel AB$. Так как противоположные стороны четырехугольника $BPTO$ попарно параллельны, то этот четырёхугольник является параллелограммом, поэтому $\angle PTO = \angle ABC = 70^\circ$.

б) Так как отрезки PT , TO , PO — средние линии треугольника ABC , то $PT = \frac{1}{2}BC$, $TO = \frac{1}{2}AB$ и $PO =$

$= \frac{1}{2}AC$, т.е. $\frac{PT}{BC} = \frac{TO}{AB} = \frac{PO}{AC} = \frac{1}{2}$, поэтому $\triangle OTP \sim$

$\sim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$S_{OTP} : S_{ABC} = 1 : 4$, откуда получаем: $S_{OTP} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5$ (см^2).

Ответ. а) $\angle PTO = 70^\circ$; б) $S_{OTP} = 5$ см^2 .

65. Предположим, что отрезок PM не является средней линией треугольника ABC , тогда точка M не будет серединой стороны BC . Пусть точка O — середина стороны BC , тогда отрезок PO есть средняя линия треугольника ABC , и поэтому $PO \parallel AC$.

Итак, через точку P проходят **2** прямые (**PM** и **PO**), параллельные прямой **AC** , что противоречит аксиоме о параллельных прямых.

Следовательно, исходное предположение неверно, т.е. отрезок PM является **средне линией** треугольника ABC , что и требовалось **доказать**.

[66.] Так как $AB = BC$, то треугольник ABC – **равнобедренный**, а потому биссектриса BH является также его высотой и **медианой**, следовательно, $BH \perp AC$ и $AH = HC = 4$ м.

Медианы треугольника пересекаются в **одной** точке и делятся ею в отношении **2 : 3**, считая от вершины, т.е. $BM = 2MH$ и $AM = 2MK$. В прямоугольном треугольнике ABH имеем: $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 25 - 16 = 9$ (м²), откуда $BH = 3$ м. Поэтому $MH = \frac{1}{3}BH = 1$ м, $BM = 2$ м.

В треугольнике AMH имеем: $AM^2 = MH^2 + AH^2 = 1 + 16 = 17$ (м²), откуда $AM = \sqrt{17}$ м. Следовательно, $AK = \frac{3}{2}\sqrt{17}$ м.

Ответ. $BM = 2$ м, $AK = \frac{3}{2}\sqrt{17}$ м.

[67.] Так как OH – **высота** прямоугольного треугольника OBM , проведенная из вершины **MOB** угла, то $OB = \sqrt{BM \cdot HB} = \sqrt{26 \cdot 18} = 6\sqrt{13}$ дм. Далее, $MH = BM - BH = 8$ дм, поэтому $OH = \sqrt{MH \cdot HB} = \sqrt{8 \cdot 18} = 12$ (дм).

Ответ. $OB = 6\sqrt{13}$ дм, $OH = 12$ дм.

[68.] Пусть $AC = 3x$, тогда $BC = 4x$ и $(3x)^2 + (4x)^2 = 30^2$. Отсюда $25x^2 = 900$, $x^2 = 36$ и $x = 6$. Следовательно, $AC = 18$ м и $BC = 24$ м. Но $AC = \sqrt{AB \cdot AH}$, поэтому $AC^2 = AB \cdot AH$, или $18^2 = 30 \cdot AH$, откуда $AH = 10,8$ м, а $BH = 30 - 10,8 = 19,2$ м.

Ответ. $AH = 10,8$ м, $BH = 19,2$ м.

69. Изобразим отрезками AB и OB столб и его тень, отрезками CD и OD покажем человека и его тень. В треугольниках OCD и OAB угол O — общий, $\angle ODC = \angle OBA = 90^\circ$, следовательно, $\triangle OCD \sim \triangle OAB$. Отсюда получаем, что $OD : CD = OB : AB$, а значит, $AB = \frac{OB \cdot CD}{OD} = 10 \cdot 1,8 : 3,6 = 5$ (м).

Ответ. Высота **столба** равна 5 м.

70. Пусть даны углы 1 и 2 и отрезок PQ . Требуется построить треугольник ABC , у которого $\angle A = \angle 1$, $\angle B = \angle 2$, а медиана CM равна **отрезку** PQ .

Построим сначала треугольник, подобный искомому. Для этого:

- 1) Проведем отрезок A_1B_1 .
- 2) От луча A_1B_1 отложим угол B_1A_1X , равный углу 1, и от луча B_1A_1 — угол A_1B_1Y , равный углу 2, как показано на рисунке. Точку пересечения лучей A_1X и B_1Y обозначим буквой C .
- 3) Проведем медиану CM_1 полученного треугольника A_1CB_1 .
- 4) На луче CM_1 от точки C отложим отрезок CM , равный данному отрезку PQ .
- 5) Через точку M проведем прямую m , параллельную прямой A_1B_1 . Точки пересечения прямой m и лучей CA_1 и CB_1 обозначим буквами A и B .

Треугольник ABC — искомый. Действительно, так как $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle BAC = \angle CA_1B_1$, $\angle AMC = \angle A_1M_1C$, следовательно, $\triangle AMC \sim \triangle A_1M_1C$, а потому $AM : A_1M_1 = CM : CM_1$. Аналогично $\triangle BMC \sim B_1M_1C$ а потому $BM : B_1M_1 = CM : CM_1$. Следовательно, $AM : A_1M_1 = BM : B_1M_1$, но $A_1M_1 = M_1B_1$, поэтому $AM = BM$, т.е. отрезок CM — медиана треугольника ABC и она равна данному отрезку PQ . Как было доказано, $\angle BAC = \angle B_1A_1C$, но $B_1A_1C = \angle 1$, следовательно, $\angle BAC = \angle 1$. Аналогично $\angle ABC = \angle 2$. Поэтому треугольник ABC удовлетворяет всем требованиям задачи.

§ 4. Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника

71. Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение **противолежащего катета к гипотенузе**. Против угла M лежит катет PT . По теореме **Пифагора** найдем гипотенузу: $MT^2 = 8^2 + 15^2 = 289$, откуда $MT = 17$. Следовательно, $\sin M = \frac{PT}{MT} = \frac{15}{17}$.

Косинусом острого угла **прямоугольного** треугольника называется отношение **прилежащего к углу катета к гипотенузе**. К углу M прилежит катет MP , следовательно, $\cos M = \frac{MP}{MT} = \frac{8}{17}$.

Тангенсом **острого** угла прямоугольного треугольника называется **отношение противолежащего катета к прилежащему**, т.е. $\tg M = PT : MP = 15 : 8 = 1\frac{7}{8}$.

Ответ. $\sin M = \frac{15}{17}$, $\cos M = \frac{8}{17}$, $\tg M = 1\frac{7}{8}$.

72. а) $\sin B = \frac{CH}{BC}$, $\cos C = \frac{CH}{BC}$, следовательно, $\sin B = \cos C$.

б) $\sin B = \frac{CH}{BC}$, $\cos B = \frac{BH}{BC}$, $\tg B = \frac{CH}{BH}$, поэтому $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{CH \cdot BC}{BC \cdot BH} = \tg B$.

в) $\sin C = \frac{BH}{BC}$, $\cos B = \frac{CH}{BC}$, $\sin^2 C + \cos^2 C = (BH : BC)^2 + (CH : BC)^2 = \frac{BH^2 + CH^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$.

73. Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение **противолежащего катета к гипотенузе**. Против угла A лежит катет EC , следовательно, $\sin A = \frac{EC}{AC}$ откуда $CE = AC \cdot \sin A = 50 \cdot \frac{7}{25} = 14$.

Второй катет AE найдем, используя теорему Пифагора: $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = \sqrt{2304} = 44$.

Площадь прямоугольного треугольника равна **половине** произведения катетов, поэтому $S_{ACE} = \frac{1}{2}AE \cdot CE =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 44 = 308.$$

Ответ. $S_{ACE} = 308$.

74. По условию задачи $\angle A = 90^\circ$, следовательно, отрезок AC — катет, противолежащий углу B , и требуется найти катет, прилежащий к углу B .

Отношение катета, противолежащего углу B , и катета, прилежащего к этому углу, есть **тангенс** угла B , следовательно, $\frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} B$. Отсюда $AB = AC : \operatorname{tg} B = 9 : \operatorname{tg} 60^\circ = 3\sqrt{3}$.

Ответ. $AB = 3\sqrt{3}$.

75. Обозначим длину катета, противолежащего углу α , буквой a и длину **катета**, прилежащего к углу α , буквой b .

Тогда $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$. Отсюда получаем: $a = c \cdot \sin \alpha$, $b = c \cdot \cos \alpha$. Подставляя числовые данные, получим:

a) $a = 12 \cdot \sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ (дм);

$b = 12 \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (дм).

б) $a = 16 \cdot \sin 45^\circ = 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$ (дм);

$b = 16 \cdot \cos 45^\circ = 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$ (дм).

Ответ. а) $a = 6$ дм, $b = 6\sqrt{3}$ дм; б) $a = b = 8\sqrt{2}$ дм.

76. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH$ где отрезок BH — **высота** треугольника. В прямоугольном треугольнике ABH гипотенуза AB равна $2BH$, $\angle A = 60^\circ$, BH — катет

противолежащий углу A . Следовательно, $\sin A = \frac{BH}{AB}$, откуда $BH = AB \cdot \sin A = a \cdot \sin 60^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Итак, $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Ответ. $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

77. Пусть $\angle BAO = \alpha$. Диагонали ромба делят его углы пополам, значит, $\angle DAO = BAO = \alpha$.

Диагонали ромба взаимно **перпендикулярны** и точкой пересечения делятся **пополам**, следовательно, в прямоугольном треугольнике ABO катет AO равен $2\sqrt{3}$ м, а катет DO равен 2 м. Поэтому $\tg \alpha = OD : AO = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $\alpha = 30^\circ$, а $\angle BAD = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$, $\angle ADC = \angle ABC = 120^\circ$.

Ответ. $\angle A = \angle C = 60^\circ$, $\angle B = \angle D = 120^\circ$

Глава VIII. Окружность

§ 1. Касательная к окружности

78. Прямая BD и окружность не имеют общих точек.

Прямая AB и окружность имеют только одну **общую** точку.

Прямые BC , AD , CD , AC и окружность имеют две общие точки.

79. По условию задачи окружность и прямая AB имеют только **одну** общую точку.

Если бы радиус окружности был меньше расстояния от **центра** окружности — точки C до прямой AB , то окружность и прямая **не имели бы общих точек**.

Если бы радиус **окружности** был бы больше расстояния от точки C до **прямой** AB , то окружность и прямая **имели бы две общих точек**.

Следовательно, радиус R окружности **равен** расстоянию от точки C до **прямой** AB , т.е. равен катету AC .

Итак, $R = AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

Ответ. Радиус окружности равен 12 см.

80. Прямая AC проходит через центр **окружности** — точку A , следовательно, прямая AC является **секущей** по отношению к окружности с **центром** A .

Так как $\angle B = 90^\circ$, то $AB \neq BC$, поэтому расстояние от точки A до **прямой** BC равно 8 см, т.е. больше **радиуса** окружности. Следовательно, прямая BC **не является** секущей по отношению к данной окружности.

Так как $\angle D = 90^\circ$, то $AD \neq CD$, поэтому расстояние от **центра** A до **прямой** CD равно 6 см, т.е. **равно** радиусу окружности. Следовательно, прямая CD **проходит по касательной** по отношению к данной окружности.

Чтобы найти расстояние от точки A до **прямой** BD , проведем из точки A перпендикуляр AH к прямой BD

и вычислим его **величину**. Находя двумя способами площадь треугольника ABD , получим: $\frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{2}BD \times AH$. По теореме Пифагора $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 10$ см. Поэтому $AH = 4,8$ см.

Итак, расстояние от точки A до прямой BD меньше радиуса окружности, следовательно, прямая BD является секущей по отношению к данной **окружности**.

Ответ. Секущими являются прямые AC и BD .

81. Касательной к **окружности** называется **прямая**, имеющая с окружностью только **одну общую** точку. Прямая и окружность имеют только одну **общую** точку, если расстояние от центра **окружности** до прямой равно **радиусу** окружности. Это условие выполняется для прямой CD , значит, касательной к данной **окружности** является прямая CD .

Ответ. Касательной является прямая CD .

82. По условию задачи прямая AB является **касательной** к данной окружности, следовательно, прямая AB **перпендикулярна** к радиусу OA , проведенному в **точку** касания. Поэтому треугольник AOB — **прямоугольный**. По теореме Пифагора $OB^2 = OA^2 + AB^2$, отсюда $OB = 25$ дм.

Ответ. $OB = 25$ дм.

83. Так как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, **центра** O , то $AB = AC$, следовательно, треугольник ABC — **равносторонний**, поэтому $\angle BAC = 60^\circ$.

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной **точки**, составляют **равные** углы с прямой, проходящей через эту точку и **центром** окружности, следовательно, $\angle BAO = \angle CAO = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ$.

Ответ. $\angle BAO = 30^\circ$.

84. Так как в треугольнике AOM $AO = MO$, то $\angle AMO = \angle MAO = 30^\circ$. В треугольнике AMC

$\angle AMC = 180^\circ - (\angle MAC + \angle OCM) = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$. Поэтому $\angle OMC = \angle AMC - \angle AMO = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$, т.е. $CM \perp OM$.

Итак, прямая CM проходит через конец радиуса OM лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу. Поэтому она является **касательной** к данной окружности, что и требовалось.

§ 2. Центральные и вписанные углы

85. Центральным углом окружности называется угол с вершиной в **центре окружности**. На рисунке центр окружности — точка A служит вершиной углов MAE , KAC , CAE , KAM . Эти углы являются центральными углами данной **окружности**.

Ответ. MAE , KAC , CAE , KAM .

86. Угол MOK является **центральным** углом окружности, а дуга MK меньше полуокружности, поэтому $\angle MK = \angle MOK = \angle KOP$. По условию задачи $\angle PK = \angle MK$, и, значит, градусная мера дуги PK равна 105° . $\angle MKP = \angle MK + \angle PK = 210^\circ > 180^\circ$, т.е. дуга MKP больше полуокружности, поэтому $\angle MKP = 360^\circ - \angle MOP$, поэтому $\angle MOP = 360^\circ - \angle MKP = 360^\circ - 210^\circ = 140^\circ$.

Ответ. $\angle MOP = 140^\circ$.

87. Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на **окружности**, а стороны **пересекают** окружность.

Точка A лежит на окружности, а стороны угла HAM **пересекают** окружность. Следовательно, угол HAM **является** вписанным.

Точка B лежит на **окружности**, а стороны угла HBM пересекают **окружность**, следовательно, угол HBM **является** вписанным.

Точка C лежит на **окружности**, а сторона CE угла TCE не пересекает **окружность**, следовательно, угол TCE **не является** вписанным.

Точка P не лежит на окружности, следовательно, угол HPM не является вписанным.

Ответ. Вписанными являются углы **HAM** и **HBM** .

88. Угол AOB является **центральным** углом данной окружности и равен $\angle AOB = 92^\circ$, следовательно, $\angle AMB = 92^\circ$.

Угол ACB является **вписанным** и опирается на дугу AMB , поэтому $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB = 46^\circ$.

Ответ. $\angle ACB = 46^\circ$.

89. Угол MAP является **вписанным** углом окружности и опирается на дугу MBP . $\angle MBP = 360^\circ - \angle MAP = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$, $\angle MAP = \frac{1}{2} \angle MBP = 120^\circ$.

Ответ. $\angle MAP = 120^\circ$.

90. Вписанные углы PAB и BCP **опираются** на одну и ту же дугу BP , следовательно, $\angle PAB = \angle BCP = \frac{1}{2} \angle BP = 32^\circ$.

Из треугольника AMP получим: $\angle AMP = 180^\circ - (\angle PAB + \angle APM) = 180^\circ - (38^\circ + 32^\circ) = 110^\circ$.

Ответ. $\angle AMP = 110^\circ$.

91. Отрезок AC – **диаметр** окружности, следовательно, дуга ADC – полуокружность. Вписанный угол ABC опирается на $\angle ADC = 180^\circ$, поэтому он **прямой**.

Аналогично углы ADC , BCD и BAD прямые. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ является **прямоугольником**.

92. Если центр окружности лежит на отрезке AC , то отрезок AC является **диаметром** этой окружности, а дуга AC является **полуокружностью**. Тогда вписанный угол ABC опирается на полуокружность, а потому он равен 90° , но по условию задачи $\angle ABC = 80^\circ$. Следовательно, центр окружности **не лежит** на отрезке AC .

Ответ. **не лежит**.

93. Хорды KM и PT пересекаются, следовательно, произведение отрезков хорды KM равно произведению отрезков хорды PT , т.е. $PT \cdot CE = KC \cdot CM$. Обозначим длину отрезка PC буквой x , тогда $CT = 16 - x$, следовательно, $x \cdot 16 - x = 7 \cdot 4$. Корни полученного квадратного уравнения $x^2 - 16x + 28 = 0$ равны **14** и **2**. Итак, либо $PC = 14$, и тогда $CT = 2$, либо $PC = 2$, и тогда $CT = 14$.

Ответ. $PC = 14$ см, $CT = 2$ см или $PC = 2$ см, $CT = 14$ см.

94. Если точка H лежит на данной окружности, то отрезки AB и CH являются хордами этой **окружности**, пересекающимися точке M . Поэтому должно быть верным равенство $AM \cdot MB = MH \cdot CM$. Но так как $5 \cdot 6 \neq 8 \cdot 4$, то точка H не лежит на данной окружности.

Ответ. точка H не лежит на окружности.

§ 3. Четыре замечательные точки треугольника

95. Проведем из точки H перпендикуляр HM к прямой BA , тогда расстояние от точки H до прямой AB равно длине отрезка HM . По условию задачи $\angle ABC = 120^\circ$, $HB \perp BC$, т.е. $\angle HBC = 90^\circ$. Значит, $\angle ABH = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

В треугольнике HBM $\angle MBH = 30^\circ$, $\angle HMB = 90^\circ$, следовательно, $HM = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ (см), т.е. расстояние от точки H до прямой AB равно **2** см.

Ответ. **2** см.

96. а) Точка A лежит на биссектрисе ME угла TMP , поэтому она **равноудалена** от сторон этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке A **верно**.

б) Точка B лежит на **биссектрисе** ME угла TMP , поэтому она **равноудалена** от сторон этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке B **верно**.

в) Если бы точка H была равноудалена от **сторон** угла TMP , то она лежала бы на **биссектрисе** этого

угла. Но точка H не лежит на биссектрисе угла TMP . Следовательно, данное утверждение о точке H не верно.

г) Если бы точка C была равноудалена от сторон $\angle TMP$, то она лежала бы на биссектрисе этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке C не верно.

97. Биссектрисы треугольника пересекаются в **одной** точке, следовательно, луч BM – **биссектриса** угла ABC , т.е. $\angle ABM = \frac{1}{2}\angle B$. По условию задачи лучи AM и CM **биссектрисы** углов A и C , поэтому $\angle A = 2 \cdot \angle MAC = 60^\circ$, $\angle C = 2 \cdot \angle MCA = 40^\circ$. Следовательно, $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$, значит, $\angle ABM = \frac{1}{2}\angle B = 40^\circ$.

Ответ. $\angle ABM = 40^\circ$.

98. По условию задачи луч KO является **Биссектрисой** угла CKE , поэтому точка O **равноудалена** от сторон этого угла, т.е. от прямых KC и KE .

Расстоянием от точки O до прямой CK является длина **перпендикуляра** OM , проведенного из точки O к этой прямой, т.е. расстояние от точки O до **прямой** CK равно 7 см. Поэтому расстояние от точки O до **прямой** KE равно 7 см.

Ответ. 7 см.

99. Прямая называется **серединным перпендикуляром** к отрезку, если она проходит через **середину** этого отрезка и **перпендикулярна** к нему.

По условию задачи $BM = MC$, но прямая AM не **перпендикулярна** к **прямой** BC , так как в противном случае отрезок AM был бы медианой и **высотой** треугольника ABC , а тогда были бы равны стороны AB и BC . Следовательно, прямая AM не является **серединным перпендикуляром** к стороне BC .

По условию задачи $BT \perp AC$, но $AC \neq CT$, так как в противном случае отрезок BT был бы **высотой** и **биссектрисой** треугольника ABC , а тогда были бы **равны** стороны AB и BC , что неверно. Следовательно, прямая

ВТ не является серединным перпендикуляром к стороне AC .

По условию задачи $\angle ACO = \angle BCO$ и $AC = BC$, т.е. отрезок CO является **биссектрисой** равнобедренного треугольника, а поэтому он является также его медианой и **высотой**. Следовательно, прямая CO проходит через **середину** отрезка AB и **перпендикулярна** к этому отрезку, т.е. CO является **серединным перпендикуляром** к стороне AB .

Ответ. Серединным **перпендикуляром** к стороне треугольника ABC является прямая OC .

100. Предположим, что прямые p и q не пересекаются. По условию задачи $p \perp AB$, а из предположения следует, что $p \parallel q$, значит, по свойству параллельных прямых $AB \perp q$. Итак, через точку проходят **параллельные** прямые AB и BC , перпендикулярные к прямой q , что невозможно.

Следовательно, наше предположение неверно, а значит, **серединные перпендикуляры** p и q к отрезкам AB и BC **пересекаются**.

101. Так как прямая p — **серединный** перпендикуляр к **отрезку** AB , то $AO = OB$. Аналогично, так как прямая q — **серединный перпендикуляр** к отрезку BC , то $OB = OC$. Итак, $AO = OB = OC$, поэтому $AO = OC$, что и требовалось доказать.

102. а) Точка A лежит на **серединном** перпендикуляре к отрезку CE , следовательно, она **равноудалена** от концов этого отрезка, т.е. данное утверждение о точке A **верно**.

б) Точка M лежит на **серединном перпендикуляре** к отрезку CE , поэтому она **равноудалена** от концов отрезка CE , а значит, расстояния от нее до точек C и E **равны**, т.е. данное утверждение о точке M **не верно**.

в) Если бы точка H была равноудалена от точек C и E , то она лежала бы на **серединном перпендикуляре** к отрезку CE , но это не так, и поэтому данное утверждение о точке H **не верно**.

г) Если бы точка T была удалена на равные расстояния от точек C и E , то она лежала бы на серединном **перпендикуляре** к отрезку CE , что в данном случае не выполняется. Следовательно, данное утверждение о точке T **верно**.

103. Высоты треугольника пересекаются в **одной** точке, поэтому третья высота треугольника проходит через точку O . С помощью линейки проведем прямую CO и обозначим буквой T точку пересечения этой прямой с прямой AB . Отрезок CT — искомая **высота** треугольника ABC .

§ 4. Вписанная и описанная окружность

104. Окружность называется вписанной в **многоугольник**, если **все** стороны многоугольника **касаются** окружности. Все **стороны** многоугольника касаются окружности на рисунках **а** и **д**, следовательно, многоугольник и **вписанная** в него окружность изображены на рисунках **а** и **д**.

Ответ. **а** и **д**.

105. Многоугольник описан около окружности, если **все** его стороны **касаются** **окружности**. Проведем через точку **касательную** к данной окружности, отличную от AM , и обозначим буквой D **точку** пересечения этой касательной и прямой CP . Четырехугольник $ABCD$ — искомый.

106. Используя свойство отрезков касательных к **окружности**, проведенных из одной точки, получаем: $AB + CD = a + b + c + d$, $BC + AD = b + c + a + d$. Следовательно, $AB + CD = BC + AD$, что и требовалось **доказать**.

107. Отрезки касательных к **окружности**, проведенные из одной **точки**, равны. Поэтому $AT = AM = 5$ м, $CM = CH = 3$ м, $BH = BT = 6$ м. Следовательно, $P_{ABC} = AM + MC + CH + BH + AT + BT = 2 \cdot (AM + CM + BT) = 2 \cdot (5 + 3 + 6) = 28$ м.

Ответ. $P_{ABC} = 28$ м

108. Соединим центр окружности с вершинами треугольника и точками H , M и E касания сторон треугольника

и окружности. Так как радиус, проведенный в точку **касания**, перпендикулярен к касательной, то $OH \perp AC$, следовательно, отрезок OH — **высота** треугольника AOC . Аналогично отрезок OM — высота треугольника BOC , отрезок OE — **высота** треугольника AOB . Поэтому $S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OE$. Аналогично $S_{BOC} = \frac{1}{2}BC \cdot OM$ и $S_{AOC} = \frac{1}{2}AC \cdot OH$.

$$\text{Итак, } S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2}(AB \cdot OE + BC \cdot OM + AC \cdot OH) = \frac{1}{2}(AB \cdot r + BC \cdot r + AC \cdot r) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)r = \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 4 = 120 \text{ (см}^2\text{).}$$

Ответ. 120 см^2 .

109. Окружность называется **описанной** около многоугольника, если **все** вершины многоугольника **находятся** на окружности.

Все вершины многоугольника **находятся** на окружности на рисунках **а** и **г**, следовательно, многоугольник и описанная **около** него окружность изображены на рисунках **а** и **г**.

Ответ. **а и г.**

110. Многоугольник вписан в окружность, если **все** его вершины лежат на **окружности**.

Отметим на дуге AC точку D и проведем отрезки AD и CD . Четырехугольник $ABCD$ искомый.

111. Так как точки A , B и C лежат на **данной окружности**, а ее центр — точка O — лежит на отрезке AC , то отрезок AC — **диаметр** данной окружности, а угол B является **вписанным** в эту окружность и опирается на ее **диаметр**. Поэтому $\angle B = 90^\circ$, а $\angle C = 180^\circ - (40^\circ + 90^\circ) = 50^\circ$.

Ответ. $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 50^\circ$.

Глава IX. Векторы

§ 1. Понятие вектора

112. а) \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BD} ; б) \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{DA} ;

в) вектор с началом и концом в **точке С** называется **нулевым** и обозначается \overrightarrow{CC} или $\vec{0}$;

г) $|\overrightarrow{BC}| = 4$, $|\overrightarrow{AB}| = 4$;

д) вектору \overrightarrow{BA} коллинеарен вектор \overrightarrow{CD} ;

е) сонаправлены ненулевые векторы \overrightarrow{BA} и \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{AO} и \overrightarrow{OC} , противоположно направлены векторы \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{DA} ;

ж) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, так как $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{BA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$;

$\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DA}$, так как \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{DA} не сонаправлены;

$\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{BD}$, так как \overrightarrow{BA} и \overrightarrow{BD} не сонаправлены;

$\overrightarrow{AO} \neq \overrightarrow{AC}$, так как $|\overrightarrow{AO}| \neq |\overrightarrow{AC}|$; $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$ так как

\overrightarrow{AC} и \overrightarrow{BC} не сонаправлены; $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, так как \overrightarrow{AO}

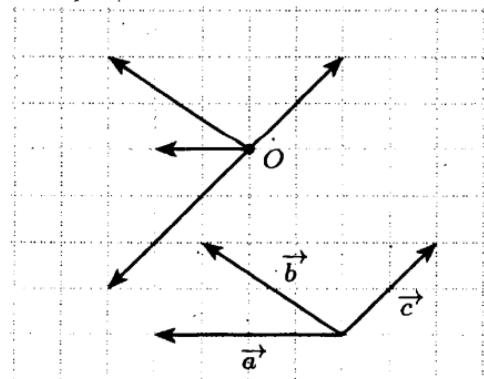
и \overrightarrow{OC} сонаправлены и $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OC}|$.

з) \overrightarrow{BA} .

113. Ответ, в) От точки O можно отложить только один вектор, равный вектору \vec{c} .

114. Длина вектора \overrightarrow{AC} — это длина **отрезка AC**. Отрезок AC является **диагональю** прямоугольника $ABCD$, следовательно, $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (дм), т.е. $|\overrightarrow{AC}| = 5$ дм.

Ответ. 5 дм.



§ 2. Сложение и вычитание векторов

115. а) $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MT} = \overrightarrow{PT}$;

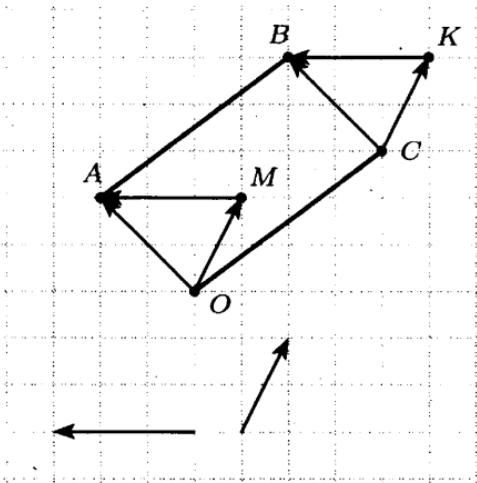
б) $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{0}$;

в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$;

г) $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EE} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CE}$.

Ответ, а) \overrightarrow{PT} ; б) $\overrightarrow{0}$; в) \overrightarrow{AB} ; г) \overrightarrow{CE} .

116. Отложим от точки O вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ и от точки M вектор $\overrightarrow{MA} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$. Аналогично строим $\overrightarrow{CK} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{KB} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}$. Так как $\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$, следовательно, $OA \parallel CB$ и $OA = CB$, поэтому четырехугольник $OABC$ – параллелограмм.

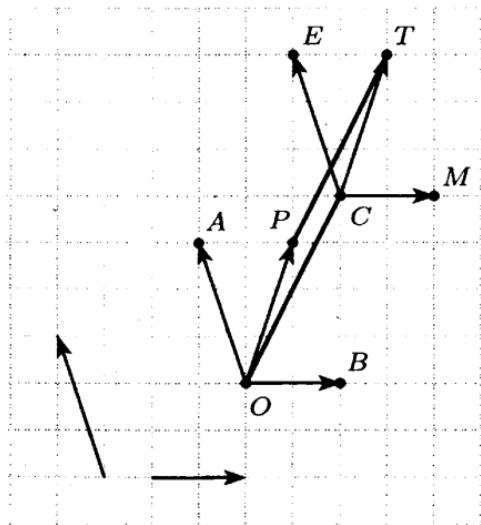


Ответ. Четырехугольник $OABC$ – параллелограмм

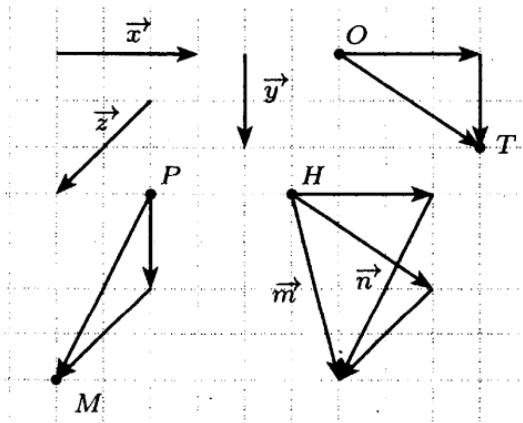
117. Отложим от точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{y}$. Построим точку P так, чтобы четырехугольник $OAPB$ был параллелограммом, тогда по правилу параллелограмма $\overrightarrow{OP} = \vec{x} + \vec{y}$. Отложим от точки C векторы $\overrightarrow{CM} = \vec{y}$ и $\overrightarrow{CE} = \vec{x}$. Построим точку T так, чтобы четырехугольник был параллелограммом, тогда по правилу параллелограмма $\overrightarrow{CT} = \vec{y} + \vec{x}$.

Так как $\overrightarrow{OP} = \vec{x} + \vec{y}$, $\overrightarrow{CT} = \vec{y} + \vec{x}$ и $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (переместительный закон сложения векторов),

то $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CT}$. Следовательно, четырехугольник $OPTC$ – параллелограмм, а потому $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{PT}$, что и требовалось доказать.



118. Так как $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$, то $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{z} = (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z}$. Так как $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$, то $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$. В соответствии с сочетательным **законом** сложения векторов выполняется равенство: $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$, а значит, $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{n}$, что и требовалось доказать.



119. По правилу треугольника имеем: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$, следовательно, $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BD}|$. Длина вектора \overrightarrow{BD} –

это длина отрезка BD . Так как $AD \parallel BC$, то $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ$.

Проведем высоту BH трапеции. В прямоугольном треугольнике ABH имеем: $BH = AB \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см), $AH = AB \cdot \cos 60^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (см).

Из треугольника BHD по теореме Пифагора получаем: $BD^2 = BH^2 + (AD - AH)^2 = \frac{27}{4} + \frac{81}{4} = 27$ (см²), откуда

$$BD = 3\sqrt{3} \text{ см.}$$

Ответ. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}| = 3\sqrt{3}$.

120. $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CT} = (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{CT} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{AT}$.

Ответ. \overrightarrow{AT} .

121. $\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{BP}$.

Ответ. \overrightarrow{BP} .

122. По определению противоположным вектору \overrightarrow{OH} является вектор, направление которого **противоположно** направлению вектора \overrightarrow{OH} , а длина **равна** длине вектора \overrightarrow{OH} .

Противоположно направлены вектору \overrightarrow{OH} векторы \overrightarrow{HB} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{HO} , \overrightarrow{EC} . Из них имеют длину, равную **длине** вектора \overrightarrow{OH} , векторы \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{HO} , \overrightarrow{EC} .

Итак, **противоположными** вектору \overrightarrow{OH} являются векторы \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{HO} , \overrightarrow{EC} .

Ответ. \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{HO} , \overrightarrow{EC} .

123. По определению разностью векторов \overrightarrow{MC} и \overrightarrow{MP} является вектор \vec{x} , такой, что $\overrightarrow{MP} + \vec{x} = \overrightarrow{MC}$.

Проверим, какой из данных векторов удовлетворяет этому условию:

$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CM} \neq \overrightarrow{MC}$, следовательно, $\overrightarrow{CM} \neq \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.
 $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{CP} \neq \overrightarrow{MC}$, следовательно, $\overrightarrow{CP} \neq \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.
 $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{0}$, т.е. $\overrightarrow{PM} \neq \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.
 $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{MC}$, т.е. $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.

Ответ. \overrightarrow{PC} .

124. По теореме о разности векторов $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, поэтому $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{XY} + -\overrightarrow{ZY}$. Запись « $-\overrightarrow{ZY}$ » означает «вектор, противоположный вектору \overrightarrow{YZ} », т.е. $-\overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{YZ}$. Следовательно, $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{XY} + (-\overrightarrow{ZY}) = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$, что и требовалось доказать.

125. $(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{TA}) - (\overrightarrow{PX} - \overrightarrow{TX}) = (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{TA}) - (\overrightarrow{PX} + (-\overrightarrow{TX})) = (\overrightarrow{HA} + (-\overrightarrow{TA})) - (\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XT}) = (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AT}) - \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{HT} + (-\overrightarrow{PT}) = \overrightarrow{HT} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{HP}$.

Ответ. \overrightarrow{HP} .

126. Ответ. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{y}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}$$

$$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$$

127. а) $\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{x} = \overrightarrow{PM}$, следовательно, $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{x}$, откуда $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MO}$.

$$б) \overrightarrow{x} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PM}, \text{ откуда } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PA}.$$

$$в) \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{x} = \overrightarrow{PM}, \text{ поэтому } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{CP}.$$

Ответ, а) \overrightarrow{MO} ; б) \overrightarrow{PA} ; в) \overrightarrow{CP} .

128. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$, следовательно, $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = DB$. Так как $AD \parallel BC$, то $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ$.

Проведем высоту BH трапеции. В треугольнике ABH имеем: $BH = AB \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (м), $HA =$

$$= AB \cdot \cos 60^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ (м). Тогда } DH = AD - HA = \\ = \frac{9}{2} \text{ (м).}$$

Из треугольника BHD по теореме Пифагора находим: $BD^2 = DH^2 + BH^2 = \left(\frac{81}{4} + \frac{27}{4}\right) = 27 \text{ (м}^2)$, откуда $BD = 3\sqrt{3} \text{ м.}$

Итак, $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = 3\sqrt{3}.$

Ответ. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = 3\sqrt{3} \text{ м.}$

§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

129. Так как $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}$, то, согласно определению произведения вектора на число, $\vec{x} \uparrow \vec{a}$ и $|\vec{x}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$. Отложим от точки O вектор \vec{x} .

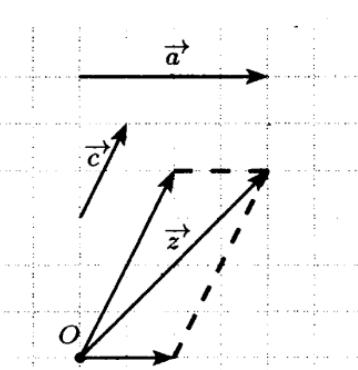
Аналогично $\vec{y} \uparrow \vec{c}$ и $|\vec{y}| = 2\vec{c}$. Отложим от точки O вектор \vec{y} .

$$\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{c} = \vec{x} + \vec{y}. \text{ Так}$$

как векторы \vec{x} и \vec{y} отложены от точки O , строить вектор $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ удобно по правилу **параллелограмма**. Строим вектор \vec{z} .

130. а) Так как точка O является точкой пересечения **диагоналей** параллелограмма, то $AO = OC$, и, значит, $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AO}|$. Кроме того, $\overrightarrow{AC} \uparrow \overrightarrow{AO}$, следовательно, согласно определению произведения вектора на число, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO} = 2\vec{n}$. Далее, $|\overrightarrow{CO}| = |\overrightarrow{AO}|$ и $\overrightarrow{CO} \uparrow \overrightarrow{AO}$, поэтому $\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{AO} = -\vec{n}$.

б) Противоположные стороны параллелограмма **равны** и **параллельны**, поэтому $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Далее,



$\overrightarrow{DM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{DN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DC}|$, следовательно, согласно определению **произведения** вектора на **число**, $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a}$. Так как $\overrightarrow{CM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{CM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DC}|$, то $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2}\vec{a}$.

в) По правилу треугольника $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. Но $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$, следовательно, $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + 2\vec{n}$.

Ответ. а) $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{CO} = -\vec{n}$;

б) $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\vec{a}$;

в) $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + 2\vec{n}$.

131. а) $-0,5(12\vec{a}) = (-0,5 \cdot 12)\vec{a} = -6\vec{a}$;

б) $2,5\vec{b} - 1,7\vec{b} = (2,5 - 1,7)\vec{b} = 0,8\vec{b}$;

в) $3(\vec{c} + \vec{p}) - 5\vec{p} = 3\vec{c} + 3\vec{p} - 5\vec{p} = 3\vec{c} + (3\vec{p} - 5\vec{p}) = 3\vec{c} + (-2)\vec{p} = 3\vec{c} - 2\vec{p}$;

г) $2(5\vec{p} - 3\vec{q}) - 3(3\vec{p} - 2\vec{q}) = 10\vec{p} - 6\vec{q} - 9\vec{p} + 6\vec{q} = \vec{p} + 0\vec{q} = \vec{p}$.

Ответ, а) $-6\vec{a}$; б) $0,8\vec{b}$; в) $3\vec{c} - 2\vec{p}$, г) \vec{p} .

132. $\vec{c} = 2(\vec{a} + 1,5\vec{p}) - 3\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{p} - 3\vec{p} = 2\vec{a} + (3 - 3)\vec{p} = 2\vec{a} + 0\vec{p} = 2\vec{a}$. По определению произведения вектора на **число** векторы \vec{a} и $2\vec{a}$, **коллинеарны** что и требовалось **доказать**.

133. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то обе части каждого равенства — нулевые векторы, поэтому равенства справедливы. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$.

а) По определению произведения вектора на **число** $|1 \cdot \vec{a}| = |1| \cdot |\vec{a}| = 1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$, а так как число 1 положительно, то векторы $1 \cdot \vec{a}$ и \vec{a} **коллинеарны**. Следовательно, по определению равных векторов $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

б) По определению **произведения** вектора на **число** $|(-1) \cdot \vec{a}| = |-1| \cdot |\vec{a}| = 1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$, а так как $-1 < 0$,

то векторы $(-1) \cdot \vec{a}$ и \vec{a} противоположно **направленны**. По определению противоположного вектора $| - \vec{a} | = | \vec{a} |$ и $- \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Следовательно, $| (-1) \vec{a} | = | - \vec{a} |$ и $(-1) \vec{a} \uparrow\uparrow - \vec{a}$, т.е. $(-1) \cdot \vec{a} = - \vec{a}$.

134. Пусть точка X — середина отрезка KM , точка Y — середина отрезка PT . Тогда для произвольной точки O имеем:

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}) \quad (1)$$

$$\overrightarrow{OY} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OT}). \quad (2)$$

По условию задачи точки K и M — середины отрезков AB и BD , следовательно, $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ и $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Аналогично $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ и $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$.

Подставляя найденные выражения в формулы (1) и (2), получим: $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OY} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Отсюда следует, что $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY}$. Так как от точки O можно отложить только **один** вектор, равный данному, то точки X и Y совпадают, следовательно, совпадают середины отрезков KM и PT , что и требовалось доказать.

135. Так как $AK = KB$ и $CM = MD$, то отрезок KM — средняя линия трапеции, следовательно, $KM \parallel BC$ и $KM = \frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}(2 + 2) = 5$ (м).

В четырехугольнике $BCMK$ стороны BC и KM **параллельны**, а стороны BK и CM не параллельны, следовательно, $BCMK$ — **трапеция**. По условию задачи $BP = PK$ и $CT = TM$, поэтому отрезок PT — средняя линия трапеции $BCMK$, и, следовательно, $PT = \frac{1}{2}(BC + KM) = \frac{1}{2}(2 + 5) = 3,5$ (м).

Ответ. $PT = 3,5$ м.

136. В соответствии с определением средней линией трапеции нужно доказать, что точка T является **серединой** стороны BC .

Предположим, что это не так, и пусть серединой стороны BC является точка X . Тогда отрезок OX — **средняя линия** трапеции, поэтому $OX \parallel CD$. Но по условию задачи $OT \parallel CD$.

Итак, через точку O проходят **две** прямые, параллельные прямой CD , что противоречит **теореме о параллельных прямых**. Следовательно, точка T — **середина отрезка** BC , т. е. отрезок OT — **средняя линия** трапеции, что и требовалось **доказать**.

137. По свойству средней линии трапеции $PT \parallel BC$ и $PT = \frac{1}{2}(AD + BC)$. В треугольнике ABC отрезки AP и PB равны и прямая PK параллельна стороне BC , следовательно, отрезок PK — **средняя линия** треугольника ABC (задача 65). Поэтому $PK = \frac{1}{2}BC$. Аналогично в треугольнике BCD $TM = \frac{1}{2}BC$.

Итак, $KM = PT - (PK + TM) = \frac{1}{2}(BC + AD) - \left(\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BC\right) = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD - BC = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(9 - 5) = 2$ (м).

Ответ. $KM = 2$ м.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебник	4
Глава V. Четырехугольники	4
§ 1. Многоугольники	4
§ 2. Параллелограмм и трапеция	6
§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат	19
Дополнительные задачи	27
Глава VI. Площадь	35
§ 1. Площадь многоугольника	35
§ 2. Площади параллелограмма, треугольни- ка и трапеции	37
§ 3. Теорема Пифагора	44
Дополнительные задачи	52
Глава VII. Подобные треугольники	71
§ 1. Определение подобных треугольников . .	71
§ 2. Признаки подобия треугольников	76
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач	83
Задачи на построение	91
§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника	94
Дополнительные задачи	100
Глава VIII. Окружность	115
§ 1. Касательная к окружности	115
§ 2. Центральные и вписанные углы	123
§ 3. Четыре замечательные точки треугольника	133
§ 4. Вписанная и описанная окружности . .	138
Дополнительные задачи	144
Глава IX. Векторы	154
§ 1. Понятие вектора	154
§ 2. Сложение и вычитание векторов	159

§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач	166
Дополнительные задачи	175
Рабочая тетрадь	181
Глава V. Четырехугольники	181
§ 1. Многоугольники	181
§ 2. Параллелограмм и трапеция	182
§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат	186
Глава VI. Площадь	188
§ 1. Площадь многоугольника	188
§ 2. Площадь Параллелограмм, треугольника, трапеции	189
§ 3. Теорема Пифагора	192
Глава VII. Подобные треугольники	194
§ 1. Определение подобных треугольников . .	194
§ 2. Признаки подобия треугольников . . .	195
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач	197
§ 4. Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника	201
Глава VIII. Окружность	204
§ 1. Касательная к окружности	204
§ 2. Центральные и вписанные углы	206
§ 3. Четыре замечательные точки треугольника	208
§ 4. Вписанная и описанная окружность . . .	211
Глава IX. Векторы	213
§ 1. Понятие вектора	213
§ 2. Сложение и вычитание векторов	214
§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач	218

Издательство ООО «СТАНДАРТ»
stan5714@mail.ru

М.А. Захарцов

**Все домашние
работы
по ГЕОМЕТРИИ
за 8 класс
к учебнику и рабочей тетради
Атанасяна Л.С.,
Бутузова В.Ф. и др.**

ФГОС

Формат 84x108 1/32

Бумага типографская. Печать офсетная. 224 с.
Усл.печ.л. 11,76. Тираж 7000 экз. Заказ № ВЗК-03498-14.
Издательство ООО «Стандарт» Москва 2015 г.

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Дом печати – ВЯТКА»
в полном соответствии с качеством предоставленных материалов
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36
<http://www.gipp.kirov.ru>; e-mail: order@gipp.kirov.ru