Вариант № 21165271

1. Задание 1 № 323511

Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 460 рублей, а стоимость одного номера журнала — 24 рубля. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

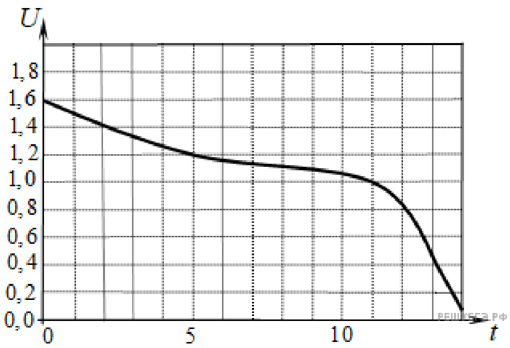
Решение.

На покупку 25 журналов по 24 рубля каждый потребуется $25 \cdot 24 = 600$ руб. Следовательно, оформив подписку, можно сэкономить $600 - 460 = 140$ руб.

Ответ: 140

2. Задание 2 № 519503

При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, за сколько часов напряжение упадёт с 1,2 вольта до 1 вольта.



Решение.

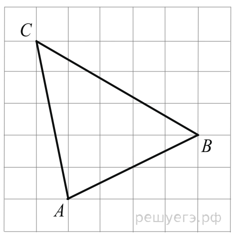
Из графика видно, что напряжение упадет за 6 часов.

Ответ: 6.

Ответ: 6

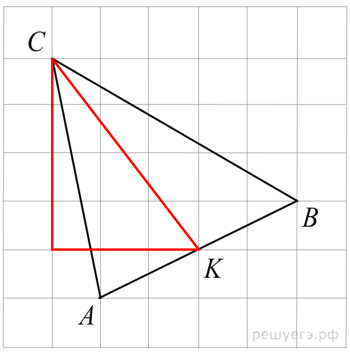
3. Задание 3 № 510481

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его медианы, проведённой из вершины C.



Решение.

Медиана проведенная из вершины C, будет делить основание AB пополам. Построим отрезок CK. Из прямоугольного треугольника по теореме Пифгора: $\sqrt{3^2+4^2}=5.$



Ответ: 5.

Ответ: 5

4. Задание 4 № 517209

На конференцию приехали 5 учёных из Австрии, 4 из Германии и 6 из Сербии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что десятым окажется доклад учёного из Сербии.

Решение.

Всего в семинаре принимает участие 5 + 4 + 6 = 15 ученых, значит, вероятность того, что ученый, который выступает десятым, окажется из Сербии, равна 6/15 = 0,4.

Ответ: 0,4.

Ответ: 0,4

5. Задание 5 № 77366

Найдите корень уравнения $\frac{9}{x^2-16}=1.$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{9}{x^2-16}=1 \Leftrightarrow x^2-16=9 \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5; \\ x=-5. \end{array}\right.$$

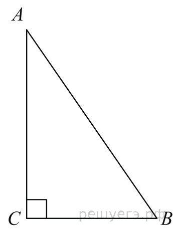
Больший корень равен 5.

Ответ: 5.

Ответ: 5

6. Задание 6 № 26096

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\mathrm{tg}A=0,75,$ $BC=9$. Найдите AC.



Решение.

По определению тангенса:

$$AC=\frac{BC}{\mathrm{tg}A}=\frac{9}{0,75}=12.$$

Ответ: 12.

Ответ: 12

7. Задание 7 № 119974

Прямая $y=3x+4$ является касательной к графику функции $3x^2-3x+c.$ Найдите $c.$

Решение.

Условие касания графика функции $y=f(x)$ и прямой $y=kx+b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x)=k, \\ f(x)=kx+b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

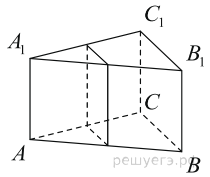
$$\begin{cases} 6x-3=3, \\ 3x^2-3x+c=3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ 3x^2-6x+c-4=0 \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ c=7. \end{cases}$$

Ответ: 7.

Ответ: 7

8. Задание 8 № 324451

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 2, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.



Решение.

Противоположные стороны сечения являются соответственно средними треугольников, лежащих в основании, и прямоугольников, являющихся боковыми гранями призмы. Тем самым, сечение представляет собой прямоугольник со сторонами 1 и 5, площадь которого равна 5.

Ответ: 5.
Ответ: 5

9. Задание 9 № 519805

Найдите значение выражения $(49a^2-9)\cdot\left(\frac{1}{7a-3}-\frac{1}{7a+3}\right)$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$(49a^2-9)\cdot\left(\frac{1}{7a-3}-\frac{1}{7a+3}\right)=(49a^2-9)\cdot\frac{7a+3-7a+3}{49a^2-9}=6.$$

Ответ: 6.
Ответ: 6

10. Задание 10 № 28012

Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v=v_0\sin\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, T = 12 с — период колебаний, $v_0=0,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение.

Найдем скорость груза через 1 секунду после начала колебаний:

$$v=v_0\sin\frac{2\pi t}{T}=0,5\cdot\sin\frac{2\pi\cdot 1}{12}=0,5\cdot\sin\frac{\pi}{6}=0,5\cdot 0,5=0,25\text{ м/с}$$

Найдем кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний:

$$E=\frac{mv^2}{2}=\frac{0,08\cdot 0,25^2}{2}=0,0025$$

Ответ: 0,0025
Ответ: 0,0025

11. Задание 11 № 39443

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 247 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 16 км/ч, стоянка длится 7 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 39 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть u км/ч — скорость течения, тогда скорость теплохода по течению равна $16+u$ км/ч, а скорость теплохода против течения равна $16-u$ км/ч, $0<u<16$. На весь путь теплоход затратил 39 – 7 = 32 часа, отсюда имеем:

$$\frac{247}{16-u}+\frac{247}{16+u}=32 \Leftrightarrow \frac{247\cdot 32}{256-u^2}=32 \Leftrightarrow \frac{247}{256-u^2}=1 \underset{0<u<16}{\Leftrightarrow} 247=256-u^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=3; \\ u=-3 \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u=3.$$

Таким образом, скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: 3.
Ответ: 3

12. Задание 12 № 517236

Найдите точку минимума функции $y=x^3-4x^2-3x-13$.

Решение.

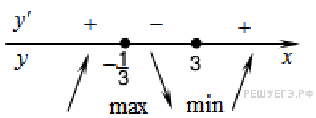
Найдем производную заданной функции:

$$y'=3x^2-8x-3=(x-3)(3x+1).$$

Найдем нули производной:

$$\left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=3$.

Ответ: 3.
Ответ: 3

13. Задание 13 № 517483

а) Решите уравнение: $\log_8(7\sqrt{3}\sin x-\cos 2x-10)=0$.

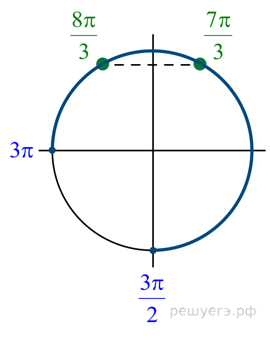
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$7\sqrt{3}\sin x+2\sin^2 x-11=1 \Leftrightarrow (2\sin x-\sqrt{3})(\sin x+4\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x=-4\sqrt{3},\ \text{решений нет} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$. Получим числа: $\frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта и *а* пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

14. Задание 14 № 513096

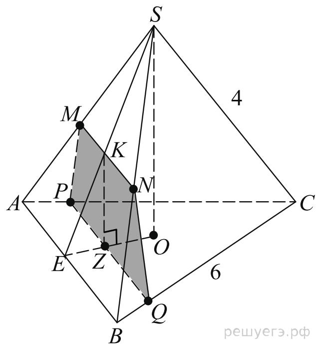
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C.

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Решение.

Сечение (плоскость α) проходит через точки M и N, причем MN — средняя линия. Это означает, что отрезок $MN \parallel AB$ следовательно, $MN \parallel (ABC)$. По условию секущая плоскость перпендикулярна плоскости ABC, следовательно, она пересекает плоскость ABC по уровню PQ, причем $PQ \parallel MN$. Таким образом, секущая плоскость представляет собой трапецию $PMNQ$. Рассмотрим прямоугольный треугольник SOE, где SO — высота правильной пирамиды. Точка O лежит на пересечении медиан правильного треугольника (в основании пирамиды) и делит их в отношении 2 : 1, то есть



$$CO = \frac{2}{3}CE.$$

Точка K является серединой отрезка MN, причем $KZ \perp CE$, откуда следует, что $KZ \parallel SO$, следовательно, $ZE = ZO$. Так как $EO = \frac{1}{3}CE$, то

$$ZE = \left(\frac{1}{3} : 2\right) \cdot CE = \frac{1}{6}CE.$$

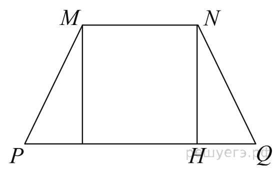
Таким образом, получаем, что $CZ : ZE = 5 : 1$.

б) Найдем периметр трапеции $MNPQ$: $P = MN + NQ + PQ + MP$, где

$$MN = \frac{1}{2}AB = 3; \qquad PQ = \frac{5}{6}AB = \frac{5}{6} \cdot 6 = 5.$$

Для вычисления сторон $MP = NQ$, найдем высоту

$$KZ = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$



(величина $SO = 2$ находится по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SOC, учитывая, что OC — радиус описанной окружности вокруг равностороннего треугольника и равен $OC = \frac{6}{\sqrt{3}}$. Длину отрезка NQ найдем из прямоугольного треугольника NHQ (смотри рисунок).

Катет $NH = KZ = 1$, а катет HQ равен

$$HQ = \frac{PQ - MN}{2} = \frac{5-3}{2} = 1; \qquad NQ = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Получаем значение периметра

$$P = 5 + 3 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 8 + 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $8 + 2\sqrt{2}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, но получен неверный ответ в результате вычислительной ошибки, ИЛИ решение не закончено,	1

ИЛИ ~~при правильном ответе решение недостаточно обосновано~~	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15. Задание 15 № 508559

Решите неравенство: $\frac{320-4^{-x-1}}{128-2^{-x}} \geq 2,5.$

Решение.

Сделаем замену $y=2^{-x}$.

$$\frac{320-0,25y^2}{128-y} \geq 2,5 \Leftrightarrow \frac{-0,25y^2+2,5y}{128-y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{0,25y(y-10)}{128-y} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq y \leq 10 \\ y>128. \end{array}\right.$$

Тогда $0 \leq 2^{-x} \leq 10$ или $2^{-x}>128$, откуда находим множество решений неравенства: $(-\infty,-7) \cup[-\log_2 10,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty,-7) \cup[-\log_2 10,+\infty)$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

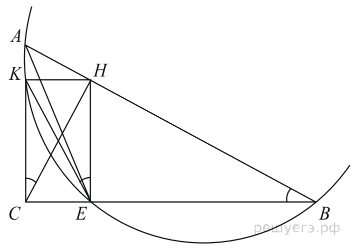
16. Задание 16 № 511390

На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB=24$, $CH=7$.

Решение.



а) Предположим для определённости, что точка E лежит на катете BC, а точка K — на катете AC. Проведём отрезок KE и заметим, что он является гипотенузой прямоугольного треугольника KCE, подобного треугольнику BCA.

Рассмотрим углы четырёхугольника $ABEK$. Если $\angle ABE = \alpha$, то

$$\angle BEK = \angle BEH + \angle HEK = 90^\circ + \alpha \text{ , а } \angle KAB = 90^\circ - \alpha.$$

Значит,

$$\angle BEK + \angle KAB = 90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ.$$

Сумма двух противоположных углов в четырёхугольнике 180°, следовательно, четырёхугольник вписан в окружность.

б) Радиус окружности, проходящей через точки A, B и E, равен

$$\frac{AB}{2\sin\angle BEA} = \frac{AB}{2\sin\angle AEC}.$$

Из подобия треугольников находим

$$\frac{CE}{CH} = \frac{AC}{AB}, \text{ откуда } CE = \frac{CH \cdot AC}{AB}.$$

Тогда

$$AE = \sqrt{CE^2 + AC^2} = AC \cdot \sqrt{\frac{CH^2 + AB^2}{AB^2}} = \frac{AC}{AB}\sqrt{CH^2 + AB^2}.$$

Поэтому

$$\sin\angle AEC = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}}.$$

Следовательно, искомый радиус равен

$$AB : \frac{2AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{CH^2 + AB^2} = \frac{25}{2}.$$

Ответ: $\frac{25}{2}$.

Примечание.

В авторской формулировке задачи длина гипотенузы была равна 4, а длина проведённой к ней высоты — 3. Однако высота треугольника не больше медианы, исходящей из той же вершины. Поэтому в прямоугольном треугольнике длина высоты, опущенной на гипотенузу, не больше половины длины гипотенузы. Условие исправили.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б.	3
Получен обоснованный ответ в пункте б. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а. ИЛИ При обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

17. Задание 17 № 519364

В августе 2017 года взяли кредит. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на *r*%;
— с февраля по июль необходимо выплатить часть долга.

Кредит можно выплатить за три года равными платежами по 38 016 рублей, или за два года равными платежами по 52 416 рублей.

Найдите *r*.

Решение.

Пусть сумма кредита S, ежегодные выплаты x, $k=1+\frac{r}{100}$. По условию долг на июль меняется так:

$$S,\ kS-x,\ k^2S-kx-x,\ k^3S-k^2x-kx-x,$$

Если долг выплачен двумя равными платежами x_2, то

$$k^2S-kx_2-x_2=0\Leftrightarrow Sk^2=kx_2+x_2.$$

Если долг выплачен тремя равными платежами x_3, то

$$k^3S-k^2x_3-kx_3-x_3=0$$

Подставим в это уравнение выражение для Sk^2, получаем:

$$\begin{gathered}k(kx_2+x_2)-k^2x_3-kx_3-x_3=0\\ k^2x_2+kx_2-k^2x_3-kx_3-x_3=0\\ k^2(x_2-x_3)+k(x_2-x_3)-x_3=0\\ (k^2+k)(x_2-x_3)-x_3=0\\ k^2+k-\frac{x_3}{x_2-x_3}=0,\end{gathered}$$

По условию $x_3=38016$, а $x_2=52416$, тогда:

$$\frac{x_3}{x_2-x_3}=\frac{38016}{52416-38016}=\frac{38016}{14400}=2,64$$

Откуда получаем для k:

$$k^2+k-2,64=0$$

Откуда получаем посторонний корень $k=-2,2$ и корень $k=1,2$, а, следовательно, $r=20$.

Ответ: 20

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

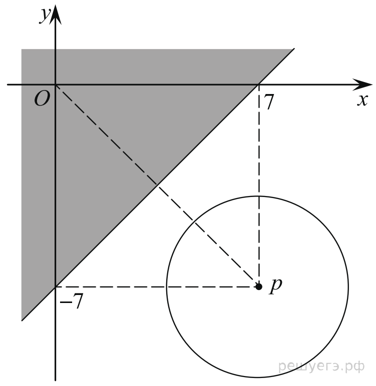
18. Задание 18 № 501419

Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $\sqrt{a-2xy}=y-x+7$ имеет единственное решение.

Решение.

$$\sqrt{a-2xy}=y-x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} y-x+7\ge 0, \\ a-2xy=x^2+y^2+49-2xy-14x+14y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x+7\ge 0, \\ (x-7)^2+(y+7)^2=a+49. \end{cases}$$

Неравенство $y-x+7\ge 0$ задает на координатной плоскости «верхнюю» полуплоскость с границей $y-x+7=0$, а уравнение $(x-7)^2+(y+7)^2=a+49$ при $a>-49$ — окружность с центром $P(7;-7)$ и радиусом $R=\sqrt{a+49}$ (см. рисунок).



Окружность и полуплоскость имеют ровно одну общую точку тогда и только тогда, когда радиус окружности равен половине диагонали *PO* квадрата *APBO*, т. е., $\sqrt{a+49}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$, откуда $a=-24,5$.

При $a<-49$ уравнение, а, следовательно, и вся система решений не имеют, а при $a=-49$ решением уравнения является пара $(7;-7)$, которая не удовлетворяет неравенству $y-x+7\ge 0$.

Ответ: $a=-24,5$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено искомое значение а, возможно неверное, из-за одной допущенной вычислительной ошибки (описки) или не рассмотрен случай $a\le -49$	3
С помощью верного рассуждения получено искомое значение *a*, возможно неверное, из-за одной допущенной вычислительной ошибки (описки) и при этом не рассмотрен случай $a\le -49$	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения графиков неравенства и уравнения (приведен правильный рисунок)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19. Задание 19 № 520664

Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 2S(n) + 23$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 3S(n) + 23$?

в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n) = 8S(n) + 83$?

Решение.

а) Такое число существует. Например, при $n = 16$ имеем $S(n) = 7$ и $K(n) = 37 = 2 \cdot 7 + 23$.

б) Предположим, что такое число существует. Тогда если число $S(n)$ чётное, то число $K(n) = 3S(n) + 23$ нечётное. Если же число $S(n)$ нечётное, то число $K(n) = 3S(n) + 23$ чётное. С другой стороны, любая цифра и её квадрат имеют одинаковую чётность (то есть чётны или нечётны одновременно). Значит, $S(n)$ и $K(n)$ также имеют одинаковую чётность. Пришли к противоречию.

в) Пусть n — искомое число, m — количество всех девяток в десятичной записи числа n. Тогда сумма всех отличных от девятки цифр числа n равна $S(\mathrm{n}) - 9m$, а сумма их квадратов не более $8(S(n) - 9m)$. Значит, $8S(n) + 83 = K(n) \le 81m + 8(S(n) - 9m) = 8S(n) + 9m$. Следовательно, $m \ge 10$.

Поскольку искомое число n является наименьшим натуральным из удовлетворяющих равенству $K(n) = 8S(n) + 83$, среди его цифр нет нулей (иначе их можно было бы вычеркнуть) и все его цифры расположены по возрастанию (иначе перестановкой цифр n можно было бы уменьшить). Значит, все девятки в десятичной записи числа n стоят в конце.

Из равенства $K(n) = 8S(n) + 83$ следует, что либо $S(n)$, либо $K(n)$ не делится на 9 и в числе n есть отличные от девяток цифры. Поэтому $n \ge 19\ 999\ 999\ 999$. При этом $K(19\ 999\ 999\ 999) = 811 = 8 \cdot 91 + 83 = 8S(19\ 999\ 999\ 999) + 83$. Значит, число $n = 19\ 999\ 999\ 999$ и есть искомое.

Ответ: а) да; б) нет; в) 19 999 999 999.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	323511	140
2	519503	6
3	510481	5
4	517209	0,4
5	77366	5
6	26096	12
7	119974	7
8	324451	5
9	519805	6
10	28012	0,0025
11	39443	3
12	517236	3