Решения и ответы

К учебнику «Физика. 9 класс»

(Авторы: И. К. Кикоин, А. К. Кикоин)

ВИСАГИНАС
АЛЬФА
1999

УДК 53(075.3)
ББК 22.3я72
А 79

Авторы-составители
А. Е. Арбатский, Н. В. Арбатская

Арбатский А. Е., Арбатская Н. В.
А 79 Решения и ответы: К учебнику «Физика»: для 9 кл. сред. шк./И. К. Кикоин, А. К. Кикоин.— Висагинас: Альфа, 1999.— 192 с.
ISBN 9986-582-75-X.

УДК 53(075.3)
ББК 22.3я72

ISBN 9986-582-75-X

В этой книге учащимся предлагаются решения и ответы к задачам, примерам и упражнениям из традиционного школьного учебника. В первую очередь она адресована тем учащимся, которые испытывают трудности в решении задач и которым анализ предлагаемого варианта решения поможет выстроить цепочку логических рассуждений и проанализировать их последовательность. Естественно, что ученик может решить тот или иной пример иначе, допустимы и иные требования к оформлению письменной работы. Ученикам будет целесообразно обращаться к «решебнику» уже после того, как они самостоятельно решат примеры и задачи, или же тогда, когда они убедятся, что не в силах справиться с заданием самостоятельно.

Упражнение 1

1. В начальный момент времени тело находилось в точке с координатами $x_0 = -2$ м и $y_0 = 4$ м. Тело переместилось в точку с координатами $x = 2$ м и $y = 1$ м. Найдите проекции вектора перемещения на оси X и Y. Начертите вектор перемещения[1].

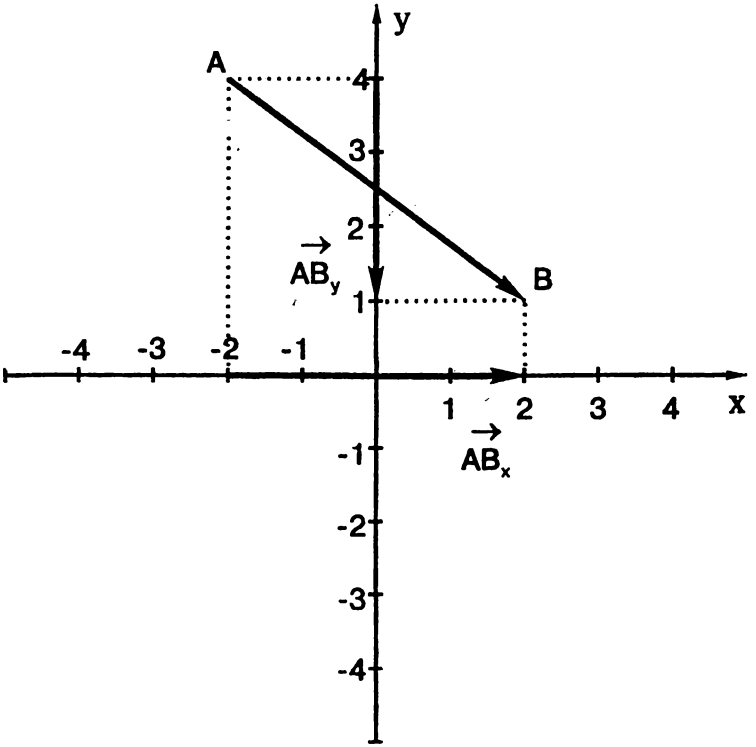
Нарисуем вектор перемещения, соединив начальную и конечную точки.

Для вычисления проекций вектора перемещения на оси необходимо вычесть координаты конечной точки из координат начальной:

$$|AB|_x = 2\text{ м} - (-2\text{ м}) = 4\text{ м},$$

$$|AB|_y = 1\text{ м} - 4\text{ м} = -3\text{ м}.$$

[1] Условия заданий приводятся в учебных целях и в необходимом объеме как иллюстративный материал. Имена авторов и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги. (Ст. 19 п. 2 Закона РФ об авторском праве и смежных правах от 9 июня 1993г.)



Здесь $|AB|_x$ и $|AB|_y$ модули проекций вектора перемещения на оси x и y соответственно.

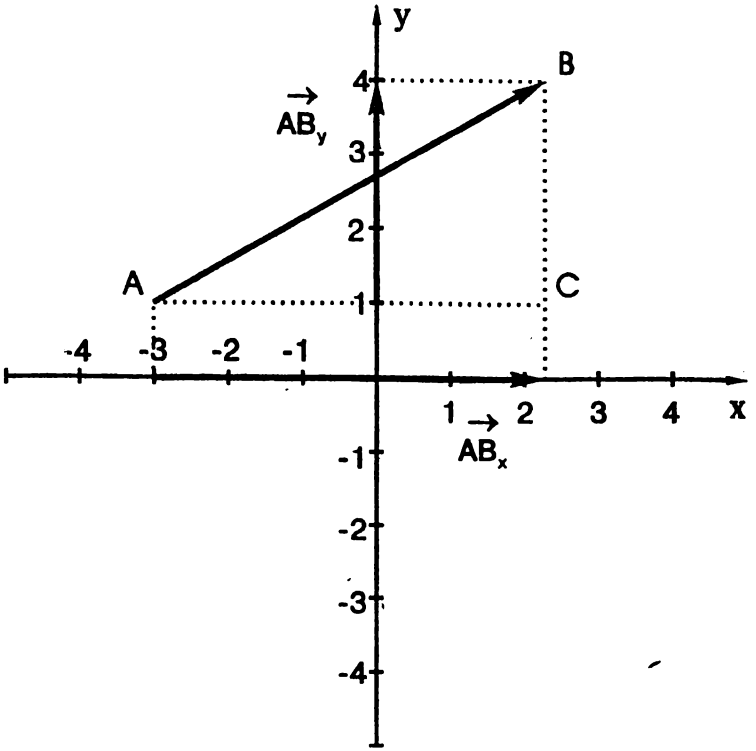
2. Из начальной точки с координатами $x_0 = -3$ м и $y_0 = 1$ м тело прошло некоторый путь так, что проекция вектора перемещения на ось X оказалась равной 5,2 м, а на ось Y — 3 м. Найдите координаты конечного положения тела. Начертите вектор перемещения. Чему равен его модуль?

Отложим на осях проекции вектора перемещения $\vec{AB}_x$ и $\vec{AB}_y$ от координат начальной точки A. Полученные таким образом координаты будут координатами конечной точки перемещения B:

$$x_к = -3\,\text{м} + |AB|_x = -3\,\text{м} + 5{,}2\,\text{м} = 2{,}2\,\text{м},$$
$$y_к = 1\,\text{м} + |AB|_y = 1\,\text{м} + 3\,\text{м} = 4\,\text{м}.$$

Здесь $|AB|_x$ и $|AB|_y$ модули проекций перемещения на оси x и y соответственно.

Соединив начальную и конечную точки перемещения на графике, получим вектор перемещения.

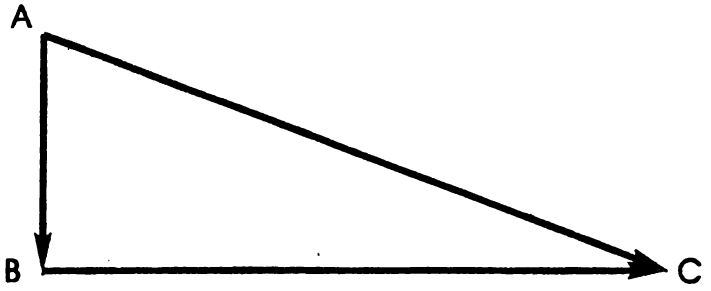


Для вычисления модуля вектора перемещения рассмотрим прямоугольный треугольник *ABC*. Заметим, что его катеты равны проекциям вектора перемещения на оси. Тогда длину его гипотенузы *AB* можно вычислить по теореме Пифагора:

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{|AB|_x^{\ 2} + |AB|_y^{\ 2}} =$$

$$= \sqrt{(5{,}2\ \text{м})^2 + (3\ \text{м})^2} \approx 6\ \text{м}.$$

3. Любитель прогулок прошел 5 км в южном направлении, а затем еще 12 км в восточном направлении. Чему равен модуль совершенного им перемещения?



Согласно условию задачи пешеход совершил свою прогулку по катетам AB и BC прямоугольного треугольника. Для вычисления модуля перемещения необходимо вычислить гипотенузу этого треугольника AC. Воспользуемся теоремой Пифагора:

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{(5\text{ км})^2 + (12\text{ км})^2} = 13\text{ км}.$$

Упражнение 2

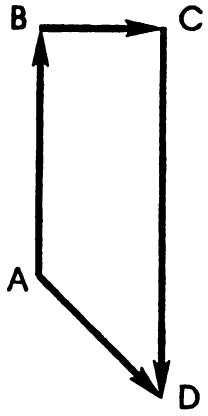
1. Группа туристов, двигаясь с постоянной по модулю скоростью 5 км/ч, сначала в течение 1 ч идёт на север, затем в течение 0,5 ч на восток и, наконец, в течение 1,5 ч на юг. Где окажется группа после прохождения этих трёх участков? Сколько времени ей потребуется на возвращение в исходную точку по прямой?

Вычислим расстояния, которые прошли туристы на каждом отрезке пути:

$$|AB| = vt_1 = 5\,\text{км/ч} \cdot 1\,\text{ч} = 5\,\text{км},$$

$$|BC| = vt_2 = 5\,\text{км/ч} \cdot 0{,}5\,\text{ч} = 2{,}5\,\text{км},$$

$$|CD| = vt_3 = 5\,\text{км/ч} \cdot 1{,}5\,\text{ч} = 7{,}5\,\text{км}.$$



В результате движения по маршруту туристы переместились по оси, направленной с запада на восток, на вектор $\vec{BC}$ и по оси, направленной с юга на север, на вектор $\vec{AB} - \vec{CD}$.

Результирующее перемещение с юга на север:

$$\left|\vec{AB} - \vec{CD}\right| = |AB| - |CD| = 5\text{ км} - 7{,}5\text{ км} = -2{,}5\text{ км}.$$

С запада на восток:

$$\left|\vec{BC}\right| = 2{,}5\text{ км}.$$

Значит туристы переместились на одинаковые расстояния на юг и на восток, или точно на юго-восток.

Величину вектора результирующего перемещения вычислим по теореме Пифагора:

$$\left|\vec{AD}\right| = \sqrt{\left|\vec{AB} - \vec{CD}\right|^2 + \left|\vec{BC}\right|^2} =$$

$$= \sqrt{(-2{,}5\text{ км})^2 + (2{,}5\text{ км})^2} \approx 3{,}5\text{ км}.$$

Теперь определим время, за которое туристы могут вернуться назад:

$$t = \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{v} = 3{,}5 \text{ км}/5\text{км/ч} = 0{,}7 \text{ ч} = 42 \text{ мин.}$$

2. Автомобилист, двигаясь со скоростью 30 км/ч, проехал половину пути до места назначения за некоторый промежуток времени. С какой скоростью он должен продолжить движение, чтобы за такое же время достигнуть цели и вернуться обратно?

Обозначим длину всего пути за s, а скорость движения автомобиля за v. Тогда первую половину пути автомобиль проехал за время:

$$t = \frac{\frac{s}{2}}{v} = \frac{s}{2v}.$$

Чтобы проехать оставшуюся часть пути и вернуться назад, автомобилю необходимо проехать расстояние:

$$\frac{s}{2} + s = \frac{3}{2}s.$$

Допустим, что он будет ехать на этом участке со скоростью V. Тогда время, за которое он проедет этот путь:

$$T = \frac{\frac{3}{2}s}{V} = \frac{3s}{2V}.$$

Приравнивая времена t и T, получим уравнение:

$$T = \frac{3s}{2V} = \frac{s}{2v} = t,$$

$$\frac{3s}{2V} = \frac{s}{2v}.$$

Решив это уравнение относительно V, получим:

$$V = 3v = 3 \cdot 30\,\text{км/ч} = 90\,\text{км/ч}.$$

3. Застигнутый грозой путник увидел вспышку молнии, а через 10 с до него донеслись раскаты грома. На каком расстоянии от него произошел грозовой разряд, если скорость звука в воздухе равна 340 м/с?

Обозначим скорость, с которой движется звук, за v. Расстояние, на котором произошел удар молнии, можно вычислить по формуле:

$$s = vt = 340\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 10\,\text{с} = 3400\,\text{м} = 3{,}4\,\text{км}.$$

Упражнение 3

1. Пользуясь графиками 2 и 4 (см. рис. 28), найдите расстояние между движущимися телами в момент времени $t = 3\,\text{с}$.

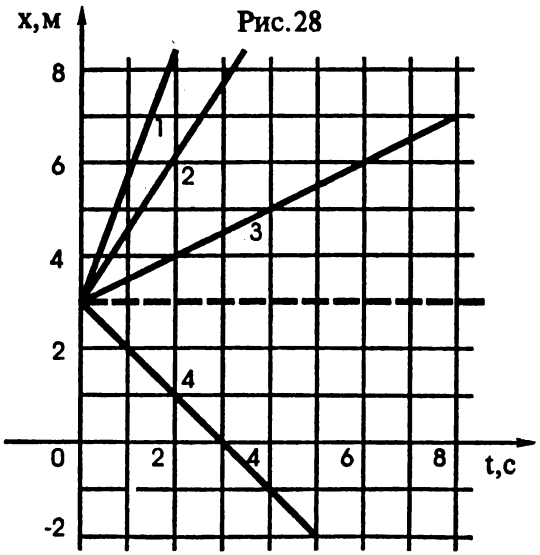


Рис.28

Найдем на графике координаты тел 2 и 4 в момент времени $t = 3\,с$:

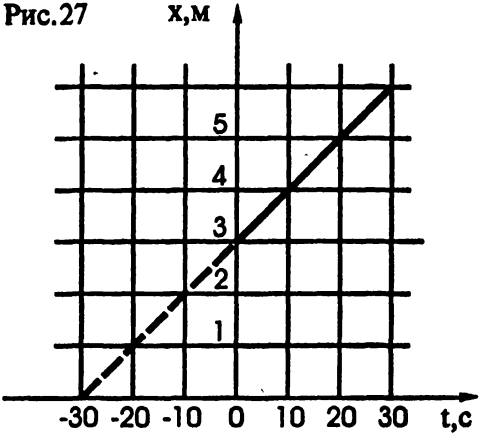
$$x_2 = 7{,}5\,м,$$
$$x_4 = 0\,м.$$

Расстояние между телами равно разности их координат. Или:

$$S = x_2 - x_4 = 7{,}5\,м - 0\,м = 7{,}5\,м.$$

2. По графику, изображенному на рисунке 27, определите, как направлена скорость тела. Чему равен модуль скорости?

Рис.27



Так как значение координаты тела увеличивается со временем, скорость тела направлена так же как и ось X.

Скорость тела рассчитаем, определив на графике координаты тела в два произвольные момента времени, например, в моменты $t_1 = 0\,\text{с}$ и $t_2 = 30\,\text{с}$:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{6\,\text{м} - 3\,\text{м}}{30\,\text{с} - 0\,\text{с}} = 0{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Упражнение 4

1. Двигатели самолёта сообщают ему скорость относительно воздуха, равную 900 км/ч. С какой скоростью движется самолет относительно Земли при попутном ветре, скорость которого равна 50 км/ч; при таком же встречном ветре?

Обозначим скорость самолёта относительно воздуха за $\vec{V}$, а скорость ветра за $\vec{v}$. При движении самолёта против ветра векторы скоростей отнимаются, а при движении по ветру — складываются. Поскольку оба вектора направлены вдоль одной прямой, действия над векторами можно заменить действиями над их модулями:

$$\left|\vec{V}_1\right| = \left|\vec{V}\right| + \left|\vec{v}\right| = 900 \text{ км/ч} + 50 \text{ км/ч} = 950 \text{ км/ч},$$

$$\left|\vec{V}_2\right| = \left|\vec{V}\right| - \left|\vec{v}\right| = 900 \text{ км/ч} - 50 \text{ км/ч} = 850 \text{ км/ч}.$$

Здесь $\left|\vec{V}_1\right|$ — скорость самолёта по ветру, а $\left|\vec{V}_2\right|$ — скорость самолёта против ветра.

2. Автомобиль движется в западном направлении со скоростью 80 км/ч. Другой автомобиль движется ему навстречу с такой же скоростью. В некоторый момент расстояние между автомобилями равно 10 км. Сколько времени пройдет до момента встречи автомобилей?

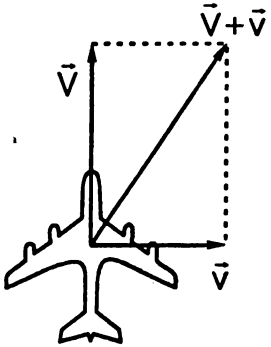
Обозначим скорость первого автомобиля за $\vec{V}_1$, а скорость второго автомобиля за $\vec{V}_2$. Перейдём в систему отсчёта, связанную с первым автомобилем. В этой системе отсчёта первый автомобиль покоится, а второй движется со скоростью $\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Нам необходимо определить, за какое время второй автомобиль в этой системе отсчёта пройдёт расстояние $s = 10\,\text{км}$. Поскольку оба вектора направлены вдоль одной прямой, действия над векторами можно заменить действиями над их модулями. При этом необходимо учесть лишь направления векторов. Поскольку векторы $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ направлены в разные стороны, приняв вектор $\vec{V}_2$ за положительный, мы должны брать его модуль со знаком +, а модуль вектора $\vec{V}_1$ со знаком —:

$$t = \frac{s}{\left|\vec{V}\right|} = \frac{s}{\left|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right|} = \frac{s}{\left|\vec{V}_2\right| - \left(-\left|\vec{V}_1\right|\right)} = \frac{s}{\left|\vec{V}_2\right| + \left|\vec{V}_1\right|} =$$

$$= 10\,\text{км}/(80\ \text{км/ч} + 80\ \text{км/ч}) = 0{,}0625\ \text{ч} = 225\,\text{с}.$$

3. Самолёт, стартовав в Москве, держит по компасу курс на север, летя на высоте 8 км со скоростью 720 км/ч. Какими будут координаты самолёта относительно аэропорта через 2 ч после старта, если во время полёта дует западный ветер со скоростью 10 м/с?

Обозначим скорость самолёта относительно воздуха за $\vec{V}$, а скорость ветра за $\vec{v}$. При движении самолёта вместе с ветром векторы скоростей складываются, и самолёт совершает одновременно два движения: относительно воздуха с юга на север со скоростью $|\vec{V}|$ и вместе с воздухом с запада на восток со скоростью $|\vec{v}| = 10$ м/с $= 36$ км/ч.



Тогда можно сказать, что за время t самолёт улетит от аэропорта в направлении с юга на север на расстояние:

$$S_{\text{юс}} = |\vec{V}|t = 720\,\text{км/ч} \cdot 2\,\text{ч} = 1440\,\text{км}.$$

И в направлении с запада на восток:

$$S_{зв} = |\vec{v}|t = 36 \text{ км/ч} \cdot 2 \text{ ч} = 72 \text{ км}.$$

Заметим, что самолёт также переместился в вертикальном направлении на расстояние 8 км вверх.

Полученные расстояния и будут искомыми координатами.

Упражнение 5

1. Половину времени при переезде из одного пункта в другой автомобиль двигался с постоянной скоростью 60 км/ч. С какой постоянной скоростью он должен двигаться оставшееся время, если средняя скорость движения равна 65 км/ч?

Обозначим полное время движения за t, скорость движения на первом участке за v_1, скорость движения на втором участке за v_2 и среднюю скорость движения за V.

Расстояние, которое проехал автомобиль на первом этапе пути:

$$s_1 = v_1 \frac{t}{2}.$$

Расстояние, которое проехал автомобиль на втором этапе пути:

$$s_2 = v_2 \frac{t}{2}.$$

Тогда полный путь, пройденый автомобилем:

$$S = s_1 + s_2 = v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2} = \frac{t}{2}(v_1 + v_2).$$

По определению, средняя скорость движения равна полному расстоянию, поделённому на полное время, за которое произошло перемещение:

$$V = \frac{S}{t} = \frac{\frac{t}{2}(v_1 + v_2)}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Из последнего уравнения найдём:

$$v_2 = 2V - v_1 = 2 \cdot 65\ \text{км/ч} - 60\ \text{км/ч} = 70\ \text{км/ч}.$$

2. Первую половину пути до места назначения автомобиль прошёл с постоянной скоростью 50 км/ч, а вторую половину с постоянной скоростью 60 км/ч. С какой средней скоростью двигался автомобиль?

Обозначим весь пройденный путь за S, скорость движения на первом участке за v_1, скорость движения на втором участке за v_2 и среднюю скорость движения за V.

Время, за которое автомобиль проехал первую половину пути:

$$t_1 = \frac{\frac{S}{2}}{v_1} = \frac{S}{2v_1}.$$

Время, за которое автомобиль проехал вторую половину пути:

$$t_2 = \frac{\frac{S}{2}}{v_2} = \frac{S}{2v_2}.$$

Тогда полное время движения:

$$T = t_1 + t_2 = \frac{S}{2v_1} + \frac{S}{2v_2} = \frac{S}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right).$$

По определению, средняя скорость движения равна полному расстоянию, поделённому на полное время, за которое произошло перемещение:

$$V = \frac{S}{T} = \frac{S}{\frac{S}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} =$$

$$= (2 \cdot 50 \text{ км/ч} \cdot 60 \text{ км/ч}) / (50 \text{ км/ч} + 50 \text{ км/ч}) \approx$$

$$\approx 54{,}5 \text{ км/ч}.$$

Упражнение 6

1. Троллейбус, трогаясь с места, движется с постоянным ускорением 1,5 м/с^2. Через какое время он приобретет скорость 54 км/ч?

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at\,.$$

Здесь $v_0 = 54$ км/ч $= 15$ м/с — начальная скорость троллейбуса, a — его ускорение, t — время, прошедшее от начала движения.

Разрешив это уравнение относительно t, получим:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{15\,\frac{\text{м}}{\text{с}} - 0\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{1{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \approx 10\,\text{кг}\,.$$

2. Автомобиль, движущийся со скоростью 36 км/ч, останавливается при торможении в течение 4 с. С каким постоянным ускорением движется автомобиль при торможении?

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Здесь $v_0 = 36\,\text{км/ч} = 10\,\text{м/с}$ — начальная скорость автомобиля, a — его ускорение, t — время, прошедшее от начала движения.

Разрешив это уравнение относительно a, получим:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0\frac{\text{м}}{\text{с}} - 10\frac{\text{м}}{\text{с}}}{4\text{с}} = -2{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Знак минус перед численным значением ускорения означает, что вектор ускорения направлен противоположно вектору начальной скорости, поэтому скорость автомобиля уменьшается.

3. Автомобиль, двигаясь с постоянным ускорением, на некотором участке пути увеличил свою скорость с 15 до 25 м/с. За какое время произошло это увеличение, если ускорение автомобиля равно 1,6 м/с^2.

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Здесь v_0 — начальная скорость тела, a — ускорение тела, t — время, прошедшее от начала движения.

Разрешив это уравнение относительно t, получим:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{25\frac{\text{м}}{\text{с}} - 15\frac{\text{м}}{\text{с}}}{1{,}6\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 6{,}25\,\text{с}\,.$$

4. Какая скорость движения была бы достигнута, если бы тело в течение 0,5 ч двигалось с ускорением 10 м/с^2 при начальной скорости, равной нулю?

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at\,.$$

Здесь v_0 — начальная скорость тела, a — ускорение тела, t — время, прошедшее от начала движения.

Подставив в это уравнение данные задачи, получим:

$$v = v_0 + at = 0\frac{\text{м}}{\text{с}} + 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 1800\,\text{с} = 18000\frac{\text{м}}{\text{с}} = 64800\ \text{км/ч}.$$

Упражнение 7

1. Постройте в координатных осях (x,t) графики скорости двух тел, движущихся равноускоренно: одно с возрастающей по модулю скоростью, другое — с убывающей. Начальные скорости и ускорения тел соответственно равны: 1 м/с и 0,5 м/с^2, 9 м/с и 1,5 м/с^2. Какой путь пройдет второе тело до остановки? Через какое время скорости обоих тел станут одинаковыми и какой путь пройдет за это время первое тело?

При равноускоренном движении скорость в произвольный момент времени можно вычислить из уравнения:

$$v = v_0 + at\,.$$

Здесь v_0 — начальная скорость тела, a — ускорение тела, t — время, прошедшее от начала движения.

Подставив в это уравнение известные из условия величины, получим два уравнения:

$$v_1\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = 1\frac{\text{м}}{\text{с}} + 0{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}t[\text{с}] = 1 + 0{,}5t[\text{с}], \qquad (1)$$

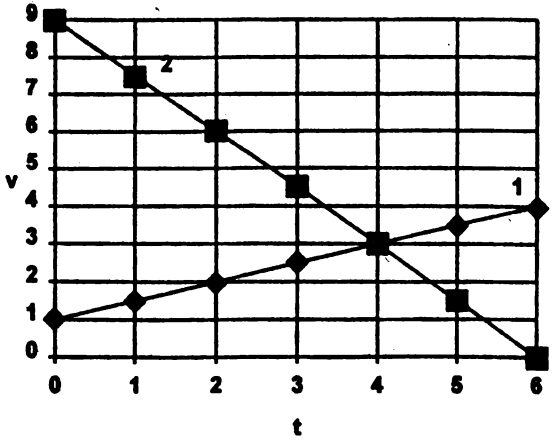
$$v_2\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = 9\frac{\text{м}}{\text{с}} - 1{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}t[\text{с}] = 9 - 1{,}5t[\text{с}]. \qquad (2)$$

Здесь значения, данные в квадратных скобках, показывают единицы измерения переменных величин. Знак минус перед значением ускорения во втором уравнении показывает, что вектор ускорения направлен противоположно вектору начальной скорости, то есть происходит торможение тела.

Подставляя в полученные формулы последовательные значения времён, построим таблицы:

t [с]	0	1	2	3	4	5	5
v_1 [м/с]	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
v_2 [м/с]	9	7,5	6	4,5	3	1,5	0

По точкам построим графики:



На графике знаком 1 обозначено первое тело, знаком 2 — второе. Скорости выражены в м/с, время — в с.

Путь, пройденный телом при равноускоренном движении, можно вычислить по формуле:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Из графика найдём, что полная остановка второго тела наступила при $t = 6\,\text{с}$. Подставив известные величины в последнюю формулу, найдём:

$$s_2 = v_{0_2} t - \frac{a_2 t^2}{2} = 9\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 6\,\text{с} - \frac{1{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot (6\,\text{с})^2}{2} = 27\,\text{м}.$$

Здесь v_{0_2} — начальная скорость второго тела, a_2 — его ускорение. Знак минус перед значением ускорения в последней формуле показывает, что вектор ускорения направлен противоположно вектору начальной скорости.

На графике найдём момент времени, когда скорости обоих тел равны, — это точка пересечения двух нарисованных прямых. При этом $t_1 = 4\,\text{с}$.

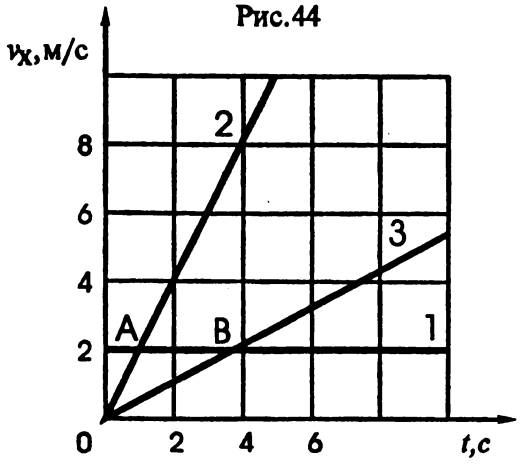
Путь, пройденный при равноускоренном движении телом 1, можно вычислить по формуле:

$$s_1 = v_{0_1} t_1 + \frac{a_1 t_1^2}{2} = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 4\,\text{с} + \frac{0{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot (4\,\text{с})^2}{2} = 8\,\text{м}.$$

Здесь v_{0_1} — начальная скорость первого тела, a_1 — его ускорение. Знак плюс перед значением ускорения в последней формуле показывает, что вектор ускорения направлен в ту же сторону, что и вектор начальной скорости.

2. На рисунке 44 изображены графики проекций скоростей движения трех тел. Каков характер движения этих тел? Что можно сказать о скоростях движения тел в моменты времени, соответствующие точкам *A* и *B* графика? Определите ускорения и напишите выражения для скорости и перемещения этих тел.

Рис.44



Из графика видно, что скорость тела 1 со временем не меняется. Его скорости в точках *A* и *B* равны его начальной скорости:

$$v_{A_1} = v_{B_1} = v_{0_1} = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Здесь v_{0_1} — начальная скорость первого тела.

Значит первое тело движется равномерно Ускорение этого тела равно 0. Зависимость его перемещения от времени:

$$s_1[\text{м}] = v_{0_1} t = 2\frac{\text{м}}{\text{с}} t = 2t[\text{с}].$$

Здесь значения, данные в квадратных скобках, показывают единицы измерения переменных величин.

Скорость тела 2 растёт линейно со временем. Значит оно движется равноускоренно. В точке A скорость этого тела равна скорости тела 1:

$$v_{A_2} = v_{0_1} = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Начальная скорость тела 2 $v_{0_2} = 0$ м/с, скорость в момент времени $t = 4$ с равна 8 м/с. Разрешив последнюю формулу относительно a и подставив известные величины, получим:

$$a_2 = \frac{v - v_{0_2}}{t} = \frac{8\frac{\text{м}}{\text{с}} - 0\frac{\text{м}}{\text{с}}}{4\,\text{с}} = 2\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Тогда зависимость скорости тела 2 от времени примет вид:

$$v_2\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = v_{0_2} + a_2 t = 0\frac{\text{м}}{\text{с}} + 2\frac{\text{м}}{\text{с}^2} t = 2t[\text{с}].$$

Здесь значения, данные в квадратных скобках, показывают единицы измерения переменных величин.

Найдём дополнительно момент времени, которому соответствует точка A. В этот момент скорость тела равна $v_2 = 2$ м/с, тогда из последнего уравнения вычислим:

$$t_A = \frac{v_2}{2} = \frac{2\frac{\text{м}}{\text{с}}}{2} = 1\,\text{с}.$$

Теперь запишем зависимость перемещения этого тела от времени:

$$s_2[\text{м}] = v_{0_2}t + \frac{a_2t^2}{2} = 0\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot t + \frac{2\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot t^2}{2} = 2(t\,[\text{с}])^2.$$

Здесь значения, данные в квадратных скобках, показывают единицы измерения переменных величин.

Скорость тела 3 растёт линейно со временем. Значит оно движется равноускоренно. В точке *B* скорость этого тела равна скорости тела 1:

$$v_{B_3} = v_{0_1} = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Зависимость скорости тела от его ускорения задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Начальная скорость тела 3 $v_{0_3} = 0\,\text{м/с}$, скорость в момент времени $t = 4\,\text{с}$ равна 2 м/с. Разрешив последнюю формулу относительно *a* и подставив известные величины, получим:

$$a_3 = \frac{v - v_{03}}{t} = \frac{2\frac{\text{м}}{\text{с}} - 0\frac{\text{м}}{\text{с}}}{4\text{с}} = 0{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Тогда зависимость скорости тела 3 от времени примет вид:

$$v_3\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = v_{0_3} + a_3t = 0\frac{\text{м}}{\text{с}} + 0{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}t = 0{,}5t[\text{с}].$$

Здесь значения, данные в квадратных скобках, показывают единицы измерения переменных величин.

Найдём дополнительно момент времени, которому соответствует точка *B*. В этот момент скорость тела 3 равна $v_3 = 2$ м/с, тогда из последнего уравнения вычислим:

$$t_B = \frac{v_3}{0{,}5} = \frac{2\frac{\text{м}}{\text{с}}}{0{,}5} = 4\,\text{с}\ .$$

Время, соответствующее точке *A*, мы вычислили ранее $t_A = 1\,\text{с}$. Скорость третьего тела в этот момент:

$$v_{A_3} = 0{,}5t_A = 0{,}5 \cdot 1\,\text{с} = 0{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Скорость второго тела в момент времени, соответствующий точке *B*:

$$v_{B_2} = 2t_B = 2 \cdot 4\,\text{с} = 8\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Теперь запишем зависимость перемещения тела 3 от времени:

$$s_3[\text{м}] = v_{0_3}t + \frac{a_3t^2}{2} = 0\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot t + \frac{0{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot t^2}{2} = 0{,}25\left(t[\text{с}]\right)^2.$$

Здесь значения, данные в квадратных скобках, показывают единицы измерения переменных величин.

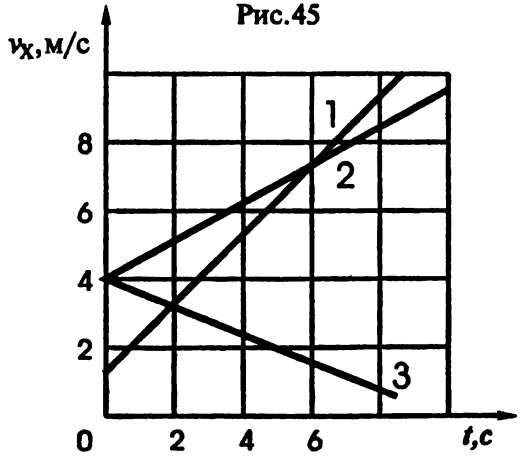
Таким образом, тело 1 движется равномерно, тела 2 и 3 равноускоренно; в момент времени, соответствующий точке *A*: $v_1 = v_2 = 2$ м/с, $v_3 = 0{,}5$ м/с; в момент времени, соответствующий точке *B*: $v_1 = v_3 = 2$ м/с, $v_2 = 8$ м/с; $a_1 = 0$ м/с^2, $a_2 = 2$ м/с^2,

$a_3 = 0{,}5\ \text{м/с}^2$; $v_1 = 2\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$, $s_1[\text{м}] = 2t[\text{с}]$, $v_2\left[\dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right] = 2t[\text{с}]$,

$s_2[\text{м}] = 2(t[\text{с}])^2$, $v_3\left[\dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right] = 0{,}5t[\text{с}]$, $s_3[\text{м}] = 0{,}25(t[\text{с}])^2$.

3. Пользуясь приведенными на рисунке 45 графиками проекций скоростей трех тел, выполните следующие задания: а) определите ускорения этих тел; б) составьте для каждого тела формулу зависимости скорости от времени; в) найдите, в чём сходны и в чём различны движения, соответствующие графикам 2 и 3?

Рис.45



Скорость тела 1 растёт линейно со временем. Значит оно движется равноускоренно.

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Начальная скорость тела 1 $v_{0_1} = 1\,\text{м/с}$, скорость в момент времени $t = 7\,\text{с}$ равна 8 м/с. Разрешив последнюю формулу относительно a и подставив известные величины, получим:

$$a_1 = \frac{v - v_{0_1}}{t} = \frac{8\frac{\text{м}}{\text{с}} - 1\frac{\text{м}}{\text{с}}}{7\,\text{с}} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Тогда зависимость скорости тела 1 от времени примет вид:

$$v_1\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = v_{0_1} + a_1 t = 1\frac{\text{м}}{\text{с}} + 1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}t = 1 + t[\text{с}].$$

Здесь значения, данные в квадратных скобках, показывают единицы измерения переменных величин.

Скорость тела 2 растёт линейно со временем. Значит оно движется равноускоренно.

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Начальная скорость тела 2 $v_{0_2} = 4\,\text{м/с}$, скорость в момент времени $t = 6\,\text{с}$ равна 7 м/с. Разрешив последнюю формулу относительно a и подставив известные величины, получим:

$$a_2 = \frac{v - v_{0_2}}{t} = \frac{7\frac{\text{м}}{\text{с}} - 4\frac{\text{м}}{\text{с}}}{6\,\text{с}} = 0{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Тогда зависимость скорости тела 2 от времени примет вид:

$$v_2\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = v_{0_2} + a_2 t = 4\frac{\text{м}}{\text{с}} + 0{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}t = 4 + 0{,}5t[\text{с}].$$

Здесь значения, данные в квадратных скобках, показывают единицы измерения переменных величин.

Скорость тела 3 падает линейно со временем. Значит оно движется равноускоренно, причём вектор его ускорения направлен противоположно вектору начальной скорости. Поэтому его скорость уменьшается.

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Начальная скорость тела 3 $v_{0_3} = 4$ м/с, скорость в момент времени $t = 6$ с равна 1 м/с. Разрешив последнюю формулу относительно a и подставив известные величины, получим:

$$a_3 = \frac{v - v_{0_3}}{t} = \frac{1\frac{\text{м}}{\text{с}} - 4\frac{\text{м}}{\text{с}}}{6\,\text{с}} = -0{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Тогда зависимость скорости тела 1 от времени примет вид:

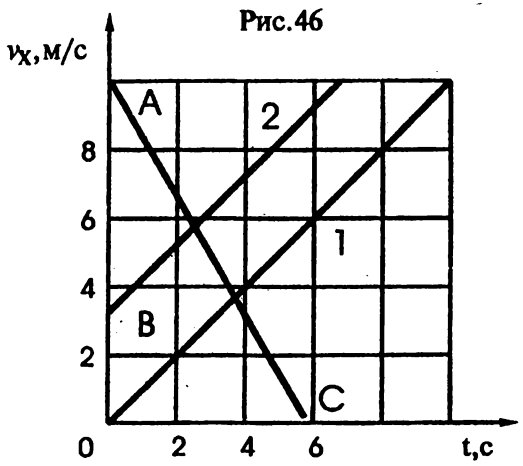
$$v_3\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = v_{0_3} + a_3 t = 4\frac{\text{м}}{\text{с}} - 0{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}t = 4 - 0{,}5t\,[\text{с}].$$

Здесь значения, данные в квадратных скобках, показывают единицы измерения переменных величин.

У тел, движения которых изображены на графиках 2 и 3, одинаковые начальные скорости. Совпадают и величины их ускорений. Разница состоит в направлении их ускорений. Если у тела 2 направление ускорения совпадает с направлением начальной скорости, то у тела 3 направление ускорения противоположно направлению начальной скорости.

4. На рисунке 46 приведены графики проекций скоростей движений трёх тел. По этим графикам: а) определите, чему соответствуют отрезки *OA*, *OB* и *OC* на осях координат; б) найдите ускорения тел; в) напишите выражения для скорости и перемещения каждого тела.

Рис.46



Скорость тела 1 растёт линейно со временем. Значит оно движется равноускоренно.

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at .$$

Начальная скорость тела 1 $v_{0_1} = 0$ м/с, скорость в момент времени $t = 10$ с равна 10 м/с. Разрешив последнюю формулу относительно *a* и подставив известные величины, получим:

$$a_1 = \frac{v - v_{0_1}}{t} = \frac{10\frac{\text{м}}{\text{с}} - 0\frac{\text{м}}{\text{с}}}{10\,\text{с}} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Тогда зависимость скорости тела 1 от времени примет вид:

$$v_1\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = v_{0_1} + a_1 t = 0\frac{\text{м}}{\text{с}} + 1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}t = t[\text{с}]\ .$$

Здесь значения, данные в квадратных скобках, показывают единицы измерения переменных величин.

Зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении в нашем случае примет вид:

$$s_1[\text{м}] = v_{0_1}t + \frac{a_1 t^2}{2} = 0\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot t + \frac{1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot t^2}{2} = 0{,}5\left(t[\text{с}]\right)^2.$$

Скорость тела 2 растёт линейно со временем. Значит оно движется равноускоренно.

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at\,.$$

Начальная скорость тела 2 $v_{0_2} = 3\,\text{м/с}$, скорость в момент времени $t = 7\,\text{с}$ равна 10 м/с. Разрешив последнюю формулу относительно a и подставив известные величины, получим:

$$a_2 = \frac{v - v_{0_2}}{t} = \frac{10\frac{\text{м}}{\text{с}} - 3\frac{\text{м}}{\text{с}}}{7\,\text{с}} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Тогда зависимость скорости тела 2 от времени примет вид:

$$v_2\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = v_{0_2} + a_2 t = 3\frac{\text{м}}{\text{с}} + 1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}t = 3 + t[\text{с}] .$$

Здесь значения, данные в квадратных скобках, показывают единицы измерения переменных величин.

Зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении в нашем случае примет вид:

$$s_2[\text{м}] = v_{0_2}t + \frac{a_2 t^2}{2} = 3\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot t + \frac{1\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot t^2}{2} = 3t[\text{с}] + 0{,}5\left(t[\text{с}]\right)^2 .$$

Скорость тела 3 падает линейно со временем. Значит оно движется равноускоренно. Причём направление ускорения противоположно направлению начальной скорости. Поэтому скорость тела со временем падает.

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at .$$

Начальная скорость тела 3 $v_{0_3} = 10$ м/с, скорость в момент времени $t = 6$ с равна 0 м/с. Разрешив последнюю формулу относительно a и подставив известные величины, получим:

$$a_3 = \frac{v - v_{0_3}}{t} = \frac{0\frac{\text{м}}{\text{с}} - 10\frac{\text{м}}{\text{с}}}{6\,\text{с}} \approx -1{,}7\frac{\text{м}}{\text{с}^2} .$$

Тогда зависимость скорости тела 3 от времени примет вид:

$$v_3\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = v_{0_3} + a_3 t = 10\frac{\text{м}}{\text{с}} - 1{,}7\frac{\text{м}}{\text{с}^2}t = 10 - 1{,}7t[\text{с}] .$$

Здесь значения, данные в квадратных скобках, показывают единицы измерения переменных величин.

Зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении в нашем случае примет вид:

$$s_3\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = v_{0_3}t + \frac{a_3t^2}{2} =$$

$$= 10\frac{\text{м}}{\text{с}}t - \frac{1{,}7\frac{\text{м}}{\text{с}^2}t^2}{2} = 10t[\text{с}] - 0{,}85\left(t[\text{с}]\right)^2.$$

Отрезок OA на графике соответствует начальной скорости третьего тела:

$$|OA| = v_{0_3} = 10\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Отрезок OB на графике соответствует начальной скорости второго тела:

$$|OB| = v_{0_2} = 3\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Отрезок OC на графике соответствует времени, за которое третье тело полностью остановится:

$$|OC| = 6\,\text{с}.$$

5. Самолёт при взлёте проходит взлётную полосу за 15 с и в момент отрыва от земли имеет скорость 100 м/с. С каким ускорением двигался самолёт по взлётной полосе и какова её длина?

Будем считать, что при разгоне самолёт движется равноускоренно. Зависимость скорости тела от вре-

мени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Начальная скорость самолёта $v_0 = 0$ м/с, скорость перед взлётом, в момент времени $t = 15$ с, равна 100 м/с. Разрешив последнюю формулу относительно ускорения самолёта — a и подставив известные величины, получим:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{100\frac{\text{м}}{\text{с}} - 0\frac{\text{м}}{\text{с}}}{15\,\text{с}} \approx 6{,}7\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Записав зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении и подставив в неё известные величины, получим длину взлётной полосы:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 0\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 15\,\text{с} + \frac{6{,}7\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(15\,\text{с})^2}{2} \approx 754\,\text{м}.$$

6. Снаряд, летящий со скоростью 1000 м/с, пробивает стенку блиндажа за 0,001 с, и после этого его скорость оказывается равной 200 м/с. Считая движение снаряда в толще стенки равноускоренным, найдите её толщину.

Будем считать, что при торможении снаряд движется равноускоренно. Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Начальная скорость снаряда $v_0 = 1000$ м/с, скорость после преодоления стенки блиндажа, в момент времени $t = 0{,}001$ с, равна 200 м/с. Разрешив последнюю формулу относительно ускорения снаряда — a и подставив известные величины, получим:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{200\,\frac{\text{м}}{\text{с}} - 1000\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{0{,}001\,\text{с}} = -8 \cdot 10^5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Знак минус перед полученным значением ускорения означает, что вектор ускорения направлен противоположно вектору начальной скорости.

Записав зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении и подставив в неё известные величины, получим толщину стенки блиндажа:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} =$$

$$= 1000\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 0{,}001\,\text{с} - \frac{8 \cdot 10^5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(0{,}001\,\text{с})^2}{2} = 0{,}6\,\text{м}.$$

7. Ракета движется с ускорением 45 м/с^2 и к некоторому моменту времени достигает скорости 900 м/с. Какой путь она пройдет в следующие 2,5 с?

Скорость ракеты к началу отсчёта времени или её начальная скорость $v_0 = 900$ м/с. Ракета движется равноускоренно. Тогда, записав зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении

и подставив в неё известные величины, получим путь, пройденный ракетой за указанное в условии время:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 900\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 2{,}5\,\text{с} + \frac{45\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(2{,}5\text{с})^2}{2} \approx 2390\,\text{м}.$$

8. На каком расстоянии от Земли оказался бы космический корабль через 30 мин после старта, если бы он всё время двигался прямолинейно с ускорением 9,8 м/с^2?

Начальная скорость космического корабля $v_0 = 0$ м/с. Корабль движется равноускоренно. Тогда, записав зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении и подставив в неё известные величины, получим путь, пройденный кораблём за указанное в условии время:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} =$$

$$= 0\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 1800\,\text{с} + \frac{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(1800\,\text{с})^2}{2} \approx 1{,}6 \cdot 10^7\,\text{м} = 1{,}6 \cdot 10^4\,\text{км}.$$

Заметим, что в последней формуле мы перевели значение времени, указанное в минутах, в секунды.

9. Наблюдения показали, что скаковая лошадь достигает наибольшей скорости 15 м/с после того, как она, приняв старт, «разгонится» на протяжении 30 м. Считая, что лошадь скачет с постоянным ускорением, найдите это ускорение.

Начальная скорость лошади $v_0 = 0$ м/с. Лошадь движется равноускоренно с ускорением — a. Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой, которая в нашем случае принимает вид:

$$v = v_0 + at = 0\frac{\text{м}}{\text{с}} + at = at.$$

Или время, за которое лошадь наберёт скорость v:

$$t = \frac{v}{a}.$$

Зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой, которая в нашем случае принимает вид:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 0\frac{\text{м}}{\text{с}}t + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2}.$$

Подставив значение t из предпоследнего уравнения в последнее и разрешив полученное уравнение относительно a, получим ускорение лошади:

$$s = \frac{a\left(\frac{v}{a}\right)^2}{2} = \frac{v^2}{2a},$$

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\left(15\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{2 \cdot 30\text{м}} = 3{,}75\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

10. Чтобы оторваться от земли, самолёт должен набрать скорость 180 м/с. На каком расстоянии от места старта на взлётной полосе самолёт достигает этого значения скорости, если его ускорение постоянно и равно 2,5 м/с^2?

Начальная скорость самолёта $v_0 = 0$ м/с. Самолёт движется равноускоренно с ускорением — a. Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой, которая в нашем случае принимает вид:

$$v = v_0 + at = 0\frac{\text{м}}{\text{с}} + at = at.$$

Или время, за которое самолёт наберёт скорость v:

$$t = \frac{v}{a}.$$

Зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой, которая в нашем случае принимает вид:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 0\frac{\text{м}}{\text{с}}t + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2}.$$

Подставив значение t из предпоследнего уравнения в последнее, получим путь, пройденный самолётом к моменту достижения взлётной скорости:

$$s = \frac{a\left(\frac{v}{a}\right)^2}{2} = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(180\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{2\cdot 2{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 6480\,\text{м}.$$

11. Пассажирский поезд тормозит и движется с ускорением 0,15 м/с^2. На каком расстоянии от места включения тормоза скорость поезда станет равной 3,87 м/с, если в момент начала торможения скорость была 54 км/ч?

Начальная скорость поезда $v_0 = 54$ км/ч $= 15$ м/с. Поезд движется равноускоренно с ускорением — a. Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой, которая в нашем случае принимает вид:

$$v = v_0 - at.$$

В условии задачи дано значение ускорения по модулю. Однако поскольку скорость поезда уменьшается, вектор ускорения направлен противоположно вектору скорости. Поэтому в последней формуле мы поставили перед значением ускорения знак минус.

Время, за которое поезд замедлится до скорости v:

$$t = \frac{v_0 - v}{a}.$$

Зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой, которая в нашем случае принимает вид:

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2}.$$

В условии задачи дано значение ускорения по модулю. Однако поскольку скорость поезда уменьшается, вектор ускорения направлен противоположно

вектору скорости. Поэтому в последней формуле мы поставили перед значением ускорения знак минус.

Подставив значение t из первого уравнения во второе, получим путь, пройденный поездом к моменту достижения заданной скорости:

$$s = v_0 \frac{v_0 - v}{a} - \frac{a\left(\frac{v_0 - v}{a}\right)^2}{2} = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} =$$

$$= \frac{\left(15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 - \left(3{,}87\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}15\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \approx 700\,\text{м}.$$

Упражнение 8

1. Точильный круг радиусом 10 см делает один оборот за 0,2 с. Найдите скорость точек, наиболее удаленных от оси вращения.

Самые удалённые точки от оси лежат на окружности радиусом, равным радиусу точильного круга — r. Все точки, лежащие на окружности радиусом $r = 10$ см движутся с одинаковой по модулю скоростью v. Произвольно выбранная на окружности точка по условию задачи за время полного оборота $T = 0{,}2$ с проходит расстояние, равное длине окружности:

$$s = 2\pi \cdot r.$$

Следовательно:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot 10^{-2}\,\text{м}}{0{,}2\,\text{с}} = 3{,}14\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Автомобиль движется по закруглению дороги радиусом 100 м. Чему равно центростремительное ускорение автомобиля, если он движется со скоростью 54 км/ч.

Автомобиль движется со скоростью $v = 54$ км/ч $=$ $= 15$ м/с. Запишем формулу для центростремительного ускорения и найдем ответ задачи:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{100\,\text{м}} = 2{,}3\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

3. Период обращения первого космического корабля спутника Земли «Восток» равнялся 90 мин. Средняя высота спутника над Землей была равна 320 км. Радиус Земли 6400 км. Вычислите скорость корабля.

За время, равное $T = 90$ мин., спутник пройдет расстояние, равное длине окружности радиусом $r = 320 + 6400$ км, т.е. расстояние $s = 2\pi \cdot r$. Следовательно, скорость космического корабля можно рассчитать по формуле:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot (320 + 6400) \cdot 1000\,\text{м}}{90 \cdot 60\,\text{с}} = 7800\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 7{,}8\,\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

4. Какова скорость движения автомобиля, если его колеса радиусом 30 см делают 600 оборотов в минуту?

Все точки колеса, находящиеся на его периферии на расстоянии $r = 30$ см от оси, движутся относительно оси колеса с одинаковой по модулю скоростью v, равной скорости автомобиля. Произвольно выбранная на этой окружности точка, по условию задачи, совершает за время, равное одной секунде, 10 оборотов. Следовательно, за секунду она пройдет расстояние, равное $s = 2\pi \cdot r \cdot 10$.

Поэтому скорость автомобиля будет равна:

$$v = 2\pi \cdot r \cdot n = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3\,\text{м} \cdot 10\,\frac{\text{об}}{\text{с}} = 1{,}9\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

5. Луна движется вокруг Земли на расстоянии 380 000 км от неё, совершая один оборот за 27,3 сут. Вычислите центростремительное ускорение Луны.

Переведём время, выраженное в сутках, в секунды:

$$T = 27{,}3\,\text{сут} = 235872\,\text{с}.$$

Вычислим центростремительное ускорение по формуле:

$$a = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2} \approx \frac{4 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 3{,}8 \cdot 10^8\,\text{м}}{\left(2{,}4 \cdot 10^5\,\text{с}\right)^2} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Упражнение 9

1. Найдите скорость алюминиевой тележки после её столкновения со стальной тележкой, если начальная скорость стальной тележки 4 м/с, а её скорость после столкновения 2 м/с. До столкновения алюминиевая тележка покоилась.

Для корректной постановки задачи необходимо положить, что обе тележки имеют одинаковые размеры. Примем за положительное направление начальную скорость движения стальной тележки.

Скорость стальной тележки до столкновения равна $v_{0_{ст}} = 4$ м/с, после столкновения $v_{1_{ст}} = 2$ м/с. Изменение скорости произошло в результате взаимодействия стальной тележки с алюминиевой в процессе столкновения. Во время столкновения обе тележки взаимодействовали и поэтому испытывали противоположные по направлению ускорения. Из текста учебника следует, что отношение ускорений при любом взаимодействии стального и алюминиевого тел равно:

$$-3a_{ст} = a_{ал}.$$

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Для стальной тележки это соотношение примет вид:

$$v_{1_{ст}} = v_{0_{ст}} + a_{ст}t. \qquad (1)$$

Для алюминиевой тележки аналогичное соотношение запишется как:

$$v_{1_{ал}} = v_{0_{ал}} + a_{ал}t = v_{0_{ал}} - 3a_{ст}t. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) найдём ускорение стальной тележки:

$$a_{ст} = \frac{v_{1_{ст}} - v_{0_{ст}}}{t}.$$

Подставив это значение в уравнение (2), получим:

$$v_{1_{ал}} = v_{0_{ал}} - 3\frac{v_{1_{ст}} - v_{0_{ст}}}{t}t = 0\frac{м}{с} - 3\left(2\frac{м}{с} - 4\frac{м}{с}\right) = 6\frac{м}{с}.$$

2. Алюминиевый и стальной цилиндры, опыт с которыми описан в этом параграфе, связаны нитью длиной 8 см. На каком расстоянии от оси вращения расположится каждый цилиндр?

Пусть стальной цилиндр при таком движении движется по оси радиусом $r_{ст}$, а алюминиевый по оси радиусом $r_{ал}$. Ускорения этих тел при движении по окружности равны:

$$a_{ал} = 4\pi^2 n^2 r_{ал},$$
$$a_{ст} = 4\pi^2 n^2 r_{ст}.$$

Здесь n — частота вращения.

Отношение модулей ускорения стального и алюминиевого цилиндров при этом движении будет:

$$\frac{a_{ст}}{a_{ал}} = \frac{4\pi^2 n^2 r_{ст}}{4\pi^2 n^2 r_{ал}} = \frac{r_{ст}}{r_{ал}}.$$

Из текста учебника следует, что отношение модулей ускорений при любом взаимодействии стального и алюминиевого цилиндров равно:

$$\frac{a_{ал}}{a_{ст}} = 3.$$

Комбинируя два последних уравнения, получим:

$$3r_{ст} = r_{ал}. \qquad (1)$$

С другой стороны, общая длина нити l равна сумме радиусов вращения цилиндров:

$$r_{ст} + r_{ал} = l. \qquad (2)$$

Подставив (1) в (2), получим:

$$l = r_{ст} + r_{ал} = r_{ст} + 3r_{ст} = 4r_{ст},$$

$$r_{ст} = \frac{l}{4} = \frac{8\,см}{4} = 2\,см,$$

$$r_{ал} = 3r_{ст} = 3 \cdot 2\,см = 6\,см.$$

3. В том же опыте цилиндры связаны нитью другой длины. При этом оказалось, что алюминиевый цилиндр при вращении стержня расположился на расстоянии 9 см от оси вращения. Какова длина нити?

Пусть стальной цилиндр при таком движении движется по оси радиусом $r_{ст}$, а алюминиевый по оси

радиусом $r_{ал}$. Ускорения этих тел при движении по окружности равны:

$$a_{ал} = 4\pi^2 n^2 r_{ал},$$
$$a_{ст} = 4\pi^2 n^2 r_{ст}.$$

Здесь n — частота вращения.

Отношение модулей ускорения стального и алюминиевого цилиндров при этом движении будет:

$$\frac{a_{ст}}{a_{ал}} = \frac{4\pi^2 n^2 r_{ст}}{4\pi^2 n^2 r_{ал}} = \frac{r_{ст}}{r_{ал}}.$$

Из текста учебника следует, что отношение модулей ускорений при любом взаимодействии стального и алюминиевого цилиндров равно:

$$\frac{a_{ал}}{a_{ст}} = 3.$$

Комбинируя два последних уравнения, получим:

$$r_{ст} = \frac{r_{ал}}{3}. \qquad (1)$$

С другой стороны, общая длина нити l равна сумме радиусов вращения цилиндров:

$$r_{ст} + r_{ал} = l. \qquad (2)$$

Подставив (1) в (2), получим:

$$l = r_{ст} + r_{ал} = \frac{r_{ал}}{3} + r_{ал} = \frac{4}{3} r_{ал} = \frac{4}{3} \cdot 9\,см = 12\,см.$$

Упражнение 10

1. Тележка движется по горизонтальной поверхности со скоростью 0,5 м/с. С ней сталкивается вторая тележка, движущаяся в том же направлении со скоростью 1,5 м/с. После столкновения обе тележки продолжают движение в прежнем направлении с одинаковыми скоростями 1 м/с. Найдите отношение масс этих тележек.

Пусть масса первой тележки m_1, а масса второй m_2. Во время столкновения тележки взаимодействовали друг с другом. При любом взаимодействии двух тел соотношение между их массами и модулями ускорений:

$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{m_2}{m_1}. \qquad (1)$$

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Для первой тележки это соотношение примет вид:

$$v_1 = v_{0_1} + a_1 t. \qquad (2)$$

Для второй тележки аналогичное соотношение запишется как:

$$v_2 = v_{0_2} + a_2 t. \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) найдём ускорения тележек:

$$a_1 = \frac{v_1 - v_{0_1}}{t},$$

$$a_2 = \frac{v_2 - v_{0_2}}{t}.$$

Поделив предпоследнее уравнение на последнее и подставив результат в уравнение (1), получим:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{\left|\dfrac{v_1 - v_{0_1}}{t}\right|}{\left|\dfrac{v_2 - v_{0_2}}{t}\right|} = \left|\frac{v_1 - v_{0_1}}{v_2 - v_{0_2}}\right| = \left|\frac{1\frac{\text{м}}{\text{с}} - 0{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}}}{1\frac{\text{м}}{\text{с}} - 1{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}}}\right| = 1.$$

То есть тележки имеют одинаковые массы.

2. Тележка движется по горизонтальной поверхности со скоростью 30 см/с и сталкивается с покоящейся тележкой такой же массы, как и её собственная. В результате столкновения движущаяся тележка останавливается. Определите скорость, с которой будет двигаться другая тележка после столкновения.

При любом взаимодействии двух тел соотношение между их массами и модулями ускорений:

$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

В нашем случае, когда массы тел одинаковы:

$$|a_1| = |a_2|.$$

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Для первой тележки это соотношение примет вид:

$$v_1 = v_{0_1} + a_1 t.$$

Для второй тележки аналогичное соотношение запишется как:

$$v_2 = v_{0_2} + a_2 t.$$

Из последних двух уравнений найдём ускорения тележек:

$$a_1 = \frac{v_1 - v_{0_1}}{t},$$

$$a_2 = \frac{v_2 - v_{0_2}}{t}.$$

Приравняв их модули, получим:

$$\left|\frac{v_2 - v_{0_2}}{t}\right| = \left|\frac{v_1 - v_{0_1}}{t}\right|,$$

$$\left|v_2 - 0\frac{\text{см}}{\text{с}}\right| = \left|0\frac{\text{см}}{\text{с}} - 30\frac{\text{см}}{\text{с}}\right|,$$

$$|v_2| = 30\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

То есть вторая тележка приобрела скорость первой.

Упражнение 11

1. Тело массой 1 кг падает на землю с постоянным ускорением 9,8 м/с^2. Чему равна сила, действующая на тело?

Согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}\,.$$

Здесь $\vec{F}$ — сила, действующая на тело, m — его масса, $\vec{a}$ — ускорение. Отсюда найдём:

$$\left|\vec{F}\right| = m\left|\vec{a}\right| = 1\,\text{кг}\cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 9{,}8\,\text{Н}\,.$$

2. Автомобиль массой 1000 кг движется по кольцевой дороге радиусом 100 м с постоянной скоростью 20 м/с. Чему равна сила, действующая на автомобиль? Как она направлена?

Модуль ускорения тела, двигающегося по окружности радиуса r со скоростью v:

$$|\vec{a}| = \frac{v^2}{r}.$$

Это ускорение направлено к центру окружности. Согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Здесь $\vec{F}$ — сила, действующая на тело, m — его масса, $\vec{a}$ — ускорение. Отсюда найдём модуль силы, действующей на тело:

$$|\vec{F}| = m|\vec{a}| = m\frac{v^2}{r} = 1000\,\text{кг}\,\frac{\left(20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{100\,\text{м}} = 4000\,\text{Н}.$$

Направление этой силы совпадает с направлением ускорения, то есть к центру окружности.

3. Автомобиль, масса которого 2160 кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение 30 с остаётся постоянным. За это время он проходит 500 м. Какова по модулю сила, действовавшая в течение этого времени на автомобиль?

Зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Здесь v_0 — начальная скорость тела, a — его ускорение, t — время движения. В нашем случае началь-

ная скорость равна 0. Учтём этот факт и разрешим уравнение относительно a:

$$a = \frac{2s}{t^2}.$$

Согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Подставив предпоследнее уравнение в последнее, получим:

$$|\vec{F}| = m|\vec{a}| = m\frac{2s}{t^2} = 2160\,\text{кг} \cdot \frac{2 \cdot 500\,\text{м}}{(30\,\text{с})^2} = 2400\,\text{Н}.$$

4. За много лет до Ньютона итальянский художник и учёный Леонардо да Винчи высказал следующее утверждение: «Если сила за заданное время перемещает тело на определенное расстояние, то та же сила половину такого тела переместит на такое же расстояние за вдвое меньшее время». Верно это утверждение или ложно?

Согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Здесь $\vec{F}$ — сила, действующая на тело, $\vec{a}$ — его ускорение, m — масса. Найдём из этой формулы модуль ускорения тела:

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m}.$$

Зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Здесь v_0 — начальная скорость тела, a — его ускорение, t — время движения.

Подставив предпоследнее уравнение в последнее, получим:

$$s = v_0 t + \frac{\left|\vec{F}\right| t^2}{2\mathrm{m}}.$$

Для тела вдвое меньшей массы $m/2$ это соотношение примет вид:

$$s_1 = v_{0_1} t_1 + \frac{\left|\vec{F}\right| t_1^{\,2}}{2\dfrac{m}{2}} = v_{0_1} t_1 + \frac{\left|\vec{F}\right| t_1^{\,2}}{m}.$$

Здесь символом 1 помечены параметры второго тела, отличные от параметров первого. Приравняем пути, пройденные первым и вторым телами:

$$s = s_1 = v_{0_1} t_1 + \frac{\left|\vec{F}\right| t_1^{\,2}}{m} = v_0 t + \frac{\left|\vec{F}\right| t^2}{2m}.$$

Если положить, что начальная скорость обоих тел равна 0, то:

$$\frac{\left|\vec{F}\right| t_1^{\,2}}{m} = \frac{\left|\vec{F}\right| t^2}{2m},$$

$$t = \sqrt{2} t_1.$$

То есть при уменьшении массы вдвое, время перемещения уменьшается в $\sqrt{2}$, а не в 2 раза. Значит, великий Леонардо да Винчи был не прав.

Однако если допустить, что начальная скорость обоих тел не равна 0, то, положив, что $t = 2t_1$ (как утверждал Леонардо да Винчи):

$$v_{0_1}\frac{t}{2} + \frac{\left|\vec{F}\right|\left(\frac{t}{2}\right)^2}{m} = v_0 t + \frac{\left|\vec{F}\right|t^2}{2m},$$

$$\frac{1}{2}v_{0_1} - v_0 = \frac{\left|\vec{F}\right|t}{4m}.$$

То есть при значениях силы, времени движения, масс и начальных скоростей тел, удовлетворяющих последнему уравнению, Леонардо да Винчи будет прав.

5. Два человека тянут веревку в противоположные стороны с силой 50 Н каждый. Разорвется ли веревка, если она выдерживает натяжение до 80 Н?

Натяжение веревки это сила, которая действует со стороны любой её точки на соседнюю точку. На точку веревки вблизи рук любого из рассматриваемых в задаче человека действует сила 50 Н (сила, с которой он тянет верёвку). Поскольку точка неподвижна, на неё со стороны соседней точки действует такая же по величине, но противоположная по направлению сила. Значит натяжение верёвки равно 50 Н. То есть верёвка не порвётся.

6. Два мальчика, массы которых 40 и 50 кг, стоят на коньках на льду. Первый мальчик отталкивается от другого с силой 10 Н. Какие ускорения получат мальчики?

Согласно третьему закону Ньютона, когда первый мальчик отталкивается от второго, на них действуют равные по величине и противоположные по направлению силы:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 .$$

Согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a} .$$

Здесь $\vec{F}$ — сила, действующая на тело, $\vec{a}$ — его ускорение, m — масса. Тогда для первого и второго мальчиков можно записать:

$$|\vec{a}_1| = \left|\frac{\vec{F}_1}{m_1}\right| = \frac{10\,\text{Н}}{40\,\text{кг}} = 0{,}25\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$|\vec{a}_2| = \left|\frac{\vec{F}_2}{m_2}\right| = \left|-\frac{\vec{F}_1}{m_2}\right| = \frac{10\,\text{Н}}{50\,\text{кг}} = 0{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Упражнение 12

1. Два корабля массой 50 000 т каждый стоят на рейде на расстоянии 1 км один от другого. Какова сила притяжения между ними?

Согласно закону всемирного тяготения, любые два тела массами m_1 и m_2 притягиваются с силой:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная, r — расстояние между телами. В нашем случае:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}\,\frac{5 \cdot 10^7\,\text{кг} \cdot 5 \cdot 10^7\,\text{кг}}{(1000\,\text{м})^2} \approx 0{,}167\,\text{Н}.$$

2. Вычислите силу притяжения Луны к Земле. Масса Луны равна $7 \cdot 10^{22}$ кг, масса Земли $6 \cdot 10^{24}$ кг. Расстояние между Луной и Землей считать равным 384 000 км.

Согласно закону всемирного тяготения любые два тела массами m_1 и m_2 притягиваются с силой:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная, r — растояние между телами. В нашем случае:

$$F = G\frac{m_Л m_З}{r^2} =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}\,\frac{7 \cdot 10^{22}\,\text{кг} \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\text{кг}}{(384000000\,\text{м})^2} \approx 1{,}9 \cdot 10^{20}\,\text{Н}.$$

3. Космонавт высадился на Луну. Его притягивают и Луна, и Земля. Во сколько раз сила притяжения космонавта к Луне больше, чем к Земле? Радиус Луны равен 1730 км.

Согласно закону всемирного тяготения любые два тела массами m_1 и m_2 притягиваются с силой:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная, r — расстояние между телами. Тогда сила притяжения космонавта массой m к Луне:

$$F_Л = G\frac{m_Л m}{r^2}.$$

Здесь r — радиус Луны.

А сила притяжения космонавта к Земле:

$$F_З = G\frac{m_З m}{R^2}.$$

Здесь $R = 384\,000$ км — расстояние от космонавта до Земли (равно расстоянию от Луны до Земли).

Поделим одну силу на другую и подставим в уравнение известные величины:

$$\frac{F_Л}{F_З} = \frac{G\frac{m_Л m}{r^2}}{G\frac{m_З m}{R^2}} = \frac{m_Л R^2}{m_З r^2} =$$

$$= \frac{7\cdot 10^{22}\,\text{кг}\cdot(384000000\,\text{м})^2}{6\cdot 10^{24}\,\text{кг}\cdot(1730000\,\text{м})^2} = 575.$$

То есть Луна притягивает космонавта в 575 раз сильнее, чем Земля.

4. Земля движется вокруг Солнца по орбите, которую можно считать круговой, радиусом 150 млн. км. Найдите скорость Земли на орбите, если масса Солнца равна $2\cdot 10^{30}$ кг.

Для того, чтобы Земля массой m двигалась по окружности радиусом r со скоростью v, на неё должна действовать центростремительная сила:

$$F_ц = m\frac{v^2}{r}. \qquad (1)$$

Этой силой является сила притяжения Земли к Солнцу.

Согласно закону всемирного тяготения Земля массой m притягивается к Солнцу массой M с силой:

$$F_т = G\frac{mM}{r^2}. \qquad (2)$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная, r — расстояние между Солнцем и Землёй. Приравняв силы в уравнениях (1) и (2), получим:

$$F_ц = F_т = G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r},$$

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{2 \cdot 10^{30}\,кг}{150 \cdot 10^{9}\,м}} \approx 3 \cdot 10^4\,\frac{м}{с} = 30\,\frac{км}{с}.$$

Упражнение 13

1. Какова масса тела, если сила тяжести, действующая на него, равна 49 Н? Тело находится вблизи поверхности Земли.

Сила тяжести, действующая на тело вблизи поверхности Земли:

$$F = mg.$$

Здесь $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$ — ускорение свободного падения вблизи Земли.

Отсюда:

$$m = \frac{F}{g} = \frac{49\,\text{Н}}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 5\,\text{кг}.$$

2. На какой высоте над Землей сила тяжести уменьшается в два раза?

Согласно закону всемирного тяготения тело массой m притягивается к Земле массой M с силой:

$$F = G\frac{mM}{r^2}.$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная, r — расстояние между центром Земли и телом. Заметим, что $r = R_З + h$, где $R_З$ — радиус Земли, h — высота над поверхностью Земли. Тогда зависимость силы притяжения тела к Земле от высоты тела над поверхностью Земли примет вид:

$$F = G\frac{mM}{(R_З + h)^2}.$$

Сила на поверхности Земли (при $h = 0$):

$$F_0 = G\frac{mM}{R_З^2}.$$

По условию задачи $2F = F_0$, или:

$$G\frac{mM}{R_З^2} = 2G\frac{mM}{(R_З + h)^2},$$

$$h = \left(\sqrt{2} - 1\right)R_З = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot 6400\text{ км} \approx 2650\text{ км}.$$

3. Найдите силу притяжения, действующую на тело вблизи поверхности Луны. Масса тела 1 кг. Во сколько раз эта сила отличается от силы тяжести, действующей на то же тело у поверхности Земли?

Согласно закону всемирного тяготения тело массой m притягивается к телу массой M с силой:

$$F = G\frac{mM}{r^2}.$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная, r — расстояние между центрами тел (если тела шарообразные). Из таблиц найдём: масса Луны $M_Л = 7 \cdot 10^{22}$ кг, радиус Луны $R_Л = 1730$ км. Тогда сила, действующая на тело у поверхности Луны:

$$F_Л = G\frac{mM_Л}{R_Л^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}\frac{1\,\text{кг} \cdot 7 \cdot 10^{22}\,\text{кг}}{(1730000\,\text{м})^2} = 1{,}56\,\text{Н}.$$

Сила тяжести, действующая на тело вблизи поверхности Земли:

$$F_З = mg = 1\,\text{кг} \cdot 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 9{,}8\,\text{Н}.$$

Здесь $g = 9{,}8$ м/с² — ускорение свободного падения вблизи Земли.

Отсюда:

$$\frac{F_З}{F_Л} = \frac{9{,}8\,\text{Н}}{1{,}56\,\text{Н}} = 6{,}28.$$

То есть у поверхности Луны сила, действующая на данное тело, в 6,28 раз меньше, чем у поверхности Земли.

4. Вычислите ускорение свободного падения тел вблизи поверхности Марса. Масса Марса равна $6 \cdot 10^{23}$ кг, его радиус 3300 км.

Согласно закону всемирного тяготения, тело массой m притягивается к Марсу массой M с силой:

$$F = G\frac{mM}{r^2}.$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная, r — расстояние между центрами тел (если тела шарообразные). Будем считать его равным радиусу Марса.

Ускорение, которое эта сила будет сообщать телу, согласно второму закону Ньютона:

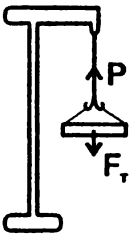
$$a = \frac{F}{m} = \frac{G\dfrac{mM}{r^2}}{m} = G\frac{M}{r^2} =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}\,\frac{6 \cdot 10^{23}\,\text{кг}}{(3300000\,\text{м})^2} = 3{,}67\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Упражнение 14

1. Бетонную плиту массой 500 кг подъёмным краном перемещают: а) равномерно вверх; б) равномерно вниз; в) горизонтально. Чему равны действующая на плиту сила тяжести и вес плиты в каждом из этих случаев?

Во всех рассматриваемых случаях груз движется вместе с крюком крана с постоянной скоростью. Для того, чтобы груз двигался с постоянной скоростью, согласно первому закону Ньютона не нужно никакой дополнительной силы. То есть суммарная сила, действующая на груз, равна 0.



Эта сила равна разности двух приложенных к грузу сил. Силы тяжести, направленной вниз:

$$F_т = mg.$$

И силы, действующей со стороны крюка крана, называемой весом P, направленной вверх:

Записав баланс сил, получим:

$$F_т - P = 0 = mg - P,$$

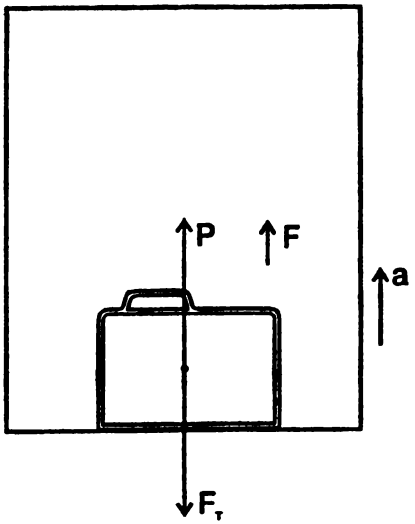
$$P = mg = 500\,кг \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2} = 4900\,Н.$$

2. На дне шахтной клети лежит груз массой 100 кг. Каков будет вес груза, если клеть: а) поднимается вверх с ускорением 0,3 м/с^2; б) опускается с ускорением 0,4 м/с^2; в) движется равномерно; г) свободно падает?

Рассмотрим предлагаемые в задаче случаи:

а) Дно клети движется вверх с ускорением a. Груз двигается вместе с клетью с этим же ускорением. Для того чтобы сообщить грузу это ускорение, на него должна действовать суммарная сила, направленная вверх:

$$F = ma.$$



Эта сила равна разности двух приложенных к грузу сил. Силы, действующей со стороны дна клети, называемой весом P, направленной вверх, и силы тяжести, направленной вниз:

$$F_т = mg\,.$$

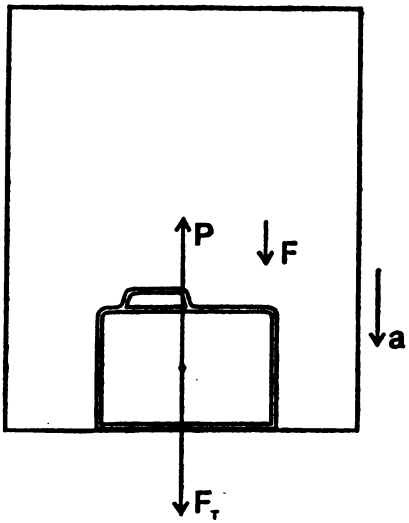
Записав баланс сил, получим:

$$F = P - F_т = ma = P - mg\,,$$

$$P = mg + ma = 100\,\text{кг} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} + 100\,\text{кг} \cdot 0{,}3\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 1010\,\text{Н}\,.$$

б) Дно клети движется вниз с ускорением a. Груз двигается вместе с клетью с этим же ускорением. Для того чтобы сообщить грузу это ускорение, на него должна действовать суммарная сила, направленная вниз:

$$F = ma\,.$$



Эта сила равна разности двух приложенных к грузу сил. Силы тяжести, направленной вниз:

$$F_т = mg.$$

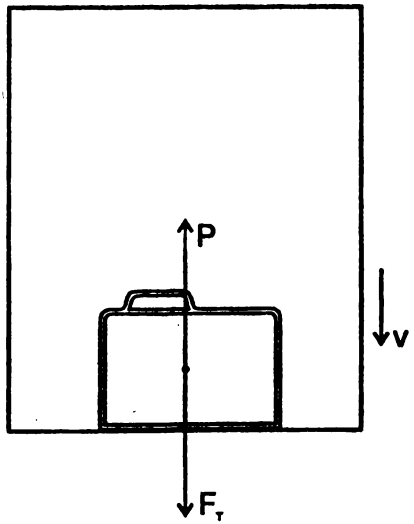
И силы, действующей со стороны дна клети, называемой весом P, направленной вверх.

Записав баланс сил, получим:

$$F = F_т - P = ma = mg - P,$$

$$P = mg - ma = 100\,\text{кг} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} - 100\,\text{кг} \cdot 0{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 940\,\text{Н}.$$

в) Дно клети движется равномерно. Значит груз двигается вместе с клетью с постоянной скоростью. Для того чтобы груз двигался с постоянной скоростью, согласно первому закону Ньютона не нужно никакой дополнительной силы. То есть суммарная сила, действующая на груз, равна 0.



Эта сила равна разности двух приложенных к грузу сил. Силы тяжести, направленной вниз:

$$F_т = mg.$$

И силы, действующей со стороны дна клети, называемой весом P, направленной вверх.

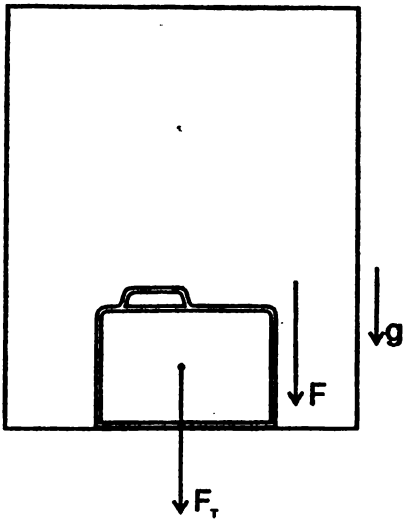
Записав баланс сил, получим:

$$F_т - P = 0 = mg - P,$$

$$P = mg = 100\,\text{кг} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 980\,\text{Н}.$$

г) При свободном падении дно клети движется вниз с ускорением g. Груз движется вместе с клетью с этим же ускорением. Для того чтобы сообщить грузу это ускорение, на него должна действовать суммарная сила, направленная вниз:

$$F = mg.$$



Эта сила равна разности двух приложенных к грузу сил. Силы тяжести, направленной вниз:

$$F_т = mg\,.$$

И силы, действующей со стороны дна клети, называемой весом P, направленной вверх.
Записав баланс сил, получим:

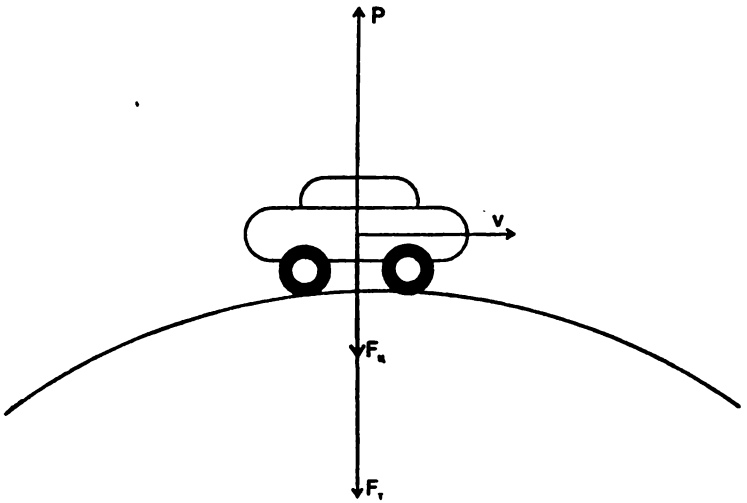
$$F = F_т - P = mg = mg - P\,,$$
$$P = mg - mg = 0\,\text{Н}\,.$$

То есть тело будет находиться в состоянии невесомости.

3. На сколько уменьшится вес автомобиля в высшей точке выпуклого моста, если радиус кривизны моста 100 м, масса автомобиля 2000 кг, скорость его движения 60 км/ч?

Для того чтобы автомобиль двигался по окружности радиусом r со скоростью $v = 60$ км/ч $\approx 16{,}7$ м/с, на него должна действовать центростремительная сила, сообщающая ему центростремительное ускорение:

$$F_ц = ma = m\frac{v^2}{r}.$$



Эта сила направлена к центру окружности, значит в верхней точке моста она направлена точно вниз и равна разности двух приложенных к автомобилю сил: силы тяжести, направленной вниз:

$$F_т = mg.$$

И силы, действующей со стороны моста, называемой весом P, направленной вверх.

Записав баланс сил, получим:

$$F_ц = m\frac{v^2}{r} = F_т - P = mg - P,$$

$$P = mg - m\frac{v^2}{r}.$$

Вес автомобиля в неподвижном состоянии:

$$P_н = mg.$$

Тогда вес автомобиля при движении по мосту уменьшается на величину:

$$P_н - P = mg - \left(mg - m\frac{v^2}{r}\right) = m\frac{v^2}{r} =$$

$$= 2000\,кг\frac{\left(16{,}7\,\frac{м}{с}\right)^2}{100\,м} = 5560\,Н.$$

4. Найдите вес тела массой 1000 г на полюсе и на экваторе. Радиус Земли считать равным 6400 км.

Различие в весах тела на экваторе и на полюсе связано с вращением Земли. Находясь на экваторе, любое тело совершает вращательное движение вместе с Землёй.

Для того чтобы тело двигалось по окружности радиусом r с периодом T, на него должна действовать центростремительная сила, сообщающая ему центростремительное ускорение:

$$F = ma = m\frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Эта сила направлена к центру окружности, значит на экваторе она направлена точно вниз и равна раз-

ности двух приложенных к телу сил. Силы тяжести, направленной вниз:

$$F_т = mg.$$

И силы, действующей со стороны поверхности Земли, называемой весом P, направленной вверх.

Записав баланс сил, получим:

$$F = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} = F_т - P = mg - P,$$

$$P = mg - m\frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Период обращения по окружности и на экваторе, и на полюсе в нашем случае равен $T = 1$ день $=$ $= 86400$ сек. Радиус окружности на экваторе равен радиусу Земли. На полюсе, когда человек находится вблизи оси, вокруг которой вращается Земля, можно считать, что радиус равен 0.

Поэтому вес на экваторе равен:

$$P_э = mg - m\frac{4\pi^2 r}{T^2} =$$

$$= 1\,кг \cdot 9{,}8\frac{м}{с^2} - 1\,кг \cdot \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 6400000\,м}{86400^2} \approx 9{,}766\,Н.$$

А вес тела на полюсе:

$$P_п = mg - m\frac{4\pi^2 r}{T^2} =$$

$$= 1\,кг \cdot 9{,}8\frac{м}{с^2} - 1\,кг \cdot \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0\,м}{(86400\,с)^2} \approx 9{,}800\,Н.$$

Упражнение 15

(При решении задач влиянием воздуха на движение тел пренебречь.)

1. Камень падал на дно ущелья 4,0 с. Какова глубина ущелья?

При свободном падении тела вблизи поверхности Земли оно движется вниз с постоянным ускорением $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$. Зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Здесь v_0 — начальная скорость тела, a — его ускорение, t — время движения.

Будем считать, что в нашем случае начальная скорость камня равна 0. Тогда пройденный камнем путь, или глубина ущелья:

$$s = v_0 t + \frac{gt^2}{2} = 0\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 4\,\text{с} + \frac{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot (4\,\text{с})^2}{2} = 78{,}4\,\text{м}.$$

2. Сколько времени падал бы груз с высоты Останкинской телебашни (540 м)? Какова была бы его скорость в момент падения на землю?

При свободном падении тела вблизи поверхности Земли оно движется вниз с постоянным ускорением $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$. Зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Здесь v_0 — начальная скорость тела, a — его ускорение, t — время движения.

Будем считать, что в нашем случае начальная скорость груза равна 0. Тогда время, за которое груз пролетит путь s (высота башни):

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 540\,\text{м}}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} \approx 10{,}5\,\text{с}.$$

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Подставив в эту формулу ускорение и время, вычисленное нами в предыдущей формуле, получим:

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{2sg} = \sqrt{2 \cdot 540\,\text{м} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 103\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3. За какое время тело, начавшее падение вниз из состояния покоя, пройдёт путь, равный 4,9 м? Какова его скорость в конце этого пути?

При свободном падении тела вблизи поверхности Земли оно движется вниз с постоянным ускорением $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$. Зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Здесь v_0 — начальная скорость тела, a — его ускорение, t — время движения.

В нашем случае начальная скорость груза равна 0. Тогда время, за которое груз пролетит путь s:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}9\,\text{м}}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} = 1\,\text{с}.$$

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Подставив в эту формулу ускорение и время, вычисленное нами в предыдущей формуле, получим:

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{2sg} = \sqrt{2 \cdot 4{,}9\,\text{м} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4. Стоя на краю скалы, мальчик уронил камень, а вслед за тем через секунду он бросил второй камень. Какую начальную скорость мальчик сообщил второму камню, если оба камня упали на землю одновременно? Высота скалы над землей 180 м.

При свободном падении тела вблизи поверхности Земли оно движется вниз с постоянным ускорением $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$. Зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Здесь v_0 — начальная скорость тела, a — его ускорение, t — время движения.

В нашем случае начальная скорость первого камня равна 0. Тогда время, за которое он пролетит путь s (высота скалы):

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Обозначим начальную скорость второго камня за v_0. Тогда время его полёта t_2 и путь s (высота скалы) связаны соотношением:

$$s = v_0 t_2 + \frac{g{t_2}^2}{2}.$$

По условию задачи, время полета первого камня на 1 секунду больше времени полёта второго камня:

$$t_2 = t_1 - 1\,\text{с} = \sqrt{\frac{2s}{g}} - 1\,\text{с}.$$

Подставив предпоследнее уравнение в последнее, получим:

$$s = v_0\left(\sqrt{\frac{2s}{g}} - 1\,\text{с}\right) + \frac{g\left(\sqrt{\frac{2s}{g}} - 1\,\text{с}\right)^2}{2},$$

$$v_0 = \frac{s - \frac{g\left(\sqrt{\frac{2s}{g}} - 1\,\text{с}\right)^2}{2}}{\sqrt{\frac{2s}{g}} - 1\,\text{с}} = \frac{s}{\sqrt{\frac{2s}{g}} - 1\,\text{с}} - \frac{g\left(\sqrt{\frac{2s}{g}} - 1\,\text{с}\right)}{2} =$$

$$= \frac{180\,\text{м}}{\sqrt{\frac{2\cdot 180\,\text{м}}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} - 1\,\text{с}} - \frac{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{2\cdot 180\,\text{м}}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} - 1\,\text{с}\right)}{2} \approx 10{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

5. Тело свободно падает с высоты 20 м над землей. Какова скорость тела в момент удара о землю? На какой высоте его скорость вдвое меньше?

При свободном падении тела вблизи поверхности Земли оно движется вниз с постоянным ускорением $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$. Зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Здесь v_0 — начальная скорость тела, a — его ускорение, t — время движения.

Положим, что в нашем случае начальная скорость тела равна 0. Тогда время, за которое тело пролетит путь s (высота падения):

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

Подставив в эту формулу ускорение и время, вычисленное нами в предыдущей формуле, получим:

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{2sg} = \sqrt{2 \cdot 20\,\text{м} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \approx 19{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Время, за которое тело наберёт скорость $v/2$, найдём из уравнения:

$$\frac{v}{2} = gt_1,$$

$$t_1 = \frac{v}{2g}.$$

Путь, который тело пройдёт за это время:

$$s_1 = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{g\left(\frac{v}{2g}\right)^2}{2} = \frac{v^2}{8g} = \frac{\left(\sqrt{2sg}\right)^2}{8g} = \frac{s}{4} = \frac{20\,\text{м}}{4} = 5\,\text{м}.$$

Высота над поверхностью земли:

$$20\,\text{м} - s_1 = 20\,\text{м} - 5\,\text{м} = 15\,\text{м}.$$

6. Стрела выпущена из лука вертикально вверх с начальной скоростью 30 м/с. На какую высоту она поднимется?

При свободном движении тела вблизи поверхности Земли оно имеет постоянное ускорение $g = 9{,}8$ м/с^2, направленное вниз. Заметим, что в нашем случае вектор начальной скорости тела направлен вверх, то есть противоположно вектору ускорения. В этом случае зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

Здесь v_0 — начальная скорость тела, t — время движения.

Зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении в случае, когда начальная скорость и ускорение имеют разные знаки, задаётся формулой:

$$v = v_0 - gt.$$

Максимальная точка подъёма стрелы, соответствует её полной остановке. Значит время, за которое стрела остановится, можно вычислить из соотношения:

$$v = 0,$$

$$v_0 - gt = 0,$$

$$t = \frac{v_0}{g}.$$

Подставив это значение в уравнение (1), получим расстояние, которое пролетит стрела за вычисленное время:

$$s = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\left(30\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{2 \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \approx 45{,}9\,\text{м}.$$

7. Тело, брошенное с земли вертикально вверх, упало через 8,0 с. На какую высоту оно поднялось и какова была его начальная скорость?

При свободном движении тела вблизи поверхности Земли оно имеет постоянное ускорение $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$, направленное вниз. Заметим, что в нашем случае вектор начальной скорости тела направлен вверх, то есть противоположно вектору ускорения. Значит зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

Здесь v_0 — начальная скорость тела, t — время движения.

Заметим, что s в нашем уравнении — это координата тела на вертикальной оси. В условии задачи сказано, что при $t = 8\,\text{с}$, тело вернулось в исходную точку, то есть его вертикальная координата $s = 0\,\text{м}$. Подставив эти значения в уравнение (1), получим:

$$0\,\text{м} = v_0 \cdot 8\,\text{с} - \frac{g(8\,\text{с})^2}{2},$$

$$v_0 = \frac{g \cdot 8\,\text{с}}{2} = \frac{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 8\,\text{с}}{2} = 39{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Когда начальная скорость и ускорение имеют разные знаки, зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 - gt.$$

Максимальная точка подъёма тела соответствует его полной остановке. Значит время, за которое тело остановится, можно вычислить из соотношения:

$$v = 0,$$

$$v_0 - gt = 0,$$

$$t = \frac{v_0}{g}.$$

Подставив это значение и полученное ранее значение начальной скорости в уравнение (1), получим расстояние, которое пролетит стрела за вычисленное время:

$$s = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\left(39{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{2 \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \approx 78{,}4\,\text{м}.$$

8. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. На какой высоте оно окажется через 3 с? Через 5 с? Какие скорости у него будут на этих высотах?

При свободном движении тела вблизи поверхности Земли оно имеет постоянное ускорение $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$, направленное вниз. Заметим, что в нашем случае вектор начальной скорости тела направлен вверх, то есть противоположно вектору ускорения. Значит зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

Здесь v_0 — начальная скорость тела, t — время движения.

Из уравнения (1) вычислим перемещение тела через 3 с после начала движения:

$$s_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 40\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 3\,\text{с} - \frac{9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(3\,\text{с})^2}{2} = 75{,}9\,\text{м}.$$

И через 5 с:

$$s_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 40\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 5\,\text{с} - \frac{9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(5\,\text{с})^2}{2} = 77{,}5\,\text{м}.$$

Когда начальная скорость и ускорение имеют разные знаки, зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 - gt.$$

Тогда скорость тела через 3 с после начала движения:

$$v_1 = v_0 - gt = 40\frac{\text{м}}{\text{с}} - 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 3\,\text{с} = 10{,}6\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

И через 5 с:

$$v_2 = v_0 - gt = 40\frac{\text{м}}{\text{с}} - 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 5\,\text{с} = -9\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Знак минус перед полученным значением скорости означает, что стрела прошла через наивысшую точку своей траектории и изменила направление своего движения на противоположное (вектор скорости направлен теперь противоположно вектору начальной скорости, то есть вниз).

Упражнение 16

1. Мяч брошен под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 10 м/с. Определите высоту подъема, время и дальность полета.

После броска мяча под углом он совершает одновременно два движения. Во-первых, он движется с постоянной скоростью $v_{\rightarrow} = v_0 \cos\alpha$ в горизонтальном направлении. Во-вторых, он движется равноускоренно с ускорением g в вертикальном направлении. Причём начальная скорость этого движения равна $v_{\uparrow_0} = v_0 \sin\alpha$ и направлена вверх, то есть противоположно вектору ускорения. В этом случае зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$s = v_{\uparrow_0} t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

Когда начальная скорость и ускорение имеют разные знаки, зависимость скорости тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_{\uparrow_0} - gt.$$

Максимальная точка подъёма мяча соответствует его полной остановке. Значит время, за которое он остановится, можно вычислить из соотношения:

$$v = 0,$$

$$v_{\uparrow 0} - gt = 0,$$

$$t = \frac{v_{\uparrow 0}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Подставив это значение в уравнение (1), получим расстояние по вертикали, которое мяч пролетит за вычисленное время, то есть максимальную высоту подъёма мяча:

$$s = v_0 \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \sin\alpha - \frac{g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} =$$

$$= \frac{\left(10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 \sin^2 30^\circ}{2 \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \approx 1{,}28\ \text{м}.$$

Время полёта соответствует времени, за которое мяч в своём движении по вертикали сначала поднимется, а потом вернётся к исходному значению вертикальной координаты $s = 0$.

Для вычисления этого времени рассмотрим вновь уравнение движения (1):

$$s = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = t\left(v_0 \sin\alpha - \frac{gt}{2}\right).$$

Видно, что, во-первых, $s = 0$, когда любой из сомножителей в правой части полученного равенства равен 0, то есть, например, при $s = 0$, а именно, в начальный момент времени, что естественно, поскольку совпадает с условием задачи. Далее, $s = 0$, когда:

$$v_0 \sin\alpha = \frac{gt}{2}.$$

Или:

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \sin 30^\circ}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 1{,}02\,\text{с}.$$

Это и есть момент приземления брошенного мяча, то есть время полёта.

Дальность полёта можно вычислить умножив полученное только что время полёта на скорость движения по горизонтали. Ведь пока мяч поднимался и опускался в своём движении по вертикали, он двигался с постоянной скоростью $v_{\rightarrow} = v_0 \cos\alpha$ по горизонтали. Значит дальность полёта:

$$L = v_{\rightarrow} t = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} =$$

$$\frac{2 \cdot \left(10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 \cos 30^\circ \sin 30^\circ}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 8{,}84\,\text{м}.$$

2. Пуля вылетает в горизонтальном направлении и летит со средней скоростью 800 м/с. На сколько снизится пуля в отвесном направлении во время полета, если расстояние до цели 600 м?

После выстрела пуля совершает одновременно два движения. Во-первых, она движется с постоянной скоростью $v_{\rightarrow} = v_0 = 800\,\text{м/с}$ в горизонтальном на-

правлении. Во-вторых, она движется равноускоренно с ускорением g в вертикальном направлении. Причём начальная скорость этого движения равна $v_{\uparrow 0} = 0$. В этом случае зависимость перемещения тела от времени при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$s = v_{\uparrow 0}t + \frac{gt^2}{2} = \frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

Время этого движения равно времени полёта до цели, то есть:

$$t = \frac{L}{v_{\rightarrow}}.$$

Здесь L — расстояние до цели. Подставив это значение в уравнение (1), получим:

$$s = \frac{g\left(\frac{L}{v_{\rightarrow}}\right)^2}{2} = \frac{g\left(\frac{L}{v_0}\right)^2}{2} = \frac{gL^2}{2v_0^{\,2}} =$$

$$= \frac{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot(600\,\text{м})^2}{2\cdot\left(800\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2} = 2{,}76\,\text{м}.$$

Упражнение 17

1. Вычислите период обращения спутника Земли на высоте 300 км.

Положим, что спутник вращается на высоте h над поверхностью Земли. Для того чтобы спутник массой m вращался со скоростью v по окружности радиусом $r = R_З + h$ (здесь $R_З$ — радиус Земли), на него должна действовать сила, сообщающая ему центростремительное ускорение, направленная к центру Земли и равная:

$$F_ц = ma_ц = m\frac{v^2}{r} = m\frac{v^2}{R_З + h}.$$

Этой силой может быть только сила притяжения тела к Земле:

$$F_Т = G\frac{M_З m}{r^2} = G\frac{M_З m}{(R_З + h)^2}.$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная, $M_З$ — масса Земли. Приравняв центростремительную силу к силе тяжести, получим:

$$F_ц = F_Т = m\frac{v^2}{R_З + h} = G\frac{M_З m}{(R_З + h)^2},$$

$$v = \sqrt{G\frac{M_З}{(R_З + h)}}.$$

Итак, нам известна скорость обращения спутника вокруг Земли. Для того чтобы вычислить период его обращения, поделим его путь за период, равный длине окружности радиусом r, на вычисленную скорость:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R_З + h)}{v} = \frac{2\pi(R_З + h)}{\sqrt{G\frac{M_З}{(R_З + h)}}} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_З + h)^3}{GM_З}} =$$

$$= 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{(6400000\,м + 300000\,м)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{Н \cdot м^2}{кг^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,кг}} \approx$$

$$\approx 5450\,с \approx 91\,мин.$$

2. Вычислите первую космическую скорость для высоты над Землей, равной радиусу Земли.

Первой космической скоростью для высоты h над Землёй называется скорость, которую нужно придать спутнику, чтобы он двигался по круговой орбите радиусом $r = R_З + h$, где $R_З$ — радиус Земли.

Для того чтобы спутник массой m вращался со скоростью v по окружности радиусом $r = R_З + h$, на него должна действовать сила, сообщающая ему

центростремительное ускорение, направленная к центру Земли и равная:

$$F_ц = ma_ц = m\frac{v^2}{r} = m\frac{v^2}{R_З + h}.$$

Этой силой может быть только сила притяжения тела к Земле:

$$F_Т = G\frac{M_З m}{r^2} = G\frac{M_З m}{(R_З + h)^2}.$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная, $M_З$ — масса Земли. В нашем случае $h = R_З$. Приравняв центростремительную силу к силе тяжести, получим:

$$F_ц = F_Т = m\frac{v^2}{R_З + h} = G\frac{M_З m}{(R_З + h)^2},$$

$$m\frac{v^2}{R_З + R_З} = G\frac{M_З m}{(R_З + R_З)^2},$$

$$v = \sqrt{G\frac{M_З}{2R_З}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{Н \cdot м^2}{кг^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\,кг}{2 \cdot 6400000\,м}} = 5580\frac{м}{с}.$$

3. На какой высоте над поверхностью Земли первая космическая скорость равна 6 км/с?

Первой космической скоростью для высоты h над Землёй называется скорость, которую нужно придать спутнику, чтобы он двигался по круговой орбите радиусом $r = R_З + h$, где $R_З$ — радиус Земли.

Для того чтобы спутник массой m вращался со скоростью v по окружности радиусом $r = R_З + h$, на

него должна действовать сила, сообщающая ему центростремительное ускорение, направленная к центру Земли и равная:

$$F_ц = ma_ц = m\frac{v^2}{r} = m\frac{v^2}{R_З + h}.$$

Этой силой может быть только сила притяжения тела к Земле:

$$F_Т = G\frac{M_З m}{r^2} = G\frac{M_З m}{(R_З + h)^2}.$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная, $M_З$ — масса Земли. Приравняв центростремительную силу к силе тяжести, получим:

$$F_ц = F_Т = m\frac{v^2}{R_З + h} = G\frac{M_З m}{(R_З + h)^2},$$

$$h = G\frac{M_З}{v^2} - R_З =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{кг}}{\left(6000\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2} - 6400000\,\text{м} =$$

$$= 4700000\,\text{м} = 4700\,\text{км}.$$

4. На какой высоте над поверхностью Земли должен быть запущен спутник, чтобы период его обращения по орбите был равен 24 ч?

Положим, что спутник вращается на высоте h над поверхностью Земли. Для того чтобы спутник массой

m вращался со скоростью v по окружности радиусом $r = R_з + h$ (здесь $R_з$ — радиус Земли), на него должна действовать сила, сообщающая ему центростремительное ускорение, направленная к центру Земли и равная:

$$F_ц = ma_ц = m\frac{v^2}{r} = m\frac{v^2}{R_з + h}.$$

Этой силой может быть только сила притяжения тела к Земле:

$$F_т = G\frac{M_з m}{r^2} = G\frac{M_з m}{(R_з + h)^2}.$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная, $M_з$ — масса Земли. Приравняв центростремительную силу к силе тяжести, получим:

$$F_ц = F_т = m\frac{v^2}{R_з + h} = G\frac{M_з m}{(R_з + h)^2},$$

$$v = \sqrt{G\frac{M_з}{(R_з + h)}}.$$

Итак, нам известна скорость обращения спутника вокруг Земли. Для того чтобы вычислить период его обращения, поделим его путь за период, равный длине окружности радиусом r, на вычисленную скорость:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R_з + h)}{v} = \frac{2\pi(R_з + h)}{\sqrt{G\frac{M_з}{(R_з + h)}}} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_з + h)^3}{GM_з}}.$$

Разрешим полученное уравнение относительно h:

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M_З}{4\pi^2}} - R_З =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(86400\,\text{с})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{кг}}{4 \cdot 3{,}14^2}} -$$

$$- 6400000\,\text{м} = 3{,}59 \cdot 10^7\,\text{м} = 35900\,\text{км}.$$

5. Вычислите частоту обращения по орбите спутников, о которых говорится в задачах 1 и 4.

Период обращения — это время, за которое спутник совершает 1 оборот. Частота вращения — это количество оборотов, совершаемое телом за 1 секунду. Поэтому период обращения и частота связаны соотношением:

$$\nu = \frac{1\,\text{об}}{T} = \frac{1}{T}.$$

В задаче 1 мы вычислили период обращения спутника:

$$T = 5450\,\text{с}.$$

Значит частота его вращения:

$$\nu = \frac{1\,\text{об}}{T} = \frac{1\,\text{об}}{5450\,\text{с}} = 0{,}000183\,\frac{\text{об}}{\text{с}} = 15{,}8\,\frac{\text{об}}{\text{сутки}}.$$

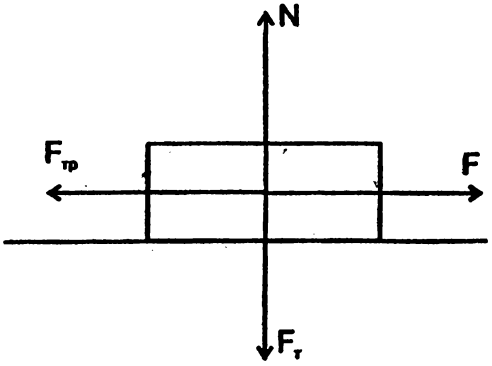
В условии задачи 4 нам задан период обращения спутника $T = 24 = 1\,\text{сутки} = 86400\,\text{с}$.
Значит частота его вращения:

$$\nu = \frac{1\,\text{об}}{T} = 1\,\frac{\text{об}}{\text{сутки}} = \frac{1\,\text{об}}{86400\,\text{с}} = 1{,}15 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{об}}{\text{с}}.$$

Упражнение 18

1. Вычислите силу, с которой нужно толкать деревянный брус по деревянному полу, чтобы он двигался с постоянной скоростью. Масса бруса 20 кг. Пол горизонтальный.

На брус действуют следующие силы: по вертикали – сила тяжести $F_т$ и сила реакции опоры N, по горизонтали – сила трения $F_{тр}$ и сила, с которой толкают брус, F.



Для того, чтобы движение было равномерным, должно выполняться условие:

$$F_{тр} - F = 0, \text{ т.е. } F_{тр} = F.$$

Сила трения может быть рассчитана по формуле:

$$F_{тр} = \mu \cdot N.$$

Здесь $\mu = 0{,}25$ — коэффициент трения дерева по дереву (берем из таблицы).

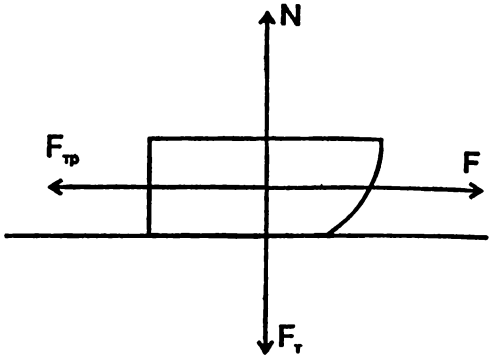
$N = F_т = mg$, т.к. по вертикали движения нет.

Следовательно:

$$F = \mu \cdot m \cdot g = 0{,}25 \cdot 20\,кг \cdot 9{,}8\frac{м}{с^2} = 49\,Н.$$

2. При длительной работе лошадь развивает постоянную силу 600 Н. Какой максимальный груз она может везти на санях, масса которых 100 кг, если коэффициент трения полозьев о снег равен 0,05? Считать, что оглобли саней параллельны дороге, а дорога горизонтальная.

На сани действуют следующие силы: по вертикали — сила тяжести $F_т$ и сила реакции опоры N, по горизонтали — сила трения $F_{тр}$ и сила, с которой лошадь тянет сани, F.



Лошадь сможет везти сани при условии $F > F_{тр}$. Сила трения может быть рассчитана по формуле:

$$F_{тр} = \mu \cdot N.$$

$N = F_т = mg$, т.к. по вертикали движения нет. Следовательно:

$$F > \mu \cdot m \cdot g,$$

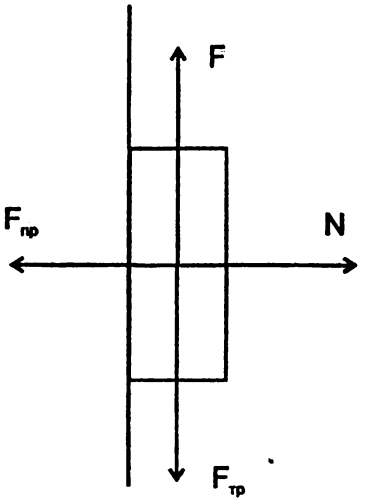
$$m < \frac{F}{\mu \cdot g} = \frac{600\,\text{Н}}{0{,}05 \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \approx 1100\,\text{кг}.$$

3. К вертикальной бетонной стене пружиной прижат резиновый брусок. Сила упругости пружины перпендикулярна стене и по модулю равна 100 Н. Какую силу нужно приложить, чтобы сдвинуть брусок с места?

Для корректной постановки задачи необходимо пренебречь силой тяжести, действующей на резиновый брусок.

На брусок действуют следующие силы: по вертикали — сила трения $F_{тр}$ и сила, с которой будем

сдвигать брусок, F; по горизонтали – сила со стороны пружины, прижимающая брусок $F_{пр}$, и сила реакции опоры N.



Для того, чтобы брусок сдвинулся с места, должно выполниться условие:

$$F_{тр} = F.$$

Сила трения может быть рассчитана по формуле:

$F_{тр} = \mu \cdot N$, где $\mu = 0{,}75$ – коэффициент трения бетона по резине (берём из таблицы).

$N = F_{тр}$, т.к. в горизонтальном направлении брусок не движется.

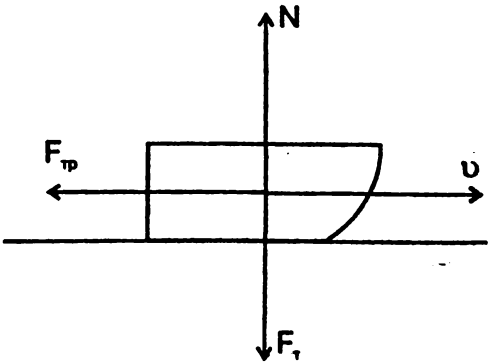
Следовательно:

$$F = \mu \cdot F_{тр} = 0{,}75 \cdot 100\,\text{Н} = 75\,\text{Н}.$$

Упражнение 19

1. С какой скоростью двигались аэросани, если после выключения двигателя они прошли до остановки путь 250 м? $\mu = 0{,}02$.

На аэросани действуют следующие силы: по вертикали – сила тяжести $F_т$ и сила реакции опоры N; по горизонтали – сила трения $F_{тр}$.



Пусть аэросани двигались со скоростью v_0. Изменение скорости аэросаней от v_0 до $v = 0$ происходит в результате действия силы трения.

Согласно второму закону Ньютона можем записать:

$$F_{тр} = m \cdot a.$$

С другой стороны, сила трения может быть рассчитана по формуле:

$$F_{тр} = \mu \cdot N.$$

Здесь $N = mg$, т.к. в вертикальном направлении движения нет.

Из кинематической формулы ускорения:

$$a = \frac{v_0^2 - v^2}{2 \cdot s}.$$

Следовательно:

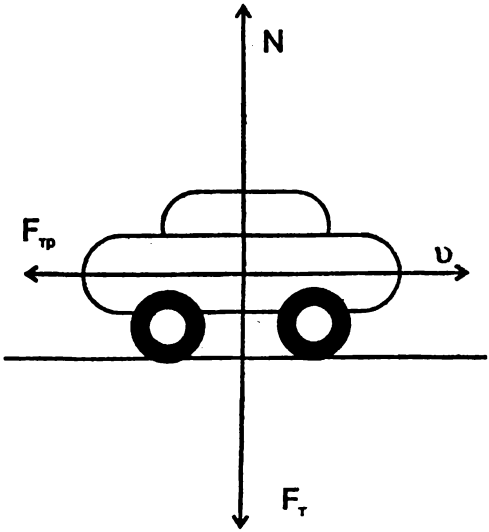
$$F_{тр} = m \cdot \frac{v_0^2 - v^2}{2 \cdot s} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Найдем из последней формулы v_0:

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot s \cdot \mu \cdot g} = \sqrt{2 \cdot 250\,м \cdot 0{,}02 \cdot 9{,}8 \frac{м}{с^2}} \approx 10 \frac{м}{с}.$$

2. Шофёр выключил двигатель и резко затормозил при скорости автомобиля 72 км/ч. Сколько времени будет двигаться автомобиль до остановки, если $\mu = 0{,}60$. Какой путь он при этом пройдёт?

На автомобиль действуют следующие силы: по вертикали – сила тяжести $F_т$ и сила реакции опоры N; по горизонтали – сила трения $F_{тр}$.



Изменение скорости автомобиля от $v_0 = 72$ км/ч $= 20$ м/с до $v = 0$ происходит в результате действия силы трения.

Согласно второму закону Ньютона можем записать:

$$F_{тр} = m \cdot a.$$

С другой стороны, сила трения может быть рассчитана по формуле:

$$F_{тр} = \mu \cdot N.$$

$N = F_т = mg$, т.к. в вертикальном направлении движения нет.

Ускорение:

$$a = \frac{v_0 - v}{t}.$$

Следовательно:

$$F_{тр} = m \cdot \frac{v_0 - v}{t} = \mu \cdot m \cdot g .$$

Из последней формулы найдем время движения автомобиля t:

$$t = \frac{v_0}{g \cdot \mu} = \frac{20 \frac{м}{с}}{9{,}8 \frac{м}{с^2} \cdot 0{,}60} \approx 3{,}4\,с .$$

Путь, пройденный автомобилем, найдем из формулы:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{a \cdot t^2}{2} .$$

Ускорение :

$$a = \mu \cdot g = 0{,}6 \cdot 9{,}8 \frac{м}{с^2} \approx 6 \frac{м}{с^2} .$$

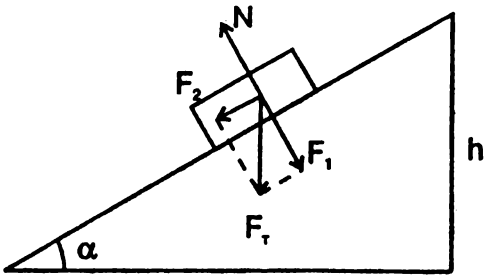
Вычислим путь, пройденный автомобилем:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{a \cdot t^2}{2} = 20 \frac{м}{с} \cdot 3{,}4\,с - \frac{6 \frac{м}{с^2} \cdot (3{,}4\,с)^2}{2} \approx 34\,м .$$

Упражнение 20

1. С вершины наклонной плоскости высотой 20 см соскальзывает брусок. Определите скорость бруска в конце плоскости. Трением пренебречь.

На брусок действуют две силы. Сила тяжести $F_т = mg$, направленная вниз, и сила реакции опоры N, направленная перпендикулярно наклонной плоскости.



Разложим силу тяжести на составляющие: перпендикулярную плоскости горки F_1 и параллельную этой плоскости F_2. Поскольку тело не может двигаться в

направлении, перпендикулярном плоскости, $F_1 = N$. Учитывая, что угол между плоскостью и силой тяжести составляет 90°–α, найдём силу, которая вызывает движение тела вдоль плоскости:

$$F_2 = F_т \cos(90° - \alpha) = mg \sin\alpha .$$

Ускорение тела массой m, двигающегося под действием этой силы:

$$a = \frac{F_2}{m} = g \sin\alpha . \qquad (1)$$

Расстояние, пройденное телом, можно найти из соотношения между углами и сторонами прямоугольного треугольника:

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} . \qquad (2)$$

С другой стороны, путь, пройденный телом при равноускоренном движении:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{a \cdot t^2}{2} . \qquad (3)$$

Учитывая, что начальная скорость равна 0, и подставляя (1) в (3), получим:

$$s = \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{g \sin\alpha \cdot t^2}{2} ,$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin\alpha}} .$$

Подставив (2) в последнее уравнение, получим время движения:

$$t = \sqrt{\frac{2\frac{h}{\sin\alpha}}{g \sin\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

Скорость тела при равноускоренном движении задаётся формулой:

$$v = v_0 + at.$$

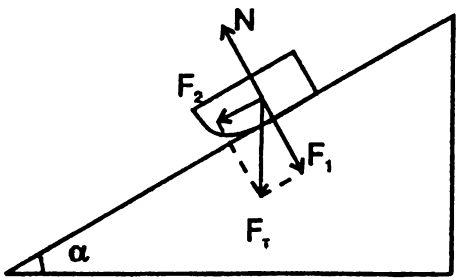
Учитывая, что начальная скорость равна 0, и подставляя в это уравнение вычисленные значения ускорения и времени, получим:

$$v = at = g\sin\alpha\,\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg} =$$

$$= \sqrt{2\cdot 0{,}2\,\text{м}\cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \approx 1{,}98\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Сани скатываются с горки длиной 10 м за 2 с. Найдите угол наклона горки. Трение не учитывать.

На сани действуют две силы. Сила тяжести $F_т = mg$, направленная вниз, и сила реакции опоры N, направленная перпендикулярно наклонной плоскости.



Разложим силу тяжести на составляющие: перпендикулярную плоскости горки F_1 и параллельную этой

плоскости F_2. Поскольку тело не может двигаться в направлении, перпендикулярном плоскости, $F_1 = N$. Учитывая, что угол между плоскостью и силой тяжести составляет $90°-\alpha$, найдём силу, которая вызывает движение тела вдоль плоскости:

$$F_2 = F_т \cos(90°-\alpha) = mg \sin\alpha .$$

Ускорение тела массой m, двигающегося под действием этой силы:

$$a = \frac{F_2}{m} = g \sin\alpha . \qquad (1)$$

Путь, пройденный телом при равноускоренном движении:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{a \cdot t^2}{2}. \qquad (2)$$

Учитывая, что начальная скорость равна 0 и подставляя (1) в (2), получим:

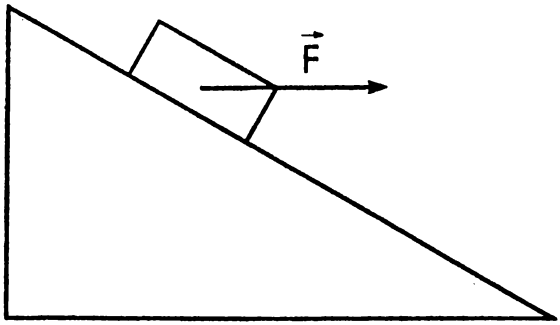
$$s = \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{g \sin\alpha \cdot t^2}{2},$$

$$\sin\alpha = \frac{2s}{gt^2} = \frac{2 \cdot 10\,м}{9{,}8\,\frac{м}{с^2}(2\,с)^2} \approx 0{,}51,$$

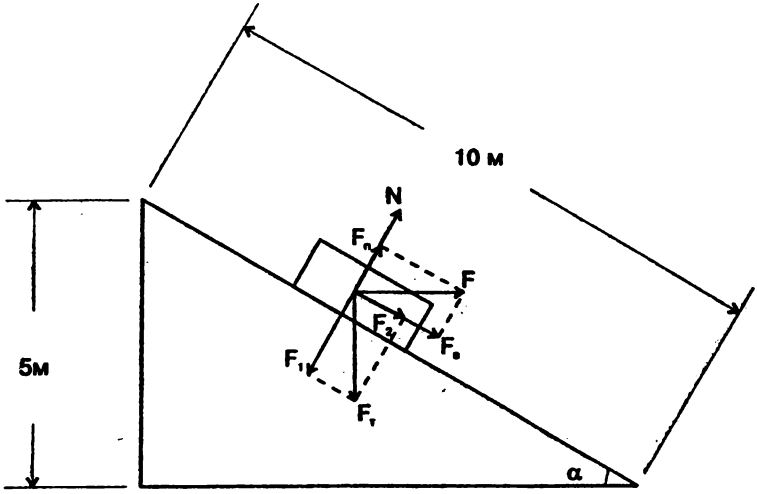
$$\alpha \approx 30°.$$

3. На наклонной плоскости высотой 5 м и длиной 10 м находится тело массой 50 кг, на которое действует сила F, направленная горизонтально и равная по модулю 300 Н (рис. 124). Определите ускорение тела (трением пренебречь).

Рис. 124



На тело действуют три силы. Сила тяжести $F_т = mg$, направленная вниз, сила реакции опоры N, направленная перпендикулярно наклонной плоскости, и горизонтальная сила F.



Разложим силу тяжести на составляющие: перпендикулярную плоскости горки F_1 и параллельную этой

плоскости F_2. Также разложим и силу F на составляющие перпендикулярную плоскости горки $F_п$ и параллельную этой плоскости $F_в$. Допустим, что тело не двигается в направлении, перпендикулярном плоскости (а между тем сила F может быть достаточно велика, чтобы оторвать тело от плоскости, тогда при вычислениях мы получим значение $N < 0$), значит:

$$F_1 - F_п = N.$$

Учитывая, что угол между плоскостью и силой тяжести составляет $90°-\alpha$, а угол между направлением силы F и плоскостью α, найдём N:

$$N = F_т \cos\alpha - F\cos(90°-\alpha) = mg\cos\alpha - F\sin\alpha.$$

Поскольку известны длина и высота плоскости, из формулы прямоугольного треугольника можно вычислить угол её наклона:

$$\sin\alpha = \frac{5\,м}{10\,м} = 0{,}5,$$

$$\alpha = 30°.$$

Тогда:

$$N = mg\cos\alpha - F\sin\alpha =$$

$$= 50\,кг \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2}\cos 30° - 300\sin 30° \approx 274\,Н.$$

Поскольку сила реакции опоры получилась положительной, тело действительно будет двигаться вдоль плоскости, а не оторвётся от неё.

Теперь найдём суммарную силу, которая вызывает движение тела вдоль плоскости:

$$F_\Sigma = F_2 + F_в =$$

$$= F_т\cos(90°-\alpha) + F\cos\alpha = mg\sin\alpha + F\cos\alpha.$$

Ускорение тела массой m, двигающегося под действием этой силы:

$$a = \frac{F_\Sigma}{m} = g\sin\alpha + \frac{F\cos\alpha}{m}.$$

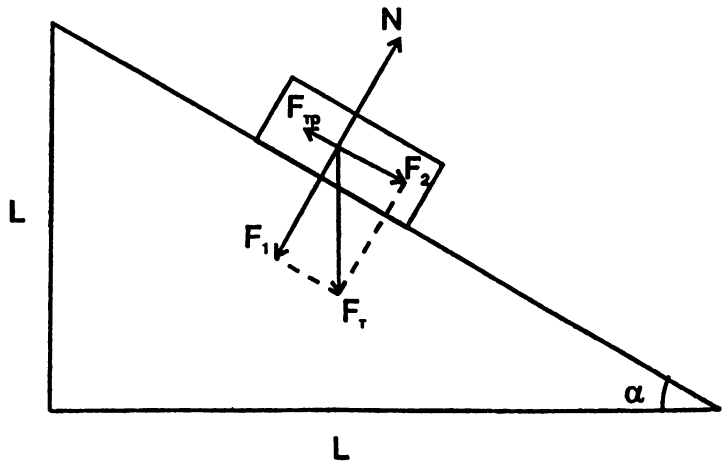
Тогда:

$$a = g\sin\alpha + \frac{F\cos\alpha}{m} =$$

$$= 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\sin 30° + \frac{300\,\text{Н}\cdot\cos 30°}{50\,\text{кг}} \approx 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

4. Вычислите ускорение тела, скользящего по наклонной плоскости, если её высота равна длине основания, а коэффициент трения тела о наклонную плоскость равен 0,20.

На тело действуют три силы: сила тяжести $F_т = mg$, направленная вниз, сила реакции опоры N, направленная перпендикулярно наклонной плоскости, и сила трения $F_{тр}$, параллельная плоскости и направленная противоположно движению.



Разложим силу тяжести на составляющие: перпендикулярную плоскости F_1 и параллельную этой плоскости F_2. Поскольку тело не двигается в направлении, перпендикулярном плоскости:

$$F_1 = N.$$

Учитывая, что угол между плоскостью и силой тяжести составляет $90°-\alpha$, а угол между направлением силы F и плоскостью равен α, найдём N:

$$N = F_т \cos\alpha = mg\cos\alpha.$$

Тогда сила трения:

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha.$$

Здесь μ — коэффициент трения тела о плоскость.

Теперь найдём суммарную силу, которая вызывает движение тела вдоль плоскости:

$$F_\Sigma = F_2 - F_{тр} =$$

$$= F_т \cos(90°-\alpha) - \mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha.$$

Ускорение тела массой m, двигающегося под действием этой силы:

$$a = \frac{F_\Sigma}{m} = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha.$$

Поскольку известно, что длина основания и высота наклонной плоскости равны, из формулы прямоугольного треугольника можно вычислить угол наклона:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{L}{L} = 1,$$

$$\alpha = 45°.$$

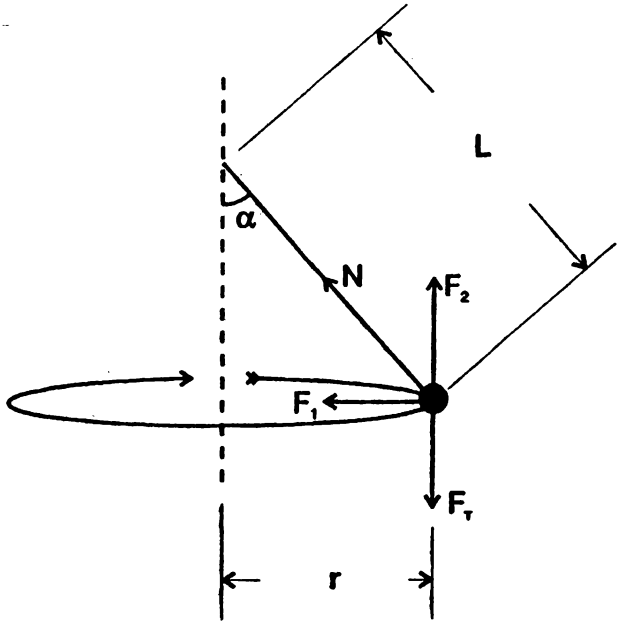
Тогда:

$$a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha =$$

$$= 9{,}8\,\frac{м}{с^2}\sin 45° - 0{,}20\cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2}\cos 45° \approx 5{,}54\,\frac{м}{с^2}.$$

5. Шарик, привязанный на нити, описывает окружность в горизонтальной плоскости, совершая один оборот за 0,50 с. С какой силой действует шарик на нить, заставляющую его вращаться? Длина нити 0,50 м. Масса шарика 0,20 кг.

На тело действуют две силы. Сила тяжести $F_т = mg$, направленная вниз, и сила натяжения нити N.



Разложим силу натяжения нити на вертикальную F_2 и горизонтальную F_1 составляющие. Тело не движется в вертикальном направлении, значит:

$$F_2 = F_т.$$

Поскольку угол между горизонталью и силой натяжения нити составляет 90°–α :

$$F_1 = N\cos(90° - \alpha) = N\sin\alpha .$$

Для того чтобы тело массой m двигалось по окружности радиусом r со скоростью v, на него должна действовать центростремительная сила:

$$F_ц = m\frac{v^2}{r}.$$

В нашем случае такой силой является сила F_1, т.е.:

$$F_ц = F_1 = N\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}. \qquad (1)$$

Скорость движения по окружности можно вычислить, зная период вращения T:

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \qquad (2)$$

Длина нити L, радиус вращения и угол наклона нити связаны соотношением:

$$r = L\sin\alpha . \qquad (3)$$

Комбинируя (1), (2) и (3), получим:

$$N\sin\alpha = m\frac{v^2}{r} = m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = m\frac{\left(\frac{2\pi L\sin\alpha}{T}\right)^2}{L\sin\alpha},$$

$$N = \frac{4\pi^2 mL}{T^2} = \frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}2\text{ кг}\cdot 0{,}5\text{ м}}{(0{,}5\text{ с})^2} \approx 15{,}8\text{ Н}.$$

Упражнение 21

1. Найдите импульс тела массой 5 кг, движущегося со скоростью 2 м/с.

Импульс тела массой m, движущегося со скоростью v, по определению, равен:

$$P = mv = 5\text{кг} \cdot 2\frac{\text{м}}{\text{с}} = 10\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

2. В цистерне поливочной машины массой 4 т находится вода объемом 4 м^3. Чему равен импульс машины: а) когда машина движется к месту полива со скоростью 18 км/ч; б) когда машина движется со скоростью 54 км/ч, израсходовав всю воду?

В случае а) машина движется со скоростью $v = 18$ км/ч $= 5$ м/с. Масса движущегося тела склады-

вается из массы машины m и массы воды $M = \rho V$, где $\rho = 1000\frac{кг}{м^3}$ — плотность воды, V — её объём.

Импульс тела в этом случае, по определению, равен:

$$P = (m + M)v = (m + \rho V)v =$$

$$= \left(4000\,кг + 1000\frac{кг}{м^3}\cdot 4\,м^3\right)\cdot 5\frac{м}{с} = 40000\frac{кг\cdot м}{с}.$$

В случае б) машина движется со скоростью $v = 54$ км/ч $= 15$ м/с. Масса движущегося тела равна массе машины m.

Импульс тела в этом случае, по определению, равен:

$$P = mv = 4000\,кг\cdot 15\frac{м}{с} = 60000\frac{кг\cdot м}{с}.$$

3. Металлический шарик массой 20 г, падающий со скоростью 5 м/с, ударяется упруго о стальную плиту и отскакивает от нее в противоположную сторону с той же по модулю скоростью. Найдите изменение импульса шарика и среднюю силу, вызвавшую это изменение, если соударение длилось 0,1 с.

Импульс шарика массой m, движущегося со скоростью v до столкновения, по определению, равен:

$$P_1 = mv.$$

После соударения скорость шарика меняется на противоположную, то есть меняет знак, тогда импульс будет равен:

$$P_2 = m(-v) = -mv.$$

Изменение импульса:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = (-mv) - mv = -2mv =$$

$$= -2 \cdot 20 \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = -0{,}2\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Знак минус перед полученным значением означает, что изменение импульса направлено противоположно начальному импульсу.

Сила F, действующая на тело в течение времени t, вызывает изменение импульса:

$$\Delta P = Ft.$$

Тогда:

$$F = \frac{\Delta P}{t} = \frac{-2mv}{t} = -\frac{2 \cdot 20 \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{0{,}1\,\text{с}} = -2\,\text{Н}.$$

Знак минус перед полученным значением означает, что сила направлена противоположно начальному импульсу.

4. Шофёр выключил двигатель автомобиля при скорости 72 км/ч. Через 3,4 с автомобиль остановился. Сила трения колес по асфальту равна 5880 Н. Чему был равен импульс автомобиля в момент выключения двигателя? Какова масса автомобиля?

Импульс автомобиля массой m, двигающегося со скоростью $v = 72$ км/ч $= 20$ м/с, по определению, равен:

$$P_1 = mv.$$

После остановки скорость автомобиля равна 0, значит равен 0 и импульс машины:

$$P_2 = 0.$$

Изменение импульса равно:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = 0 - mv = -mv.$$

Знак минус перед полученным значением означает, что изменение импульса направлено противоположно начальному импульсу.

Сила F, действующая на тело в течение времени t, вызывает изменение импульса:

$$-mv = \Delta P = Ft = -5880\,\text{Н} \cdot 3{,}4\,\text{с} \approx -20000\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Знак минус перед подставленным в уравнение значением силы показывает, что сила направлена противоположно начальному импульсу.

Масса автомобиля:

$$m = \frac{Ft}{v} = \frac{-5880\,\text{Н} \cdot 3{,}4\,\text{с}}{-20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} \approx 1000\,\text{кг}.$$

Импульс перед началом торможения:

$$P_1 = mv = 1000\,\text{кг} \cdot 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 20000\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

5. Автомобиль массой 2 т движется со скоростью 36 км/ч. Какое время требуется для полной остановки автомобиля после выключения двигателя, если сила трения колёс о дорогу равна 5880 Н?

Импульс автомобиля массой m, двигающегося со скоростью $v = 36$ км/ч $= 10$ м/с, по определению, равен:

$$P_1 = mv.$$

После остановки скорость автомобиля равна 0, значит равен 0 и импульс машины:

$$P_2 = 0.$$

Изменение импульса равно:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = 0 - mv = -mv.$$

Знак минус перед полученным значением означает, что изменение импульса направлено противоположно начальному импульсу.

Сила F, действующая на тело в течение времени t, вызывает изменение импульса:

$$\Delta P = Ft.$$

Тогда время, требующееся для полной остановки:

$$t = \frac{\Delta P}{F} = \frac{-mv}{F} = \frac{-2000\,\text{кг} \cdot 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{-5880\,\text{Н}} \approx 3{,}40\,\text{с}.$$

Знак минус перед подставленным в уравнение значением силы показывает, что сила направлена противоположно начальному импульсу.

Упражнение 22

1. Человек, бегущий со скоростью 7 м/с, догоняет тележку, движущуюся со скоростью 2 м/с, и вскакивает на неё. С какой скоростью станет двигаться тележка после этого? Массы человека и тележки соответственно равны 70 и 30 кг.

Импульс тела массой m, двигающегося со скоростью v, по определению, равен:

$$P = mv.$$

Рассмотрим систему до того момента, как человек прыгнул на тележку. Обозначим параметры, соответствующие тележке, символом 1, а параметры, соответствующие человеку, символом 2. Тогда суммарный импульс системы:

$$P_{до} = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Пусть после того, как человек запрыгнул на тележку, они продолжали движение с некоторой скоростью V, при этом масса системы равна сумме масс человека и тележки. Импульс системы:

$$P_{после} = (m_1 + m_2)V.$$

Согласно закону сохранения импульса в замкнутой системе:

$$P_{до} = P_{после},$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)V.$$

Отсюда найдём V:

$$V = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2\frac{м}{с}\cdot 30\,кг + 7\frac{м}{с}\cdot 70\,кг}{30\,кг + 70\,кг} = 5{,}5\frac{м}{с}.$$

2. При формировании железнодорожного состава три сцепленных вагона, движущиеся со скоростью 0,4 м/с, сталкиваются с неподвижным вагоном, после чего все вагоны продолжают двигаться в ту же сторону. Найдите скорость вагонов, если у всех вагонов одинаковая масса.

Импульс тела массой m, двигающегося со скоростью v, по определению равен:

$$P = mv.$$

Рассмотрим систему до того момента, как вагоны сцепились. Обозначим параметры, соответствующие движущимся вагонам, символом 1, а параметры, соответствующие неподвижному вагону, 2. Тогда суммарный импульс системы:

$$P_{до} = m_1v_1 + m_2v_2 = 3mv_1 + m\cdot 0\frac{м}{с} = 3mv_1.$$

Здесь мы обозначили массу каждого вагона за m и учли, что один вагон до столкновения имел скорость, равную 0.

Пусть после того, как вагоны сцепились, они продолжали движение с некоторой скоростью V, при этом масса системы равна сумме масс всех четырёх вагонов. Импульс системы:

$$P_{после} = (m_1 + m_2)V = (3m + m)V = 4mV.$$

Согласно закону сохранения импульса в замкнутой системе:

$$P_{до} = P_{после},$$
$$3mv_1 = 4mV.$$

Отсюда найдём V:

$$V = \frac{3}{4}v_1 = \frac{3}{4} \cdot 0{,}4\,\frac{м}{с} = 0{,}3\,\frac{м}{с}.$$

3. Зенитный снаряд, выпущенный в вертикальном направлении, достигнув максимальной высоты, взорвался. При этом образовались три осколка. Два из них разлетелись под прямым углом друг к другу, причём скорость одного из них массой 9 кг равна 60 м/с, а другого массой 18 кг — 40 м/с. Третий осколок отлетел со скоростью 200 м/с. Определите графически направление полета третьего осколка. Какова его масса?

Импульс тела массой m, двигающегося со скоростью v, по определению равен:

$$P = mv.$$

Рассмотрим систему до того момента, как снаряд взорвался. Её масса равна сумме масс трёх составляющих её осколков m_1, m_2 и m_3. В наивысшей точке траектории скорость снаряда v равна 0. Значит импульс системы в этот момент равен 0:

$$P_{до} = (m_1 + m_2 + m_3)v = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot 0 \frac{м}{с} = 0 \frac{кг \cdot м}{с}.$$

Пусть после взрыва осколки имеют скорости v_1, v_2 и v_3. Их импульсы:

$$\vec{P_1} = m_1 \vec{v_1},$$
$$\vec{P_2} = m_2 \vec{v_2},$$
$$\vec{P_3} = m_3 \vec{v_3}.$$

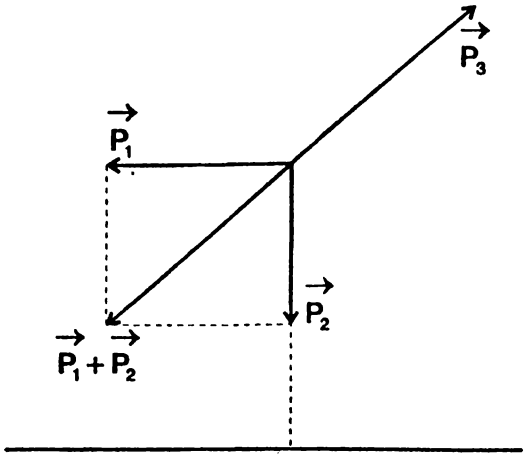
Суммарный импульс системы равен векторной сумме импульсов всех составляющих её частей:

$$\vec{P_{после}} = \vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{P_3}.$$

Согласно закону сохранения импульса в замкнутой системе:

$$\vec{P_{до}} = \vec{P_{после}},$$
$$0 = \vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{P_3}.$$

Итак, векторная сумма импульсов всех осколков равна 0. Изобразим импульсы осколков после взрыва на рисунке:



Заметим, что направления импульсов первого и второго осколков выбраны нами произвольно, поскольку в условии задачи назван лишь угол между ними, равный 90°. То есть, не нарушая условия задачи, картину распределения импульсов можно повернуть на любой угол вокруг центральной точки.

Для нас же главное – направление вектора импульса третьего осколка относительно векторов импульса первого и второго:

$$\vec{P}_3 = -\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right).$$

То есть, построив сумму $\vec{P}_1 + \vec{P}_2$ по правилу параллелограмма, мы можем построить вектор $\vec{P}_3$, равный этой сумме по величине и противоположный по направлению.

Модуль этого вектора равен модулю вектора $\vec{P}_1 + \vec{P}_2$, который можно вычислить по теореме Пифагора:

$$\left|\vec{P}_3\right| = \sqrt{\left|\vec{P}_1\right|^2 + \left|\vec{P}_2\right|^2} = \sqrt{m_1^2\left|\vec{v}_1\right|^2 + m_2^2\left|\vec{v}_2\right|^2}.$$

Теперь можно вычислить массу третьего осколка:

$$m_3\left|\vec{v}_3\right| = \left|\vec{P}_3\right|,$$

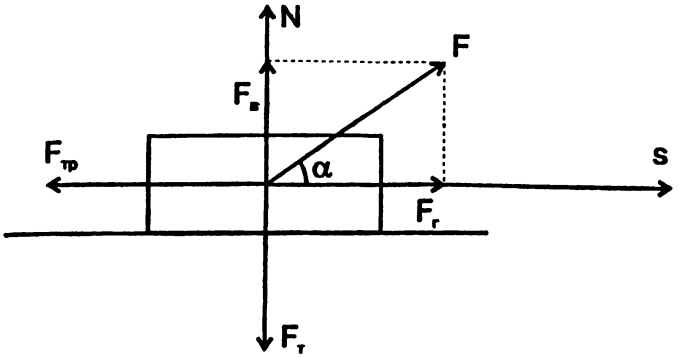
$$m_3 = \frac{\sqrt{m_1^2\left|\vec{v}_1\right|^2 + m_2^2\left|\vec{v}_2\right|^2}}{\left|\vec{v}_3\right|} =$$

$$= \frac{\sqrt{(9\text{ кг})^2\left(60\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 + (18\text{ кг})^2\left(40\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}}{200\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} = 4{,}5\text{ кг}.$$

Упражнение 23

1. На груз, скользящий с трением по горизонтальной поверхности, действует сила 200 Н, направленная под углом 60° к горизонту. Чему равна работа силы при перемещении тела, равном 5 м, если движение тела прямолинейное и равномерное? Каков коэффициент трения груза о плоскость? Масса тела 31 кг.

На тело действуют следующие силы: сила реакции опоры N, сила трения $F_{тр} = \mu N$ (μ — коэффициент трения), сила тяжести $F_т = mg$ (m — масса тела) и внешняя сила F, направленная под углом α к горизонту. Под действием этих сил тело перемещается на расстояние s.



Работа силы F при перемещении тела на расстояние s:

$$A = Fs\cos\alpha = 200\,\text{Н} \cdot 5\,\text{м} \cdot \cos 60° = 500\,\text{Дж}.$$

Разложим силу F на вертикальную $F_в = F\sin\alpha$ и горизонтальную $F_г = F\cos\alpha$ составляющие. Тело не совершает движения в вертикальном направлении, значит сумма вертикальных сил равна 0:

$$F_т = N + F_в,$$
$$mg = N + F\sin\alpha.$$

Значит:

$$N = mg - F\sin\alpha. \qquad (1)$$

В горизонтальном направлении тело движется с постоянной скоростью, т.е. сумма сил, действующих по горизонтали, также равна 0:

$$F_{тр} = F_г,$$
$$\mu N = F\cos\alpha.$$

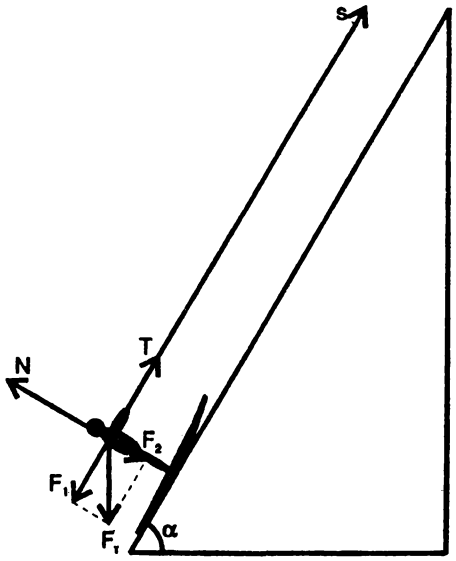
Подставив (1) в последнее уравнение, получим:

$$\mu = \frac{F\cos\alpha}{N} = \frac{F\cos\alpha}{mg - F\sin\alpha} =$$

$$= \frac{200\,\text{Н}\cdot\cos 60^\circ}{31\,\text{кг}\cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} - 200\,\text{Н}\cdot\sin 60^\circ} \approx 0{,}766.$$

2. Лыжник массой 70 кг поднимается на подъёмнике вдоль склона длиной 180 м, образующего с горизонтом угол 60°. Вычислите работу силы тяжести, действующей на лыжника. Какой она имеет знак? Какую работу совершает сила натяжения каната подъемника? Скорость подъемника постоянная.

Если пренебречь силой трения, на лыжника действуют следующие силы: сила реакции опоры N, сила тяжести $F_т = mg$ (m — масса тела) и сила натяжения каната T, направленная под углом α к горизонту. Под действием этих сил тело перемещается на расстояние s.



Работа силы тяжести $F_т$ при равномерном перемещении тела на расстояние s:

$$A = F_т s \cos(270° - \alpha) = mgs \cos(270° - \alpha) =$$

$$= 70\,кг \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2} \cdot 180\,м \cdot \cos(270° - 60°) \approx -107000\,Дж.$$

Работа имеет отрицательный знак, значит работа совершается против силы тяжести.

Разложим силу $F_т$ на параллельную склону $F_1 = F_т \cos(90° - \alpha) = F_т \sin\alpha$ и перпендикулярную склону $F_2 = F_т \cos\alpha$ составляющие. Тело не совершает движения поперёк склона, значит сумма сил, перпендикулярных склону, равна 0:

$$F_2 = N.$$

В направлении, параллельном склону, тело движется с постоянной скоростью, т.е. сумма сил, действующих вдоль склона, также равна 0:

$$T = F_т \sin\alpha = mg \sin\alpha .$$

Угол между направлением перемещения и силой натяжения каната равен 0, значит работа силы T:

$$A = Ts\cos 0° = Ts = mg\sin\alpha \cdot s =$$

$$= 70\,кг \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2} \cdot \sin 60° \cdot 180\,м \approx 107000\,Дж .$$

Упражнение 24

1. К покоящемуся телу массой 3 кг приложена сила 40 Н. После этого тело проходит по гладкой горизонтальной плоскости без трения 3 м. Затем сила уменьшается до 20 Н, и тело проходит еще 3 м. Найдите кинетическую энергию тела и его скорость в конце первого участка.

По всей вероятности, в условии задачи допущена опечатка. Следует искать кинетическую энергию и скорость в конце второго участка, иначе вторая половина условия теряет смысл. Так мы и поступим.

Кинетическая энергия, сообщённая телу силой F, если эта сила действовала во время перемещения тела на расстояние s, равна работе этой силы над телом при перемещении:

$$E_к = A = Fs\cos\alpha .$$

Здесь α — угол между направлением силы и направлением перемещения.

В нашем случае тело сначала проходит путь s_1 под действием силы F_1, а затем путь s_2 под действием

силы F_2. Кинетическая энергия переданная телу после прохождения обоих участков, равна сумме кинетических энергий, полученных на каждом участке:

$$E_к = E_{к_1} + E_{к_2} = F_1 s_1 \cos 0° + F_2 s_2 \cos 0° =$$
$$= 40\,Н \cdot 3\,м + 20\,Н \cdot 3\,м = 180\,Дж.$$

Поскольку начальная скорость тела была равна 0, то и его начальная кинетическая энергия равна 0. Значит полученное нами значение и будет полной кинетической энергией тела в конце второго участка.

Запишем выражение для кинетической энергии, из которого можно вычислить скорость тела:

$$E_к = \frac{mv^2}{2},$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_к}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 180\,Дж}{3\,кг}} \approx 11\,\frac{м}{с}.$$

2. Какая работа должна быть совершена для остановки поезда массой 1000 т, движущегося со скоростью 108 км/ч?

Работа, которую необходимо совершить для остановки поезда, равна его кинетической энергии, взятой с обратным знаком.

Начальная скорость поезда равна $v = 108\,км/ч = 30\,м/с$. Значит его кинетическая энергия:

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{1000000\,кг \cdot \left(30\,\frac{м}{с}\right)^2}{2} = 4{,}5 \cdot 10^8\,Дж.$$

Тогда искомая работа:

$$A = -E_к = -4{,}5 \cdot 10^8\,Дж.$$

3. Вычислите кинетическую энергию искусственного спутника Земли массой 1300 кг, движущегося по круговой орбите на высоте 100 км над поверхностью Земли.

Положим, что спутник вращается на высоте h над поверхностью Земли. Для того чтобы спутник массой m вращался со скоростью v по окружности радиусом $r = R_З + h$ (здесь $R_З$ — радиус Земли), на него должна действовать сила, сообщающая ему центростремительное ускорение, направленная к центру Земли и равная:

$$F_ц = ma_ц = m\frac{v^2}{r} = m\frac{v^2}{R_З + h}.$$

Этой силой может быть только сила притяжения тела к Земле:

$$F_т = G\frac{M_З m}{r^2} = G\frac{M_З m}{(R_З + h)^2}.$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная, $M_З$ — масса Земли. Приравняв центростремительную силу к силе тяжести, получим:

$$F_ц = F_т = m\frac{v^2}{R_З + h} = G\frac{M_З m}{(R_З + h)^2},$$

$$v = \sqrt{G\frac{M_З}{(R_З + h)}}.$$

Итак, нам известна скорость обращения спутника вокруг Земли. Теперь запишем выражение для кинетической энергии:

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(\sqrt{G\frac{M_З}{(R_З + h)}}\right)^2}{2} = \frac{mGM_З}{2(R_З + h)} =$$

$$= \frac{1300\,кг \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{Н \cdot м^2}{кг^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,кг}{2(6400000\,м + 100000\,м)} \approx 3{,}99 \cdot 10^{10}\,Дж.$$

4. Тело движется равномерно по окружности радиусом 0,5 м, обладая кинетической энергией 10 Дж. Какова сила, действующая на тело? Как она направлена? Чему равна работа этой силы?

Запишем выражение для кинетической энергии тела массой m, движущегося со скоростью v:

$$E_к = \frac{mv^2}{2}.$$

Для того чтобы тело массой m двигалось по окружности радиусом r со скоростью v, на него должна действовать центростремительная сила, сообщающая ему центростремительное ускорение:

$$F = m\frac{v^2}{r}.$$

Комбинируя два последних уравнения, получим:

$$F = \frac{2E_к}{r} = \frac{2 \cdot 10\,Дж}{0{,}5\,м} = 40\,Н.$$

Эта сила направлена к центру окружности. Работа, совершаемая силой F над телом при перемещении s:

$$A = Fs\cos\alpha .$$

Поскольку сила в нашем случае направлена к центру, а любое бесконечно маленькое перемещение тела направлено по касательной к окружности, угол α между ними равен 90°. Значит работа, совершаемая этой силой, равна 0.

5. Шофёр выключил двигатель автомобиля при скорости 72 км/ч. Пройдя после этого 34 м, автомобиль остановился. Чему была равна кинетическая энергия автомобиля в момент выключения двигателя, если сила трения колес о дорогу равна 5880 Н? Какова масса автомобиля?

Пусть масса автомобиля m, его начальная скорость $v = 72$ км/ч $= 20$ м/с. Тогда его кинетическая энергия:

$$E_к = \frac{mv^2}{2}. \qquad (1)$$

Работа, совершаемая силой трения F над автомобилем при перемещении s:

$$A = Fs\cos\alpha .$$

Угол между направлением силы трения (против движения) и перемещением равен $\alpha = 180°$, значит работа силы трения:

$$A = Fs\cos 180° = -Fs .$$

Работа, которую необходимо совершить для остановки автомобиля, равна его кинетической энергии, взятой с обратным знаком:

$$A = -E_к,$$

$$E_к = -A = Fs = 5880\,Н \cdot 34\,м \approx 2 \cdot 10^5\,Дж.$$

Из уравнения (1) найдём массу автомобиля:

$$m = \frac{2E_к}{v^2} = \frac{2 \cdot 5880\,Н \cdot 34\,м}{\left(20\,\frac{м}{с}\right)^2} \approx 1000\,кг.$$

6. Автомобиль массой 4 т движется со скоростью 36 км/ч. Какой путь прошёл автомобиль до полной остановки, если сила трения колес о дорогу равна 5880 Н?

Пусть масса автомобиля m, его начальная скорость $v = 36$ км/ч $= 10$ м/с. Тогда его кинетическая энергия:

$$E_к = \frac{mv^2}{2}. \qquad (1)$$

Работа, совершаемая силой трения F над автомобилем при перемещении s:

$$A = Fs\cos\alpha.$$

Угол между направлением силы трения (против движения) и перемещением равен $\alpha = 180°$, значит работа силы трения:

$$A = Fs\cos 180° = -Fs. \qquad (2)$$

Работа, которую необходимо совершить для остановки автомобиля, равна его кинетической энергии взятой с обратным знаком:

$$A = -E_к.$$

Подставляя (1) и (2) в последнее уравнение, получим:

$$Fs = \frac{mv^2}{2},$$

$$s = \frac{mv^2}{2F} = \frac{4000\,\text{кг} \cdot \left(10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{2 \cdot 5880\,\text{Н}} \approx 34\,\text{м}.$$

Упражнение 25

1. Груз массой 2,5 кг падает с высоты 10 м. На сколько изменится его потенциальная энергия через 1 с после начала падения? Начальная скорость груза равна нулю.

При свободном падении тела вблизи поверхности Земли оно движется с ускорением g. Путь, пройденный телом за время t при равноускоренном движении с ускорением a:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

В нашем случае начальная скорость тела $v_0 = 0$, значит путь, пройденный телом:

$$s = \frac{gt^2}{2} = \frac{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot(1\,\text{с})^2}{2} = 4{,}9\,\text{м}.$$

Убедившись, что тело в своём движении за 1 с не достигло Земли, вычислим изменение потенциальной энергии тела при уменьшении его высоты на s.

$$\Delta E_п = -mgs = -mg\frac{gt^2}{2} = -m\frac{g^2t^2}{2} =$$

$$= -2{,}5\,кг\frac{\left(9{,}8\,\frac{м}{с^2}\right)^2\cdot(1\,с)^2}{2} \approx -120\,Дж.$$

Знак минус перед полученным ответом показывает, что потенциальная энергия уменьшается.

2. Какая работа совершается силой тяжести, когда человек массой 75 кг поднимается по лестнице от входа в дом до 6-го этажа, если высота каждого этажа 3 м?

Работа, совершённая силой тяжести, равна изменению потенциальной энергии тела, взятой с обратным знаком:

$$A = -\Delta E_п.$$

Изменение потенциальной энергии тела при увеличении его высоты на h:

$$\Delta E_п = mgh.$$

Учитывая, что при подъёме на шестой этаж человек поднимается на пять расстояний, равных высоте одного этажа (первый этаж находится на высоте 0), работа, совершённая силой тяжести:

$$A = -mgh = -75\,кг\cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2}\cdot 5\cdot 3\,м \approx -11000\,Дж.$$

Знак минус перед полученным ответом показывает, что работа совершается против силы тяжести.

3. Перепад высот между местами старта и финиша горнолыжных соревнований составляет 400 м. Слаломист принимает старт и благополучно финиширует. Чему равна работа силы тяжести, если масса слаломиста перед стартом равна 70 кг?

Работа, совершённая силой тяжести, равна изменению потенциальной энергии тела, взятой с обратным знаком:

$$A = -\Delta E_п .$$

Изменение потенциальной энергии тела при уменьшении его высоты на h:

$$\Delta E_п = -mgh .$$

Значит работа, совершённая силой тяжести:

$$A = mgh = -70\,кг \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2} \cdot 400\,м \approx 274000\,Дж .$$

4. Место финиша трассы горнолыжных соревнований находится на высоте 2000 м над уровнем моря, а точка старта — на высоте 400 м над точкой финиша. Чему равна потенциальная энергия лыжника на старте относительно точки финиша и уровня моря? Масса лыжника 70 кг.

Потенциальная энергия тела в некоторой точке относительно другой точки, находящейся ниже на высоту h:

$$E_п = mgh .$$

Значит потенциальная энергия лыжника относительно точки финиша:

$$E_п = mgh = 70\,кг \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2} \cdot 400\,м \approx 2{,}74 \cdot 10^5\,Дж\,.$$

И относительно уровня моря:

$$E_п = mgh = 70\,кг \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2} \cdot (2000\,м + 400\,м) \approx 1{,}65 \cdot 10^6\,Дж\,.$$

Упражнение 26

1. Мальчик определил, что максимальная сила, с которой он может растягивать динамометр, равна 400 Н. Чему равна работа этой силы при растяжении динамометра? Жёсткость пружины динамометра равна 10000 Н/м.

Работа внешней силы равна изменению потенциальной энергии пружины:

$$A_{вн} = \Delta E_п . \qquad (1)$$

Изменение потенциальной энергии пружины с жёсткостью k при её удлинении или сжатии на x от ненапряжённого состояния:

$$\Delta E_п = \frac{kx^2}{2} . \qquad (2)$$

Если к пружине динамометра приложена сила F, то изменение её длины относительно ненапряжённого состояния можно вычислить из закона Гука:

$$F = kx,$$

$$x = \frac{F}{k}.$$

Комбинируя последнее уравнение с (2) и (1), получим:

$$A_{вн} = \Delta E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{k\left(\frac{F}{k}\right)^2}{2} = \frac{F^2}{2k} = \frac{(400\,Н)^2}{2 \cdot 10000\,\frac{Н}{м}} = 8\,Дж.$$

2. К пружине, верхний конец которой закреплён, подвешено тело массой 18 кг. При этом длина пружины равна 10 см. Когда же к ней подвешено тело массой 30 кг, её длина равна 12 см. Вычислите работу, которую совершает внешняя сила при растяжении пружины от 10 до 15 см. Какую работу совершает при этом сила упругости?

Если к пружине приложена сила F, то изменение её длины относительно ненапряжённого состояния можно вычислить из закона Гука:

$$F = kx,$$

$$x = \frac{F}{k}.$$

В нашем случае сила, приложенная к пружине, равна весу подвешенного груза:

$$F = mg.$$

Или:

$$x = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k}. \qquad (1)$$

Обозначим длину ненапряжённой пружины за x, длину пружины, когда к ней подвешен груз массой m_1, за x_1, а длину пружины, когда к ней подвешен груз массой m_2, за x_2. Заметим, что удлинения пружины в первом и втором случаях равны $x_1 - x$ и $x_2 - x$. Тогда, подставив эти значения в соотношение (1), можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x = \dfrac{m_1 g}{k} \\ x_2 - x = \dfrac{m_2 g}{k} \end{cases}$$

Отняв первое уравнение этой системы от второго, получим значение коэффициента упругости пружины:

$$x_2 - x_1 = \frac{g}{k}(m_2 - m_1),$$

$$k = g\frac{m_2 - m_1}{x_2 - x_1}.$$

Работа внешней силы равна изменению потенциальной энергии пружины:

$$A_{\text{вн}} = \Delta E_{\text{п}}. \qquad (1)$$

Потенциальная энергия пружины с жёсткостью k при её удлинении или сжатии на a от ненапряжённого состояния:

$$E_п = \frac{ka^2}{2}.$$

Изменение потенциальной энергии пружины при её растяжении от значения a_1 до a_2 равно разности потенциальных энергий конечного и начального состояний:

$$\Delta E_п = E_{п_2} - E_{п_1} = \frac{ka_2^2}{2} - \frac{ka_1^2}{2} = \frac{k}{2}\left(a_2^2 - a_1^2\right).$$

Подставляя в эту формулу вычисленное нами ранее значение k и комбинируя полученное уравнение с уравнением (1), вычислим работу внешней силы:

$$A_{вн} = \Delta E_п = \frac{k}{2}\left(a_2^2 - a_1^2\right) = \frac{g}{2}\frac{m_2 - m_1}{x_2 - x_1}\left(a_2^2 - a_1^2\right) =$$

$$= \frac{9{,}8\,\frac{м}{с^2}}{2}\,\frac{30\,кг - 18\,кг}{0{,}12\,м - 0{,}10\,м}\left((0{,}15\,м)^2 - (0{,}10\,м)^2\right) \approx 36{,}8\,Дж.$$

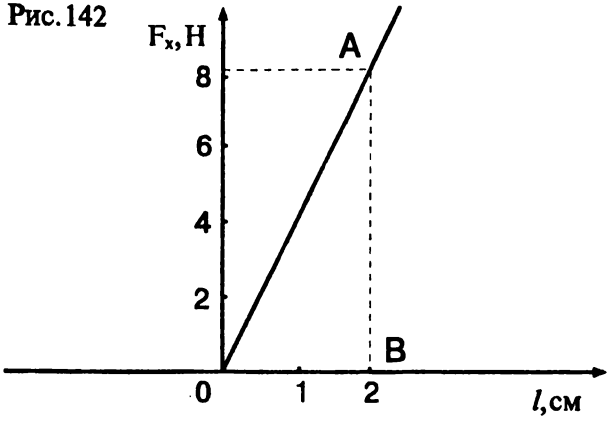
Работа силы упругости равна работе внешней силы, взятой с обратным знаком:

$$A_{упр} = -A_{вн} = -36{,}8\,Дж.$$

Знак минус перед полученным значением означает, что работа совершается против сил упругости.

3. На рисунке 142 показан график зависимости силы упругости, возникающей при сжатии пружины, от её деформации. Вычислите, используя этот график, работу внешней силы при сжатии пружины на 2 см. Докажите, что эта работа численно равна площади треугольника *AOB*.

Рис. 142



Если к пружине приложена сила F, то изменение её длины относительно ненапряжённого состояния можно вычислить из закона Гука:

$$F = kl,$$

$$k = \frac{F}{l}.$$

Следовательно, взяв на приведённом графике координаты некоторой точки, например, координаты точки $l = 2$ см $= 0{,}02$ м, $F = 8{,}5$ Н и подставив эти значения в последнее уравнение, можно найти коэффициент упругости пружины:

$$k = \frac{F}{l} = \frac{8{,}5\,\text{Н}}{0{,}02\,\text{м}} = 425\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Работа внешней силы равна изменению потенциальной энергии пружины:

$$A_{\text{вн}} = \Delta E_{\text{п}}. \qquad (1)$$

Потенциальная энергия пружины с жёсткостью k при её удлинении или сжатии на l от ненапряжённого состояния изменяется на величину:

$$\Delta E_{\text{п}} = \frac{kl^2}{2}.$$

Подставив в последнюю формулу вычисленное нами значение k и заданное в условии значение $l = 2\,\text{см} = 0{,}02$, получим:

$$A_{\text{вн}} = \Delta E_{\text{п}} = \frac{kl^2}{2} = \frac{425\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}(0{,}02\,\text{м})^2}{2} = 0{,}085\,\text{Дж}.$$

Теперь вычислим площадь треугольника AOB, его высота $h = 8{,}5\,\text{Н}$, площадь основания $l = 0{,}02\,\text{м}$:

$$S_{AOB} = \frac{hl}{2} = \frac{8{,}5\,\text{Н}\cdot 0{,}02\,\text{м}}{2} = 0{,}085\,\text{Н}\cdot\text{м} = 0{,}085\,\text{Дж}.$$

Что и требовалось доказать.

4. Имеются две пружины с одинаковой жёсткостью. Одна из них сжата на 5 см, другая растянута на 5 см. Чем различаются удлинения этих пружин и их потенциальные энергии?

Удлинения этих пружин отличаются по знаку, т.к. удлинение — векторная величина. Потенциальная же

энергия пружины не зависит от знака удлинения, а лишь от его величины и коэффициента упругости. Эти величины для обеих пружин равны, значит равны и их потенциальные энергии.

5. К пружинным весам подвешен груз. При этом груз опустился и стрелка весов остановилась на цифре 3. На сколько увеличилась потенциальная энергия пружины весов, если шкала весов градуирована в ньютонах, а расстояние между соседними делениями равно 5 мм?

Если к пружине приложена сила F, а её удлинение l, коэффициент её упругости можно вычислить из закона Гука:

$$F = kl,$$

$$k = \frac{F}{l}.$$

В нашем случае пружина весов удлинилась на 3 деления, то есть $l = 15\,\text{мм} = 0{,}015\,\text{м}$, при этом три деления шкалы означают, что приложенная к весам сила $F = 3\,\text{Н}$.

Потенциальная энергия пружины с жёсткостью k при её удлинении или сжатии на l от ненапряжённого состояния имеет величину:

$$E_{\text{п}} = \frac{kl^2}{2} = \frac{\frac{F}{l}l^2}{2} = \frac{Fl}{2} = \frac{3\,\text{Н}\cdot 0{,}015\,\text{м}}{2} = 0{,}0225\,\text{Дж}.$$

6. Сжатая пружина, жёсткость которой 10 000 Н/м, действует на прикреплённое к ней тело с силой 400 Н. Чему равна потенциальная энергия пружины? Какая работа была совершена внешней силой при её сжатии? Какую работу совершит сила упругости пружины, если дать ей возможность восстановить первоначальную форму?

Если к пружине приложена сила F, то изменение её длины x относительно ненапряжённого состояния можно вычислить из закона Гука:

$$F = kx,$$

$$x = \frac{F}{k}.$$

Потенциальная энергия пружины с жёсткостью k при её удлинении или сжатии на x от ненапряжённого состояния:

$$E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{k\left(\frac{F}{k}\right)^2}{2} = \frac{F^2}{2k} = \frac{(400\,Н)^2}{2 \cdot 10000\,\frac{Н}{м}} = 8\,Дж.$$

Работа внешней силы равна изменению потенциальной энергии пружины. Т.к. потенциальная энергия пружины в ненапряжённом состоянии равна 0, вычисленное нами значение и будет искомым изменением:

$$A_{вн} = \Delta E_п = E_п - 0\,Дж = 8\,Дж.$$

Если пружине дать возможность разжаться, то её потенциальная энергия изменится от вычисленного нами значения до 0. Работа силы упругости равна изменению потенциальной энергии пружины, значит:

$$A_{упр} = \Delta E_п = E_п - 0\,Дж = 8\,Дж.$$

Заметим, что последние две формулы при всей их схожести описывают разные процессы, в первом случае пружина сжимается, во втором — разжимается.

Упражнение 27

1. Тело падает с некоторой высоты над землей. В момент падения на землю скорость его равна 30 м/с. С какой высоты упало тело?

Изменение кинетической энергии тела массой m при изменении его скорости со значения $v_1 = 0$ м/с (начальную скорость тела полагаем равной 0) до значения $v_2 = 30$ м/с:

$$\Delta E_к = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2}.$$

Изменение потенциальной энергии этого тела при изменении его высоты со значения h_1 до значения h_2 ($\Delta h = h_2 - h_1$):

$$\Delta E_п = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1) = mg\Delta h.$$

Согласно закону сохранения механической энергии:

$$\Delta E_к + \Delta E_п = 0,$$

$$mg\Delta h + \frac{mv_2^2}{2} = 0.$$

Отсюда вычислим изменение высоты тела:

$$\Delta h = -\frac{v_2^{\,2}}{2g} = -\frac{\left(30\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{2\cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = -45{,}9\,\text{м}.$$

Знак минус перед полученным значением показывает, что высота в описываемом процессе уменьшается на 45,9 м. Это и есть высота падения тела.

2. Снаряд, получивший при выстреле из орудия начальную скорость 280 м/с, летит вертикально вверх. На какой высоте его кинетическая энергия равна потенциальной?

Отметим некорректную постановку задачи. Понятие потенциальной энергии имеет смысл лишь при указании точки отсчёта. Поэтому можно говорить лишь об изменении потенциальной энергии.

Изменение кинетической энергии тела массой m при изменении его скорости со значения $v_1 = 280$ м/с до значения v_2:

$$\Delta E_{\text{к}} = \frac{mv_2^{\,2}}{2} - \frac{mv_1^{\,2}}{2}.$$

Изменение потенциальной энергии этого тела при изменении его высоты со значения h_1 до значения h_2 ($\Delta h = h_2 - h_1$):

$$\Delta E_{\text{п}} = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1) = mg\Delta h.$$

Согласно закону сохранения механической энергии:

$$\Delta E_{\text{к}} + \Delta E_{\text{п}} = 0,$$

$$mg\Delta h + \frac{mv_2^{\,2}}{2} - \frac{mv_1^{\,2}}{2} = 0.$$

По условию задачи в искомой точке:

$$mg\Delta h = \frac{mv_2^2}{2}.$$

Комбинируя два последние уравнения, получим:

$$mg\Delta h + mg\Delta h - \frac{mv_1^2}{2} = 0,$$

$$\Delta h = \frac{\left(280\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{4 \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 2000\,\text{м}.$$

3. Баба копра при падении с высоты 8 м обладает в момент удара о сваю кинетической энергией 18000 Дж. Какова масса бабы копра?

Изменение потенциальной энергии тела при изменении его высоты со значения h_1 до значения h_2 ($\Delta h = h_2 - h_1$):

$$\Delta E_п = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1) = mg\Delta h.$$

Согласно закону сохранения механической энергии:

$$\Delta E_к + \Delta E_п = 0,$$

$$\Delta E_к = -mg\Delta h,$$

$$m = -\frac{\Delta E_к}{g\Delta h} = -\frac{18000\,\text{Дж}}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(-8\,\text{м})} \approx 230\,\text{кг}.$$

При вычислениях мы полагали, что начальная кинетическая энергия тела равна 0, значит, её изменение $\Delta E_к$ равно её значению $\Delta E_к = 18000$ Дж в конце процесса. Знак минус перед значением изменения высоты Δh означает, что в описываемом процессе высота уменьшается.

4. Тело массой 2 кг падает с высоты 30 м над землей. Вычислите кинетическую энергию тела в момент, когда оно находится на высоте 15 м над землей и в момент падения на землю.

Изменение потенциальной энергии тела при изменении его высоты со значения $h_1 = 30$ м до значения h_2 ($\Delta h = h_2 - h_1$):

$$\Delta E_п = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1) = mg\Delta h.$$

Согласно закону сохранения механической энергии:

$$\Delta E_к + \Delta E_п = 0,$$
$$\Delta E_к = -mg\Delta h.$$

Вычислим кинетическую энергию тела на высоте 15 м:

$$\Delta E_{к_1} = -mg\Delta h = -2\text{ кг} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(15\text{ м} - 30\text{ м}) = 294\text{ Дж}.$$

И на высоте 0 м:

$$\Delta E_{к_2} = -mg\Delta h = -2\text{ кг} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(0\text{ м} - 30\text{ м}) = 588\text{ Дж}.$$

5. Растянутая пружина, сокращаясь, увлекает за собой тело массой 50 кг по горизонтальной плоскости без трения. В момент, когда деформация пружины равна нулю, скорость тела равна 5 м/с. На сколько была растянута пружина, если её жёсткость равна 10 000 Н/м?

Изменение кинетической энергии тела массой m при изменении его скорости со значения $v_1 = 0$ м/с (начальную скорость тела, при исходной деформации пружины полагаем равной 0) до значения $v_2 = 5$ м/с:

$$\Delta E_к = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2}.$$

Изменение потенциальной энергии пружины с коэффициентом жёсткости k при изменении её удлинения с начального значения x_1 до значения $x_2 = 0$ м:

$$\Delta E_п = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = -\frac{kx_1^2}{2}.$$

Согласно закону сохранения механической энергии:

$$\Delta E_к + \Delta E_п = 0,$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = 0.$$

Отсюда вычислим начальную деформацию пружины:

$$x_1 = v_2\sqrt{\frac{m}{k}} = 5\frac{м}{с}\sqrt{\frac{50\,кг}{10000\frac{Н}{м}}} \approx 0{,}353\,м.$$

Упражнение 28

1. Сани массой 60 кг, скатившись с горы, проехали по горизонтальному участку дороги 20 м. Найдите работу силы трения на этом участке, если коэффициент трения полозьев саней о снег 0,020.

При движении саней на них действуют следующие силы: сила тяжести $F_т = mg$, направленная вертикально вниз, сила реакции опоры N, направленая вертикально вверх, и сила трения, направленная против движения $F_{тр}$. Поскольку сани не совершают движения в вертикальном направлении, сила реакции опоры равна силе тяжести:

$$N = F_т = mg.$$

Тогда сила трения, действующая на сани при их движении:

$$F_{тр} = kN = kmg.$$

Работа силы трения при перемещении тела на расстояние s равна:

$$A_{тр} = -sF_{тр} = -skmg =$$

$$= -20\,м \cdot 0{,}020 \cdot 60\,кг \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2} = -235\,Дж.$$

2. К точильному камню радиусом 20 см прижимают затачиваемую деталь с силой 20 Н. Определите, какая работа совершается двигателем за 2 мин, если камень делает 180 об/мин, а коэффициент трения детали о камень равен 0,3.

При движении точильного камня на прижимаемую к нему деталь действуют следующие силы: сила давления $F_д$ направленная к центру, сила реакции опоры N, направленная от центра, и сила трения, направленная по движению точильного камня $F_{тр}$. Поскольку деталь не совершает движения по направлению радиуса, сила реакции опоры равна силе давления:

$$N = F_д = 20\,Н.$$

Тогда сила трения, действующая на деталь:

$$F_{тр} = kN.$$

При вращении круга деталь перемещается относительно его поверхности. Работа силы трения при перемещении тела на расстояние s равна:

$$A_{тр} = -sF_{тр} = -skN.$$

Если круг радиусом r делает ν оборотов в мин, то за время t мин деталь пройдёт по поверхности круга путь:

$$s = 2\pi r\nu t.$$

Тогда работа силы трения, взятая с обратным знаком, равна работе двигателя (считаем, что он тратит свою энергию только на преодоление силы трения):

$$A_д = -A_{тр} = 2\pi r\nu tkN =$$

$$= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2\,м \cdot 180\frac{об}{мин}\,2\,мин \cdot 0{,}3 \cdot 20\,Н = 2710\,Дж.$$

3. Шофёр автомобиля выключает двигатель и начинает тормозить в 20 м от светофора (дорога горизонтальная). Считая силу трения колёс о дорогу, равной 4000 Н, найдите, при какой наибольшей скорости автомобиль успеет остановиться перед светофором, если масса автомобиля 1,6 т.

Работа силы трения при перемещении тела на расстояние s равна:

$$A_{тр} = -sF_{тр}. \qquad (1)$$

Изменение кинетической энергии тела массой m при изменении его скорости со значения v_1 до значения $v_2 = 0$ м/с (конечная скорость автомобиля равна 0):

$$\Delta E_к = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -\frac{mv_1^2}{2}. \qquad (2)$$

Согласно закону сохранения механической энергии:

$$A_{тр} = \Delta E_к.$$

Подставив в последнее уравнение выражения (1) и (2), получим:

$$-\frac{mv_1^2}{2} = -sF_{тр},$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2sF_{тр}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20\,м \cdot 4000\,Н}{1600\,кг}} = 10\,\frac{м}{с}.$$

4. На движущееся по горизонтальной плоскости тело на протяжении пути длиной 15 м действует сила трения 100 Н. Насколько изменилась механическая энергия тела?

Работа силы трения при перемещении тела на расстояние s равна:

$$A_{тр} = -sF_{тр}.$$

Согласно закону сохранения механической энергии работа силы трения равна изменению кинетической энергии тела:

$$A_{тр} = \Delta E_к.$$

Тогда:

$$\Delta E_к = A_{тр} = -sF_{тр} = -15\,м \cdot 100\,Н = -1500\,Дж.$$

Знак минус перед полученным значением показывает, что кинетическая энергия уменьшается.

5. Парашютист массой 70 кг после прыжка с самолета движется сначала ускоренно, а затем, начиная с высоты $h = 1000$ м и до приземления, равномерно. Какова работа силы сопротивления воздуха за время равномерного движения?

При движении парашютиста на него действуют следующие силы: сила тяжести $F_т = mg$, направленная вертикально вниз, и сила трения, направленная против движения, то есть вверх — $F_{тр}$. Поскольку парашютист движется в вертикальном направлении равномерно, сила трения равна силе тяжести:

$$F_{тр} = F_т = mg.$$

Работа силы трения при перемещении тела на расстояние s равна:

$$A_{тр} = -sF_{тр} = -smg =$$

$$= -1000\,м \cdot 70\,кг \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2} = -6{,}86 \cdot 10^5\,Дж.$$

6. Тело массой 2 кг падает с высоты 240 м и проникает в грунт на глубину 0,2 м. Сила трения о грунт равна 10 000 Н. Совершало ли тело свободное падение или двигалось в воздухе?

Изменение потенциальной энергии этого тела при изменении его высоты со значения $h_1 = 240\,м$ до значения $h_2 = 0$ ($\Delta h = h_2 - h_1$):

$$\Delta E_п = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1) = mg\Delta h.$$

Согласно закону сохранения механической энергии:

$$\Delta E_к + \Delta E_п = 0,$$

$$\Delta E_к = -\Delta E_п = -mg\Delta h.$$

При движении тела в грунте на него действует сила трения, направленная против движения $F_{тр}$.

Работа силы трения при перемещении тела на расстояние s равна:

$$A_{тр} = -sF_{тр}.$$

Согласно закону сохранения механической энергии:

$$A_{тр} = \Delta E_к,$$

$$-sF_{тр} = -mg\Delta h,$$

$$\frac{mg\Delta h}{sF_{тр}} = 1.$$

Итак, если при подстановке численных значений, заданных в условии, последнее равенство окажется верным, то падение происходило в отсутствие воздуха, как мы и предполагали во время решения. Если же левая часть равенства окажется больше 1, то работа силы трения будет меньше энергии системы в начале процесса. Значит часть энергии израсходовалась при падении на преодоление силы трения о воздух.

$$\frac{mg\Delta h}{sF_{тр}} = \frac{2\,кг \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2} \cdot 240\,м}{0{,}2\,м \cdot 10000\,Н} = 2{,}35 \geq 1.$$

Видим, что движение происходило в воздухе.

Упражнение 29

1. Самолёт летит прямолинейно и равномерно со скоростью 900 км/ч. Какова сила сопротивления воздуха, если развиваемая двигателем самолета мощность равна 1800 кВт?

При равномерном движении самолёта сила тяги, развиваемая двигателем самолёта, равна силе сопротивления воздуха. Следовательно, мощность двигателя равна:

$N = F \cdot v$, где $N = 1800$ кВт, F — сила сопротивления воздуха, $v = 900$ км/ч $= 250$ м/с.

$$F = \frac{N}{v} = \frac{1800000\,\text{Вт}}{250\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} = 7200\,\text{Н}.$$

2. Подъёмный кран с двигателем мощностью 8 кВт поднимает груз с постоянной скоростью 6 м/мин. Какова масса груза?

На груз действуют сила тяжести со стороны Земли $F = mg$, которая направлена вертикально вниз, и сила упругости F' со стороны троса подъёмного крана, которая направлена вертикально вверх. По условию задачи, груз движется равномерно. Поэтому сила тяжести равна по модулю силе упругости. Из формулы для расчёта мощности при равномерном движении найдем массу груза, т.е.:

$$N = F' \cdot v, \text{ где } F' = F = mg,$$

$$N = m \cdot g \cdot v,$$

$$m = \frac{N}{g \cdot v} = \frac{8000\,\text{Вт}}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 0{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} \approx 8000\,\text{кг} = 8\,\text{т}.$$

3. На токарном станке обрабатывается вал. Мощность, развиваемая двигателем станка, 3 кВт. Какая совершается при этом работа, если на обработку вала уходит 2 мин.

По определению, мощность — это скорость совершения работы, т.е.:

$$N = \frac{A}{t}.$$

Следовательно:

$$A = N \cdot t = 3000\,\text{Вт} \cdot 2 \cdot 60\,\text{с} = 360\,\text{кДж}.$$

4. Какая работа совершается на гидростанции в течение года, если средняя мощность её генераторов равна 2,5 Мвт?

По определению, мощность — это скорость совершения работы, т.е.:

$$N = \frac{A}{t}.$$

Следовательно:

$$A = N \cdot t = 2{,}5 \cdot 10^6 \text{Вт} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{с} = 7{,}9 \cdot 10^{13} \text{Дж}.$$

5. Автомобиль массой 2000 кг движется по горизонтальной дороге со скоростью 72 км/ч. Сила сопротивления движению составляет 0,05 его веса. Определите, какую мощность развивает при этом двигатель.

По условию задачи автомобиль движется с постоянной скоростью $v = 72$ км/ч $= 20$ м/с. Следовательно, сила сопротивления движению F равна по модулю силе тяги $F_т$ двигателя автомобиля.

Из условия задачи $F = F_т = 0{,}05 \cdot P$, где P — вес автомобиля. Т.к. автомобиль движется горизонтально, его вес равен силе тяжести, т.е. $P = mg$.

Для нахождения мощности воспользуемся формулой:

$$N = F_т \cdot v = 0{,}05 \cdot m \cdot g \cdot v =$$

$$= 0{,}05 \cdot 2000 \text{кг} \cdot 9{,}8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 20 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 20 \text{кВт}.$$

Упражнение 30

1. Подъёмный кран снабжен двигателем мощностью 7,36 кВт. Определите массу груза, поднимаемого с постоянной скоростью 6 м/мин, если КПД двигателя 80 %.

На груз действует сила тяжести со стороны земли $F = mg$, которая направлена вертикально вниз, и сила упругости F' со стороны троса подъёмного крана, которая направлена вертикально вверх. По условию задачи, груз движется равномерно, поэтому сила тяжести равна по модулю силе упругости.

По определению, мощность — это скорость совершения работы, т.е.:

$$N = \frac{A}{t}.$$

Следовательно:

$$A = Nt.$$

По определению КПД — это отношение величины полезной работы ко всей совершённой:

$$\eta = \frac{A_п}{A_с} \cdot 100\%. \qquad (1)$$

С помощью крана должна быть выполнена полезная работа:

$$A_п = m \cdot g \cdot h. \qquad (2)$$

Здесь h — высота подъёма груза.

Совершённая работа:

$$A_с = N_с t. \qquad (3)$$

Здесь $N_с = 7{,}36$ кВт, t — время подъёма груза на высоту h. Тогда скорость подъёма:

$$v = \frac{h}{t} = 6\,\frac{м}{мин} = 0{,}1\,\frac{м}{с}. \qquad (4)$$

Подставляя формулы (2) и (3) в (1) и учитывая соотношение (4), найдём массу груза.

$$\eta = \frac{m \cdot g \cdot h}{N_с \cdot t} \cdot 100\% = \frac{m \cdot g \cdot v}{N_с} \cdot 100\%,$$

$$m = \frac{\eta}{100\%} \cdot \frac{N_с}{g \cdot v} = \frac{80\%}{100\%} \cdot \frac{7360\,Вт}{9{,}8\,\frac{м}{с^2} \cdot 0{,}1\,\frac{м}{с}} \approx 6000\,кг = 6\,т.$$

2. Самолёт летит прямолинейно и равномерно со скоростью 800 км/ч. Найдите силу тяги моторов, если мощность их равна 1800 кВт, а КПД — 70 %.

В горизонтальном направлении на самолёт действуют следующие силы: сила тяги двигателей самолёта и сила сопротивления воздуха. По условию задачи, самолёт летит с постоянной скоростью υ, следовательно сила тяги по модулю равна силе сопротивления воздуха движению самолёта.

По определению, КПД – есть отношение величины полезной мощности к полной мощности, т.е.:

$$\eta = \frac{N_п}{N_з} \cdot 100\%. \qquad (1)$$

Здесь $N_з$ – мощность двигателя самолёта, $N_п$ – мощность идущая на перемещение самолёта со скоростью $v = 800$ км/ч $= 222$ м/с. Полезная мощность может быть рассчитана из формулы (1):

$$N_п = \frac{\eta}{100\%} \cdot N_з. \qquad (2)$$

С другой стороны, для расчёта мощности при равномерном движении можно воспользоваться формулой:

$$N_п = F_т \cdot v. \qquad (3)$$

Здесь $F_т$ – сила тяги двигателя самолёта.

При равномерном движении сила тяги по модулю равна силе сопротивления. Приравняем формулы (2) и (3) и найдём силу тяги:

$$\frac{\eta}{100\%} \cdot N_з = F_т \cdot v,$$

$$F_т = \frac{\eta}{100\%} \frac{N_з}{v} = \frac{70\%}{100\%} \cdot \frac{1800000\,\text{Вт}}{222\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} = 5700\,\text{Н}.$$

3. Насос с мотором мощностью 3 кВт поднимает воду из колодца глубиной 20 м. Найдите массу поднятой воды, если насос работает 2 ч, а КПД его двигателя 70 %.

По определению, КПД – это отношение величины полезной работы ко всей совершённой:

$$\eta = \frac{A_п}{A_с} \cdot 100\%. \qquad (1)$$

С помощью насоса должна быть выполнена полезная работа:

$$A_п = m \cdot g \cdot h. \qquad (2)$$

Здесь h — глубина колодца, m — масса поднятой воды.

Совершённая работа:

$$A_с = N_с t. \qquad (3)$$

Здесь $N_с = 3000$ Вт, t — время работы насоса ($t = 2$ ч $= 7200$ с)

Подставляя формулы (3) и (2) в (1), найдём массу поднятой воды:

$$\eta = \frac{m \cdot g \cdot h}{N_с \cdot t} 100\%,$$

$$m = \frac{\eta}{100\%} \cdot \frac{N_с \cdot t}{g \cdot h} =$$

$$= \frac{70\%}{100\%} \cdot \frac{3000\,\text{Вт} \cdot 7200\,\text{с}}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 20\,\text{м}} \approx 77000\,\text{кг} = 77\,\text{т}.$$

4. С плотины гидростанции высотой 30 м каждую секунду падает 170 т воды. Электрическая мощность, даваемая электростанцией, равна 10 МВт. Каков КПД превращения механической энергии в электрическую?

По определению, КПД — это отношение величины полезной работы ко всей совершённой:

$$\eta = \frac{A_п}{A_с} \cdot 100\%.$$

Полную работу A за 1 секунду совершает сила тяжести, перемещая массу воды $m = 170$ т с высоты $h = 30$ м:

$$A = mgh.$$

Работа, совершенная силой тяжести за время t:

$$A_с = At = mght.$$

Полезная работа, совершаемая электростанцией за время t, равна произведению мощности электростанции и этого времени:

$$A_п = N_п t.$$

Рассчитаем КПД превращения механической энергии в электрическую:

$$\eta = \frac{N_п \cdot t}{m \cdot g \cdot h \cdot t} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 1\,с}{170 \cdot 10^3\,кг \cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2} \cdot 30\,м} \cdot 100\% = 20\%.$$

Упражнение 31

1. Чему равна частота колебаний тела массой 100 г, прикреплённого к пружине, жёсткость которой равна 40 Н/м.

Период колебаний можно найти по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Частота колебаний, по определению, связана с периодом соотношением:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Следовательно:

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{40\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}}{0{,}1\,\text{кг}}} \approx 3\,\text{Гц}.$$

2. Чему равна жёсткость пружины, если скреплённое с ней тело массой 30 г совершает за 1 мин 300 колебаний?

Период колебаний можно найти по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Частота колебаний, по определению, связана с периодом соотношением:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Следовательно:

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

С другой стороны:

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{300\text{ колебаний}}{60\text{ с}} = 5\text{ Гц}.$$

Отсюда, жёсткость пружины k:

$$k = (2\pi)^2\cdot\nu^2\cdot m = (2\cdot 3{,}14)^2\cdot(5\text{ Гц})^2\cdot 0{,}03\text{ кг} = 30\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

3. Тело, прикреплённое к пружине, совершает колебания с некоторым периодом T. Если увеличить массу тела на 60 г, то период колебаний удваивается. Какова первоначальная масса тела?

Обозначим первоначальную массу тела m, жёсткость пружины – k, тогда период колебаний:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (1)$$

Когда масса тела стала $(m + 0{,}06)$ кг, период колебаний по условию задачи стал:

$$2 \cdot T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m + 0{,}06}{k}}. \qquad (2)$$

Чтобы найти первоначальную массу тела, поделим формулу (2) на (1). Получим:

$$\frac{2 \cdot T}{T} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{m + 0{,}06}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{\sqrt{m + 0{,}06}}{\sqrt{m}} = 2.$$

$$4 = \frac{m + 0{,}06}{m},$$

$$4m = m + 0{,}06,$$

$$3m = 0{,}06,$$

$$m = 0{,}02 \text{ кг}.$$

Упражнение 32

1. Маятник совершает 24 колебания за 30 с. Чему равны период и частота его колебаний?

Период колебаний: $T = \frac{t}{N} = \frac{30\,\text{с}}{24} = 1{,}25\,\text{с}$.

Частота колебаний: $\nu = \frac{N}{t} = \frac{24}{30\,\text{с}} = 0{,}8\,\text{Гц}$.

2. Длина подвеса маятника 98 м. С какой частотой он колеблется? Чему равна амплитуда колебаний маятника, если он отклонён от вертикали на 5°?

Период колебаний математического маятника длиной l в поле силы тяжести с ускорением свободного падения g равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

Частота колебаний связана с периодом следующим соотношением:

$$\nu = \frac{1}{T},$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{98\,\text{м}}} = 0{,}0504\,\text{Гц}.$$

Амплитуда колебания a — это отклонение маятника от оси колебаний.

В задаче необходимо вычислить амплитуду при угле отклонения маятника от оси колебаний $\alpha = 5°$. Поскольку изображённый на рисунке треугольник прямоугольный, амплитуда равна:

$$a = l\sin\alpha = 98\,\text{м}\cdot\sin 5° \approx 98\,\text{м}\cdot 0{,}0872 \approx 8{,}55\,\text{м}.$$

3. Маятник, который на Земле совершал свободные колебания с частотой 0,5 Гц, был доставлен космонавтами на Луну. С какой частотой маятник будет колебаться на поверхности Луны, где ускорение свободного падения в 6 раз меньше, чем на Земле?

Период колебаний математического маятника длиной l в поле силы тяжести с ускорением свободного падения a равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a}}.$$

Частота колебаний связана с периодом следующим соотношением:

$$\nu = \frac{1}{T},$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{l}}.$$

Ускорение свободного падения на поверхности Земли равно g, значит частота колебаний маятника на Земле:

$$\nu_з = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Ускорение свободного падения на поверхности Луны по условию задачи равно $g/6$, значит частота колебаний маятника на Луне:

$$\nu_л = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g/6}{l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{6l}}.$$

Поделив последнее уравнение на предпоследнее, получим:

$$\frac{\nu_л}{\nu_з} = \frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{6l}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\nu_л = \frac{\nu_з}{\sqrt{6}} = \frac{0{,}5\,Гц}{\sqrt{6}} \approx 0{,}204\,Гц.$$

4. Два маятника отклонены от своих положений равновесия и одновременно отпущены. Первый маятник с длиной подвеса 4 м совершил за некоторый промежуток времени 15 колебаний. Второй за это же время совершил 10 колебаний. Какова длина второго маятника?

Период колебаний математического маятника длиной l в поле силы тяжести с ускорением свободного падения g равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Частота колебаний связана с периодом следующим соотношением:

$$\nu = \frac{1}{T},$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Частота колебаний — это количество колебаний, совершаемых маятником каждую секунду. Значит за

время t первый маятник длиной l_1 совершит следующее количество колебаний:

$$N_1 = \nu_1 t = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l_1}}.$$

Второй маятник длиной l_2 совершит за это же время число колебаний:

$$N_2 = \nu_2 t = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l_2}}.$$

Поделив предпоследнее уравнение на последнее, получим:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l_1}}}{\frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l_2}}} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}},$$

$$l_2 = l_1\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 4\,\text{м}\left(\frac{15}{10}\right)^2 = 9\,\text{м}.$$

Упражнение 33

1. К концу пружины маятника, груз которого имеет массу 1 кг, приложена переменная сила, частота колебаний которой равна 16 Гц. Будет ли при этом наблюдаться резонанс, если жёсткость пружины 400 Н/м?

Собственная частота колебаний пружинного маятника с жёсткостью пружины k и массой m равна:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{400\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}}{1\,\text{кг}}} \approx 3{,}18\,\text{Гц}.$$

Резонанс в колебательной системе, к которой приложена переменная сила, наступает лишь в случае, если собственная частота маятника совпадает или близка к частоте приложенной силы. В нашем случае это не так, значит резонанса не будет.

2. Период собственных вертикальных колебаний железнодорожного вагона равен 1,25 с. На стыках рельсов вагон получает периодические удары, вызывающие вынужденные колебания вагона. При какой скорости поезда возникнет резонанс, если длина каждого рельса между стыками 25 м?

Положим, что поезд едет с некоторой скоростью v. Тогда на каждом стыке вагон получает удар, и можно считать, что к вагону приложена переменная сила с периодом, равным промежутку времени между ударами:

$$T_c = \frac{L}{v}.$$

Здесь L — расстояние между стыками.

Резонанс в колебательной системе, к которой приложена переменная сила, наступает лишь в случае, если период собственных колебаний системы (в нашем случае, вагона) — $T_в$ совпадает или близок к частоте приложенной силы:

$$T_в = T_c = \frac{L}{v},$$

$$v = \frac{L}{T_в} = \frac{25\,\text{м}}{1{,}25\,\text{с}} = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Упражнение 34

1. Рыбак заметил, что гребни волн проходят мимо кормы его лодки, стоящей на якоре, через каждые 6 с. Он измерил расстояние между ближайшими гребнями и нашёл, что оно равно 20 м. Какова скорость волны?

Расстояние между гребнями равно длине волны. Период волны $T = 6$ с. Поэтому скорость волны:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{20\,\text{м}}{6\,\text{с}} \approx 3{,}3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Волна с частотой колебаний 165 Гц распространяется в среде, в которой скорость волны равна 330 м/с. Чему равна длина волны?

Длина волны вычисляется по формуле:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{330\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{165\,\text{Гц}} = 2\,\text{м}.$$

3. Вдоль упругого шнура распространяется поперечная волна со скоростью 20 м/с, период колебаний точек шнура 0,5 с. Найдите длину волны.

Длину волны можно найти из формулы:

$$\lambda = v \cdot T = 20\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 0{,}5\,\text{с} = 10\,\text{м}.$$

Упражнение 35

1. Найдите длины звуковых волн человеческого голоса, высота тона которого соответствует частоте: а) 80 Гц; б) 1400 Гц.

Скорость звука в воздухе возьмём из таблицы: $v = 343{,}1$ м/с.

$$\text{а) } \lambda_1 = \frac{v}{\nu_1} = \frac{343{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{80\,\text{Гц}} = 4{,}25\,\text{м},$$

$$\text{б) } \lambda_2 = \frac{v}{\nu_2} = \frac{343{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{1400\,\text{Гц}} = 0{,}24\,\text{м}.$$

2. С вершины вертикальной скалы высотой 1000 м упал камень. Через какое время наблюдатель на вершине услышит звук от удара камня при его падении?

Время t, через которое наблюдатель услышит звук от удара камня, будет складываться из времени полёта

камня t_1 и времени t_2, за которое звук достигнет вершины, т.е. $t = t_1 + t_2$.

Будем считать, что начальная скорость υ_0 камня равна нулю, тогда можно записать формулу:

$$h = v_0 \cdot t_1 + \frac{g \cdot t_1^2}{2}.$$

Из этой формулы найдём t_1:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000\,\text{м}}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} = 14{,}1\,\text{с}.$$

Скорость звука в воздухе возьмём из таблицы: $v = 343{,}1$ м/с.

Тогда звук достигнет вершины за время:

$$t_2 = \frac{h}{v} = \frac{1000\,\text{м}}{343{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} = 2{,}91\,\text{с}.$$

Следовательно, наблюдатель услышит звук от удара камня через $t = 14{,}1\,\text{с} + 2{,}91\,\text{с} = 17\,\text{с}$.

3. Удар грома был услышан через 8 с после того, как сверкнула молния. На каком расстоянии от наблюдателя произошёл грозовой разряд?

Скорость звука в воздухе возьмём из таблицы: $v = 343{,}1$ м/с.

За 8 с звук пройдёт расстояние:

$$L = v \cdot t = 343{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 8\,\text{с} = 2744\,\text{м} \approx 2,\ \text{км}.$$

4. Каким длинам волн соответствуют граничные значения частот, воспринимаемых человеком как звук? Расчёт сделайте для воздуха.

Скорость звука в воздухе возьмём из таблицы: $v = 343{,}1$ м/с.

Нижняя граница частоты звуковой волны, которую может воспринимать человек, 20 Гц. Следовательно, соответствующая длина волны:

$$\lambda_1 = \frac{v}{\nu_1} = \frac{343{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{20\,\text{Гц}} = 17{,}1\,\text{м}.$$

Верхняя граница частоты звуковой волны, которую может воспринимать человек, 20000 Гц. Следовательно, соответствующая длина волны:

$$\lambda_2 = \frac{v}{\nu_2} = \frac{343{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{20000\,\text{Гц}} = 0{,}017\,\text{м}.$$

5. Стрелок услышал звук от удара пули о мишень через 4 с после выстрела. На каком расстоянии находится мишень, если скорость пули 600 м/с?

Время t, через которое стрелок услышит звук от удара пули о мишень, будет складываться из времени полёта пули t_1 и времени t_2, за которое звук достигнет стрелка, т.е. $t = t_1 + t_2 = 4\,\text{с}$.

Обозначим расстояние от стрелка до мишени s, скорость пули v_1.

Будем считать движение пули равномерным, тогда время полёта пули:

$$t_1 = \frac{s}{v_1}.$$

Скорость звука в воздухе возьмём из таблицы: $v_2 = 343{,}1$ м/с.

Время, за которое звук достигнет стрелка, выразим соотношением:

$$t_2 = \frac{s}{v_2}.$$

Запишем уравнение и решим его относительно s:

$$4\,\text{с} = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2},$$

$$s \cdot \left(\frac{v_2 + v_1}{v_1 \cdot v_2}\right) = 4\,\text{с},$$

$$s = 4\,\text{с} \cdot \frac{v_1 \cdot v_2}{v_2 + v_1} = 4\,\text{с}\,\frac{600\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 343{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{343{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}} + 600\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} \approx 873\,\text{м}.$$

Упражнение 36

1. Наблюдатель находится на расстоянии 85 м от отвесной скалы. Через какое время он услышит эхо от произнесённого им восклицания?

Скорость звука в воздухе возьмём из таблицы: $v = 343{,}1$ м/с.

Обозначим расстояние от наблюдателя до скалы s. Тогда звук пройдёт расстояние $2s$. Следовательно, время, через которое наблюдатель услышит эхо, равно:

$$t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 85\,\text{м}}{343{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} = 0{,}5\,\text{с}.$$

2. Какова глубина моря, если посланный ультразвуковой сигнал, отразившись от морского дна возвратился через 1,2 с?

Скорость звука в морской воде возьмём из таблицы: $v = 1530$ м/с.

Обозначим глубину моря за h. Тогда за 1,2 с сигнал пройдёт расстояние $2h$.

Составим уравнение и решим его относительно h:

$$2h = v \cdot t,$$

$$h = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{1530\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 1{,}2\,\text{с}}{2} = 918\,\text{м}.$$

Учебное издание

Арбатский Андрей Евгеньевич
Арбатская Нина Владимировна

Решения и ответы
К учебнику «Физика. 9 класс»

(Авторы: И. К. Кикоин, А. К. Кикоин)

Подписано в печать 27.01.99. Формат 84×108 1/32.
Гарнитура «Таймс». Печать высокая с ФПФ. Усл. печ. л. 10,08.
Тираж 5000 экз. Заказ 2214.

Фирма «Альфа». Лицензия № 835. 4671, Литовская Республика, г. Висагинас, ул. Тайкос, 44-8.

При участии МП «Лерокс». Лицензия ЛВ № 178 от 21.01.98. 220113, Минск, ул. Восточная, 64-184.

Ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат ППП им. Я. Коласа. 220005, Минск, ул. Красная, 23.