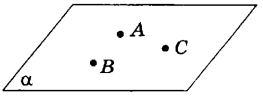
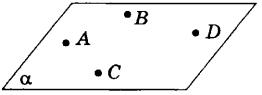
ВВЕДЕНИЕ

1. а) Используя аксиому A_2 видим, что точка P находится в плоскости ADB, то и прямая PE лежит в плоскости ADB.
Поскольку точка K находится на прямой DC, а точка M находится на прямой DB, то прямая MK лежит в плоскости DBC по аксиоме A_2.
Прямая DB лежит в двух плоскостях: ADB и DBC.
Аналогично пряма AB лежит в двух плоскостях ADB и ABC, потому что две точки A и B лежат в каждой плоскости.
По аксиоме A_2 пряма CE лежит в плоскости ABC.
б) Из рисунка видно, что прямая DK не лежит в плоскости ABC, поскольку точка $C \in DK$, а точка C лежит в плоскости ABC, значит по аксиоме A_2: $DK \cap ABC = C$.



Точка E лежит на прямой CE и на прямой AB, то есть $E \in ABD$, и прямая $CE \cap ADB = E$.



в) В плоскости ADB лежат точки A, D, B, P, E, M; а в плоскости DBC — D, B, C, K, M.
г) Плоскости ABC и DCB пересекаются по прямой BC, потому что прямая BC лежит в каждой из плоскостей.
Аналогично, плоскости ABD и CDA пересекаются по прямой AD.
Плоскости PDC и ABC пересекаются по прямой CE, потому что точка P лежит на прямой DE.

2. а) В плоскости DCC_1 лежат точки: D, C, C_1, D_1, K, M, R.
В плоскости BQC лежат точки B, B_1, Q, C, C_1, P, M.
Точки, которые принадлежат плоскостям DCC_1 и BQC; C_1, C, M.
б) Прямая AA_1 лежит в плоскостях AA_1B и AA_1D.
в) Прямая MK пересекается с плоскостью ABD в точке R, потому что точка R лежит на прямых DC и MK, а прямая DC лежит в плоскости ABD.
Прямая DK пересекается с плоскостью $A_1B_1C_1$ в точке D_1, потому что точка D_1 лежит на прямой DK, а точка D_1 лежит в плоскости $A_1B_1C_1$; аналогично BP пересекается с плоскостью $A_1B_1C_1$ в точке Q.
г) Плоскости AA_1B_1 и ACD пересекаются по прямой AB, потому что пряма AB лежит в плоскостях AA_1B_1 и ACD.
Аналогично, плоскости PB_1C_1 и ABC пересекаются по прямой BC.
д) Прямые MK и DC пересекаются в точке R, потому что $R \in MK$ и $R \in DC$.
Прямые B_1C_1 и BP пересекаются в точке Q. Прямые C_1M и DC пересекаются в точке C.

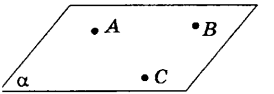
3. а) Верно, согласно аксиоме A_1, через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость.

б) Неверно, потому что аксиома A_1 для 4 произвольных точек не выполняется, иначе говоря, 4 точки могут не лежать в одной плоскости: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \notin \alpha$.

в) Неверно, потому что существуют плоскости, в которых есть 4 произвольных точки: $A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$, $B \in \alpha$.

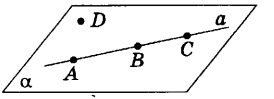
г) Не всегда, потому что эти три точки (по аксиоме A_1) не должны лежать на одной прямой.

4. а) Нет, согласно аксиомы A_1, точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, задают плоскость.

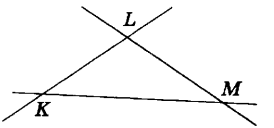


б) Допустим, что прямые AB и CD пересекаются, тогда по теореме (о пересечении двух прямых), через них можно провести плоскость, тогда все четыре точки будут в одной плоскости, а это противоречит условию задачи.

5. Пусть есть три точки, лежащие на прямой. Возьмем произвольную точку D, которая не лежит на прямой a, тогда по теореме (о плоскости, проходящей через точку и прямую) существует плоскость, проходящая через эти три точки. Поскольку точка D выбрана произвольно, то таких точек можно выбрать бесконечное множество, то и плоскостей существует бесконечное множество.



6. Согласно аксиоме A_2, через точки K и L можно провести плоскость, аналогично через точки L и M, аналогично через точки M и K можно провести плоскость, так, три точки задают единственную плоскость. То есть все отрезки лежат в одной плоскости.

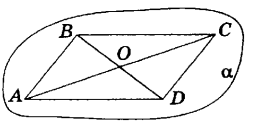


7. Согласно теореме (о пересечении двух прямых) существует плоскость, в которой лежат прямые a и b. Пусть прямая d не проходящая через точку M, пересекает прямые a и b соответственно в точках A и B. Тогда по аксиоме A_2 вся прямая d лежит в одной плоскости с прямыми a и b. Согласно теореме (о пересечении двух прямых) все прямые, проходящие через точку M, не лежат в одной плоскости.

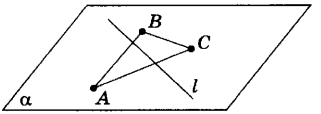
8. а) Неверно, потому что две точки не задают плоскость, то есть окружность пересекает плоскость, но не лежит в ней.

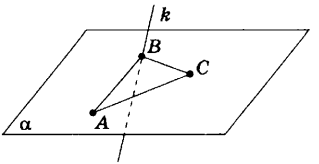
б) Поскольку три точки задают плоскость, то видно, что вся окружность лежит в этой плоскости.

9. Пусть $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $O \in \alpha$.
Докажем, что $C \in \alpha$, $D \in \alpha$.
Поскольку по аксиоме A_2 точка $C \in \alpha$ (потому что точка $C \in AO$ и AO лежат в плоскости α. Аналогично точка $D \in BO$ и BO лежит в плоскости α.



10.

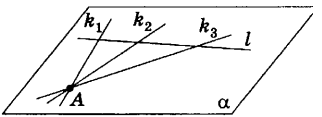




а) Верно, прямая l лежит в плоскости данного треугольника, пересекая стороны AB и AC ΔABC, потому что точки пересечения прямой со сторонами ΔABC по аксиоме A_2 лежат в плоскости α.

б) Прямая k пересекает плоскость α только в точке B и при этом не лежит в плоскости α.

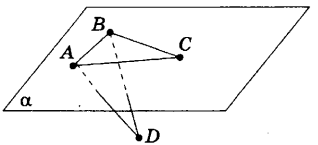
11.



По теореме (о плоскости, проходящей через точку и плоскоть) существует плоскость α, притом единственная.

Прямые пересекают плоскость α в точке A. То есть точка A является точкой пересечения прямых k_1, k_2, k_3,... Тогда по аксиоме A_2 прямые k_1, k_2, k_3 лежат в плоскости α, поскольку две точки каждой прямой лежат в плоскости α.

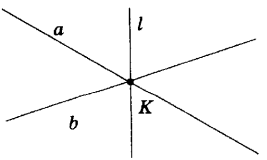
12.



Плоскости, что проходят через точки A, B, C и A, B, D, пересекаются, поскольку эти полоскости по аксиоме A_3 имеют общие точки A и B, и пересекаются по прямой AB, которая проходит через эти точки B и A.

13. а) Нет, поскольку по аксиоме A_3 они пересекаются по прямой.
б) Аналогично, нет.
в) Да, по условию аксиомы A_3.

14.

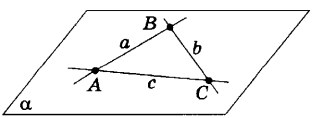


Может быть два случая решения задачи.

1) Эти три прямые могут лежать в одной плоскости.

2) Если через две прямые, по теореме (о пересечении двух прямых) существует единственная плоскость, тогда таких плоскостей три.

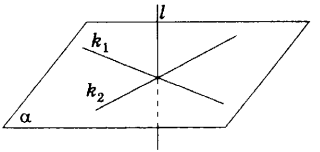
15.



В этой задаче будут два решения:
1) по аксиоме A_1 через три точки A, B, C можно провести плоскость, притом единственную,

* Решения и ответы приводятся к учебникам указанных годов.

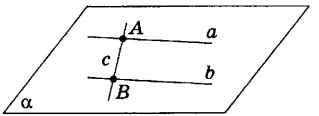
тогда отрезки AB, BC, AC будут лежать в плоскости α по аксиоме A_2. Тогда три прямые лежат в этой единственной плоскости.



2) Пусть прямые k_1 и k_2 лежат в плоскости α, а прямая l пересекается с прямыми k_1 и k_2 в точке M. Тогда прямые имеют общую точку, но не лежат в одной плокости.

ГЛАВА 1. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОТЕЙ

16. $a \in \alpha$, $b \in \alpha$. Доказать, что $c \in \alpha$.



Пусть прямая c пересекает прямые a и b соответственно в точках A и B. Поскольку прямая $a \in \alpha$, то и точка $A \in \alpha$, аналогично $b \in \alpha$, то и $B \in \alpha$, тогда по аксиоме A_2 $c \in \alpha$.

17. Пусть $BC = 14$ см, $AD = 12$ см.

Поскольку точки M, N, Q, P — середины сторон, то $BM = MD$; $DN = NC$; $CQ = QA$; $BP = PA$.

Найдем P_{MNQP}.

Поскольку точки M, N, Q, P есть середины, тогда MN — средняя линия ΔDBC; NQ — средняя линия ΔCDA; PQ — средняя линия ΔABC; MP — средняя линия ΔDBA. Тогда $MP \| AD$ и $NQ \| AD$, то по теореме (две прямые параллельны третьей), $MP \| NQ$, тогда точки P, Q, M, N лежат в одной плоскости.

Аналогично $MN \| PQ$. Тогда $\Delta MNQP$ — параллелограмм.

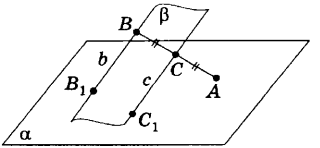
$P_{MNQP} = 2(MP + PQ)$.

По определению средней линии треугольника:

$$MP = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ см}; \quad QP = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7 \text{ см};$$

$P_{MNQP} = 2 \cdot (6 + 7) = 26$ см.

18. $b \| c$, $b \cap \alpha = B_1$; $c \cap \alpha = C_1$; точка C — середина AB; $BB_1 = 7$ см; CC_1 — ?



а) По определению параллельных прямых $BB_1 \| CC_1$, имеет то, что BB_1 и CC_1 лежат в плоскости β, тогда $C \in \beta$, $B \in \beta$, тогда прямая BC лежит в плоскости β.

Рассмотрим ΔACC_1 и ΔABB_1.

Эти треугольники подобны по двух углам ($\angle A$ — общий, $\angle B = \angle C$); $\Delta ACC_1 \sim \Delta ABB_1$.

Из подобия следует: $\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow CC_1 = \frac{7x}{2x} = 3,5$.

Обозначим AC через x, тогда $AB = 2x$, $CC_1 = 3,5$ см.

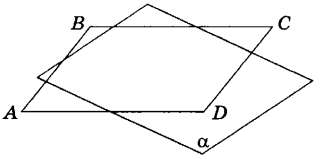
б) $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$ и $BB_1 = 20$ см.

Аналогично $\Delta ACC_1 \sim \Delta ABB_1$, $\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC}{AB}$, $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2AC = 3CB \Rightarrow$
$\Rightarrow CB = \frac{2AC}{3}$.

$AB = AC + CB$; $AB = AC + \frac{2AC}{3} = \frac{5AC}{3}$.

Подставим $\frac{CC_1}{20} = \frac{AC}{\frac{5AC}{3}} \Rightarrow \frac{CC_1}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow CC_1 = \frac{20 \cdot 3}{5} = 12$ см.

19.

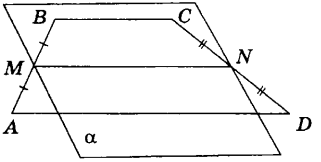


Сторона AB пересекает плоскость α и BC пересекает плоскость α. Докажем, что CD и AD пересекают плоскость α.

Поскольку у параллелограмма противоположные стороны параллельны и равны, то по лемме (о пересечении двух параллельных прямых) $CD \| AB \Rightarrow AB$ пересекает плоскость α, тогда CD пересекает плоскость α.

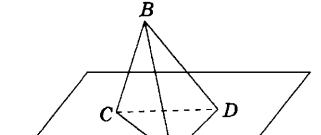
$BC \| AD \Rightarrow BC$ пересекает плоскость α, тогда AD пересекает плоскость α.

20.



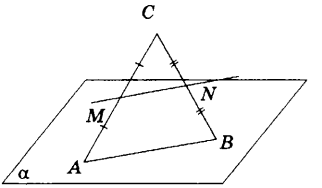
Поскольку средняя линия трапеции параллельна основаниям, то есть $BC \| MN \| AD$ и $MN \in \alpha$, то по теореме (о параллельных прямых в пространстве) $BC \| \alpha$, и не пересекает плоскость α, аналогично $AD \| \alpha$ и не пересекает ее.

21.

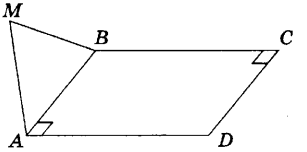


Допустим, что прямые $l \| CD$. Прямая CD пересекает плоскость ADB, значит прямая l пересечет плоскость ADB по лемме (параллельность трех прямых). Аналогично по этой лемме прямая CD пересекает плоскость ABC, $l \| CD$, значит, прямая l пересекает плоскость ABC.

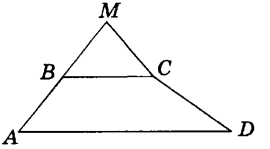
22. Точка M — середина AC, $AM = MC$. Аналогично $CN = NB$. Соединив точки A, B, C, получим ΔABC, в котором MN — средняя линия, потому что точки M, N — середины сторон AC и CB. По определению средней линии, $MN \| AB$. А по теореме (параллельные прямые в пространстве) $MN \| \alpha$.



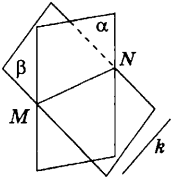
23. $M \notin ABCD$.
Докажем, что прямая $CD \| ABM$. По теореме (параллельные прямые в пространстве) прямая $AB \| ABM$, поскольку $ABCD$ — прямоугольник, то $AB \| CD$, а AB принадлежит плоскости ABM, тогда прямая $CD \| ABM$.



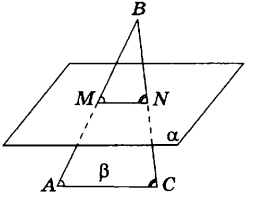
24. По определению трапеции $AD \| BC$. По теореме (параллельные прямые в пространстве) $AD \| BMC$. Поскольку $BC \in BMC$ и $AD \| BC$, тогда $AD \| BMC$.



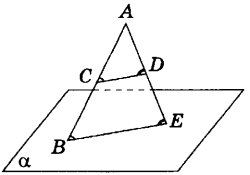
25. По теореме (параллельные прямые в пространстве) имеем $k \| \alpha$, поскольку $k \| MN$, а прямая MN принадлежит плоскости β. То есть $k \| \alpha$ и $k \| \beta$.



26. Поскольку AC принадлежит ΔABC и $AC \| \alpha$ и ΔABC пересекает плоскость α по линии пересечения NM, которая параллельна прямой AC по теореме (о параллельности прямой и плоскости). Значит, $MN \| AC$.
Рассмотрим ΔABC и ΔMBN.
$\Delta ABC \sim \Delta MBN$ (по двух углам), $\angle ABC$ — общий и $\angle A = \angle M$.



27. $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{3}$, $CD = 12$ см.
Точки B и E принадлежат плоскостям ABE и α. По теореме (о параллельности прямой и плоскости) $CD \| BE$.



Рассмотрим ΔACD и ΔABE.

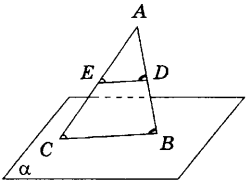
Поскольку $\angle C = \angle B$, а $\angle D = \angle E$, то $\Delta ACD \sim \Delta ABE$ (по двум углам). А из подобия этих треугольников

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}; \quad AC = AB - BC; \quad CD = 12 \text{ см};$$

$$\frac{AB}{AB - BC} = \frac{BE}{12} \Rightarrow \frac{AB - BC}{AB} = \frac{12}{BE};$$

$$\frac{AB}{AB} - \frac{BC}{AB} = \frac{12}{BE}; \quad \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}; \quad 1 - \frac{3}{4} = \frac{12}{BE} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{12}{BE} \Rightarrow BE = 48 \text{ см}.$$

28.



$$\frac{BD}{DA} = \frac{2}{3}; \quad DE = 5 \text{ см}.$$

Поскольку $DE \parallel \alpha$ и DE принадлежит плоскости ABC, то $DE \parallel BC$.

Рассмотрим ΔBAC и ΔDAE.

$\Delta BAC \sim \Delta DAE$ (по двум углами), $\angle A$ — общий, $\angle E = \angle C$.

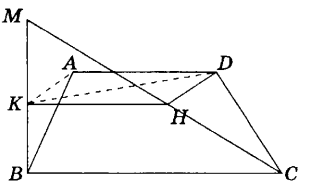
Из подобия треугольников:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD = AB - BD \Rightarrow AB = AD + BD;$$

$$\frac{BC}{5} = \frac{AD + BD}{AD} \Rightarrow \frac{BC}{5} = \frac{AD}{AD} + \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{BC}{5} = 1 + \frac{2}{3};$$

$$\frac{BC}{5} = \frac{5}{3} \Rightarrow BC = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3} \text{ см}.$$

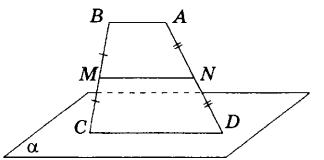
29.



По теореме (о параллельных прямых в пространстве) $AD \parallel BMC$, поскольку $AD \parallel BC$ — как основания трапеции, и $BC \in BMC$. Пересечением плоскостей BMC и ADK является прямая KN, которая параллельна AD, поскольку $AD \parallel BMC$ и $AD \in ADK$, а $ADK \cap BMC = K$.

В плоскости BMC, по теореме (о пропорциональных отрезках) H — середина MC, тогда KH — средняя линия ΔBMC. $KH = 6$ см.

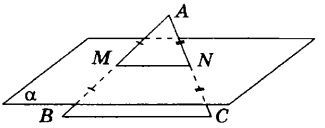
30.



а) Поскольку плоскость трапеции $ABCD$ пересекает плоскость α по прямой, проходящей через точку C, то, исходя из утверждения (о линии пересечения), линия пересечения

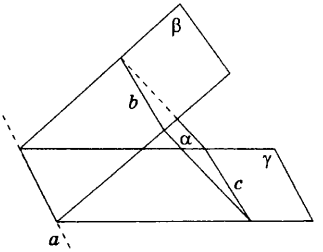
проходит через точку C и параллельна AB, а это значит, что она совпадет с основанием CD трапеции $ABCD$, то есть $CD \in \alpha$.
б) Поскольку $MN \| CD$, тогда по теореме (о параллельности прямых в пространстве) $MN \| \alpha$.

31. $BC \| \alpha$ — по условию задачи. Из утверждения (о линии пересечения плоскостей) $MN \| BC$, а значит MN — средняя линя ΔABC, поскольку $\Delta ABC \sim \Delta AMN$ (по двум углам) и плоскость α проходит через середину стороны AC.



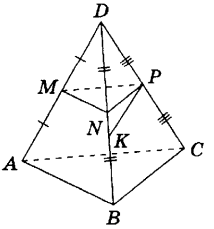
32. Решение в учебнике стр. 14.

33. Допустим, что прямые a и b не параллельны, тогда a и b пересекаются в произвольной точке K. $K \in \gamma$, $K \in \alpha$. Тогда плоскость γ пересекается с плоскостью α не по прямой c, а по другой прямой, проходящей через точку K. То есть точка $K \in c$. Тогда эти плоскости или имеют общу точку K, или это допущение неверно, то есть $a \| b$. Если $a \| b$, тогда $a \| \alpha$, тогда прямые a и c пересекаются, но лежат в одной плоскости γ. Тогда $a \| c \| b$.



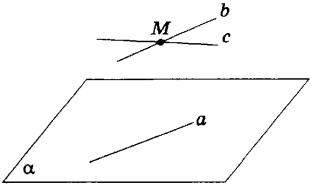
§ 2. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

34. $AM = MD$, $DN = NB$, $DP = PC$, $K \in NB$.
а) Прямые ND и AB пересекаются в точке B.
б) Прямые PK и BC пересекаются в какой-либо произвольной точке, поскольку прямые PK и BC не параллельны и лежат в одной плоскости.
в) Прямые MN и AB параллельны, потому что M и N — середины AD и BD, и MN есть средня линия ΔADB.
г) Прямые MP и AC параллельны, аналогично заданию в).



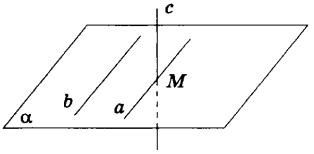
д) Прямые KN и AC — скрещиваются, поскольку они не параллельны и не пересекаются.
е) Прямые MD и BC — скрещиваются, поскольку они не лежат в одной плоскости.

35.



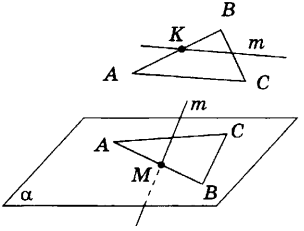
Прямые b и c пересекаются в точке M и не имеют общих точек с прямой a, то они или параллельны ей, или скрещиваются с ней. Поскольку прямые b и c пересекаются, то обе они не могут быть параллельны прямой a. Значит, хотя бы одна из них является скркещивающейся с прямой a.

36.



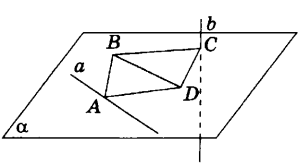
Поскольку прямые a и b параллельны, то существует плоскость α, тогда $a \in \alpha$, $b \in \alpha$. Прямая c пересекает прямую a в точке M, а $a \parallel b$, значит, $M \notin b$. Тогда по определению скрещивающихся прямых, прямые c и b скрещиваются.

37.



а) Прямая m пересекает AB и не имеет общих точек с прямой AC и они лежат в одной плоскости, тогда $AC \parallel m$, поскольку прямая $AC \cap BC$, то и $m \cap BC$.
б) Если прямая m не лежит в плоскости ABC, то BC и m скрещиваются, потому что точка $M \in AB$ и $M \notin BC$ по теореме (о скрещивающихся прямых).

38.



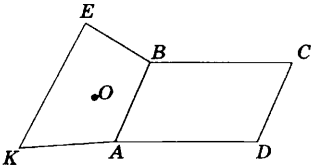
а) Поскольку прямая $a \parallel BD$, BD и CD — пересекаются, прямая $a \in \alpha$, $CD \in \alpha$, то прямая a не параллельна CD, значит, пересекает ее.
б) Поскольку прямая $a \in \alpha$, и прямые a и b не лежат в одной плоскости, то по определению (о скрещивающихся прямых) a и b — скрещиваются.

39. Поскольку AB и CD — скрещивающиеся прямые, тогда точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, тогда AD и BC тоже не лежат в одной плоскости, то есть и не параллельны и не пересекаются, то есть скрещиваются.

40. а) По определению скрещивающиеся прямые не лежат в одной плоскости, тогда $b \notin \alpha$.
б) Плоскости α и β имеют две общие точки M и N, тогда прямая MN — общая прямая для плоскостей α и β, тогда по аксиоме A_2 — прямая MN — линия пересечения плоскостей α и β.

41. Предположим, что прямые $a \parallel c$ и $b \parallel c$, тогда по теореме (о параллельности двух прямых третьей), $a \parallel b$, но по условию a и b — скрещиваются. Тогда такого быть не может.

42. а) Поскольку $ABEK$ — трапеция, то $KE \parallel AB$, а поскольку $ABCD$ — параллелограмм, то $AB \parallel CD$, тогда по теореме (о параллельности двух прямых третьей) $KE \parallel CD$.

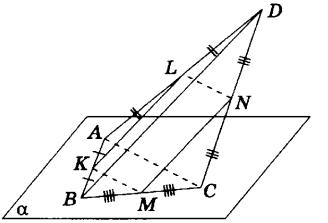


б) По свойству трапеции, в которую вписана окружность, имеем, что суммы длин противоположных сторон равны.

$P_{ABEK} = 2 \cdot (KE + AB) = 2 \cdot (22{,}5 + 27{,}5) = 100$ см.

43. $ABCD$ — пространственный четырехугольник

K — середина AB; L — середина AD; N — середина CD; M — середина BC; KM — средняя линия ΔABC, $KM \parallel AC$; LN — средняя линия ΔADC, $LN \parallel AC$.



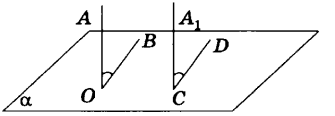
По теореме (о параллельности двух прямых третьей) $KM \parallel LN$.

Аналогично, KL — средняя линия ΔBAD и MN — средняя линия ΔBCD. $KL \parallel BD$, $NM \parallel BD \Rightarrow KL \parallel NM$.

Поскольку у четырехугольника противоположные стороны попарно параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм, то есть $KLMN$ — параллелограмм.

44. Прямые OB и CD — параллельны, AO и CD — скрещивающиеся.

Проведем $A_1C \parallel OA$. Углы $\angle AOB = \angle A_1CD$ — по теореме (об углах с сонаправленными сторонами).

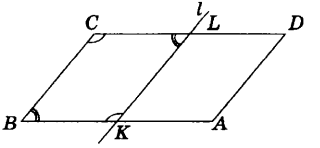


а) Если $\angle AOB = 40^\circ$, то угол между прямыми OA и CD равняется 40°.

б) $\angle AOB = 135^\circ$, тогда $180^\circ - 135^\circ = 40^\circ$, как угол между прямыми.

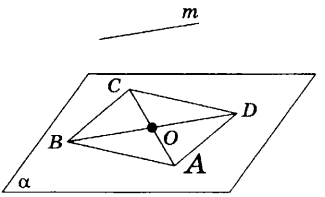
в) $\angle AOB = 90^\circ$, тогда угол между прямыми AO и CD равняется 90°.

45. Прямая параллельна стороне BC параллелограмма $ABCD$, а значит она параллельна плоскости ABC. Сторона CD не параллельна BC, то есть CD и прямая скрещивающиеся.



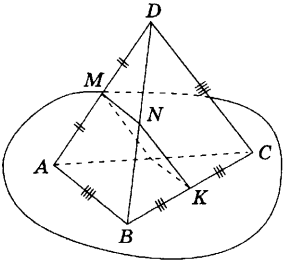
а) $\angle B = 50^\circ$, потому что угол между прямой CD и a равен углу между BC и CD, то есть острому $\angle B$.
б) Если $\angle C = 121^\circ$, значит по определению (об угле между прямыми) углом между прямой a и CD будет являться острый $\angle ADC$.
$\angle ADC = 180^\circ - 121^\circ = 59^\circ$ (сумма двух прилегающих к стороне углов равна 180°).

46.



а) Поскольку прямая m параллельна диагонали BD ромба $ABCD$ и диагональ BD принадлежит плоскости α, то по теореме (о скрещивающихся прямых) прямая m параллельна плоскости α.
Поскольку диагонали AC и BD пересекаются, тогда прямые m и AC — скрещиваются. Угол между прямыми m и AC будет равен углу между BD параллельной m и AC. Угол между прямой m и AC равен 90°, потому что диагонали ромба перпендикулярны между собой.
б) Аналогично, поскольку прямые AD и BD пересекаются, то прямые m и AD — скрещиваются. Угол между прямой m и AD будет равен углу между BD параллельной m и AD. Поскольку $ABCD$ — ромб, BD — биссектриса угла, тогда $\angle BDA = \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{1}{2}\cdot 128^\circ = 64^\circ$.

47.



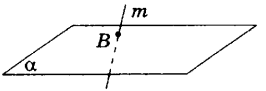
В пространственном четырехугольнике $ABCD$ стороны $AB = CD$, $AM = MD$, $CK = BK$. Сделаем дополнительное построение $KL \parallel AB$, $KN \parallel DC$. Соединив т. N, M, K, L получим $MNKL$. Рассмотрим ΔABC, $LK \parallel AB$ и $BK = KC$, тогда LK — средняя линия ΔABC и по определению средней линии $LK = \frac{1}{2}AB$.
Аналогично в ΔBDC, KN — средняя линия.

Аналогично в ΔADB, MN — средняя линия и $MN = \frac{1}{2}AB$, аналогично в ΔADC: ML — средняя линия ΔADC, $ML = \frac{1}{2}DC$. Тогда $LK = MN = \frac{1}{2}DC$. Поскольку $AB = DC$, тогда $LK = MN = KN = ML$, $ML \parallel KN$ и $MN \parallel LK$, тогда $MNKL$ — ромб, MK — диагональ, а в ромбе диагонали являются биссектрисами углов.

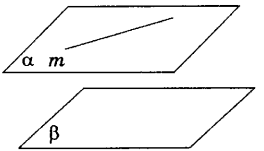
§ 3. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

48. Пол и потолок; две противоположные стены; пол и парта.

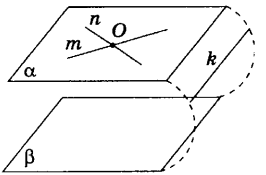
49. Не существуют, если бы такая плоскость была, то они имели бы с плоскостью α общую точку B, то есть не была ей параллельна.



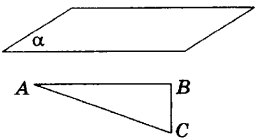
50. Поскольку прямая и плоскость параллельны, если они не имеют общих точек. Плоскости α и β параллельны тогда, когда у плоскостей α и β нет общих точек. Прямая $m \in \alpha$, тогда и у прямой m с плоскостью β нет общих точек, тогда прямая $m \| \beta$.



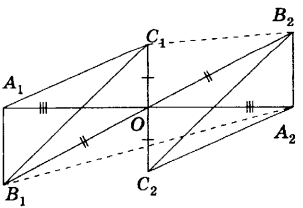
51. Плоскости α и β предположим пересекаются, тогда k — линия их пересечения. По теореме о параллельности прямой и плоскости $m \| k$ и $n \| k$, тогда они лежат в одной плоскости α и не пересекаются. Значит, в плоскости α через т. O проходят две прямые n и m, параллельные прямой k, что невозможно. То есть предположение не верно, $\alpha \| \beta$.



52. Пусть сторона BC ΔABC параллельна плоскости α и $AB \| \alpha$. Если две пересекающиеся прямые ΔABC параллельны плоскости α, то плоскость ΔABC параллельна плоскости α, тогда $AC \| \alpha$.

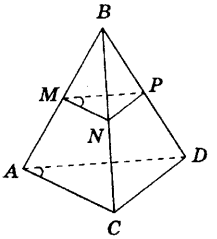


53. По следствию из аксиомы A_2 отрезки, A_1A_2, B_1B_2 лежат в одной плоскости. $A_1B_1A_2B_2$ — параллелограмм. Поскольку диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, $A_1B_1 \| A_2B_2$. Аналогично $A_1C_1A_2C_2$ — параллелограмм, тогда $A_1C_1 \| A_2C_2$. По теореме (о параллельности плоскостей) плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — паралелльны.



54. а) В треугольнике ABC, MN — средняя линия, потому что M, N — середины сторон. $MN \| AC$, $MN = \frac{1}{2} AC$.

Аналогично, в ΔBCD: NP — средняя линия, $NP \| CD$, $NP = \frac{1}{2} CD$.



Тогда, по теореме (о параллельности плоскостей) плоскости MNP и ACD параллельны.

б) Треугольники NMP и CAD подобны.

ΔNMP: $S = MN \cdot NP \cdot \sin\angle NMP$;

ΔCAD: $S = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin\angle CAD$; $S = 48$см^2.

Поделим:

$$\frac{S_{\Delta NMP}}{S_{\Delta CAD}} = \frac{\frac{1}{2} MN \cdot MP \cdot \sin\angle NMP}{\frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin\angle CAD}.$$

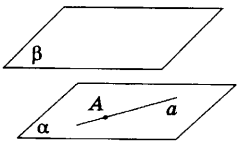
поскольку $\angle NMP = \angle CAD$ — как углы при соответственно параллельных сторонах.

Тогда:

$$\frac{S_{\Delta NMP}}{S_{\Delta CAD}} = \frac{MN \cdot MP}{AC \cdot AD} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{2} AD}{AC \cdot AD} = \frac{1}{4} \quad \frac{S_{\Delta NMP}}{48} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\Delta NMP} = 12 \text{ см}^2.$$

55. Решение в учебнике.

56.



Плоскости α и β параллельны, $A \in \alpha$. Поскольку прямая, пересекающая плоскость α, пересекает также любую плоскость, параллельную α. Если прямая a не параллельна плоскости α, то она пересекала бы плоскость β, а также плоскость α, по условию $\alpha \parallel \beta$. Тогда, прямая a не может пересекать плоскость α, поскольку она имеет с плоскостью α общую точку A, тогда прямая a принадлежит плоскости α.

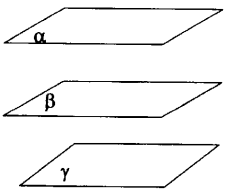
57.

Предположим, что прямая a не параллельна плоскости β, тогда она пересекает плоскость β. Значит, пересекает плоскость α, но по условию прямая $a \parallel \alpha$. Значит, предположение не верно.

58. Решение в учебнике.

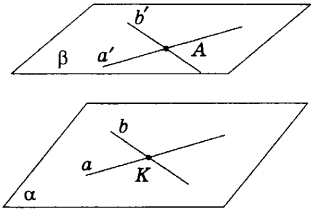
59. Решение в учебнике.

60.



Предположим $\alpha \nparallel \beta$, тогда плоскость α пересекает плоскость β. Тогда плоскость α пересекает и γ, так как если плоскость пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую, а по условию $\gamma \parallel \alpha$. Пришли к противоречию. То есть плоскости $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$.

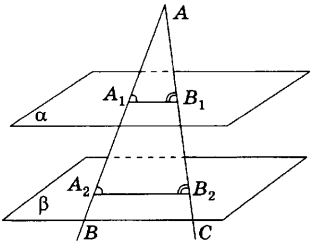
61. Пусть точка A принадлежит плоскости β, прямые a и b пересекаются в точке K по условию, тогда по теореме о существовании единственности плоскости через две пересекающиеся прямые, прямые a и b единственные определяющие плоскость α.



Согласно теоремы о параллельных прямых, через точку A можно провести единственную прямую $a' \| a$, и единственную прямую $b' \| b$. Прямые a' и b' задают плоскость β и она единственная. По признаку параллельности двух плоскостей $\alpha \| \beta$, а по признаку параллельности прямой и плоскости $a \| \beta$ и $b \| \beta$.

62. Уровни нельзя распологать на параллельных прямых, потому что можно регулировать только наклон прибора при установке уровня на на параллельных прямых, а установить диск со шкалой параллельно поверхности не получится.

63. а) Плоскость BAC пересекает плоскости α и β. Из свойства о параллельности плоскостей № 1 $A_1B_1 \| A_2B_2$. В плоскости BAC $\Delta A_1AB_1 \sim \Delta A_2AB_2$. $A_1A_2 = 2 \cdot A_1A = 12$ см; $AB_1 = 5$ см. Из подобия треугольников имеем:



$$\frac{A_1A}{A_2A} = \frac{AB_1}{AB_2}; \quad AA_1 = \frac{1}{2}A_1A_2 = 6 \text{ см};$$

$$AA_2 = AA_1 + A_1A_2 = 6 + 12 = 18 \text{ см}.$$

Подставим $\frac{6}{18} = \frac{5}{AB_2} \Rightarrow AB_2 = 15$ см. $AA_2 = 18$ см, $AB_2 = 15$ см.

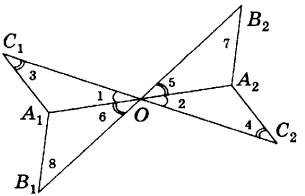
б) Из подобия $\Delta A_1AB_1 \sim \Delta A_2AB_2$

(*) $\frac{A_1A}{A_2A} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{AB_1}{AB_2}$; $AA_1 = 24$ см, $A_1B_1 = 18$ см; $AA_2 = \frac{3}{2}A_1A_2$;

$$AA_2 = AA_1 + A_1A_2 = 24 + A_1A_2 = 24 + \frac{2}{3}AA_2 = \frac{72 + 2AA_2}{3} \Rightarrow AA_2 = 72 \text{ см}.$$

Подставим в (*) $\frac{24}{72} = \frac{18}{A_2B_2} \Rightarrow A_2B_2 = 54$ см. $A_2B_2 = 54$ см; $AA_2 = 72$ см.

64. Две пересекающиеся прямые единственным способом задают плоскость. То есть, прямые A_1A_2 и C_1C_2 задают плоскость $A_1C_1C_2$. По свойству (о параллельности плоскостей № 1) $A_1C_1 \| A_2C_2$. Аналогично, $A_1B_1 \| A_2B_2$ и $B_1C_1 \| B_2C_2$.



Треугольники $\Delta OA_2C_1 \sim \Delta OA_2C_2$ ($\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$). Из подобия треугольников: $\frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OC_1}{OC_2}$.

Из подобия $\Delta OA_1B_1 \sim \Delta OA_2B_2$: $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2}$.

Из подобия $\Delta OB_1C \sim \Delta OB_2C_2$: $\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{OB_1}{OB_2} = \frac{OC_1}{OC_2}$.

Из этих соотношений имеем: $\frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} \Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$.

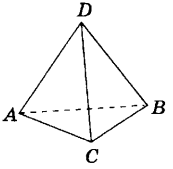
65. Рисунок в учебнике.

а) Плоскости α и β параллельны. По свойству (о параллельных прямых) $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$. А по определению параллелограмма (в четырехугольнике противоположные стороны равны и параллельны): $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$, $A_1C_1C_2A_2$ — параллелограммы.

б) А в параллелограммах: $B_1C_1 = B_2C_2$, $A_1B_1 = A_2B_2$, $A_1C_1 = A_2C_2$. Значит, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$ (по теореме равенства по трем сторонам).

§ 4. ТЕТРАЭДР И ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

66.



В тетраэдре $ABCD$ есть 3 пары скрещивающихся ребер:
1) AC и DB;
2) AB и DC;
3) AD и CB.

67. а) Рисунок в задаче № 66.

Рассмотрим ΔABD:

по теореме косинусов: $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \angle ADB$;

$AB^2 = 400 + 324 + 2 \cdot 20 \cdot 18 \cos 54^\circ = 724 - 720 \cdot 0{,}5878$;

$AB^2 \approx 301$; $AB \approx 17$ см.

Рассмотрим ΔACD:

$AC^2 = AD^2 + CD^2$; $AC = \sqrt{400 + 441} = 29$ см.

По теореме косинусов: $CB^2 = CD^2 + DB^2 - 2DC \cdot DB \cos \angle BDC$;

$CB^2 = 441 + 324 - 2 \cdot 21 \cdot 18 \cos 72^\circ =$

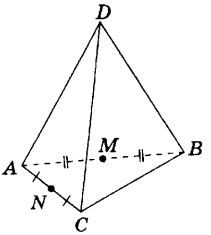
$= 765 - 233{,}603 \approx 531$; $CB \approx 23$ см.

б) ΔADC: $S = \frac{1}{2} AD \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210$ см^2;

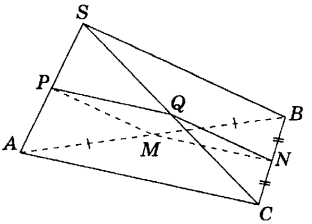
ΔADB: $S = \frac{1}{2} AD \cdot DB \sin 54^\circ = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 18 \cdot 0{,}809 \approx 146$ см^2;

ΔDBC: $S = \frac{1}{2} DC \cdot DB \sin 72^\circ = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 18 \cdot 0{,}9511 \approx 180$ см^2.

68. Поскольку M и N — середины сторон AB и AC, прямая MN параллельна прямой, лежащей в плоскости BCD, поэтому прямая MN параллельна всей плоскости BCD.

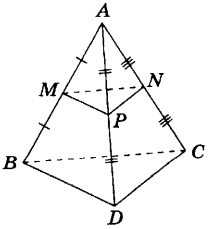


69. Точки M, N — середины сторон AB, BC. Плоскость, проходящая через прямую MN и плоскость SBC пересекаются по прямой, проходящей через точку N.
По теореме (о линии пересечения) прямая SB параллельна линии пересечения. В плоскости SBC через точку N проходят параллельные прямые NQ и SB.

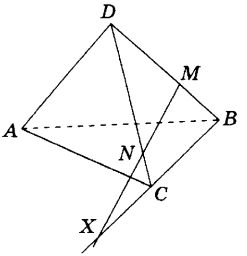


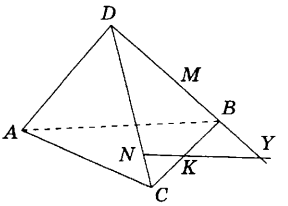
Плоскости SAB и MNQ — пересекаются по прямой MP, проходящей через точку M. Аналогично линия пересечения параллельна SB. Тогда $\begin{matrix} PM \parallel SB \\ NQ \parallel SB \end{matrix} \Rightarrow PM \parallel NQ$ — по теореме (о параллельности двух прямых третьей).

70. Точки M, N, P — середины AB, AC, AD. MN — средняя линия ΔABC, MP — средняя линия ΔABD, а значит, $MP \parallel BD$ и $MN \parallel BC$. Тогда по теореме (о параллельности плоскостей) плоскость MNP параллельна плоскости BCD.



71. а) Точки $M \in DB$, $N \in DC$, $K \in BC$. Построить точку пересечения.
Точки M, N выберем так, чтобы $MN \nparallel BC$
1) Продолжить сторону BC.
2) Продолжить и соединить точки M и N.
3) Их пересечение — точка X, точка пересечения прямой MN и плоскости ABC.
Точка $K \in BC$.
1) Продолжить сторону DB.





2) Соединить N и K и продолжить.

3) Их пересечение — точка Y, точка пересечения прямой KN и плоскости ABD.

72. а) Точка $M \in AB$.

1) Проведем через точку M прямые $MK \| AC$ и $MN \| AB$, соеденим точки K и N.

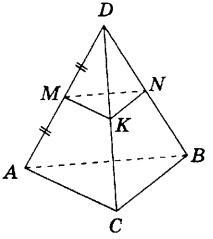
2) По признаку (о параллельности плоскостей) плоскость $MNK \| ABC$.

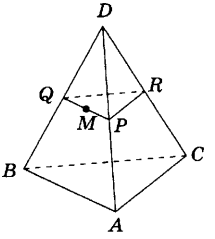
б) Если точка M лежит внутри грани ABD, тогда:

1) через точку M проведем $PQ \| AB$.

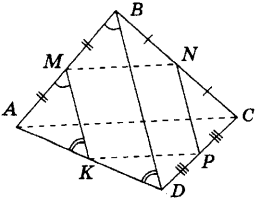
2) Через точку P проведем $PR \| AC$.

3) Соединим точки Q и R, тогда ΔPQR — сечение.





73. Поскольку M, N, P — середины ребер AB, BC, CD тетраэдра $ABCD$, то NP — средняя линия ΔDBC, $NP \| BD$. Ребро BD принадлежит ABD, тогда по теореме (о параллельности прямых в пространстве) $NP \| BDA$. Плоскости ABD и MNP имеют общую точку M, значит, они пересекаются по прямой, проходящей через точку M в плоскости ABD. Тогда эта прямая будет параллельна NP, $NP \| BD$, то эта прямая параллельна BD. Поскольку BD пересекает AD, тогда прямая, па-



раллельная BD, пересекает AD, тогда K — точка пересечения этой прямой с ребром AD.
Треугольники ΔMAK и ΔBAD — подобны (по двум углам: $\angle M = \angle B$, $\angle K = \angle D$).
Из подобия треугольников:

$$\frac{AK}{AD} = \frac{MA}{BA} = \frac{MK}{BD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{MK}{BD} =$$ отсюда точка K — середина AD.

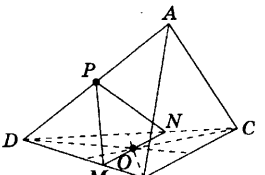
Аналогично, PK — средняя линия ΔADC. Тогда

$$\begin{matrix} NP \parallel BD \\ MK \parallel BD \end{matrix} \Rightarrow MK \parallel BD \parallel NP \text{ и } \begin{matrix} MN \parallel AC \\ PK \parallel AC \end{matrix} \Rightarrow MN \parallel AC \parallel PK.$$

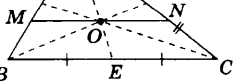
Из этого получим $MNPK$ — параллелограмм. $P = 2(PK + MK)$

$$P = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD\right) = AC + BD = 10 + 12 = 22 \text{ см}.$$

74. а) Проведем медианы в грани BCD, точка O — точка пересечения медиан. Плоскость сечения с гранью ADC имеет общую точку N, тогда обе плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку N.



Плоскость сечения и плоскость ABC пересекаются плоскостью ADC, тогда линии пересечения параллельны $NP \parallel AC$. $PM \parallel AB$ и $MN \parallel BC$, углы $\angle MPN = \angle BAC$, $\angle MNP = \angle BCA$, тогда $\Delta MNP \sim \Delta BAC$.
б) Вынесем отдельно плоскость BDC. Поскольку $\Delta NDO \sim \Delta CDE$, тогда



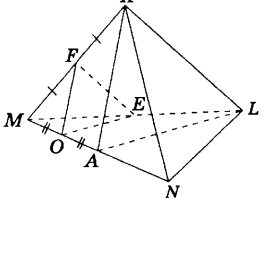
$$MO = \frac{2}{3}BE,\ NO = \frac{2}{3}EC \text{ и } \frac{MO}{BE} = \frac{DO}{DE} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MO}{BE} = \frac{2}{3};\ MN = MO + ON = \frac{2}{3}BC.$$

Из подобия ΔMNP и ΔABC

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{MN^2}{BC^2} \Rightarrow$$ отношение площадей подобных фигур равно отношению квадратов соответственных линейных размеров. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{4}{9}BC^2}{BC^2} = \frac{4}{9}$.

75. а) Точка A — середина MN. Проведем AK и AL, тогда ΔAKL — сечение.



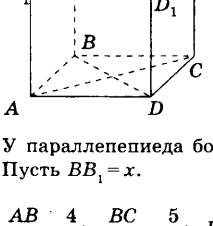
б) Рассмотрим ΔAMK: OF — средняя линия, $OF \| AK$, а в ΔMLK: EF — средняя линия, $EF \| KL$. По теореме (о параллельности плоскостей) плоскости $OFE \| AKL$. $\Delta OFE \sim \Delta AKL$ ($\angle OFE = \angle AKL$, $OF = \frac{1}{2}AK$, $FE = \frac{1}{2}KL$).

Тогда из подобия имеем

$$\frac{S_{\Delta LKA}}{S_{\Delta EOF}} = \frac{LA^2}{EO^2} = \frac{LA^2}{\frac{1}{4}LA^2}; \quad S\Delta_{LKA} = 24 \text{ см}^2,$$

тогда $S_{\Delta EOF} = 24 : 4 = 6$ см^2.

76.



Рассмотрим параллелограмм AA_1C_1C, отсюда $A_1C_1 \| AC$, потому что в параллелепипеде противоположные ребра параллельны и равны.

Аналогично в B_1D_1BD — ребра $B_1D_1 \| BD$.

77. У параллепипеда боковые рабра равны (рисунок к задаче № 76). Пусть $BB_1 = x$.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}; \quad \frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6}; \quad BC = \frac{5x}{6}; \quad AB = \frac{4BC}{5} = \frac{4 \cdot \frac{5x}{6}}{5} = \frac{2}{3}x;$$

$$4AB + 4BC + 4AA_1 = 120; \; AA_1 = BB_1 = x; \; 4(AB + BC + BB_1) = 120;$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{5x}{6} + x = 30 \,|\cdot 6; \; 4x + 5x + 6x = 180 \Rightarrow x = 12 \text{ см}, \; BB_1 = 12 \text{ см};$$

$$AB = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8 \text{ см}; \; BC = \frac{5 \cdot 12}{6} = 10 \text{ см}.$$

78. Рисунок в учебнике.

$ABCD$ — параллелограмм, $AB = CD$.

$AB - AM = BM$ $\qquad$ $AB - AM = CD - CN$

$CD - CN = DN$ $\qquad$ $BM = DN$.

Поскольку $BM \| DN$, $BM = DN$, тогда $MBND$ — параллелограмм.

Аналогично $N_1B_1M_1D_1$ — параллелограм, $\angle NDM = \angle N_1D_1M_1$.

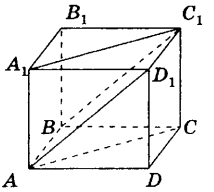
Параллелограммы $MBND = M_1B_1N_1D_1$ (потому что $MB = M_1B_1$, $M_1D_1 = MD$).

$A_1M_1 = AM$, тогда A_1M_1MA — параллелограмм. $M_1M \| AA_1 \| B_1B$.

Аналогично C_1NN_1C — параллелограмм, $CC_1 \| NN_1 \| D_1D$. Тогда $MM_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = NN_1$. Тогда по признакам параллелограмма: MBB_1M_1, BNN_1B_1, DNN_1D_1, MDD_1M_1 — параллелограммы.

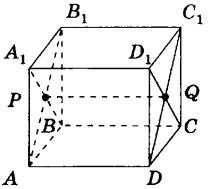
По свойствам параллелограмма $MBNDM_1B_1N_1D_1$ — параллелепипед.

79. а) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сечение плоскостью ABC_1, плоскость $BB_1C_1C \parallel AA_1D_1D$, а отсюда $BC_1 \parallel AA_1D_1D$. Поскольку точка A общая для плоскостей ABC_1 и AA_1D_1D, потому что эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку A и параллельно BC, по первом свойству параллельных плоскостей, это AD_1.



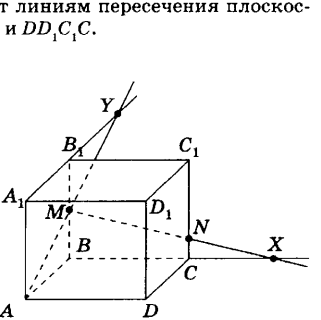
ABC_1D_1 — сечение, $AB \parallel CD$ и $AB = CD \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм. $CD \parallel C_1D_1$, $CD = C_1D_1 \Rightarrow CDC_1D_1$ — параллелограмм.
Отсюда $AB \parallel C_1D_1$ и $AB = C_1D_1$. Тогда ABC_1D_1 — параллелограмм.
б) Сечение плоскостью ACC_1.
Плоскости BC_1CB и A_1D_1DA пересечены плоскостью A_1C_1CA, а линии пересечения параллельны. $AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = CC_1$, из второго свойства параллельных плоскостей AA_1C_1C — параллелограмм.

80. Сечение параллелепипеда плоскостью ABC_1. Плоскости $BB_1C_1C \parallel AA_1D_1D$ по свойствам параллелепипеда. $BC_1 \parallel AA_1D_1D$.
Точка A — общая для плоскостей ABC_1 и AA_1D_1D, потому что эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку A. Плоскости граней AA_1B_1B и DD_1C_1C пересечены плоскостью ABC_1D_1, а значит их линии пересечения параллельны $AB \parallel C_1D_1$, то есть плоскость пересекает грань AA_1D_1D по прямой AD_1; $AD_1 \parallel BC_1$. Тогда искомое сечение — параллелограмм ABC_1D.



б) Сечение плоскостью DCB_1. По первом свойству параллельных плоскостей, точка D — общая для плоскостей DCB_1 и AA_1D_1D — плоскости пересекаются по прямой CB_1. В плоскости AA_1D_1D проводим прямую DA_1. Тогда DCB_1A_1 — параллелограмм, поэтому $DA_1 \parallel CB_1$.
в) Отрезок, по которому будут пересекаться эти сечения, будет PQ, потому что точки P и Q принадлежат линиям пересечения плоскостей ABC_1 с DCB_1 плоскостями AA_1B_1B и DD_1C_1C.

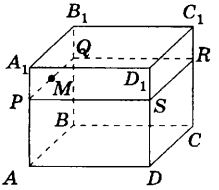
81. а) $MN \nparallel BC$, тогда MN пересекает плоскость ABC.
1) продолить BC и MN;
2) их пересечение — точка X;
б) $AM \nparallel A_1B_1$ тогда AM пересекает A_1B_1.
1) продолжить A_1B_1 и AM;
2) их пересечение — точка Y.

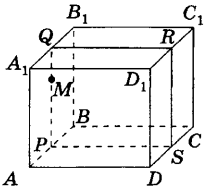


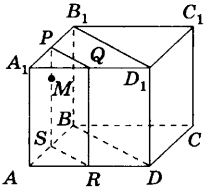
82. а) Сечение, проходящее через точку M параллельно $ABCD$. Это сечение будет пересекать грани по

прямым, параллельным AB, BC, DC, AD. По свойствам из теоремы (о параллельности двух плоскостей третьей):

1) через т. M проводим $PQ \parallel AB$;
2) через т. Q проводим $QR \parallel BC$;
3) через т. P проводим $PS \parallel AD$;
4) соединим точки M, Q, P, S, R;
5) $PQSR$ — сечение.







б) Аналогично задаче 82 а), сечение пересечет грани по паралельным прямым к прямым AA_1 и DD_1:

1) через т. M проводим $PQ \parallel AA_1$;
2) через т. Q проводим $QR \parallel A_1D_1$;
3) через т. P проводим $PS \parallel AD$;
4) соединим точки R и S;
5) сечение — $PQRS$.

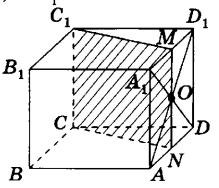
в) Построенная плоскость BDD_1 пересечет плоскости по прямым $BD \parallel B_1D_1$, а по условию плоскость сечения параллельна плоскости BB_1D_1D, а значит параллельна BB_1D_1D.

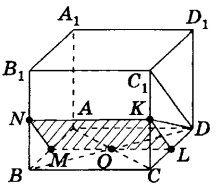
Аналогично задачи 82а) и б), плоскость AA_1B_1B проходит через прямую BB_1, а $BB_1 \parallel$ плоскости сечения, то линия пересечения боковой грани с сечением параллельна прямой BB_1.

1) через т. M проводим $PS \parallel BB_1$;
2) через т. P проводим $PQ \parallel B_1D_1$;
3) через т. S проводим $SR \parallel BD$;
4) соединим т. Q и R;
5) $PQRS$ — сечение.

83. а) 1) Через т. O проведем $MN \parallel DD_1$;

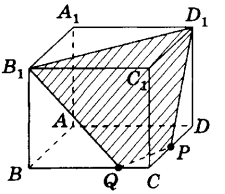
2) $MN \parallel DD_1$, $CC_1 \parallel DD_1 \Rightarrow$ по теореме (о параллельности двух прямых третьей) $CC_1 \parallel MN$;
3) соединим т. M с C_1 и т. N с C;
4) MC_1CN — сечение.





б) 1) через т. O проводим $ML \parallel AD$;
2) через т. M проводим $MN \parallel AB_1$;
3) через т. N проводим $NK \parallel B_1C_1$;
4) соединим точки K и L;
5) $MNKL$ — сечение.

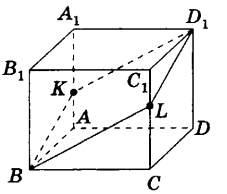
84. Пусть точка P — середина ребра CD. Плоскость сечения пересекает основание $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ по параллельным прямым по теореме (о линии сечения).



1) проведем BD, $BD \parallel B_1D_1$;
2) из точки P проводим $PQ \parallel BD$, $PQ \parallel B_1D_1$;
3) соединим точки B_1, Q, D_1, P;
4) B_1D_1PQ — сечение.

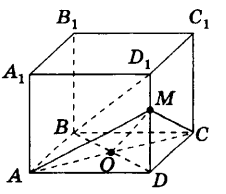
В плоскости $B_1D_1 \parallel PQ$, тогда по определению трапеции B_1D_1PQ — трапеция.

85. Поскольку противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны, плоскость BKL пересечет противоположные боковые грани по параллельным прямым,

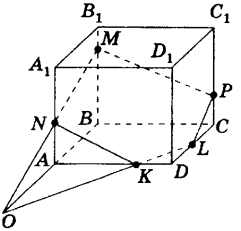


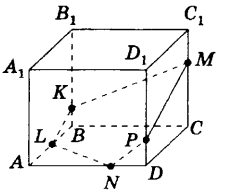
1) соединим точки K и B, L и D_1.
2) $A_1K = LC$, $A_1D_1 = BC$, $\angle KA_1D_1 = \angle LCB$, то $\Delta KA_1D_1 = \Delta LCB$ (по двум сторонам и углам). Отсюда $KD_1 = LB$.
3) Аналогично $\Delta KAB = \Delta LC_1D_1$, $D_1L = BK$. В BKD_1L стороны $KB = LD_1$ и $KD_1 = BL$. Тогда BKD_1L — сечение. Параллелограм.

86. Плоскость сечения параллельна BD_1, если сечение проходит через прямую, параллельную BD_1 по теореме (о параллельности плоскостей). В плоскости BD_1D проводим $OM \parallel BD_1$, и проводим AM и CM. $AMC \parallel BD_1$, а значит AMC — сечение. Если основание параллелепипеда — ромб и $\angle ABB_1 = \angle CBB_1 = 90^\circ$, $AD = DC$, ΔADM и ΔDMC — прямоугольные, MD — общий катет. Тогда $\Delta ADM = \Delta CDM \Rightarrow MA = MC$. В ΔAMC: $MA = MC \Rightarrow \Delta AMC$ — равнобедренный.



87. а) 1) Предположим, что $MN \not\parallel AB$ тогда продолжим MN и AB до пересечения их в т. O.
2) Точка $O \in ABC$, $K \in ABC$, $OK \subset ABC$, соединим точки K и N.
3) Плоскости ONK и OAK пересекаются по прямой OK.
4) Продолжим OK до пересечения с DC в точке L.
5) Соединим точки K и L.
6) В плоскости DD_1C_1C проведем $LP \parallel NM$.





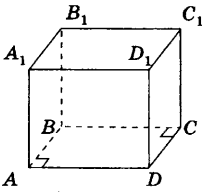
7) Соединим точки P и M.
8) $MNKLP$ — сечение.

б) 1) Соединим точки K и M.
2) Точка $N \in AA_1D_1D$.
3) Проводим $NP \parallel KM$ в плоскости AA_1D_1D.
4) Проводим PM.
5) Проводим $KL \parallel MP$ в плоскости AA_1B_1B.
6) Соединим точки L и N.
7) $KLNPM$ — сечение.

ГЛАВА 2

§ 1. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

116.



В параллелепипеде все грани параллельны, а противоположные грани — параллельны и равны. а) В $ABCD$: $\angle A = \angle C = 90^\circ$, тогда $ABCD$ — прямоугольник. $DC \perp BC$.

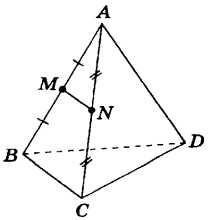
В плоскости BB_1C_1C: $B_1C_1 \parallel BC$ и $DC \perp BC$, тогда $DC \perp B_1C_1$.

В плоскости AA_1D_1D: $A_1D_1 \parallel AD$ и $AB \perp AD$, тогда $AB \perp A_1D_1$.

б) $AB \perp DD_1$ т.к. $AB \parallel DC$, то $DC \perp DD_1$ тогда DD_1C_1C – прямоугольник, следовательно $DC \perp CC_1$, а т.к. $DC \parallel AB$, то $AB \perp CC_1$.

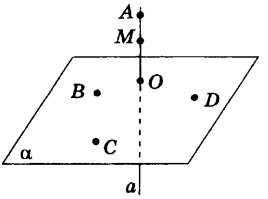
Аналогично $D_1D \parallel A_1A$; тогда $AB \perp A_1A$ ABB_1A_1 – прямоугольник, $A_1B_1 \perp AA_1$; $A_1A \parallel D_1D$, следовательно $A_1B_1 \perp DD_1$.

117.

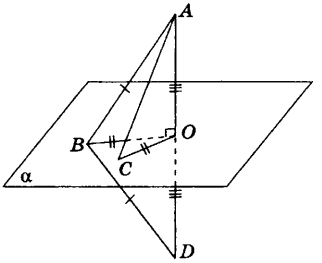


В тетраэдре $ABCD$ M и N — середины AB и AC. $MN \parallel BC$, так как MN — средняя линия ΔABC, по лемме (о перпендикулярности прямых в пространстве) $AD \perp MN$.

118. Прямая $a \perp \alpha$, поэтому прямая a перпендикулярна любой прямой в плоскости α.
$BO \in \alpha$, $\angle AOB = 90^\circ$, потому что $\alpha \perp AO$.
$OC \in \alpha$, $\angle MOC = 90^\circ$, потому что $\alpha \perp MO$.
$DO \in \alpha$, $\angle DOA = 90^\circ$, потому что $\alpha \perp AO$.
$AD \notin \alpha$, $\angle DAM \neq 90^\circ$ и $BM \notin \alpha$, $\angle BMO \neq 90^\circ$.



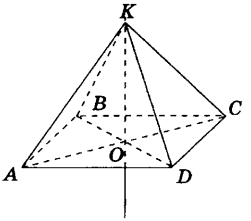
119. а) По условию O — середина AD, тогда $AO = OD$.
Рассмотрим ΔABD, он равнобедренный, докажем это. $AO \perp BOC$, тогда $AO \perp OB$. В ΔABC BO — высота, медиана, биссектриса. ΔABD — равнобедренный, то есть $AB = DB$.
б) По условию $OB = OC$, тогда рассмотрим ΔAOB и ΔAOC.
$AO \perp OB$ и $AO \perp OC$, тогда AO — общая. Поскольку эти треугольники — прямоугольные, то равные проекции имеют равные наклонные, то есть $AB = AC$.
в) По условию $AB = AC$ тогда рассмотрим ΔAOB и ΔAOC, они прямоугольные и равные т.к. $AO \perp BO$; $AO \perp CO$; AO – общий катет, $AB = AC$, следовательно $BO = OC$.



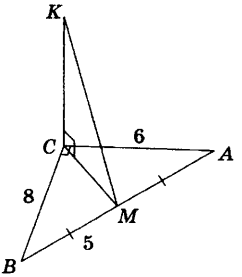
120. $ABCD$ — квадрат, тогда O — точка пересечения диагоналей. $KO \perp OA$, $KO \perp OB$, $KO \perp OC$, $KO \perp OD$.
Для ΔKOA, ΔKOB, ΔKOC, ΔKOD KO — общий катет, $OB = OA = OC = OD$.
Тогда $\Delta KOA = \Delta KOB = \Delta KOC = \Delta KOD$, поэтому $KA = KB = KC = KD$.
По теореме Пифагора $KB^2 = OK^2 + OB^2$; $KB^2 = b^2 + OB^2$; $AB = BC = CD = AD = a$;

$$BD = a\sqrt{2};\quad OB = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$KB^2 = b^2 + \frac{2a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{2};\quad KB = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}.$$



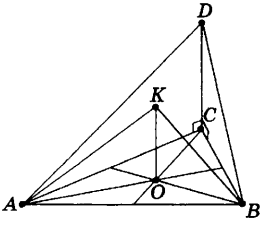
121. Поскольку $KC \perp ABC$, $KC \perp CM$, ΔKMC — прямоугольный. По теореме Пифагора $MK^2 = CK^2 + MC^2$.
ΔABC — прямоугольный. По теореме Пифагора $AB^2 = CB^2 + AC^2$;
$AB = \sqrt{64 + 36} = 10$ см. Точка M —



середина AB, $BM=AM$; $BM=5$ см. По определению косинусов $\cos\angle B=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$.

В ΔMBC, из теоремы косинусов, $CM^2=BC^2+BM^2-2\cdot BC\times$ $\times BM\cdot\cos\angle B$; $CM^2=64+25-2\cdot 8\cdot 5\cdot\frac{4}{5}=25$. $MK^2=144+25=169$; $MK=13$ см.

122.



Расмотрим ΔDAC и ΔDCB. По условию $CD\perp AC$, $CD\perp CB$, CD — общий, $AC=BC$, тогда $\Delta DAC=\Delta DCB\Rightarrow AD=BD$. По теореме Пифагора $AD=BD=\sqrt{CD^2+AB^2}$;

$AD=BD=\sqrt{16^2+\left(16\sqrt{3}\right)^2}=32$ см.

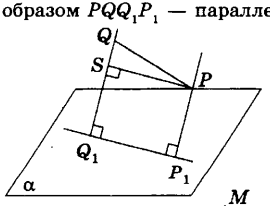
$OA=OB=OC=R$ — радиус описаной окружности.

По теореме синусов $2R=\frac{a}{\sin\alpha}$. $R=\frac{AB}{2\sin\angle C}$, ΔABC — равносторонний, $\angle C=60^\circ$. $R=\frac{16\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=16$ см. $R=AO=OC=OB=16$ см.

Итак, $OK\perp OA$, $OK\perp OB$. $\Delta KOA=\Delta KOB$ (по двум катетам), $AK=KB$. По теореме Пифагора $AK=KB=\sqrt{OA^2+OK^2}=\sqrt{16^2+12^2}=20$ см.

124. По условию $PQ\parallel\alpha$, $QQ_1\perp\alpha$. Поскольку $PP_1\parallel QQ_1$, как перпендикуляры одной плоскости, отсюда PP_1 и QQ_1 принадлежат одной плоскости β. Пусть P_1Q_1 — линия пересечения α и β. Тогда $P_1Q_1\parallel PQ$, таким образом PQQ_1P_1 — параллелограмм, $PQ=P_1Q_1$.

125.



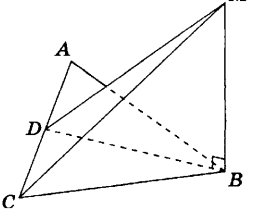
По условию $PQ=15$ см, $PP_1\parallel QQ_1$, $PP_1=21{,}5$ см, $QQ_1=33{,}5$ см. $PP_1\parallel QQ_1$ как перпендикуляры одной плоскости. $PP_1\in\beta$, $QQ_1\in\beta$. P_1Q_1 — линия пересечения. PQQ_1P_1 — трапеция.

Рассмотрим ΔQSP. Он прямоугольный. По теореме Пифагора

$SP=Q_1P_1=\sqrt{QP^2-QS^2}$;

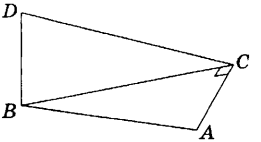
$SP=Q_1P_1=\sqrt{15^2-12^2}=9$ см.

126.

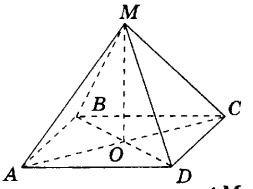


$MB\perp AB$, $MB\perp BC$ по условию задачи. $D\in AC$, MB перпендикулярна плоскости ABC по признаку перпендикулярности. $BD\perp MB$. ΔMBD — прямоугольный, потому что $\angle MBD=90^\circ$.

127. По условию в ΔABC $\angle A + \angle B = 90^\circ$. Тогда $\angle C = 90^\circ$, потому что $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. $AC \perp BD$. По признаку (перпендикулярности прямой и плоскости) $AC \perp BDC$, так как $AC \perp BC$, $AC \perp BD$. Тогда $AC \perp DC$.



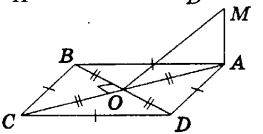
128. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. $MA = MC$, $MB = MD$. Точка M равноудалена от A и C, B и D. Значит, она лежит на серединном перпендикуляре к AC и BD. То есть $OM \perp AC$, $OM \perp BD$. По признаку (перпендикулярности прямой и плоскости) $OM \perp ABC$.



129. $ABCD$ — квадрат, а $AM \perp ABCD$, O — точка пересечения диагоналей.

а) $BO \perp AO$, т.к. $MA \perp ABCD$, а $BO \in ABCD$, то $BO \perp MA$, следовательно $BO \perp MAO$ согласно признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

б) Поскольку $BO \perp MAO$, то $BO \perp OM$.

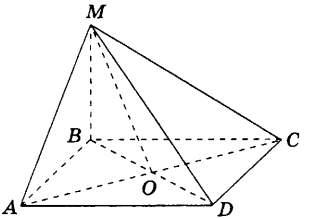


130. $ABCD$ — квадрат, $MB = m$, $AB = n$, $\angle MBA = \angle MBC = 90^\circ$.

а) $\Delta MBA = \Delta MBC$, MB — общий, $\angle MBA = \angle MBC = 90^\circ$.

$AB = BC$ — стороны квадрата.

$MC = MA$. По теореме Пифагора: $MC = MA = \sqrt{MB^2 + AB^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$.



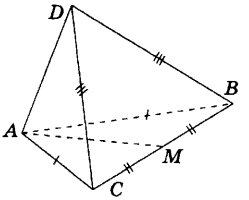
Треугольник MBD — прямоугольный. $MB \perp ABC$, $BD \in ABC$. По теореме Пифагора $MD = \sqrt{MB^2 + BD^2}$; $BD = \sqrt{n^2 + n^2} = n\sqrt{2}$; $MD = \sqrt{2n^2 + m^2}$.

б) По определению перпендикуляра, расстояние от точки M до прямых $\rho(M, BD) = MB$, $\rho(M, AC) = MO$. Рассмотрим ΔAMC он равносторонний т. к. $AM = MC$, следовательно $MO \perp AC$. Рассмотрим прямоугольный ΔAOM, по теореме Пифагора $MO = \sqrt{MA^2 - AO^2}$; $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{2}}{2}n$, т.к. $ABCD$ – квадрат;

$$MA = \sqrt{m^2 + n^2},\ MO = \sqrt{m^2 + n^2 - \frac{1}{2}n^2} = \sqrt{m^2 + \frac{1}{2}n^2},\ MB = m.$$

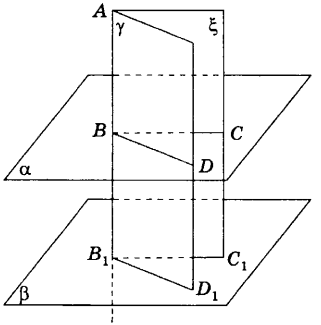
131. $ABCD$ — тетраэдр. $AB = AC$, $BD = DC$. ΔABC — равнобедренный, AM — высота и медиана, то есть $AM \perp BC$.

ΔDCB — равнобедренный, MD — медиана, высота, то есть $DM \perp BC$.



Так как MD и MA пересекаются в точке M, то по признаку (перпендикулярности прямой и плоскости) $CB \perp AMD$.

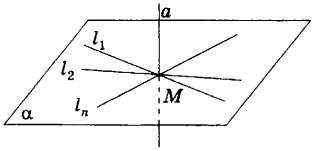
132.



Пусть плоскости $\alpha \parallel \beta$, а прямая $BB_1 \perp \alpha$. Проведем через BB_1 плоскости γ и ξ. $BC \parallel B_1C_1$, $BD \parallel B_1D_1$. По условию $BB_1 \perp BC$, $BB_1 \perp BD$, так как $BB_1 \perp \alpha$; согласно лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой $BB_1 \perp B_1C_1$ и $BB_1 \perp B_1D_1$, $BB_1 \perp \beta$, потому что B_1C_1 и B_1D_1 пересекаются в точке B и лежат в плоскости β.

133. Решение в учебнике.

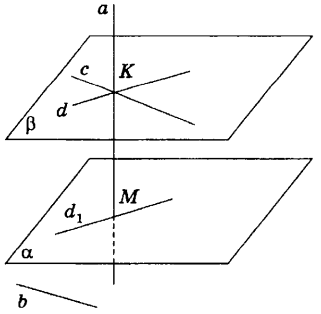
134.



По условию точка $M \in a$, прямые l_1, l_2, ..., $l_n \perp a$. По признаку (перпендикулярности прямой и плоскости) прямая a перпендикулярна плоскости α, в которой находятся прямые k_1, l_2, ..., l_n. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, отсюда любая прямая из l_1, l_2, ..., l_n, проходящая через точку M и перпендикулярна прямой a, лежит в плоскости α.

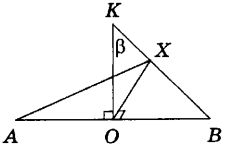
Предположим $l_n \notin \alpha$ То через l_2 и l_n можно провести плоскость γ, тогда $a \perp l_2$ и $a \perp l_n \Rightarrow a \perp \gamma$. То есть через точку M проходит 2 плоскости α и $\gamma \perp a$, а это невозможно, предположение неверно, $l_n \in \alpha$.

135.

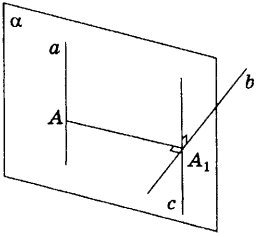


По условию прямая $a \perp \alpha$, $a \perp b$, $b \notin \alpha$. Пусть тогда точка M — точка пересечения a с α. Проведем че-

рез точку K прямую. $c \| b$. В плоскости α через точку M проведем прямую d_1, а через точку K проведем прямую $d \| d_1$. Прямые b и c Прямая $a \perp d_1$, $d_1 \| D \Rightarrow a \perp d$. Тогда $a \perp \beta$, потому что через точку проходит единственная $\beta \perp a \Rightarrow \alpha \| \beta$. Из того, что $b \| c$, $c \in \beta$, $\alpha \| \beta$ получим $b \| \beta \Rightarrow b \| \alpha$.

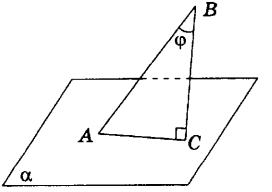


136. Если $XA = XB$, то ΔAXB – равнобедренный. Опустим высоту XO, XO – является также медианой и биссектрисой. Следовательно $AO = OB$. Построим перпендикуляр $OK \perp AXB$, Прямые OK и OX зададут плоскость β, $AO \perp OX$, $AO \perp OK$ следовательно $AB \perp \beta$, а $X \in \beta$ т.к. $O \in \beta$, то β проходит через середину AB.

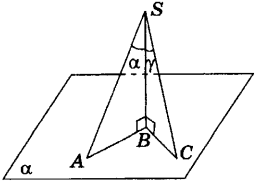


137. Из т. A на прямой a опустили $\perp AA_1$ на прямую b. Пересечение прямых a и A_1A задает плоскость α. Через точку A_1 построим прямую $C \| a$, т.к. $a \perp b$, то $c \perp b$. Т.к. точка $A_1 \in c$, и $a \| c$, то $c \subset \alpha$ Прямая $b \perp c$ и $b \perp AA_1$ следовательно $b \perp \alpha$.

§ 2. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

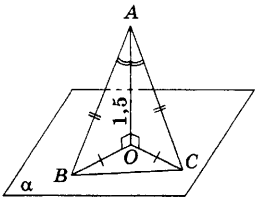


138. а) По условию $\angle ABC = \angle\varphi$, $AC = m$, $BC = d$, $CB \perp \alpha$, CA — наклонная.
ΔACB — прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$. По определению косинуса, $AC = \dfrac{d}{\cos\varphi}$;
$AB = d \operatorname{tg} \varphi$.
б) По определению косинуса и синуса $CB = m \cos\varphi$, $AB = m \sin\varphi$.



139. а) По условию $SA = SC$. ΔSBA и ΔSBC — прямоугольные, $\angle B = 90^\circ$, SB — общий катет. $SA = SC \Rightarrow \Delta SBA = \Delta SBC$, значит $AB = BC$.
б) По условию $AB = CB$. Из равенства прямоугольных треугольников: SBA и $SBC \Rightarrow SA = SC$.
в) По условию $SA \neq SC$. Тогда по теореме Пифагора $SA = \sqrt{AB^2 + SB^2}$;
$SC = \sqrt{BC^2 + SB^2}$; пусть $SA > SC$, тогда $SA^2 > SC^2$;
$AB^2 + SB^2 > BC^2 + SB^2 \Rightarrow AB^2 > BC^2 \Rightarrow AB > BC$.

140.



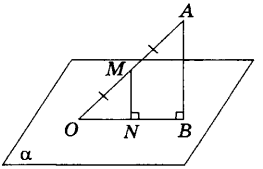
По условию $\angle OAB = \angle BAC = 60^\circ$, $AO = 15$ см. Поскольку $AO \perp \alpha$, то $AO \perp OB$, $AO \perp OC$. Поскольку наклонные равны, то равны и их проекции.

Рассмотрим ΔAOB. $\angle A + \angle B + \angle O = 180^\circ \Rightarrow \angle B = 30^\circ$. $\angle B = \angle C = 30^\circ$. По условию наклонные равны, тогда $BO = OC$.

Рассмотрим ΔAOC. По определению синуса $AC = \dfrac{1,5}{\sin 30^\circ} = \dfrac{1,5}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 1,5 = 3$ см.

Рассмотрим ΔABC. $AB = AC$, $\angle A = 60^\circ$, значит ΔABC — равносторонний, $BC = 3$ см.

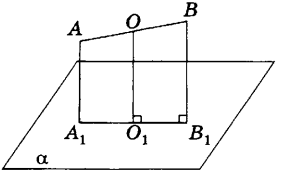
141.

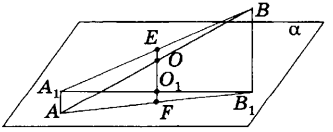


По условию данный отрезок AO, $O \in \alpha$, $AB = 6$ см, $OM = MA$. Проведем $AB \perp \alpha$ и отрезок BO. Получим плоскость AOB. Из точки M проведем в плоскости AOB отрезок $MN \parallel AB$, тогда точка N — точка пересечения отрезка с плоскостью α, точка $N \in OB$, тода $MN \in AOB$.

Рассмотрим ΔOAB. MN — средняя линия по теореме Фалеса. $MN = \dfrac{1}{2}AB$; $MN = \dfrac{1}{2} \cdot 6 = 3$ см.

142.





По условию $AA_1 = 1$ см, $BB_1 = 4$ см.

1 случай: прямая AB не пересекает плоскость α, то имеем O — середина AB, $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \parallel BB_1$. Тогда можно провести через AA_1 и BB_1 плоскость ABB_1A_1. В этой плоскости $OO_1 \parallel BB_1$, тогда точка $O \in A_1B_1$, значит $OO_1 \in \alpha$. Расстояние от середины отрезка до плоскости α будет OO_1, OO_1 — средняя линия трапеции ABB_1A_1.

По определению средней линии:

$$OO_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{1+4}{2} = 2,5 \text{ см.}$$

2 случай: AB пересекает плоскость α. Продлим O_1O до пересечения с A_1B и AB_1в точках E и F. $AO = OB$ и $OO_1 \parallel BB_1$, тогда по теореме Фалеса $AF = FB_1$, $O_1F \parallel AA_1$. Аналогично $A_1O = O_1B_1$. В треугольнике AA_1B_1: O_1F — средняя линия, $O_1F = \dfrac{AA_1}{2} = 0,5$ см. Аналогично в ΔABB_1: OF — средняя линия, $OF = \dfrac{BB_1}{2} = 2$ см. $OO_1 = OF - O_1F = 2 - 0,5 = 1,5$ см.

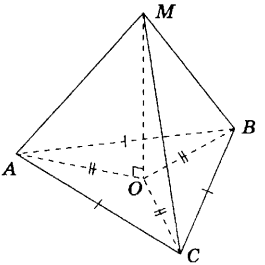
143. По условию ΔABC — равносторонний. $AM = MB = MC = 4$ см, $AB = BC = AC = 6$ см. $MO \perp ABC$. Поскольку равные проекции имеют равные наклонные и наоборот, то $AO = OB = OC = R$, где R — радиус описанной окружности.

Из теоремы синусов $R = \dfrac{AB}{2\sin\angle C}$;

$R = \dfrac{6}{2\sin 60^\circ} = 2\sqrt{3}$ см.

ΔAOM — прямоугольный, тогда расстояние от точки M до плоскости ABC будет MO. По теореме Пифагора $MO = \sqrt{AM^2 - AO^2}$;

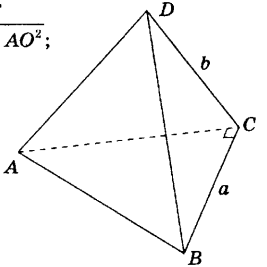
$MO = \sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 2$ см.



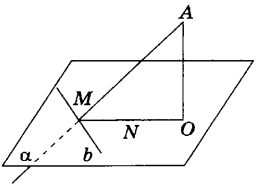
144. Решение в учебнике.

145. а) По условию ΔABC — прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$. $AD \perp$ плоскости $ABC \Rightarrow$ $\Rightarrow AD \perp CB$. $AD \perp BC$, $AC \perp BC$, то по теореме (о 3-х перпендикулярах) $DC \perp BC$, то есть ΔCBD — прямоугольный.

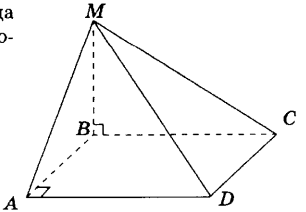
б) $\angle DBC = 90^\circ$. По теореме Пифагора $BD^2 = DC^2 + CB^2$, $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$.



146. По условию $a \cap \alpha$ в точке M, прямая $a \not\parallel \alpha$. Предположим, что через точку M проходят две прямые, которые перпендикулярны прямой a, тогда по признаку (перпендикулярности прямой к плоскости), должно быть $a \perp \alpha$, но это не сходится с условием задачи. Тогда прямая b — единственная прямая, которая проходит через точку $M \perp a$.

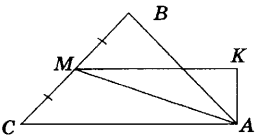


147. По условию $MB \perp ABCD$; $AD \perp BA$, $AD \perp MB$, тогда по теореме (о 3-х перпендикулярах) $\angle MAD = 90^\circ$. $MB \perp DC$, $BC \perp CD$. Аналогично $\angle MCD = 90^\circ$.

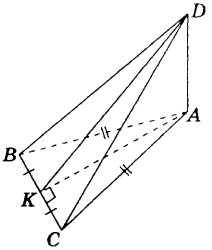


148. По условию ΔABC — равносторонний, точка M — середина BC, $MB = MC$. $AK \perp ABC$.

В ΔABC AM — медиана, тогда $AM \perp BC$; $AK \perp BC$ по теореме (о 3-х перпендикулярах), тогда $BC \perp KM$.



149.

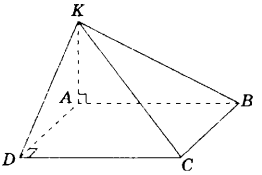


По условию ΔABC — равнобедренный. $AD \perp ABC$, $AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AD = 12$ см. Проведем высоту AK — она будет и медианой, потому что ΔABC — равнобедренный. $BK = KC = 3$ см.
Из ΔCKA: По теореме Пифагора
$AK = \sqrt{AC^2 - KC^2}$; $AK = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ см.
Поскольку $BC \perp AK$, $BC \perp AD$, то по теореме (о 3-х перпендикулярах) $BC \perp DK$. $\Delta ADKC$ – прямоугольный.

$DK = \sqrt{DC^2 - KC^2}$. Рассмотрим ΔDAC, в нем $\angle DAC = 90$, тогда $DC = \sqrt{DA^2 + CA^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

Тогда $DK = \sqrt{13^2 - 3^2} = \sqrt{169 - 9} = 4\sqrt{10}$.

150.



По условию $ABCD$ — прямоугольник, $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см.
а) Поскольку $KA \perp ABCD$, то расстояние от точки K до плоскости $ABCD$ будет AK. ΔKDC — прямоугольный, $\angle D = 90^\circ$, $KA \perp DC$, $AD \perp DC$, тогда по теореме (о 3-х перпендикулярах) $KD \perp DC$.

По теореме Пифагора: $DC = \sqrt{KC^2 - KD^2}$; $DC = \sqrt{81 - 36} = 3\sqrt{5}$.

Аналогично, $AK = \sqrt{KB^2 - AB^2}$; $AB = DC$; $KA = \sqrt{49 - 45} = 2$ см.

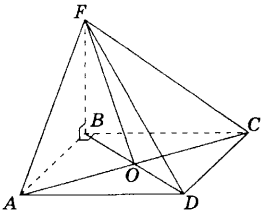
б) Плоскость $KAB \parallel DC$, так как $DC \parallel AB$. Расстояние между прямыми AK и CD будет AD, потому что $AD \perp KAB$. Из прямоугольного ΔDAK по теореме Пифагора: $DA = \sqrt{DK^2 - KA}$; $DA = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$ см.

151.

По условию $CD \perp ABC$, DH — высота ABD. а) Проекция BD на ABC — отрезок BC, проекция DA на ABC — отрезок AC. AB является своей проекцией. Поскольку проекцией границы ΔDAB на плоскость ABC являются стороны ΔABC, внутренние точки ΔDAB проектируются во внутренние точки ΔABC, тогда ΔABC является проекцией ΔDAB на плоскость ABC.

б) Если $CH \perp AB$, $DC \perp AB$, то по теореме (о 3-х перпендикулярах) $DH \perp AB$. Таким образом, DH — высота ΔDAB.

152. По условию $ABCD$ — квадрат. $BF \perp ABCD$. Поскольку $FA \perp AD$, то расстояние между точкой F и прямой AD будет AF. По теореме Пифагора: $AF = \sqrt{FB^2 + AB^2}$; $AF = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}$ дм. $FC \perp DC$, расстояние от точки F до AB и BC равняется 8 дм. $BD \perp FB$, $FB \perp AC$, тогда по теореме (о 3-х перпендикулярах) $FO \perp AC$, $FO = \rho(F, AC)$.



$BD = AB \cdot \sqrt{2}$;

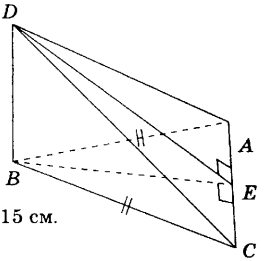
$BD = 4\sqrt{2}$ дм; $BO = \frac{1}{2} BD$,

$BO = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ дм.

По теореме Пифагора

$FO = \sqrt{OB^2 + FB^2} = \sqrt{8 + 64} = 6\sqrt{2}$ дм.

153. Решение в учебнике.

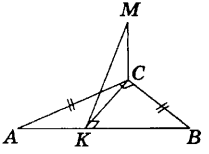


154. а) По условию $BD \perp ABC$, $BD = 9$ см, $BC = BA = 13$ см.
$BE \perp AC$, BE — высота и медиана, потому что ΔABC — равнобедренный. $BD \perp AC$, $BE \perp AC \Rightarrow$ по теореме (о 3-х перпендикулярах) $BE \perp AC$. Расстояние от точки D до прямой AC будет прямая DE. По теореме Пифагора $DE = \sqrt{BD^2 + BE^2}$;

$BE = \sqrt{169 - 25} = 12$ см; $DE = \sqrt{81 + 144} = 15$ см.

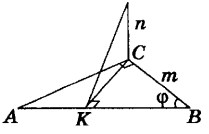
б) $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} DE \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 = 75$ см^2

155. По условию ΔABC — равнобедренный, $MC \perp AB$, $CK \perp AB$, тогда по теореме (о 3-х перпендикулярах) $MK \perp AB$. Расстояние от точки M до прямой AB есть прямая MK. По теореме Пифагора: $MK = \sqrt{MC^2 + CK^2}$.
В ΔABC: $CK = BC \sin 45° = 2\sqrt{2}$ см. Тогда в ΔMCK по теореме Пифагора $MK = \sqrt{CK^2 + CM^2}$, $MK = \sqrt{28 + 8} = 6$ см.

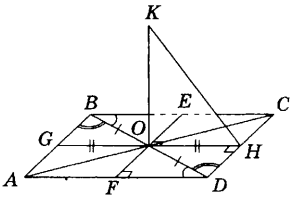


156. По условию ΔABC — прямоугольный, $CK \perp AB$. Из того что $DC \perp AB$ $CK \perp AB$ по теореме (о 3-х перпендикулярах) $DK \perp AB$.
В ΔCKD: CK — проекция, DC — перпендикуляр, DK — расстояние от точки D до прямой AB. Из ΔABC: $CK = BC \sin \beta = m \sin \varphi$.
В ΔDCK: По теореме Пифагора:

$DK = \sqrt{DC^2 + CK^2}$; $DK = \sqrt{n^2 + m^2 \sin^2 \varphi}$.



157. а) По условию $ABCD$ — ромб, $OK \perp ABCD$. Через точку O — точку пересечения диагоналей првоедена плоскость $ABCD$, диагонали являются биссектрисами. $EF \perp AD$, $OH \perp CD$, $BO = OD$, $AO = OC$. Отсюда $\Delta OBE = \Delta OBG = \Delta DOH = \Delta ODF$ как прямоугольные по гипотенузе и углу $\Rightarrow OF = OR = OG = OH$. Расстояние от точки K до всех прямых равны, потому что KO — общий катет.
$\Delta KOG = \Delta KOE = \Delta KOH = \Delta KOF \Rightarrow KG = KE = KH = KF$.



б) Рассмотрим ΔAOD.

$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD$; $S_{\Delta AOD} = \frac{OF \cdot AD}{2}$.

По теореме Пифагора:

$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{9+16} = 5$ дм.

$AO \cdot OD = OF \cdot AD$;

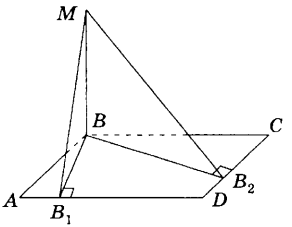
$4 \cdot 3 = OF \cdot 5 \Rightarrow OF = 2{,}4$ дм.

$OF = = OH = 2{,}4$ дм.

Из ΔKOH по теореме Пифагора:

$KH = \sqrt{KO^2 + OH^2}$; $KH = \sqrt{4{,}5^2 + 2{,}4^2} = 5{,}1$ дм.

158.



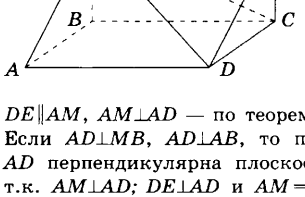
По условию $ABCD$ — ромб. Прямая $MB \perp ABCD \Rightarrow MB \perp AB$ и $MB \perp BC$, отсюда расстояния от M до прямых AB и BC равны MB. $MB = 12{,}5$ см.

В плоскости $ABCD$ $BB_1 \perp AD$, $BB_2 \perp CD$. По теореме (о 3-х перпендикулярах) $MB_1 \perp AD$ и $MB_2 \perp DC$. Расстояние от M до AD будет MB_1, а расстояние от M до DC будет MB_2.

$\angle A = \angle C$, $AB = BC$, поэтому $\Delta AB_1B = \Delta CB_2B$. $BB_1 = BB_2 = AB \sin \angle BAD = 25 \sin 60^\circ = 12{,}5\sqrt{3}$ см. MB_2 и MB_1 — наклонные, а BB_1 и BB_2 — проекции. Если равны проекции, то равны и наклонные. $MB_1 = MB_2$. По теореме Пифагора $MB_1 = \sqrt{MB^2 + B_1B^2}$;

$MB_1 = \sqrt{12{,}5^2 + \left(12{,}5 \cdot \sqrt{3}\right)^2} = 25$ см.

159.

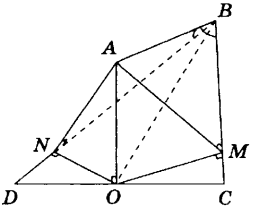


По условию $ABCD$ — прямоугольник. $BM \perp ABCD$. Построим линию пересечения плоскостей: Проведем $CE \parallel BM$ и $CE \perp BC$ плоскости $ABM \parallel DCE$, т.к. $CE \parallel BM$, $AB \parallel CD$. В плоскость DCE построим прямую $DE \parallel AM$. ME – линия пересечения плоскостей BMC и AMD. $DE \parallel AM$, $AM \perp AD$ — по теореме (о 3-х перпендикулярах), $DE \perp AD$. Если $AD \perp MB$, $AD \perp AB$, то по теореме (о 3-х перпендикулярах) AD перпендикулярна плоскости AMB. $AMED$ – прямоугольник, т.к. $AM \perp AD$; $DE \perp AD$ и $AM = AD$. Следовательно $ME \parallel AD$. Значит $ME \perp AMB$.

160. По условию $\rho(\alpha, \beta) = d \notin AB$. $AB = 13$ см, $d = 5$ см. $BD \perp \alpha$ и $AC \parallel BD$, а $AC = BD$. Поскольку $BD \parallel AC$ и $BD \perp \alpha$, $BD \perp \beta$. $AC \perp \alpha$ и $AC \perp \beta$ $\Rightarrow AC = BD = d$. $AC \in \gamma$ и $BD \in \gamma$. По теореме Пифагора :

$CB = \sqrt{AB^2 - d^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{44} = 12$ см.

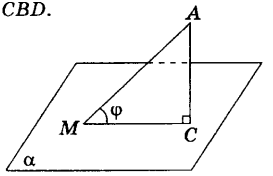
161. По условию $AB \notin CDB$, $\angle ABC = \angle ABD$, $\angle ABC$ — острый. Проведем $AO \perp$ плоскости α. А в плоскости α проведем перпендикуляры OM и ON: $OM \perp CB$, $ON \perp BD$. Тогда по теореме (о 3-х перпендикулярах) $AM \perp CB$ и $AN \perp BD$.



Рассмотрим ΔABM и ΔABN, в них AB — общая, $\angle M = \angle N = 90^\circ$, тогда $\Delta ABM = \Delta ABN \Rightarrow MB = NB$. В плоскости α рассмотрим ΔOBN и ΔOBM, в них OB — общая, $BM = BN$, $\angle M = \angle N = 90^\circ$, тогда $\Delta OBN = \Delta OBM$. Из равенства треугольников $\Rightarrow \angle OBM = \angle OBN$, тогда проекция луча AB на плоскость является биссектрисой угла CBD.

162. Решение в учебнике.

163. По условию $AM = d$, $\angle AMC = \varphi$ — угол между прямой AM и плоскостью α.



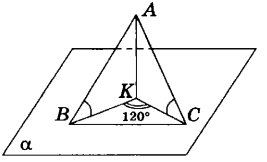
По определению косинусов $MC = AM \cos\varphi$, $MC = d\cos\varphi$.

а) $\varphi = 45^\circ$; б) $\varphi = 60^\circ$; в) $\varphi = 30^\circ$

$$MC = \frac{\sqrt{2}d}{2},\ MC = d\cos 60^\circ = \frac{d}{2},\ MC = d\cos 30^\circ = \frac{d\sqrt{3}}{2}.$$

164. Рисунок аналогичен задаче 163. $\frac{MC}{AM} = \frac{1}{2}$; $\cos\varphi = \frac{MC}{AM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$

165. Расстояние от точки A до плоскости α равно $AK = d$. $\Delta AKC = \Delta AKB$ (AK — общий катет).

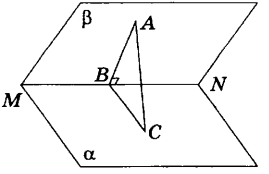


$BK = KC = d \operatorname{ctg} \angle B = d \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}d$.

В ΔBKC: по теореме косинусов $BC^2 = BK^2 + KC^2 - 2BK \cdot KC \cdot \cos\angle K$; $BC^2 = 3d^2 + 3d^2 - 2d^2 \cdot 3\cos 120^\circ = 6d^2 + 3d^2 = 9d^2$; $BC = 3d$.

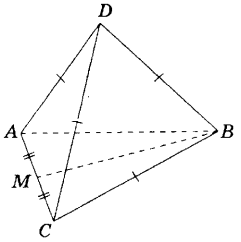
§ 3. ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

166. По условию $\alpha \not\perp \beta$, тогда они пересекаются и по прямой MN. $AB \perp MN$, $AC \perp \alpha$. AB — наклонная, $AB \perp NM$ по теореме (обратной к теорем о 3-х перпендикулярах).



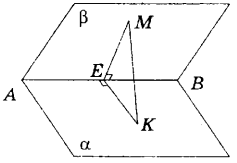
$BC \perp MN$. Если точка $B \in MN$ и $AB \perp NM$ и $BC \perp MN$, то $\angle ABC$ — линейный угол двугранного $AMNC$.

167.



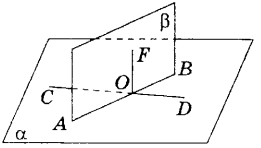
По условию $DABC$ — тетраэдр, точка M — середина AC, значит $AM = MC$.
ΔADC — равносторонний. MD — медиана и высота, $DM \perp AC$.
ΔABC — равносторонний. BM — медиана, высота, тогда $BM \perp AC$.
По определению $\angle DMB$ — линейный угол двугранного угла $BACD$.

168.



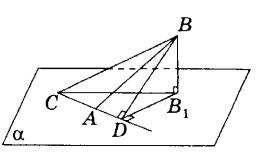
По условию φ — двугранный угол. Из того что $M \in \beta$, а расстояние от точки M до плоскости α равняется d, $MK \perp \alpha$. В плоскости α $KE \perp AB$, $MK \perp \alpha$, $KE \perp AB$, то по теореме (о 3-х перпендикулярах) $EM \perp AB$, а значит, расстояние от точки M до AB равно ME. То есть $\angle MEK$ — линейный угол двугранного угла и тогда $\angle MEK = \varphi$. По определению синуса $ME = \dfrac{d}{\sin\varphi}$.

169.



Плоскости α и β пересекаются по прямой AB. В плоскости α прямая CD проходит через точку O, так что $CD \perp AB$, а в плоскости β OF такая, что $OF \perp AB$. Двугранный угол $DABF$ равен линейному углу FOD, а двугранный угол $CABF$ — линейному углу FOC.
$\angle FOD + \angle FOC = 180^\circ$, потому что они смежные, тогда сумма двугранных углов $DABF$ и $CABF$ равна 180°.

170.



По условию задачи ΔABC, AC принадлежит плоскости α, $AB = 2$ см. Поскольку $BD \perp AC$ (по теореме о 3-х перпендикулярах). $\angle BAC = 150^\circ$. Расстояние между точкой B и прямой AC равно BD.
$\angle BAD = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

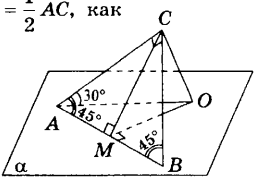
$$BD = \frac{1}{2}AB = 1 \text{ см}.$$

Поскольку $\angle B_1DB$ — линейный угол двугранного угла $BACB_1$, то расстояние от точки B до плоскости α равно BB_1.

$$BB_1 = BD\sin\angle B_1DB = 1 \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

171. По условию ΔABC — прямоугольный, равнобедренный. $AB \in \alpha$, $CO \perp \alpha$, $\angle OAC = 30^\circ$ — угол между прямой AC и плоскостью α

(и угол между катетом и плоскостью). $CO = \frac{1}{2}AC$, как катет, лежащий против угла 30°. $OM \perp AB$, $CO \perp AB$, тогда по теореме (о трех перпендикулярах) $CM \perp AB$.



Из ΔAMC: $CM = AC \sin \angle MAC$;

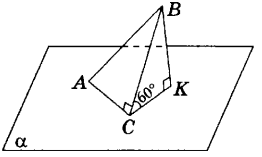
$$CM = CA \sin 45° = \frac{CA}{\sqrt{2}}.$$

$\angle CMO$ — линейный угол двугранного угла.

ΔMCO — прямоугольный. $\angle COM = 90°$. По определению синуса

$$\sin\varphi = \frac{OC}{MC},\ \sin\varphi = \frac{AC}{2} : \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45°.$$

172. По условию ΔABC — прямоугольный, $\angle C = 90°$, $AC \in \alpha$. Угол между плоскостью α и ABC равен 60°.

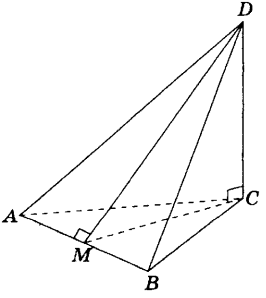


$BK \perp \alpha$. BC — наклонная, $AC \perp BC$ по обратной теореме (о 3-х перпендикулярах). $AC \perp KC$.

$\angle BCK$ — линейный угол двугранного угла $BACK$. По условию $\angle BCK = 60°$. Расстояние между плоскостью α и точкой B равно BK. Из ΔABC по теореме Пифагора

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ см}: BK = BC \sin 60° = 6\sqrt{3} \text{ см}.$$

173. По условию $ABCD$ — тетраэдр. $CD \perp ABC$, $AB = BC = AC$.



Поскольку $ADC \perp ABC$, тогда двугранный угол $DACB = 90°$. $CM \perp AB$, $DC \perp AB \Rightarrow$ по теореме (о 3-х перпендикулярах) $AB \perp DM$. $\angle DMC$ — линейный угол двугранного угла $DABC$. $CM = AC \sin 60°$, потому что ΔACM — равносторонний. $CM = 3\sqrt{3}$.

$$MB = AM = \frac{1}{2}AC = 3.$$

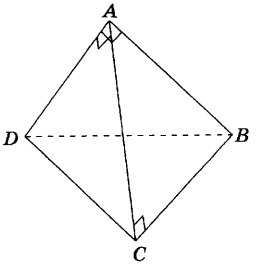
Из ΔDBC: треугольник прямоугольный.

$$DC = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{7}\right)^2 - 6^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Тогда, по определению тангенса, $\operatorname{tg} \angle DMC = \frac{CD}{CM} = 1 \Rightarrow \angle DMC = 45°$.

Поскольку $BC \perp DC$, $AC \perp DC$, то $\angle ABC$ — линейный угол двугранного угла $BDCA$, $\angle ACB = 60°$.

174.



По условию задачи $\angle DAB = \angle DAC = \angle ACB = 90^\circ$, значит $AC \perp CB$. По теореме Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;

$DA = \sqrt{DB^2 - AB^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = 5\sqrt{3}$.

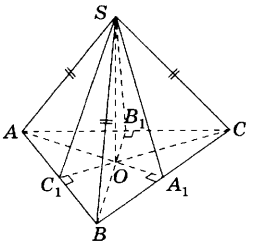
$DC = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + 5^2} = 10$.

Из $\Delta DBC \Rightarrow DB^2 = CD^2 + CB^2 \Rightarrow \angle DCB = 90^\circ$. $BC \perp AC$, $BC \perp DC \Rightarrow BC \perp ADC$.

$\angle ACD$ — линейный угол двугранного угла $ABCD$.

$\cos\angle ACD = \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle ACD = 60^\circ$.

175.



SO — высота $\Rightarrow SO \perp ABC$. SB, SA, SC — наклонные. Если $SA = SB = SC$, то $AO = BO = CO$. Точка O — центр описанной окружности. $AO = BO = CO = R$. $BB_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AB$, $AA_1 \perp BC$, потому что BB_1, CC_1, AA_1 — серединные перпендикуляры.

$\angle SB_1O$ — линейный угол двугранного $\angle SACB$;

$\angle SC_1O$ — линейный угол двугранного $\angle SABC$;

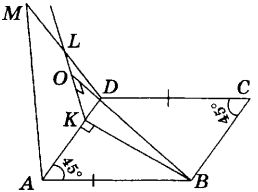
$\angle SA_1O$ — линейный угол двугранного $\angle SBCA$.

$\Delta OB_1S = \Delta OC_1S = \Delta OA_1S$, потому что SO — общий катет, $OB_1 = OC_1 = OA_1 = r$. Из равенства треугольников $\angle SB_1O = \angle SC_1O = \angle SA_1O$.

Из ΔBSC: по определению синуса $SA_1 = a \sin 60^\circ$, где a — ребро тетраэдра. $SA_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ΔABC: $OA_1 = \dfrac{1}{3} AA_1 = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.

Из ΔSA_1O: $\cos\varphi = \dfrac{OA_1}{SA_1} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$; $\varphi = \arccos\dfrac{1}{3}$.

176. По условию $ABCD$ — ромб. Двугранный угол $\angle BADM = 60^\circ$, расстояние между точкой B и плоскостью $ADM = 4\sqrt{3}$.



В плоскости ADM проведена $KL \perp AD$, $\angle BKL$ — линейный угол двугранного угла $BADM$. $\angle BKL = 60^\circ$. В плоскости BKL опустим перпендикуляр BO на KL. $AD \perp BK \Rightarrow AD \perp (BKL) \Rightarrow AD$ перпендикулярна всем прямым в плоскости BKL, то есть $AD \perp BO$. А если $BO \perp KL$ и $BO \perp AD \Rightarrow BO \perp (AMD)$. $\rho(B)$, плоскость $AMD) = BO = 4\sqrt{3}$.

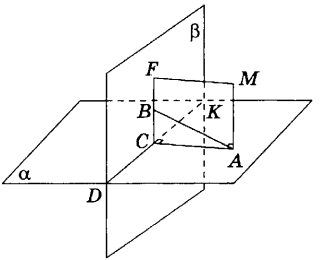
По определению синуса $BK = \dfrac{BO}{\sin 60^\circ} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot 2 = 8$ см.

В плоскости $ABCD$: $AB = \dfrac{BK}{\sin 45^\circ} = 8\sqrt{2}$.

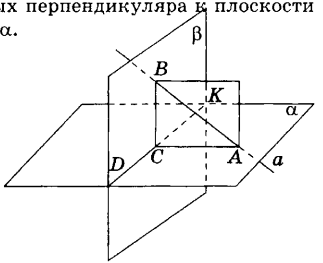
177. Пусть плоскости α и β пересекаются по линии AB, и существует плоскость $\gamma \perp AB$.

$\left.\begin{array}{l} AB \perp \gamma,\ AB \in \alpha \\ AB \perp \gamma,\ AB \in \beta \end{array}\right\}$ то по признаку перпендикулярности двух плоскостей $\gamma \perp \alpha$ и $\gamma \perp \beta$.

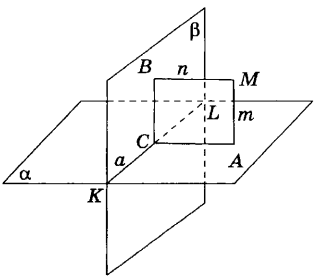
178. Решение в учебнике.



179. По условию задачи две плоскости пересекаются под углом 90°, то есть $\alpha \perp \beta$. $AB \notin \alpha$, AB — перпендикуляр к β, проведенного через точку $A \in \alpha$.
DK — линия пересечения α и β. В плоскости α $AC \perp DK$, а в плоскости β $CF \perp DK$.
$\angle ACF$ — линейный угол двуганного угла ADK. $\angle ACF = 90^\circ$. $AC \perp DK$, $AC \perp CF$, тогда AC перпендикулярна плоскости β.
Из точки A проведены два различных перпендикуляра к плоскости β, но это невозможно, то есть $AB \in \alpha$.



180. Допустим $A \notin \alpha$ тогда a пересечет α в некоторой точке A. a пересекает β в некоторой точке B. Плоскости α и β пересекаются по прямой DK $BC \perp DK$, $AC \perp DK$, $\angle ACB$ – линейный угол двухгранного угла $ADKB$, по условию т.к. $\alpha \perp \beta$ $\angle ACB = 90^\circ$, т.к. $AC \perp DK$, $AC \perp BC$, то $AC \perp \beta$, $AB \perp \beta$, следовательно через одну точку A проходит два различных перпендикуляра к плоскости β, но это невозможно $a \parallel \alpha$.



181. По условию плоскости α и β пересекаются по прямой a.
$MA \perp \alpha$, $MB \perp \beta$, прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. Прямая $MB \perp a$ и $MA \perp a$. Прямая a перпендикулярна плоскости AMB, тогда прямая a перпендикулярна всем прямым, лежащих в плоскости AMB, т.к. $MC \in AMB$, то $a \perp MC$.

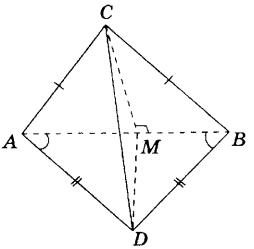
182. Рисунок аналогично задаче 181.

а) По условию $\alpha\perp\beta$, плоскости α и β пересекаются по прямой a. $MA\perp\alpha$, $MB\perp\beta$. $AM=m$, $BM=n$. В плоскости α проведем $AC\parallel MB$, а в плоскости β првоедем BC, таке, что $AM\parallel BC$. $BM\parallel AC$, $AM\parallel AC$, тогда $ACBM$ — параллелограмм. $MA\perp\alpha$, тогда $\angle MAC=90^\circ$. Следовательно, $ACBM$ — прямоугольник.

б) Если $MB\perp\beta$, то $MB\perp a$, а если $MA\perp\alpha$, то $MA\perp a$. Отсюда плоскость $AMB\perp a$, прямая $a\perp AMB$. Прямая $MC\in AMB$, отсюда $a\perp MC$, тогда расстояние от точки M до прямой a равно MC. В ΔAMC: по теореме Пифагора: $MC=\sqrt{MA^2+AC^2}$; $MC=\sqrt{m^2+n^2}$.

183. Если плоскости α и β пересекаются по прямой a и перпендикулярны плоскости γ, то прямая a принадлежит и α и β и является линией пересечения плоскостей, тогда по теореме (о признаках перпендикулярности двух плоскостей) прямая a перпендикулярна плоскости γ.

184.



а) Плоскости ΔABD и ΔABC взаимно перпендикулярны и сторона AB у них общая. $CM\perp AB$. В равностороннем ΔABC: CM — высота и медиана, тогда $AM=MB=5$ см. В ΔABD: DM — медиана и высота, тогда $MD\perp AB$. $\angle CMD$ — линейный угол внутреннего угла $CABD$, $\angle CMD=90^\circ$.

$CM=AM\sin 60^\circ=5\sqrt{3}$ см.

$CM=MD=5\sqrt{3}$ см.

По теореме Пифагора: $CD=\sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{150}=5\sqrt{6}$ см.

б) Поскольку $CM\perp AB$, CM — высота, медиана в равноберденном ΔACB, а в равнобедренном ΔABD — DM — медиана, отсюда следует, что $MD\perp AB$. Из ΔCMD: $CM=AM=5$ см, $MD=5$ см, $CD=5\sqrt{2}$ см.

185. Решение в учебнике.

186. Решение в учебнике.

187. Найдем d.

а) $a=1$, $b=1$, $c=2$. По теореме (о диагонали прямоугольного параллелепипеда) $d=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$.

б) $a=8$, $b=9$, $c=12$; $d=\sqrt{8^2+9^2+12^2}=\sqrt{64+81+177}=17$.

в) $a=\sqrt{39}$ $b=7$, $c=9$; $d=\sqrt{39+49+81}=13$.

188. Пусть a — ребро данного куба. Найдем d.

По теореме (о диагонали в прямоугольном параллелепипеде)

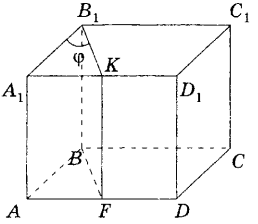
$d=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.

189. а) Расстояние $\rho(A_1, ABCD) = \rho(A_1, BB_1C_1C) = \rho(A_1, DD_1C_1C) = y$; $d = m$. По теореме Пифагора d^2 равно сумме квадратов двух ребер:

$$d^2 = y^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{d^2}{2} \Rightarrow y = \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{m\sqrt{2}}{2}.$$

б) d — диагональ куба. По теореме (о диагонали в прямоугольном параллелепипеде) $d^2 = y^2 + y^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{d^2}{3} \Rightarrow y = \frac{d\sqrt{3}}{3}$.

190. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.



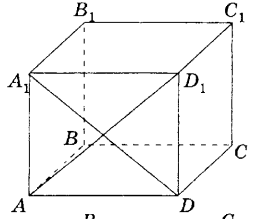
а) $\angle A_1B_1C_1$ — линейный угол двугранного угла ABB_1C. $\angle A_1B_1C_1 = 90$, потому что $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

б) $\angle ABD$ — линейный угол двугранного угла ADD_1B, $\angle ADB = 45$.

в) $KF \parallel AA_1$. Линейной мерой двугранного угла между плоскостями AA_1B_1B и KB_1BF, при $A_1B_1 \perp BB_1$, $B_1K \perp BB_1$ будет $\angle A_1B_1K$.

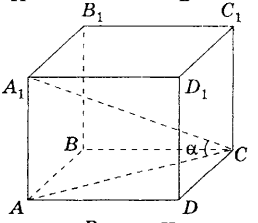
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

191. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Из свойств куба имеем диагонали граней перпендикулярны. $A_1D \perp AD_1$, $A_1D \perp ABC_1D_1$.



По признакам (перпендикулярности двух плоскостей) $(ABC_1D_1) \perp (DA_1B_1C)$.

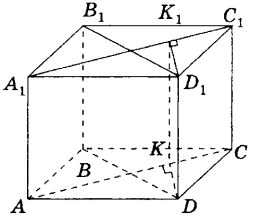
192. По условию задачи параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. A_1C — диагональ куба, AC — диагональ грани.



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AA_1}{AC}$. Если принять, что $AA_1 = a$, то AC по теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

193. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед.



а) Расстояние от прямой A_1C_1 до плоскости ABC является прямая AA_1. По теореме Пифагора:

$$D_1B = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = \sqrt{AC^2 + AA_1^2};$$

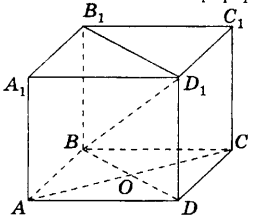
$$d = \sqrt{m^2 + AA_1^2} \Rightarrow AA_1 = \sqrt{d^2 - m^2}$$

б) Расстояние от плоскости ABB_1 до плоскости DCC_1 равно AD. По теореме Пифагора $AD = \sqrt{AC^2 - AB^2}$; $AB = DC$, $AD = BC$. $AD = \sqrt{m^2 - n^2}$.

в) $D_1K_1 \perp A_1C_1$ и $DK \perp AC$, тогда расстояние от прямой DD_1 до плоскости ACC_1 равно DK. Из ΔAKD: $DK = AD \sin \angle DAC$. $\sin \angle DAC = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{n}{m}$;

$AD = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{m^2 - n^2}$; $DK = \dfrac{\sqrt{m^2 - n^2} \cdot n}{m}$.

194. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Ребро куба — a.

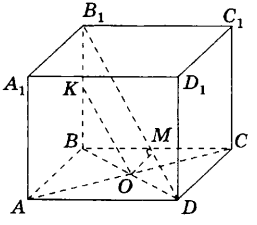


а) Расстояние от прямой AA_1 до прямой $B_1D = AO$, потому что $AA_1 \parallel DD_1$, $AA_1 \parallel BB_1$, точка O — середина BD и AC, $AO \perp BD$, $AO \perp DD_1 \Rightarrow AO \perp BB_1D_1D$.

$AO = \dfrac{1}{2}AC$. По теореме Пифагора :

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2}$; $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$;

$AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



б) $OK \parallel B_1D$.

ΔBB_1D: KO — средняя линия, OM —расстояние между диагональю куба и диагональю грани куба. $B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2}$;

$B_1D = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$.

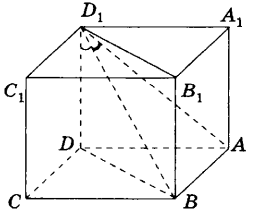
По определению синуса

$\sin \angle B_1DB = \dfrac{BB_1}{B_1D} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

В ΔMDO: По определению синуса $\sin \angle MDO = \dfrac{OM}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot OM}{a}$;

$\sin \angle B_1DB = \sin \angle MDO$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot OM}{a} \Rightarrow OM = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

195.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед.

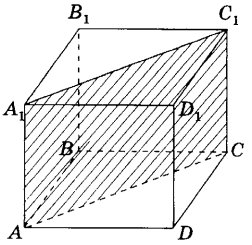
$\angle(BD_1, AA_1D_1D) = 30^\circ$, $\angle(BD_1, DD_1) = 45^\circ$. Треугольники ABD_1, BD_1 — проекция AD_1, $D_1B = AC_1 = 12$ см. Поскольку $\angle AD_1B = 30^\circ$, то катет, лежащий против угла в 30°, равен $\dfrac{1}{2}$ гипотенузы, $AB = 6$ см.

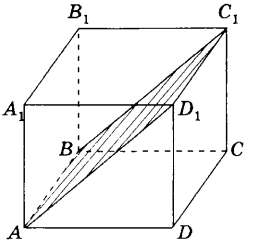
Из прямоугольного треугольника

ΔBDD_1: $BD = D_1D = BD_1 \sin \angle DD_1B = = 12 \sin 45^\circ = 6\sqrt{2}$; $DD_1 = 6\sqrt{2}$.

По теореме Пифагора $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 - 6^2} = 6$ см.

$AD = 6$ см.





196. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

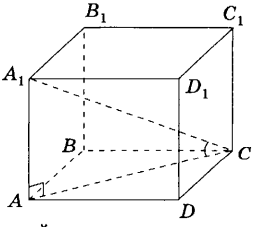
а) Если сечение должно проходить через ребро AA_1 и перпендикулярно к плоскости BB_1D_1, то из того, что $AC \perp BD$ и $AC \perp DD_1 \Rightarrow AC \perp BB_1D_1D$ и это сечение AA_1C_1C. Поскольку плоскость AA_1C_1C проходит через AC, то плоскость $AA_1C_1C \perp BB_1D_1D$.

б) Поскольку $A_1D \perp AD_1$, $DA_1 \perp AB$, то $A_1D \perp AD_1B$. Так как через прямую $A_1D \perp AD_1B$ проходит плоскость A_1B_1CD, то плоскости ABC_1D_1 и A_1B_1CD перпендикулярны, тогда ABC_1D_1 — данное сечение.

ГЛАВА 3. МНОГОГРАННИКИ

218. а) Поскольку по условию данная фигура — призма, в которой боковые ребра перпендикулярны к основаниям, а основания — параллельны, то имеем, что боковые грани — прямоугольники.

б) По определению правильной призмы, в основании лежит правильный многоугольник, то боковые ребра равны и являются равными прямоугольниками.



219. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед с углом $ACA_1 = 45^\circ$. Тогда ΔACA_1 — прямоугольный и равнобедренный. $A_1A = AC$.

В ΔABC: по теореме Пифагора

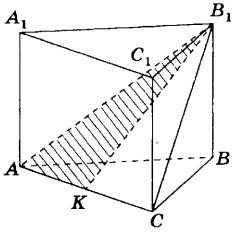
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

$AC = AA_1 = 13$ см.

220. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, в основании которой лежит ромб, значит, боковые грани — равные прямоугольники, а диагонали — наклонные, а проекции — диагонали ромба. Если наклонная большая, то проекция есть большая диагональ и наоборот (рисунок к задаче 219).

$AC = 24$, $AA_1 = 10$, $BD = 10$ см. A_1C — ? Из ΔA_1AC: по теореме Пифагора: $A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$ см.

221. По условию задачи $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, у которой боковые грани — равные прямоугольники.



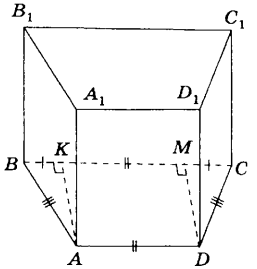
Из ΔCBB_1: по теореме Пифагора $CB_1 = \sqrt{CB^2 + BB_1^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ см. ΔAB_1C — равнобедренный $\Rightarrow AB_1 = B_1C$, тогда $B_1K \perp AC$, B_1K — высота, медиана и биссектриса. $AC = 8$ см, $AK = KC = 4$ см. По теореме Пифагора:

$B_1K = \sqrt{CB_1^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 4^2} = 2\sqrt{21}$.

$S_{\Delta AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot B_1K = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{21} =$

$= 8\sqrt{21}$ см.

222.

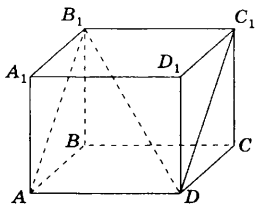


По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольная призма с основанием $ABCD$ — равнобедренная трапеция. $BC = 25$, $AD = 9$ см. $AK = DL = 8$ см. $\angle BCD$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями CBB_1C_1 и DD_1C_1C, поскольку $DC \perp CC_1$, $BC \perp CC_1$. $BK = LC$, $KL = AD = 9$ см. $BK = LC = \frac{BC - AD}{2} = \frac{25 - 9}{2} = 8$ см.

ΔABK и ΔDCM — прямоугольные и равнобедренные. $\angle BCD = 45^\circ$, $\angle CBA = \angle BCD = 45^\circ$, $\Delta ABK = \Delta DCM$.

$\angle BAD$ — линейный угол двугранного угла передней грани и боковой, $\angle BAD = \angle CDA = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

223.



По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Через ребра AD и B_1C_1 провели сечение AB_1C_1D — прямоугольник, $AB_1 \perp AD$, $C_1D \perp B_1C_1$.

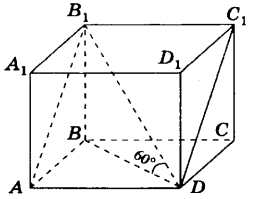
Допустим, ребро куба равно a. Диагонали $AB_1 = C_1D = a\sqrt{2}$. $S = a \cdot a\sqrt{2}$

$= a^2\sqrt{2}$; $S = 64\sqrt{2}$. $a^2\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$;

$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$см, $AB_1 = C_1D = 8\sqrt{2}$;

$d = \sqrt{a^2 + AB_1^2} = \sqrt{8^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{3}$.

224.

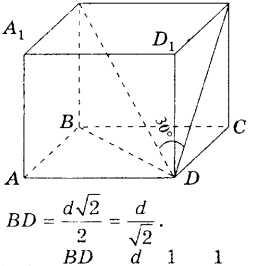


$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. $AB \perp AD$, потому что $ABCD$ — квадрат. AB_1C_1D — прямоугольник. $B_1B \perp AB \Rightarrow$ $\Rightarrow$ по теореме (о 3-х перпендикулярах) $AB_1 \perp B_1C_1$. Диагонали правильной призмы равны, то есть $B_1D = AC_1$. Поскольку диагональ $ABCD$ $BD = 4\sqrt{2}$, то $AB = BD \cdot \sin 45^\circ = 4$ см. $AB = AD = 4$ см.

Из ΔBB_1D: $BB_1 = BD \operatorname{tg} 60$, $BB_1 = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{6}$ см.
Из ΔDCC_1: по теореме Пифагора

$$DC_1 = \sqrt{CD^2 + CC_1^2} = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{6}\right)^2} = 4\sqrt{7}.$$

$$S_{\Delta AB_1C_1D} = AD \cdot DC_1 = 4 \cdot 4\sqrt{7} = 16\sqrt{7} \text{ см}^2.$$



225. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, где d — диагональ призмы, а угол между d и плоскостью боковой грани равен 30 .
Из прямоугольного ΔB_1C_1D:

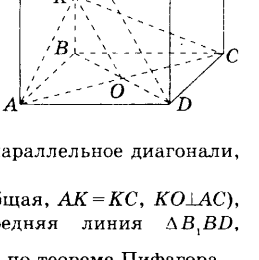
$$B_1C_1 = \frac{d}{2} = BC = AD.$$

$B_1C_1 \perp C_1D$, поскольку $ABCD$ — квадрат, то $BD = \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{\sqrt{2}}$.

Из ΔB_1DB по определению косинуса $\cos\varphi = \frac{BD}{B_1D} = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

где φ — угол между диагональю и плоскостью основания.

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45°.$$



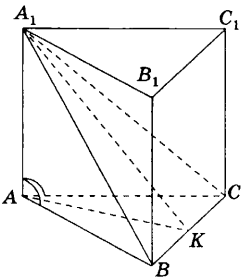
226. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, в основании которой квадрат, $AD = DC = 2$ см.
Прямые B_1D и AC — скрещивающиеся, проведем через AC плоскость параллельную B_1D. А в плоскости B_1BD проведем OK параллельно B_1D, где точка O — точка пересечения диагоналей $ABCD$.
Плоскость $AKC \parallel B_1D$ по теореме (о параллельности плоскостей), тогда сечение, параллельное диагонали, есть AKC.
Поскольку ΔABK и ΔCBK равны (BK — общая, $AK = KC$, $KO \perp AC$), поэтому KO — высота ΔAKC. OK — средняя линия ΔB_1BD, $BK = KB_1$, $KO = \frac{1}{2}B_1D$. BD найдем из ΔABC по теореме Пифагора

$$BD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ см}. \quad B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{6} \text{ см}.$$

$KO = \frac{1}{2}B_1D$ — по определению средней линии $KO = \frac{1}{2}B_1D = \sqrt{6}$ см.

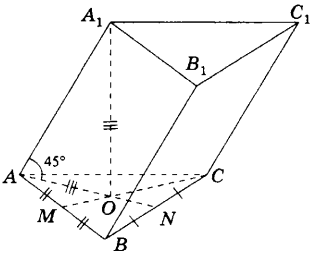
$$S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2}AC \cdot KO = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

227. По условию задачи, $ABCA_1B_1C_1$ — призма, в основании которой лежит равносторонний треугольник. AK — медиана, $AK \perp BC$.
$\Delta AA_1B = \Delta AA_1C$, поскольку AA_1 — общая, $AC = AB$, $\angle A_1AC = \angle A_1AB$.
$A_1B = A_1C_1 \Rightarrow \Delta A_1BC$ — равнобедренный. A_1K — медиана, тогда $A_1K \perp BC$.



$BC \perp A_1K$, $BC \perp AK \Rightarrow BC \perp (A_1AK) \Rightarrow$ $BC \perp A_1A$.
Четырехугольник BB_1C_1C — параллелограмм. Так как $BC \perp AA_1$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \Rightarrow BC \perp B_1B$ и $BC \perp C_1C$. А параллелограмм, у которого один угол 90°, есть прямоугольник $\Rightarrow$ $\Rightarrow BB_1C_1C$ — прямоугольник.

228.



По условию $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма, в основании ΔABC — равнобедренный. Поскольку из вершины A_1 проведена проекция, тогда $A_1O \perp AO \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta A_1OA$ — прямоугольный с углом $\angle A_1AO = 45°$. $OA = OA_1$; $OA = \frac{1}{3}AN$.

Из ΔANB по теореме Пифагора:

$AN = \sqrt{AB^2 - NB^2}$; $AN = \sqrt{169 - 25} = 12$ см; $OA = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$ см.

Из ΔA_1OA: $AA_1 = AO \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ см. Поскольку $BC \perp (A_1AO)$, $BC \perp AA_1$, то BCC_1B_1 — параллелограмм, у которого $BB_1 \parallel CC_1 \parallel AA_1 \Rightarrow BC \perp BB_1$ и $B \perp CC_1 \Rightarrow BB_1C_1C$ — прямоугольник.

$S_{\square BB_1C_2C} = BC \cdot BB_1$; $S_{\square BB_1C_2C} = 8\sqrt{2} \cdot 10 = 80\sqrt{2}$ см^2.

229. По условию дана n-угольная призма. $S_{бок.} = n \cdot S$; $S_{бок.} = P \cdot h$; $S_{пол.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$.

а) $n = 3$

$S_{осн.} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$; $S_{бок.} = 3a \cdot h = 3 \cdot 10 \cdot 15 = 450$ см^2; $S_{осн.} = \frac{100 \cdot \sqrt{2}}{4} = 25\sqrt{2}$;

$S_{пол.} = 450 + 25\sqrt{2} \cdot 2 \approx 536$ см^2.

б) $n = 4$

$S_{осн.} = a^2 = 12^2 = 144$ дм^2; $S_{бок.} = 4a \cdot h = 4 \cdot 12 \cdot 8 = 384$ дм^2;
$S_{пол.} = 2 \cdot 144 + 384 = 672$ дм^2.

в) $n = 6$

$S_{осн.} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} = \frac{(2,3)^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$; $S_{бок.} = 6a \cdot h = 6 \cdot 2,3 \cdot 5 = 69$ дм^2;

$S_{пол.} = 69 + \frac{2 \cdot (2,3)^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \approx 69 + 5,29 \cdot 3\sqrt{3} \approx 97$ (дм^2).

г) $n = 5$

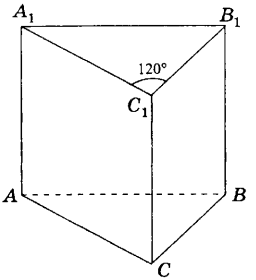
$a_n = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$ $a = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{5} = 2r \operatorname{tg} 36^\circ \Rightarrow r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 36^\circ}$;

$S_{бок.} = 5a \cdot h$; $\operatorname{tg} 36^\circ \approx 0{,}73$

$S_{осн.} = r \cdot p = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 36^\circ} \cdot \frac{5a}{2} = \frac{5a^2}{4 \operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{5 \cdot 0{,}4^2}{4 \cdot 0{,}73}$;

$S_{бок.} = 5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$ м^2; $S_{пол.} = 0{,}2 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 0{,}4^2}{4 \cdot 0{,}73} = 0{,}8$ м^2.

230. По условию $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма. $A_1C_1 = 5$; $B_1C_1 = 3$; $S_{бок.}$ — ?



AA_1C_1C — прямоугольник;

$S_{\square AA_1C_1C} = 5 \cdot AA_1$;

BB_1C_1C — прямоугольник;

$S_{\square BB_1C_1C} = 3 \cdot BB_1$;

AA_1B_1B — прямоугольник;

$S_{\square AA_1B_1B} = A_1B_1 \cdot AA_1$.

Из $\Delta A_1B_1C_1$ по теореме косинусов:

$A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2 - 2 \cdot A_1C_1 \cdot B_1C_1 \cdot \cos\angle C_1$;

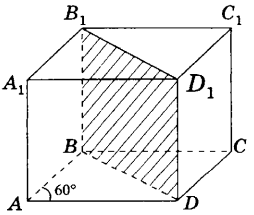
$A_1B_1^2 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos 120^\circ = 49$.

$A_1B_1 = 7$ см; $A_1A = BB_1$; $S_{\square AA_1B_1B} = 7 \cdot AA_1 \Rightarrow$ максимальная площадь $\Rightarrow$

$\Rightarrow 7AA_1 = 35$; $AA_1 = 5$ см.

$S_{бок.} = 5AA_1 + 3AA_1 + 7AA_1 = 15AA_1$; $S_{бок.} = 15 \cdot 5 = 75$ см^2.

231. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед.



$A_1B_1 = 8$ см, $A_1D_1 = 15$ см, $\angle B_1A_1D_1 = 60^\circ$;

$S_{\square BB_1D_1D} = 130$ см^2; $S_{\square BB_1D_1D} = BB_1 \cdot BD$.

Докажем, что BD — меньшая диагональ. По теореме косинусов:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ$;

$BD^2 = 64 + 225 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = BD = 13$см.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ$;

$AC^2 = 64 + 225 + 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = 409$; $AC = \sqrt{409}$; $AC > BD$.

То есть BB_1D_1D — меньше сечения.

$S_{\square BB_1D_1D} = BB_1 \cdot 13 = 130 \Rightarrow BB_1 = 10$ см.

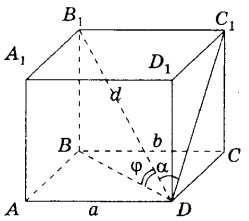
$S_{пол.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$; $S_{бок} = 2S_{\square AA_1D_1D} + 2S_{\square AA_1B_1B}$;

$S_{бок.} = 2 \cdot AD \cdot AA_1 + 2 \cdot AB \cdot AA_1 = 2 \cdot 15 \cdot 10 + 2 \cdot 8 \cdot 10 = 460$ (см^2).

$S_{осн.} = AB \cdot AD \sin\angle A = 8 \cdot 15 \cdot \sin 60^\circ = 60\sqrt{3}$ (см^2)

$S_{пол.} = 2 \cdot 60\sqrt{3} + 460 = 20 \cdot (23 + 6\sqrt{3})$ (см^2).

232.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, тогда его диагонали равны. Пусть стороны основания a и b, $a > b$.

Из ΔB_1DB: $\angle B = 90^\circ$; $BD = B_1D \cos \angle D$.

По теореме Пифагора: $AB^2 + AD^2 = BD^2$; $a^2 + b^2 = d^2 \cos^2 \varphi$, а из ΔB_1C_1D: $a = B_1D \sin \alpha \Rightarrow a = d \sin \alpha$;

$b^2 + d^2 \sin^2 \alpha = d^2 \cos^2 \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow b = d\sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}$. $S_{бок.} = 2(S_1 + S_2)$;

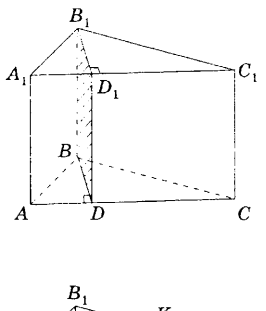
$S_1 = S_{\Delta AA_1D_1D} = AD \cdot DD_1 = d \sin \alpha \cdot d \sin \varphi = d^2 \sin \alpha \sin \varphi$;

$S_2 = S_{\Delta CC_1D_1D} = CD \cdot D_1D = d\sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha} \cdot d \sin \varphi =$

$= d^2 \sin \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}$;

$S_{бок.} = 2d^2 \sin \varphi \left(\sin \alpha + \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}\right)$

233.

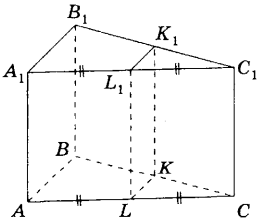


По условию $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, в основании которой прямоугольный ΔABC ($\angle B = 90^\circ$). Поскольку $AC \perp BB_1 \Rightarrow AC \perp (B_1BD)$, $D_1D \parallel BB_1$ и $D_1D = BB_1 \Rightarrow DD_1B_1B$ — параллелограмм, а $D_1D \perp DB \Rightarrow DD_1B_1B$ — прямоугольник. ΔABC — прямоугольный, BD — высота, $BD^2 = AD \cdot DC$,

$BD = \sqrt{27 \cdot 12} = 18$ см.

$S_{\Pi B_1D_1DB} = AA_1 \cdot BD = 10 \cdot 18 = 180$ см^2.

234.



По условию $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, в основании прямоугольный ΔABC ($\angle B = 90^\circ$).

$(LKK_1L) \perp AC \Rightarrow LK \perp AC$. $AB = 20$ см, $BC = 21$ см. По теореме Пифагора:

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$ см.

Из ΔKLC: по определению тангенса $\operatorname{tg} \angle C = \dfrac{LK}{LC} = \dfrac{LK}{14,5}$; $AC = 29 \Rightarrow$

$AC = 29 \Rightarrow LC = \dfrac{29}{2} = 14,5$ см;

Из ΔABC: $\operatorname{tg} \angle C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{20}{21}$. Отсюда $\dfrac{LK}{14,5} = \dfrac{20}{21} \Rightarrow LK = \dfrac{20 \cdot 14,5}{21}$ $= \dfrac{290}{21}$ см.

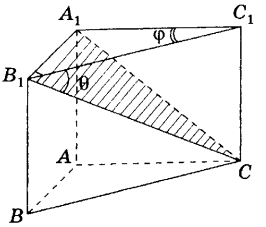
Из ΔABC: по определению косинуса: $\cos \angle C = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{21}{29}$.

Из ΔKLC: $CK = \dfrac{LK}{\cos\angle C} = 14,5 \cdot \dfrac{21}{29} = \dfrac{21}{2} = 20,5$ (см) $CB = 21$ см $\Rightarrow CK < CB$.

По признаку перпендикулярности двух плоскостей: $(L_1LKK_1)\perp(ABC)$, поскольку $LK_1\perp(ABC)$. L_1LKK_1 — прямоугольник.

$$S_{\square L_1KKK_1} = KK_1 \cdot LK = 42 \cdot \frac{290}{21} = 580 \text{ (см}^2\text{)}.$$

235. По условию $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, в основании ΔABC — прямоугольный. $\angle CB_1C_1 = \theta$ — есть линейный угол данного двугранного угла $C_1A_1B_1C$, потому что $C_1B_1\perp B_1A_1$, $CB_1\perp B_1A_1$.



Из $\Delta A_1B_1C_1$:

$A_1B_1 = C_1B_1 \operatorname{tg}\varphi$; $A_1C_1 = \dfrac{C_1B_1}{\cos\varphi}$.

Из ΔCB_1C_1: $CC_1 = C_1B_1 \operatorname{tg}\theta$; $B_1C = \dfrac{C_1B_1}{\cos\theta}$.

ΔA_1B_1C — прямоугольный, $A_1B_1\perp B_1C$; $\angle B_1 = 90^\circ$.

$$S_{\Delta A_1B_1C} = \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot B_1C = \frac{C_1B_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot C_1B_1}{2\cos\theta}; \quad S_{\Delta A_1B_1C} = \frac{(C_1B_1)^2 \cdot \operatorname{tg}\varphi}{2\cos\theta};$$

$S_{\text{бок.}} = S_1 + S_2 + S_3$.

Все боковые грани призмы являются прямоугольниками:

$$S_1 = S_{\square AA_1B_1B} = A_1B_1 \cdot B_1B = C_1B_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot C_1B_1 \cdot \operatorname{tg}\theta = (C_1B_1)^2 \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\theta;$$

$$S_2 = S_{\square B_1C_1CB} = B_1C_1 \cdot CC_1 = B_1C_1 \cdot C_1B_1 \cdot \operatorname{tg}\theta = (C_1B_1)^2 \operatorname{tg}\theta;$$

$$S_3 = S_{\square C_1CAA_1} = CC_1 \cdot A_1C_1 = C_1B_1 \cdot \operatorname{tg}\theta \cdot \frac{C_1B_1}{\cos\varphi} = \frac{(C_1B_1)^2 \operatorname{tg}\theta}{\cos\varphi};$$

$$S_{\text{бок.}} = (C_1B_1)^2 \operatorname{tg}\theta\left(\operatorname{tg}\varphi + 1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right) = (C_1B_1)^2 \operatorname{tg}\theta\left(\frac{\sin\varphi + \cos\varphi + 1}{\cos\varphi}\right)$$

$$\frac{S_{\text{бок.}}}{S_{\Delta A_1B_1C}} = \frac{(C_1B_1)^2 \operatorname{tg}\theta\left(\dfrac{\sin\varphi + \cos\varphi + 1}{\cos\varphi}\right)}{\dfrac{(C_1B_1)^2 \operatorname{tg}\varphi}{2\cos\theta}} = \frac{2\cos\theta \cdot \operatorname{tg}\theta(1 + \sin\varphi + \cos\varphi)}{\operatorname{tg}\varphi \cos\varphi}$$

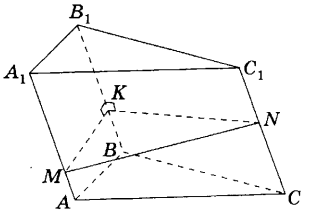
$$= \frac{2\sin\theta\left(1 + 2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2} + 2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} - 1\right)}{\sin\varphi} = \frac{2\sin\theta \cdot 2\cos\dfrac{\varphi}{2}\left(\sin\dfrac{\varphi}{2} + \cos\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\sin\varphi} =$$

$$= \frac{2\sin\theta \cdot 2\cos\dfrac{\varphi}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right) \cdot \sqrt{2}}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\sin\theta\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}.$$

236. По условию дана наклонная призма. Пусть боковое ребро — l, P — периметр сечения. Поскольку каждая боковая грань — параллелограмм, то сечение, перпендикулярное боковым граням, перпендикулярно боковым ребрам.
h — высота параллелограмма. $S = lh$ — площадь одной боковой грани. Если граней — n, то $S_{бок} = S_1 + S_2 + ... + S_n$; $S_{бок} = l(h_1 + h_2 + ... + h_n)$; h_1, h_2, ..., h_n — высоты всей граней, а их сумма есть периметр.

237. По условию дана четырехугольная призма. $P_{сечения}$ = периметр сечения. $P_{сеч} = 5 \cdot 4 = 20$ см. $S_{бок} = l \cdot P_{сеч} = 12 \cdot P_{сеч} = 12 \cdot 20 = 240$ (см^2).

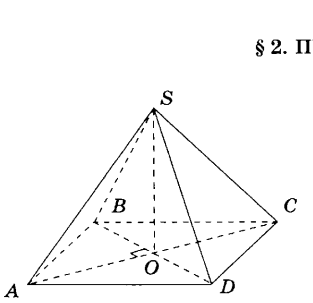
238.



$ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма, у которой $A_1B_1BA \perp B_1C_1CB$, $BB_1 = 24$ см. Поскольку $MK \perp BB_1$ и $NK \perp BB_1$, то $\angle MKN = 90^\circ$ и тогда $\rho(BB_1, AA_1) = MK$, $\rho(BB_1, CC_1) = KN$, $MK \perp BB_1$, $BB_1 \parallel C_1C \Rightarrow MK \perp CC_1$, $KN \perp CC_1$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $MN \perp CC_1$, $MN \perp AA_1$, тогда MNK — перпендикулярное сечение призмы.
$S_{бок} = l \cdot P_{сеч}$. ΔMNK — прямоугольный, $\angle K = 90^\circ$. По теореме Пифагора: $MN = \sqrt{MK^2 + KN^2}$; $MN = \sqrt{35^2 + 12^2} = 37$ см.
$S_{бок} = (MN + MK + KN) \cdot BB_1 = (35 + 12 + 37) \cdot 24 = 2016$ (см^2);
$S_{бок} = 2016$ см^2.

§ 2. ПИРАМИДА

239.



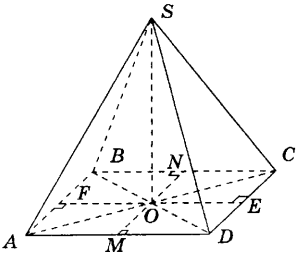
По условию $SABCD$ — пирамида, в которой $ABCD$ — ромб. Если высота проходит через точку пересечения диагоналей, тогда пирамида правильная.
$BD = 8$см, $BO = OD = 4$ см (диагонали в точке пересечения делятся пополам).
По теореме Пифагора:

$$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ см.}$$

Из ΔSOA по теореме Пифагора:
$AS = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}$ см.
$SA = SC$, поскольку $AO = OC$.
Аналогично из ΔSOD: $SD = \sqrt{SO^2 + OD^2}$; $SD = \sqrt{7^2 + 4^4} = \sqrt{65}$ см.
$SB = SD$, поскольку $BO = OD$. $SA = SC = \sqrt{58}$ см; $SB = SD = \sqrt{65}$ см.

240. По условию $SABCD$ — пирамида, в основании $ABCD$ — параллелограмм. $S_{ABCD} = 360$ см^2, высота пирамиды проходит через точку

пересечения диагоналей, поэтому $SA = SC$ и $SB = SD$, поскольку проекции равны. $BO = OD$, $AO = OC$. $\Delta SAB = \Delta SCD$; $\Delta SBC = \Delta SAD$ (по трем сторонам). $S_{бок} = 2(S_{\Delta SAD} + S_{\Delta SDC})$.



$OE \perp CD$ и $OM \perp AD$ по теореме (о трех перпендикулярах), $SE \perp CD$ и $SM \perp AD$.

Из ΔSOM: $\angle O = 90°$; по теореме Пифагора: $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}$.

Из ΔSOE: $\angle O = 90° \Rightarrow SE = \sqrt{SO^2 + OE^2}$. $ABCD$ — параллелограмм.

$S_{ABCD} = AB \cdot EF$; $360 = 20FE \Rightarrow FE = 18$ см;

$S_{ABCD} = AD \cdot MN$; $360 = 36MN \Rightarrow MN = 10$ см;

$OM = \frac{1}{2}MN = 5$ см; $OE = \frac{1}{2}FE = 9$ см.

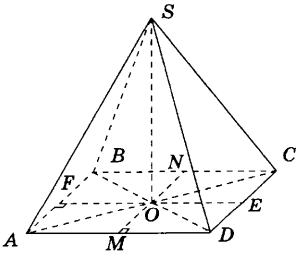
По теореме Пифагора: из ΔSOM и ΔSOE: $SM = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ см.

$SE = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.

$S_{\Delta SAD} = \frac{1}{2}AD \cdot SM = \frac{36 \cdot 13}{2} = 234$, $S_{\Delta SDC} = \frac{1}{2}SD \cdot SE = \frac{20 \cdot 15}{2} = 150$.

$S_{бок} = 2 \cdot (234 + 150) = 768$ см^2.

241. По условию $SABC$ — пирамида, где $ABCD$ — параллелограмм. $AO = OC$ и $OB = OD$, поскольку диагонали в точке пересечения делятся пополам. $SC = SA$, как равные проекции.



$\Delta SAB = \Delta SCD$ и $\Delta SBC = \Delta SAD$ (по трем сторонам).

$S_{пол} = S_{осн} + 2(S_{\Delta SDC} + S_{\Delta SAD})$

$OM \perp AD$ и $OE \perp DC$ по теореме (о трех перпендикулярах) $SM \perp AD$ и $SE \perp DC$.

Из ΔSOM: по теореме Пифагора:

$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}$; $SE = \sqrt{SO^2 + OE^2}$. $BD = 3$ см.

$S_{ABCD} = 2S\Delta_{ABD}$; $p = \frac{1}{2} \cdot (3 + 4 + 5) = 6$

$S_{\Delta ABD} = \sqrt{p(p - AB)(p - AD)(p - BD)} = \sqrt{6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 6$ м^2; $S_{ABCD} = 12$ м^2

$12 = 5MN \Rightarrow MN = \frac{12}{5}$ м $\Rightarrow OM = ON = \frac{6}{5}$ м.

$S_{ABCD} = AB \cdot FE$; $12 = 4FE \Rightarrow EF = 3$ м $\Rightarrow OE = \frac{3}{2}$ м.

По теореме Пифагора из ΔSOE: $SE = \sqrt{SO^2 + OE^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$ м.

Аналогично: $SM = \sqrt{SO^2 + ON^2} = \sqrt{4 + \frac{36}{25}} = \frac{2\sqrt{34}}{5}$ м.

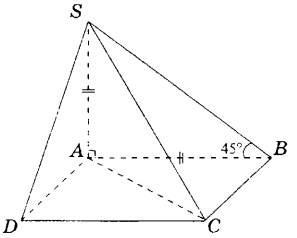
$S_{\Delta SDC} = \frac{1}{2} DC \cdot SE = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} = 5$ м^2;

$S_{\Delta ASD} = \frac{1}{2} AD \cdot SM = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{34}}{5} = \sqrt{34}$ м^2;

$S_{полн} = S_{ABCD} + 2(S_{\Delta SDC} + S_{\Delta SAD})$;

$S_{полн} = 12 + 2 \cdot \left(5 + \sqrt{34}\right) = \left(22 + 2\sqrt{34}\right)$ м^2

242.



По условию $SABCD$ — пирамида, где $ABCD$ — квадрат. Поскольку AC — диагональ и AC больше AD и AB, тогда проекция AC наклонной SC больше проекций AD и AB наклонных SD и SB. $SC = 12$ см; $AC = AB\sqrt{2}$ $SA = AB$.

Из ΔSAC: по теореме Пифагора:

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{AB^2 + 2AB^2} =$

$= AB\sqrt{3}$ см.

$AB\sqrt{3} = 12 \Rightarrow AB = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ см.

а) $SA = 4\sqrt{3}$

б) $S_{\Delta SAD} = S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot AB = \frac{1}{2} AB^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 24$ см^2.

По теореме (о трех перпендикулярах): $SD \perp DC$, $SB \perp BC$. По теореме Пифагора $SD = \sqrt{2AB^2} \Rightarrow SD = \sqrt{2 \cdot 16 \cdot 3} = 4\sqrt{6}$

$S_{\Delta SDC} = \frac{1}{2} SD \cdot DC = \frac{48\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}$ см^2;

$S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot BC = \frac{48\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}$ см^2;

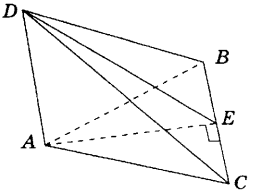
$S_{бок} = 2 \cdot 24 + 2\sqrt{2} \cdot 24 = 48 \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right)$ см^2.

243. По условию $DABC$ — пирамида, где ABC — равнобедренный треугольник, $AB = AC = 13$ см. $AE \perp BC$. По теореме (о трех перпендикулярах): $DE \perp BC$.

Из ΔAEB: по теореме Пифагора: $AE = \sqrt{AB^2 - EB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см.

Из ΔADE: $\angle A = 90^\circ$. По теореме Пифагора: $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2}$;

$DE = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ см.



$S_{\Delta DCB} = \frac{1}{2} BC \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75$ см^2;

$S_{бок} = 2S_{\Delta ADB} + S_{\Delta DCB}$;

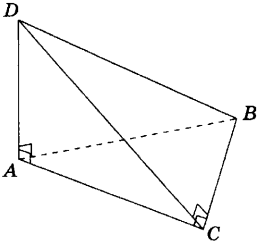
$S_{\Delta ADB} = S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 9 =$

$= \frac{117}{2}$ см^2.

$S_{бок.} = 2 \cdot \frac{117}{2} + 75 = 192$ см^2.

244. По условию $DABC$ — пирамида, где ΔABC — прямоугольный. $AB = 29$ см, $AC = 21$ см. Поскольку $DA \perp BC$, $AC \perp BC$, то по теореме (о трех перпендикулярах) $DC \perp CB$.

По теореме Пифагора:



$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ см;

$DC = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$ см;

$S_{бок} = S_{\Delta ADC} + S_{\Delta ADB} + S_{\Delta DCB}$;

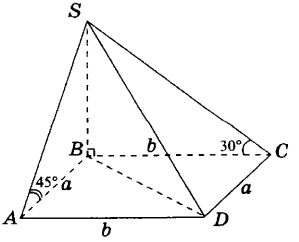
$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210$ см^2;

$S_{\Delta ADB} = \frac{1}{2} AD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 29 = 290$ см^2;

$S_{\Delta DCB} = \frac{1}{2} DC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 20 = 290$ см^2;

$S_{бок} = 210 + 290 + 290 = 790$ (см^2).

245. По условию $SABCD$ — пирамида, где $ABCD$ — прямоугольник. $SA \perp AD$, $SC \perp CD$ по теореме (о трех перпендикулярах). $\angle SAB$ — линейный угол двугранного угла между гранью SAD и плоскостью основания $ABCD$, а $\angle SCB$ — линейный угол двугранного угла между гранью SDC и плоскостью основания $ABCD$. $\angle SCB = 30^\circ$, $\angle SAB = 45^\circ$. Пусть $AB = a$, $BC = b$.



Из ΔSBA: по определению тангенса $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{SB}{AB} = 1$.

$SB = AB = a$. Аналогично: из ΔSBC:

$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{b}$; $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = a\sqrt{3}$.

Из ΔABD: по теореме Пифагора $a^2 + b^2 = BD^2$; $BD = 8$ см.

$b = a\sqrt{3}$; $a^2 + 3a^2 = 64$; $4a^2 = 64$; $a^2 = 16$, $a \neq -4$, $a > 0$; $a = 4$ см; $b = 4\sqrt{3}$ см.

$AB = 4$ см, $BC = 4\sqrt{3}$ см; $SB = AB = 4$ см.

По теореме Пифагора: $SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8$ см;

$SA = \sqrt{SB^2 + BA^2} = 4\sqrt{2}$ см;

$$S_1 = S_{\Delta ABS} = \frac{1}{2} SB \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_2 = S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_3 = S_{\Delta SDC} = \frac{1}{2} SC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_4 = S_{\Delta SAD} = \frac{1}{2} SA \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{6} \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\text{бок}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 8 + 8\sqrt{3} + 16 + 8\sqrt{6} = \left(24 + 8 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{6})\right) \text{см}^2.$$

$$S_{\text{пол.}} = S_{\text{бок}} + S_{\square ABCD}; \quad S_{\square ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{\text{пол.}} = 24 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{6} + 16\sqrt{3} = \left(24 + 24\sqrt{3} + 8\sqrt{6}\right) \text{см}^2.$$

246. а) По условию $SABC$ — пирамида, SO — высота, SN, SM, SK — высоты боковых граней. $SN = SM = SK = 41$ см.

Поскольку равные наклонные, проведенные из одной точки, имеют равные проекции, то $OM = ON = OK$. $ON \perp AC$, $OM \perp AB$, $OK \perp BC$ по теореме (обратной теореме о трех перпендикулярах). Точка O равноудалена от сторон ΔABC, тогда т. O — центр вписанной в ΔABC окружности.

б) $P = AC + CB + AB = 42$

Пусть $OM = ON = OK = r \Rightarrow r = \dfrac{S}{p}$; $p = 21$ см; $p = \dfrac{1}{2}P$.

Из $\Delta SON \Rightarrow ON = r = \sqrt{SN^2 - SO^2}$; $\Rightarrow ON = \sqrt{41^2 - 40^2} = 9$ см;

$S = p \cdot r = 9 \cdot 21 = 189$ (см^2).

247. По условию $SA_1A_2A_3...A_n$ — пирамида

а) SO — высота n-угольной пирамиды. $OB_1, OB_2, ..., OB_n$ — высоты, проходящие через точку O и перпендикулярно к сторонам A_1A_4, A_2A_3, ... $SB_1 \perp A_1A_2$; $SB_2 \perp A_2A_3$; $SB_3 \perp A_3A_4$ (по теореме о трех перпендикулярах).

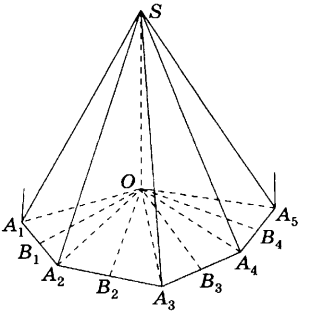
$\angle SB_1O_1$, $\angle SB_2O$, $\angle SB_3O$, ... — линейные углы двугранных углов. По условию они равны.

Рассмотрим ΔSB_1O, ΔSB_2O, ΔSB_3O, ... SO — общий катет и одинаковы острые углы, тогда эти треугольники равны.

Из равенства треугольников $\Rightarrow OB_1 = OB_2 = OB_3 = ...$ То есть, точка O равноудалена от всех сторон основания и лежит в основании и

является центром вписанной в многоугольник окружности, то есть высота SO проходит через центр окружности.

б) Поскольку $\Delta SB_1O = \Delta SB_2O = \Delta SB_3O = ...$ Из равенства $\Rightarrow SB_1 = SB_2 = SB_3 = ...$ — высоты боковых граней равны.



в) $S_{\Delta SA_1A_2} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot SB_1$

$S_{\Delta SA_2A_3} = \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot SB_2$ поскольку $SB_1 = SB_2 = SB_3$

$S_{\Delta SA_3A_4} = \frac{1}{2} A_3A_4 \cdot SB_3$

Тогда $S_{бок} = \frac{1}{2} SB_1 \cdot \underbrace{(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + ...)}_{P\text{ - периметр основания}}$; $S_{бок} = \frac{1}{2} SB_1 \cdot P$.

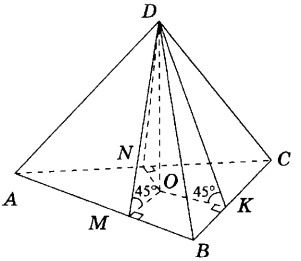
248. По условию $DABC$ — пирамида, где ΔABC — равнобедренный, DO — высота.

$OM \perp AB$, $ON \perp AC$, $OK \perp BC$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $DM \perp AB$, $DK \perp BC$, $DN \perp AC$.

$\angle DMO$, $\angle DKO$, $\angle DNO$ линейные углы двугранных углов с плоскостью ABC

$\angle DMO = \angle DKO = \angle DNO = 45^\circ$.

$MO = DO = NO = KO$, а $\Delta DOK = \Delta DON = \Delta DOM$ (DO — общий катет и угол).



По формуле Герона найдем $S_{\Delta ABC}$:

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - AC)(p - AB)(p - BC)}$; $p = \frac{12 + 10 + 10}{2} = 16$ см;

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48$ (см^2); $r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p}$; $r = \frac{48}{16} = 3$ см.

$OM = OD = OK = ON = 3$ см. $DM = \sqrt{MO^2 + DO^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ см.

$S_{бок} = S_{\Delta ADC} + S_{\Delta ADB} + S_{\Delta BCD}$;

$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot DN$;

$S_{\Delta ADB} = \frac{1}{2} AB \cdot DM$; $DM = DN = DK$;

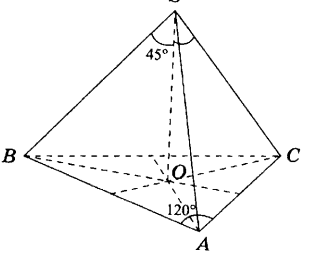
$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot DK$;

$S_{бок} = \frac{1}{2} DM(AC + BC + AB) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 32 = 48\sqrt{2}$ (см^2).

249. а) По условию дана пирамида (рис. к задаче 247). SO — высота, а в основании — n-угольник. SA_1, SA_2, SA_3, ..., SA_n — наклонные. Поскольку равные наклонные, проведенные из одной точки, имеют равные проекции, то $OA_1 = OA_2 = OA_3 = ... = OA_n$. То есть точка O равноудалена от всех вершин n-угольника $\Rightarrow$ то есть т. O — центр окружности, описанной около основания.

б) Все боковые ребра пирамиды с плоскостью пирамиды образуют углы, это углы между прямой и плоскостью, то есть углы между наклонной и ее проекцией. Поскольку $\Delta SOA_1 = \Delta SOA_2 = \Delta SOA_3 = ... = \Delta SOA_n$, то и углы равны.

250.



По условию $SABC$ — пирамида, где ABC — равнобедренный. Точка O — основание высоты пирамиды. $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$ — прямоугольные (SO — общий катет, углы при вершине S равны).

$\angle A = 120°$;

$\angle B = \angle C = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$.

$OA = OC = OB = OS = 16$ см, поскольку углы при $\angle S = 45°$.

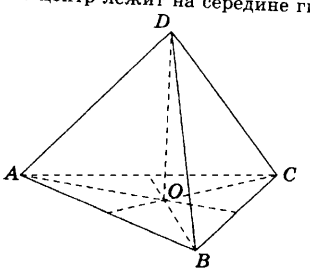
По теореме синусов: $\dfrac{BC}{\sin 120°} = 2R$; $\dfrac{BC}{\sin 60°} = \dfrac{AB}{\sin 30°} = 2 \cdot 16 = 32$ см;

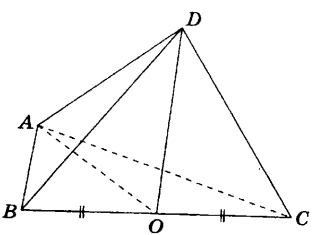
$BC = \dfrac{32\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$ см; $AB = \dfrac{32}{2} = 16$ см.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120° = \dfrac{16 \cdot 16\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = 64\sqrt{3}$ см^2.

251. По условию $DABC$ — пирамида, в которой ΔABC — прямоугольный и BC — гипотенуза. DO — высота пирамиды. $BC = 10$ см. $\Delta DOC = \Delta DOA = \Delta DOB$ (DO — общий катет, а $DA = DB = DC$ и углы при вершины O равны 90°).

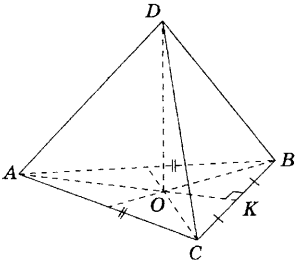
Из равенства треугольников: $AO = BO = CO$, тогда O — центр описанной около ΔABC окружности, а поскольку ΔABC — прямоугольный, то центр лежит на середине гипотенузы. Рисунок изменился.





$BO = OC = 5$ см. $CD = BD$. По теореме Пифагора: $CD = BD = \sqrt{OD^2 + BO^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ см

252. По условию, $DABC$ — пирамида, где ΔABC — равнобедренный, $AB = AC$, $BC = 6$ см. DO — высота, $DO \perp (ABC)$. $AO = OB = OC = R$ — радиус описанной окружности около ΔABC, так как равные наклонные имеют равные проекции.



AK — высота в равнобедренном треугольнике, а также медиана и биссектриса. $AK = 9$ см, $CK = KB = 3$ см.

Из ΔAKC: по теореме Пифагора

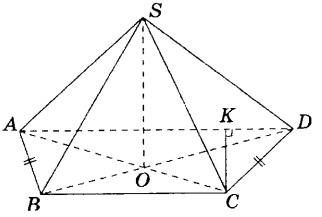
$AC = \sqrt{AK^2 + KC^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$ см.

$R = \dfrac{abc}{4S}$ — используя формулу в ΔABC, где $R = OC$.

$$R = OC = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot \frac{1}{2} AK \cdot BC} = \frac{AB \cdot AC}{2AK} = \frac{3\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10}}{2 \cdot 9} = 5 \text{ см.}$$

В ΔDOC по теореме Пифагора: $DO = \sqrt{DC^2 - CO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см.

253. По условию $SABCD$ — пирамида, в которой $ABCD$ — равнобедренная трапеция, $AB = CD$, $AD = 4\sqrt{6}$ см, $BC = 6$ см, CK — высота $= 5$ см, SO — высота пирамиды.



Поскольку равные проекции имеют равные наклонные, то $OA = OB = OC = OD = R$ — радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции $ABCD$.

$R = OA$ — в ΔACD, где AC — диагональ.

$R = \dfrac{abc}{4S}$; $R = \dfrac{AC \cdot CD \cdot AD}{4S_{\Delta ACD}}$.

Из ΔCDK: по определению косинуса: $\cos \angle CDK = \dfrac{KD}{CD}$;

$$KD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{4\sqrt{6} - 6}{2} = \frac{2 \cdot (2\sqrt{6} - 3)}{2} = 2\sqrt{6} - 3 \text{ (см)}$$

По теореме Пифагора:

$$CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = \sqrt{5^2 + (2\sqrt{6} - 3)^2} = \sqrt{25 + 24 - 12\sqrt{6} + 9} =$$

$$= \sqrt{58 - 6\sqrt{24}} = \sqrt{(3\sqrt{6} - 2)^2} = 3\sqrt{6} - 2 \text{ (см)}; \ \cos \angle CDK = \frac{2\sqrt{6} - 3}{3\sqrt{6} - 2}.$$

Из ΔACD по теореме косинусов:

$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2CD \cdot AD \cdot \cos \angle CDA$;

$$AC^2 = (3\sqrt{6} - 2)^2 + (4\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{6} \cdot (3\sqrt{6} - 2) \cdot \frac{2\sqrt{6} - 3}{3\sqrt{6} - 2} =$$

$$= 54 - 12\sqrt{6} + 4 + 96 - 8\sqrt{6} \cdot (3\sqrt{6} - 2) \cdot \frac{2\sqrt{6} - 3}{3\sqrt{6} - 2} = 154 - 12\sqrt{6} - 96 + 24\sqrt{6}$$

$$= 58 + 12\sqrt{6} = 54 + 12\sqrt{6} + 4 = (3\sqrt{6} + 2)^2;$$

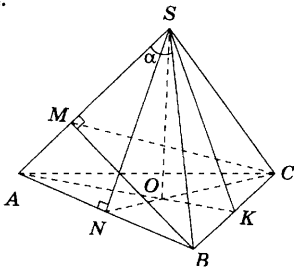
$$AC = \sqrt{(3\sqrt{6} + 2)^2} = 3\sqrt{6} + 2 \text{ (см)};$$

$$R = \frac{(3\sqrt{6} + 2)(3\sqrt{6} - 2) \cdot 4\sqrt{6}}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 5} = \frac{(3\sqrt{6})^2 - 4}{2 \cdot 5} = \frac{50}{10} = 5 \text{ (см)}$$

Из ΔAOS: По теореме Пифагора:

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ см}.$$

254.



По условию $SABC$ — правильная пирамида, в которой все боковые ребра равны. Точка O — центр правильного ΔABC. $AK \perp BC$, тогда $SK \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах.

а) $AO = R$ — радиус описанной около ΔABC окружности.

По теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin 60^\circ};$$

$R = AO$, потому что ΔABC — равносторонний. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Из ΔAOS по теореме Пифагора:

$$AS = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3H^2 + a^2}{3}}.$$

б) $\Delta ASB = \Delta BSC = \Delta ASC$ (по трем сторонам). Из равенства треугольников $\Rightarrow$ плоские углы при вершине пирамиды равны.

По теореме косинусов из ΔASB:

$AB^2 = AS^2 + SB^2 - 2AS \cdot SB \cos \angle S$;

$$a^2 = \frac{3H^2 + a^2}{3} + \frac{3H^2 + a^2}{3} - 2\sqrt{\frac{3H^2 + a^2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3H^2 + a^2}{3}} \cdot \cos \alpha;$$

$$a^2 = \frac{6H^2 + 2a^2}{3} - 2\frac{(3H^2 + a^2)}{3} \cos \alpha;$$

$3a^2 - 6H^2 - 2a^2 = (-6H^2 - 2a^2) \cos \alpha$;

$a^2 - 6H^2 = (-6H^2 - 2a^2) \cos \alpha$;

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - 6H^2}{-6H^2 - 2a^2} = \frac{6H^2 - a^2}{2(3H^2 + a^2)} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{6H^2 - a^2}{2(3H^2 + a^2)}.$$

в) Из ΔSAO по определению тангенса:

$$\operatorname{tg}\angle SAO = \frac{OS}{AO} = \frac{H\sqrt{3}}{a} \Rightarrow \angle SAO = \operatorname{arctg}\frac{H\sqrt{3}}{a}.$$

г) В правильной пирамиде все боковые ребра равны и все боковые грани наклонны к плоскости основания под одинаковым углом.

Из ΔSOK по определению тангенса: $\operatorname{tg}\angle SKO = \frac{SO}{OK}$; $OK = r$ — радиус вписанной окружности в ΔABC;

$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p};\quad p = \frac{3a}{2};\quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow r = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{tg}\angle SKO = \frac{H}{r} = \frac{2\sqrt{3}H}{a} \Rightarrow \angle SKO = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}H}{a}.$$

д) $\Delta SAB = \Delta SAC$, $BM \perp AS$, $MC \perp AS$.
$\angle BMS$ — линейный угол двугранного угла при боковом ребре пирамиды.
$SN \perp AB$. По теореме Пифагора:

$$SN = \sqrt{SB^2 - NB^2} = \sqrt{\frac{3H^2 + a^2}{3} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{12H^2 + 4a^2 - 3a^2}{12}} = \sqrt{\frac{12H^2 + a^2}{12}};$$

$$S_{\Delta ABS} = \frac{1}{2}AB \cdot SN = \frac{1}{2}MB \cdot AS;$$

$$a \cdot \sqrt{\frac{12H^2 + a^2}{12}} = MB\sqrt{\frac{3H^2 + a^2}{3}} \Rightarrow MB = \frac{a\sqrt{12H^2 + a^2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3H^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{12H^2 + a}}{2\sqrt{3H^2 + a^2}}$$

По теореме косинусов в ΔMBC, $MB = MC$.
$BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2MB \cdot MC \cos\angle M$;

$$a^2 = \frac{a^2(12H^2 + a^2)}{4(3H^2 + a^2)} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{a^2(12H^2 + a^2)}{4(3H^2 + a^2)} \cdot \cos\alpha;$$

$$2a^2(3H^2 + a^2) - a^2(12H^2 + a^2) = -a^2(12H^2 + a^2)\cos\alpha;$$

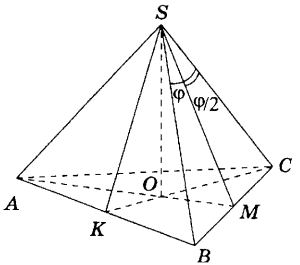
$$2(3H^2 + a^2) - 12H^2 - a^2 = -(12H^2 + a^2)\cos\alpha;$$

$$6H^2 + 2a^2 - 12H^2 - a^2 = -(12H^2 + a^2)\cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - 6H^2}{-12H^2 - a^2} = \frac{6H^2 - a^2}{a^2 + 12H^2} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{6H^2 - a^2}{a^2 + 12H^2}.$$

255. По условию $SABC$ — правильная пирамида, в основании ΔABC — равносторонний. SO — высота пирамида, а точка O — центр правильного ΔABC. $AM \perp BC \Rightarrow SM \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах.

Из ΔBSM по определению тангенса: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{BM}{SM} = \frac{4}{SM}$.



$BC = 8$ см, $BM = MC = 4$ см;
ΔSBC — равнобедренный,
SM — высота, медиана, биссектриса.
Из ΔSOM по теореме Пифагора:
$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}$; OM — радиус вписанной окружности.

$$OM = r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}\ (\text{см}^2);$$

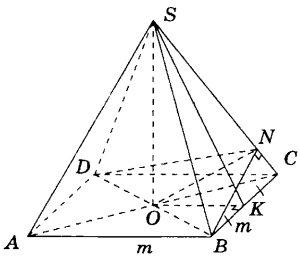
$$p = \frac{8+8+8}{2} = 12 \quad r = OM = \frac{16\sqrt{3}}{12} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ \text{см}.$$

$$SM = \sqrt{SO^2 + \frac{16}{3}}; \quad SM = \frac{4}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}};$$

$$\frac{16}{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = SO^2 + \frac{16}{3} \Rightarrow SO^2 = \frac{16}{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{16}{3} \Rightarrow SO = 4\sqrt{\frac{3 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}};$$

$$SO = \frac{4}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\frac{3 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{3}}.$$

256.



По условию $SABCD$ — правильная пирамида, где $ABCD$ — квадрат, SO — высота, поскольку пирамида правильная, то все боковые грани есть равные между собой треугольники, и все плоские углы при вершине равны α, все боковые ребра пирамиды равны и все высоты боковых граней равны.

а) $OK \perp BC$, $SK \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах), $BK = CK$.
Поскольку $ABCD$ — квадрат, то диагональ $BD = AC = m\sqrt{2}$. $OB = \frac{1}{2}BD = \frac{m\sqrt{2}}{2}$.

Из ΔSOK по теореме Пифагора: $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2}$; $OK = \frac{1}{2}AB = \frac{m}{2}$, SO — ?

Из ΔSKB по определению тангенса:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{BK}{SK}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{2} : \sqrt{SO^2 + \frac{m^2}{4}} = \frac{m \cdot 2}{2\sqrt{4SO^2 + m^2}} = \frac{m}{\sqrt{4SO^2 + m^2}};$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}(4SO^2+m^2)=m^2;\quad 4SO^2=\frac{m^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}-m^2;$$

$$SO^2=\frac{m^2}{4}\left(\frac{1}{tg^2\frac{\alpha}{2}}-1\right)=\frac{m^2}{4}\left(\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-1\right)=\frac{m^2}{4}\cdot\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{m^2}{4}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}};\quad SO=\frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha}.$$

б) Из ΔSBK по определению синуса: $SB=\dfrac{BK}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{n}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

в) $SK\perp BC$, $OK\perp BC$, $\angle SKO$ — линейный угол двугранного угла, который образовался боковой гранью с плоскостью основания пирамиды $ABCD$.

Из ΔSOK по определению косинуса: $\cos\angle SKO=\dfrac{OK}{SK}=\dfrac{m}{2SK}$;

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{BK}{SK}=\frac{m}{2SK}\Rightarrow\cos\angle SKO=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\angle SKO=\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

г) $BN\perp SC$. Из равенства $\Delta SBK=\Delta SDK\Rightarrow BN=DN$, $DN\perp SC$. $\angle BND=\varphi$ — линейный угол двугранного угла при боковом ребре пирамиды.

По определению синуса из ΔSBN:

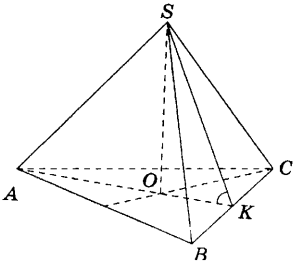
$$BN=SB\cdot\sin\alpha;\quad SB=\frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}};\quad BN=\frac{m\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=m\cos\frac{\alpha}{2}.$$

В ΔBNO NO — высота, медиана, биссектриса, потому что ΔBNO — равнобедренный. $\angle BNO=\dfrac{\varphi}{2}$. По определению синуса:

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{OB}{BN}=\frac{m}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{m\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}};$$

$$\frac{\varphi}{2}=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)\Rightarrow\varphi=2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right).$$

257. По условию $SABC$ — правильная пирамида, SO — высота, точка O — центр ΔABC, $OK\perp BC$, $BK\perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах, $\angle SKO$ — линейный угол двугранного угла при основании, $\angle SKO=45^\circ$. $SO=OK=h$.



В ΔSOK: $\angle O = 90^\circ$; $\angle K = \angle S = 45^\circ$. $SK = h\sqrt{2}$ $OK = r = h$, r — радиус вписанной окружности, ΔABC — равносторонний.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}; \quad p = \frac{3AB}{2};$$

$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p}; \; r = h = \frac{AB^2\sqrt{3}\cdot 2}{4\cdot 3AB} =$$

$$= \frac{AB}{2\sqrt{3}} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}h.$$

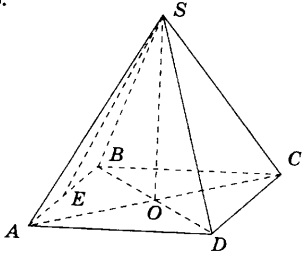
$$S_{\Delta ABC} = \frac{(2\sqrt{3}h)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}h^2;$$

$$S_{\Delta BCS} = S_{\Delta ACS} = S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}AB\cdot SK = \frac{1}{2}2\sqrt{3}\cdot h\cdot h\cdot\sqrt{2} = h^2\sqrt{6};$$

$$S_{бок} = 3S_{\Delta BCS} = 3\sqrt{6}h^2;$$

$$S_{полн} = S_{\Delta ABC} + S_{бок} = 3\sqrt{3}h^2 + 3\sqrt{6}h^2 = 3\sqrt{3}h^2(1+\sqrt{2}).$$

258.



По условию $SABCD$ — правильная пирамида, где $ABCD$ — квадрат, O — центр квадрата. $\Delta SOA = \Delta SOC = \Delta SOB = \Delta SOD$. $\angle SAC = \angle SCA = \angle SBD = \angle SDB = 60^\circ \Rightarrow \Delta SAC = \Delta SBD$ – правильные; $AS = BS = CS = DS = AC = BD = 12$ см.

Из ΔSOA: $AO = OC = 6$ см,

$AC = 2AO = 12$ см, $12 = AB\sqrt{2}$;

$$AB = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \text{ см};$$

$$S_{\square ABCD} = (6\sqrt{2})^2 = 72 \text{ см}^2; \; S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2}AB\cdot SE.$$

Из ΔSEA по теореме Пифагора: $AB = 6\sqrt{2}$, $AE = BE = 3\sqrt{2}$ см.

$$SE = \sqrt{SA^2 - AE^2} = \sqrt{12^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{126};$$

$$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2}6\sqrt{2}\cdot\sqrt{126} = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}\cdot 3 = 18\sqrt{7} \text{ (см}^2)$$

$\Delta SAB = \Delta SAD = \Delta SDC = \Delta SBC$ (по трем сторонам).

Из равенства треугольников $\Rightarrow$ площади равны.

$$S_{бок.} = 4S_{\Delta ASNB} = 4\cdot 18\sqrt{7} = 72\sqrt{7} \text{ см}^2;$$

$$S_{пол.} = S_{\square ABCD} + S_{бок} = 72 + 72\sqrt{7} = 72\cdot(1+\sqrt{7}) \text{ см}^2.$$

259. По условию $SABCD$ — правильная пирамида, где $ABCD$ — квадрат со стороной 6 см. $OK = \frac{1}{2}AB = \frac{6}{2} = 3$ см.

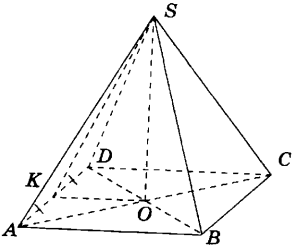
ΔSOK — прямоугольный. По определению синуса

$$KS = \frac{OK}{\sin 30^\circ} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 \text{ см.}$$

$$AK = \frac{1}{2}AD = 3 \text{ см.}$$

Из ΔSKA по теореме Пифагора:

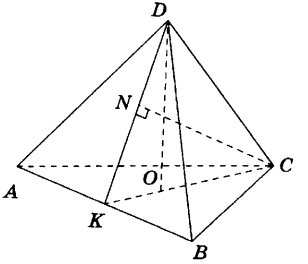
$$SA = \sqrt{KC^2 + KA^2} = \sqrt{6^2 + 3^3} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ см.}$$



$SA = SB = SC = SD = 3\sqrt{5}$ см поскольку все боковые ребра у правильной пирамиды равны.

260. По условию $DABC$ — правильная пирамида. Плоскость α — это плоскость DKC, потому что она проходит через ребро DC и высоту DO.

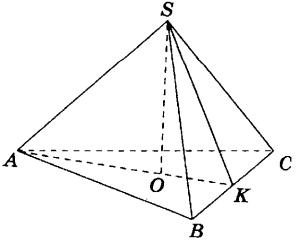
а) Плоскость α проходит через точки D, C, O, т. O — центр равностороннего ΔABC, CK — биссектриса угла $\angle ACB$, CK — медиана и высота $\Delta ABC \Rightarrow CK \perp AB$, а поскольку $CK \cap DO$ образуют плоскость α и $DO \perp AB$, то AB перпендикулярна плоскости α (поскольку она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, что лежат в плоскости α).



б) $DK \perp AB$ по теореме о трех перпендикулярах, $CN \perp DK$, $CN \perp AB$, поскольку плоскость $\alpha \perp AB$ и $CN \subset \alpha$. Тогда CN перпендикулярна двум пересекающимся прямым, что лежат в плоскости ADB, $CN \perp ADB$.

261. По условию $SABC$ — правильная пирамида, в которой ΔABC — равносторонний. SO — высота, т. O — центр ΔABC. AO — биссектриса $\angle BAC$, тогда AK — медиана, высота, $AK \perp BC$. Тогда $SK \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах.

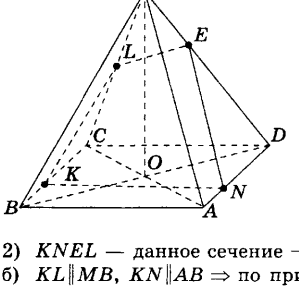
Если $BC \perp SK$ и $BC \perp AK$, тогда $BC \perp (ASK)$ и $BC \perp AS$. Поскольку ΔABC — правильный, то $CS \perp AB$ и $AC \perp BS$.



262. По условию данная пирамида — правильная (см. рисунок к задаче 261), где SO — высота, O — центр правильного многоугольника. Все боковые грани есть равные равнобедренные треугольники. В одной грани построим высоту SK. Эта высота перпендикулярна стороне, к которой проведена, а через высоту SO проведена плос-

кость, которая проходит через высоту грани SK. Так как $SK \perp BC$ и $SO \perp BC$ – то по теореме о трех перпендикулярах $AK \perp BC$. Поскольку BC перпендикулярен двум пересекающимся прямым в плоскости ASK, то $BC \perp ASK$. $BC \subset BSC$, по признаку перпендикулярности двух плоскостей $ASK \perp BSC$.

263.



$MABCD$ — правильная пирамида. Точки $K \in BC$, $L \in MC$, $N \in AD$; $KN \parallel AB$, $KL \parallel BM$, тогда $KN \parallel CD$.

а) Сечение проходит через прямую KN, которая параллельна CMD и пересекает эту плоскость, тогда линия сечения, проходящего через точку L, будет параллельна KN.

Тогда: 1) через т. L проведем $LE \parallel CD$, поскольку $CD \parallel AB \parallel KN$;

2) $KNEL$ — данное сечение – равнобокая трапеция.

б) $KL \parallel MB$, $KN \parallel AB \Rightarrow$ по признаку параллельности двух плоскостей, плокости AMB и KLN — параллельные.

264.

$SA_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — правильная шестиугольная пирамида, $A_1A_1 ... A_6$ — правильный шестиугольник. $A_1A_2 = A_2A_2 = ... = A_1A_6 = a$. Наибольшая диагональ равна диаметру окружности, описанной около шестиугольника.

$AA_1 = R$; $\quad OK = r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$R = a$; $A_1A_2 = OA_1 = R = a$.

Поскольку все боковые грани в правильной пирамиде — равные между собой равнобедренные треугольники, SK — высота боковой грани, $SK \perp A_1A_2$.

$$S_{\Delta A_1SA_2} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot SK = \frac{1}{2} a \cdot SK.$$

Из ΔSOK по теореме Пифагора: $SK = \sqrt{OK^2 + SO^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + SO^2}$.

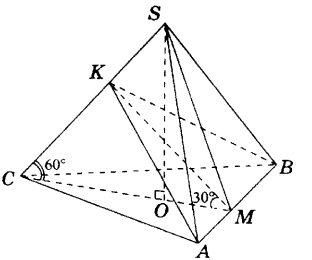
Из ΔSA_1A_4: $S_{\Delta SA_1A_4} = \dfrac{1}{2} A_1A_4 \cdot SO = \dfrac{1}{2} 2a \cdot SO = SO \cdot a$;

$$S_{\Delta SA_1A_4} = S_{\Delta A_1SA_2} \Rightarrow \frac{1}{2} a \cdot SK = SO \cdot a \Rightarrow SK = 2SO \Rightarrow SO = \frac{SK}{2}.$$

$$4SO^2 = \frac{3a^2}{4} + SO^2; \quad 3SO^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow SO^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow SO = \frac{a}{2};$$

$$SK = 2SO \Rightarrow SK = a; \; S_{\Delta A_1SA_2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{2} a^2; \; S_{бок.} = 6S_{\Delta A_1SA_2} = 6 \cdot \frac{a^2}{2} = 3a^2.$$

265. По условию $SABC$ — правильная пирамида, SO — высота, точка O — центр ΔABC. $CM \perp AB$, $SM \perp AB \Rightarrow CMS \perp AB$ по теореме о трех перпендикулярах.



$\angle CMK = 30^\circ$ — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды, образованный плоскостью пересечения с основанием пирамиды, поскольку $KM \perp AB$ и $CM \perp AB$.

В ΔSOC CO — проекция ребра CS. $\angle SCO = 60^\circ$, поскольку в правильной пирамиде все боковые ребра одинаковы и наклонены к основанию под одинаковым углом.

В ΔAKB: $S_{\Delta AKB} = \frac{1}{2} KM \cdot AB = \frac{1}{2} KM \cdot 12 = 6KM$.

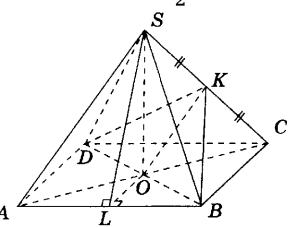
В ΔAMC по определению синуса: $MC = AC \sin \angle CAB = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ см

В ΔMKC по определению синуса:

$MK = MC \cdot \sin \angle SCO = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9$ см.

Тогда $S_{\Delta AKB} = 6 \cdot MK = 6 \cdot 9 = 54$ см^2.

266. По условию $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — прямоугольник, SO — высота.



$SA = SB = SC = SD \Rightarrow OA = OB = OC = OD$.

Точка O — точка пересечения диагоналей и равноудалена от всех вершин $ABCD$.

ΔDKB — сечение, которое проведено через диагональ DB, $OK \parallel SA$, $SA \parallel OK \Rightarrow SA \parallel DKB$.

Из ΔBSC по теореме косинусов: $BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB \cdot SC \cdot \cos \angle BSC$.

ΔABC: $AB = 8$ см, $BC = 6$ см.

По теореме Пифагора: $AC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ дм.

ΔSOC: $SO = 2$ дм, $BO = AO = 5$ дм.

По теореме Пифагора: $SC = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ дм. $BC = SC = \sqrt{29}$;

$6^2 = 29 + 29 - 2\sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cos \angle BSC$; $36 = 58 - 58 \cos \angle BSC$;

$\cos \angle BSC = \frac{22}{58} = \frac{11}{29}$; $\cos \angle BSC = \frac{11}{29}$.

Из ΔSAC: OK — средняя линия, K — середина SC. $SK = KC$.

По теореме косинусов: $BK^2 = SB^2 + SK^2 - 2SB \cdot SK \cos \angle BSC$.

$$BK^2 = 29 + \frac{29}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cdot 11}{2 \cdot 29} = 29 + \frac{29}{4} - 11 = \frac{101}{4}; \quad BK = \frac{\sqrt{101}}{2} \text{ см.}$$

Из ΔSDC по теореме косинусов:

$DC^2 = SD^2 + SC^2 - 2SD \cdot SC \cos \angle DSC$;

$DC^2 = 29 + 29 - 2\sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cos \angle DSC$; $\cos \angle DSC = -\frac{3}{29}$;

$64 = 58 - 2 \cdot 29 \cos \angle DSC \Rightarrow \cos \angle DSC = -\frac{3}{29}$.

Аналогично, по теореме косинусов в ΔDSK:

$DK^2 = DS^2 + SK^2 - 2SD \cdot SK \cos \angle DSC$;

$DK^2 = 29 + \frac{29}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{2} \cdot \left(-\frac{3}{29}\right) = 29 + \frac{29}{4} + 3 = \frac{157}{4}$; $DK = \frac{\sqrt{157}}{2}$

Из ΔBDK по теореме косинусов:

$DB^2 = DK^2 + BK^2 - 2DK \cdot BK \cos \angle DKB$; $DB = AC$.

$10^2 = \frac{157}{4} + \frac{101}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{157} \cdot \sqrt{101}}{2 \cdot 2} \cos \angle DKB$;

$100 = \frac{258}{4} - \frac{\sqrt{157 \cdot 101}}{2} \cos \angle DKB$;

$\cos \angle DKB = \left(\frac{258}{4} - 100\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{157 \cdot 101}} = -\frac{71}{\sqrt{157 \cdot 101}}$.

Из того, что $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$; $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$;

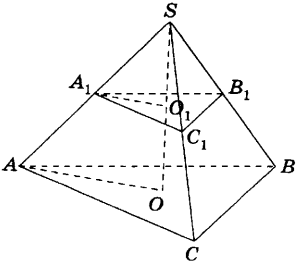
$\sin \angle DKB = \sqrt{1 - \frac{71^2}{157 \cdot 101}} = \sqrt{\frac{101 \cdot 157 - 5041}{157 \cdot 101}} = \sqrt{\frac{10\,816}{157 \cdot 101}} =$

$= \frac{104}{\sqrt{157 \cdot 101}}$.

$S_{\Delta DKB} = \frac{1}{2} DK \cdot KB \sin \angle DKB$;

$S_{\Delta DKB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{157}}{2} \cdot \frac{\sqrt{101}}{2} \cdot \frac{104}{\sqrt{157 \cdot 101}} = \frac{104}{8} = 13$ дм^2

267.



По условию дана пирамида, в основании которой многоугольник. Любой многоугольник можно разделить диагоналями на треугольники $\Rightarrow$ пирамида состоит из треугольных пирамид.

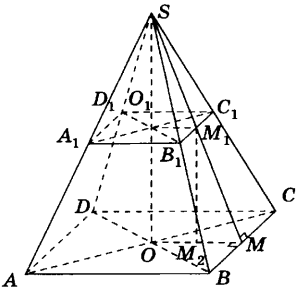
$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$; $A_1C_1 \parallel AC$, $B_1C_1 \parallel BC$, $A_1B_1 \parallel AB$.

Треугольники SA_1B_1 и SAB — подобны $\Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SA_1}{SA}$.

SO — высота пирамиды.

Треугольники SO_1A и SOA — прямоугольные и подобные ($\angle$общий) $\Rightarrow \frac{SA_1}{SA} = \frac{SO_1}{SO}$. Тогда $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SA_1}{SA} = \frac{SO_1}{SO}$. Доказали, что боковое ребро и высота пирамиды делятся этой плоскостью на пропорциональные части.

268. По условию $SABCD$ — правильная пирамида, где $ABCD$ — квадрат, боковые грани усеченной пирамиды — трапеции (причем, равнобедренные, потому что пирамида правильная).



$OM \perp BC$, $M_1M \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах, M_1M — апофема усеченной пирамиды, $M_1M = 4$ дм.

ΔSB_1C_1 и ΔSBC; ΔSO_1M_1 и ΔSOM имеют общий угол при вершине S и прямоугольные. $\Delta SB_1C_1 \sim \Delta SBC$;

$\Delta SO_1M_1 \sim \Delta SOM \Rightarrow \frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1M_1}{OM} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$.

$M_1M_2 \perp OM$; $OM_2 = OM_1$. OO_1 — высота усеченной пирамиды. Тогда ΔM_1M_2M — прямоугольный. По теореме Пифагора:

$M_2M = \sqrt{M_1M^2 - OO_1^2} = \sqrt{16^2 - O_1O^2}$; $\frac{O_1M_1}{O_1M_1 + \sqrt{16 - OO_1^2}} = \frac{1}{3}$;

$OM = O_1M_1 + M_2M$.

$3O_1M_1 = O_1M_1 + \sqrt{16 - OO_1^2}$; $O_1M_1 = \frac{\sqrt{16 - OO_1^2}}{2}$;

$A_1B_1 = 2O_1M_1 = \sqrt{16 - OO_1^2}$.

$S_{\square A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1^2 = 16 - OO_1^2$ (дм^2);

$AB = 2OM = 2\left(\frac{\sqrt{16 - OO_1^2}}{2} + \sqrt{16 - OO_1^2}\right) = 3\sqrt{16 - OO_1^2}$;

$S_{\square ABCD} = AB^2 = \left(16 - OO_1^2\right) \cdot 9$ (дм^2);

$S_{\square BB_1C_1C} = \frac{B_1C_1 + BC}{2} \cdot M_1M = \frac{\sqrt{16 - OO_1^2} + 3\sqrt{16 - OO_1^2}}{2} \cdot 4 =$

$= 8\sqrt{16 - O_1O^2}$ (дм^2).

$S_{\text{пол.}} = 186$ дм^{2}ж $S_{\text{пол.}} = S_{\square ABCD} + S_{\square A_1B_1C_1D_1} + 4S_{\square BB_1C_1C} = 186$

$9 \cdot (16 - OO_1^2) + (16 - OO_1^2) + 4 \cdot 8\sqrt{16 - OO_1^2} = 186$.

Замена $\sqrt{16 - OO_1^2} = x$, $x > 0$;

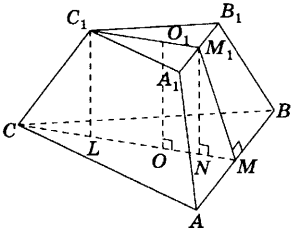
$10x^2 + 32x = 186$; $5x^2 + 16x = 93$; $D = 256 + 1860 = 46^2$;

$x_{1,2} = \dfrac{-16 \pm 46}{10}$; $x = -\dfrac{31}{5}$ — не подходит;

$x = 3$ дм; $\sqrt{16 - OO_1^2} = 3$; $16 - OO_1^2 = 9$; $OO_1 = \sqrt{16 - 9}$;

$OO_1 = \sqrt{7}$ дм.

269.



$ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная пирамида, OO_1 — высота, боковые грани — равные равнобедренные трапеции.

$CM \perp AB$, $C_1M_1 \perp A_1B_1$. По теореме о трех перпендикулярах) $M_1M \perp AB$ и $A_1B_1 \perp M_1M$, M_1M — апофема пирамиды. $C_1L \perp CM$, $C_1L = OO_1 = M_1N$; OC, O_1C_1 — радиусы описанных окружностей около ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$.

По определению синуса:

$OC = \dfrac{AB}{2\sin 60^\circ}$; $OC = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ дм. $O_1C_1 = \dfrac{A_1B_1}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (дм).

$CL = OC - C_1O_1 = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ дм.

Из ΔCC_1L: по теореме Пифагора $\angle L = 90^\circ$.

$$C_1L = \sqrt{C_1C^2 - CL^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ (дм)}.$$

$C_1M_1 = A_1C_1 \sin 60^\circ = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (дм);

$O_1M_1 = C_1M_1 - O_1C_1 = \sqrt{3} - \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (дм).

Аналогично: $CM = AC \sin 60^\circ = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (дм);

$OM = CM - CO = 2\sqrt{3} - \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (дм);

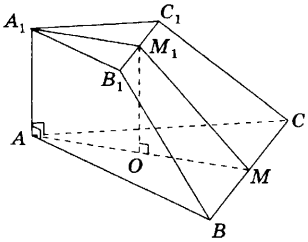
$NM = OM - ON = OM - O_1M_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (дм).

Из ΔM_1NM по теореме Пифагора:

$$M_1M = \sqrt{OO_1^2 + MN^2} = \sqrt{C_1L^2 + MN^2} = \sqrt{\frac{8}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{3} \text{ (дм)}.$$

270. По условию $ABCA_1B_1C_1$ — усеченная пирамида. $BB_1 = CC_1 \Rightarrow$ трапеция B_1C_1CD — равнобедренная.

$AM \perp BC$, $A_1M_1 \perp B_1C_1 \Rightarrow M_1M \perp BC$, по теореме (о трех перпендикулярах) MM_1 — высота боковой грани. $M_1O \perp AM$.



Из $\Delta A_1M_1B_1$ по определению синуса:

$$A_1M_1 = A_1B_1 \sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (см)}.$$

Из ΔAMB аналогично:

$$AM = AB \sin 60° = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ (см)};$$

$$OM = AM - AO = AM - A_1M_1 =$$
$$= \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Из ΔM_1OM: $\angle O = 90°$, по теореме Пифагора:

$$MM_1 = \sqrt{M_1O^2 + OM^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ см}.$$

$$S_{\square B_1C_1CB} = \frac{B_1C_1 + BC}{2} \cdot MM_1 = \frac{3+5}{2} \cdot 2 = 8 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{\square AA_1B_1B} = \frac{3+5}{2} \cdot 1 = 4 \text{ (см}^2\text{)}; \; S_{\square AA_1C_1C} = S_{\square AA_1B_1B} = 4 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{\text{бок.}} = S_{\square B_1C_1CB} + S_{\square AA_1B_1B} + S_{\square AA_1C_1C} = 8 + 4 + 4 = 16 \text{ (см}^2\text{)}.$$

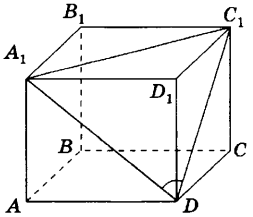
§ 3. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

276. а) По условию центра симметрии фигура имеет центр, если она обладает центральной симметрией. А у параллелепипеда диагонали пересекаются в одной точке, и эта точка O — единственная $\Rightarrow$ параллелепипед имеет одну точку симметрии.
б) У правильной треугольной призмы нет такой точки, к которой симметричны были бы все точки фигуры. Не имеет центра симметрии.
в) Аналогично, не имеет центра симметрии.
г) В отрезке центром симметрии является середина отрезка.

277. а) По определению оси симметрии отрезок на плоскости имеет ровно одну ось симметрии, а в пространстве — бесконечное множество.
б) У правильного треугольника существует три оси симметрии.
в) Аналогично, у куба девять осей симметрии.

278. а) Если правильная призма отличная от куба, то имеет пять плоскостей симметрии, проходящих через ось симметрии.
б) Правильная четырехугольная пирамида имеет четыре плоскости симметрии (они проходят через высоту пирамиды и боковые ребра или апофему боковых граней).
в) У правильной треугольной пирамиды шесть плоскостей симметрии.

279.



По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, диагонали граней куба равны.

$A_1D = A_1C_1 = DC_1 = a\sqrt{2}$, поскольку $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ — квадраты.

ΔA_1C_1D — равносторонний, тогда $\angle D = \angle A_1 = \angle C_1 = 60^\circ$.

280. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, где ребро равно a.

1) A_1C_1 и AC — диагонали, тогда AA_1C_1C — прямоугольник.

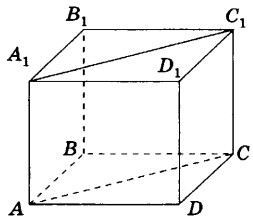
$S_{\square AA_1C_1C} = AA_1 \cdot A_1C_1 = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

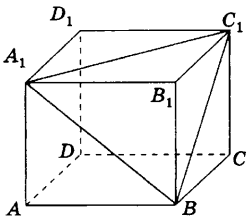
$AA_1 = a$; $A_1C_1 = a\sqrt{2}$, поскольку $A_1B_1C_1D_1$ — куб.

2) Возьмем диагонали смежных граней.

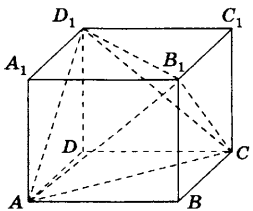
A_1C_1, A_1B, BC_1 — диагонали $\Rightarrow \Delta A_1C_1B$ — сечение. ΔA_1C_1B — правильный.

$$S_{\Delta A_1C_1B} = \frac{A_1B^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot 2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}. \quad A_1B = a\sqrt{2}.$$





281.

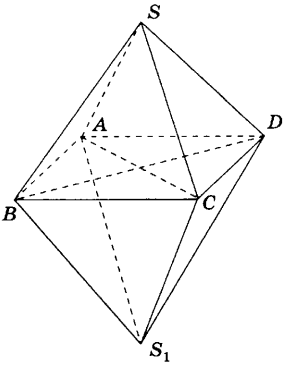


По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, D_1A, D_1C, D_1B_1 — диагонали. D_1AB_1C — правильный тетраэдр. Все ребра этого тетраэдра являются диагоналями граней куба. Поскольку грани равны, то и у тетраэдра все ребра равны. Если у куба сторона AA_1, то у тетраэдра $AB_1 = AA_1 \cdot \sqrt{2}$.

$S_{\text{куба}} = 6 \cdot AA_1^2$, то $S_{\text{тетр}} = 4S_{\Delta AD_1C} =$

$$= 4 \cdot \frac{AA_1^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{4} \quad S_{\text{тетр}} = 2AA_1^2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{S_{\text{куба}}}{S_{\text{тетр}}} = \frac{6AA_1^2}{2AA_1^2\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

282. По условию дан правильный октаэдр, у которого все углы между ребрами, имеющими общую вершину, одинаковы.



Из $ABCD$: AC — диагональ, а в ΔABC: $AC = AB\sqrt{2}$.

В ΔASC по теореме косинусов $AC^2 = AS^2 + SC^2 - 2AS \cdot SC \cdot \cos\angle ASC$;

$(AB\sqrt{2})^2 = AB^2 + AB^2 - 2AB \cdot AB\cos\angle ASC$;

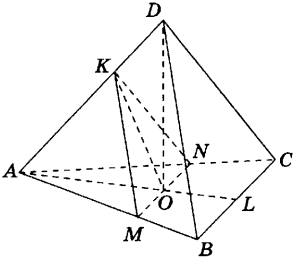
$2AB^2 = 2AB^2 - 2AB^2\cos\angle ASC$;

$2AB^2\cos\angle ASC = 0$; $\cos\angle ASC = 0$

$\Rightarrow \angle ASC = 90^\circ$.

283. а) $DABC$ — правильный тетраэдр. DO — высота, точка O — центр ΔABC. $MK \parallel DB$, $MN \parallel BC$, тогда ΔMKN — данное сечение. Ребро тетраэдра — a.

Тогда $AL = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AO = R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



ΔADB — равносторонний, $KM \parallel DB$.

$$AM = \frac{AO}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}\cdot 2}{3\cdot\sqrt{3}} = \frac{2a}{3};$$

$$AM = KM = \frac{2a}{3}.$$

В ΔMKN: $\angle MKN = 60^\circ$, потому что углы с соответственно параллельными и однаково направленными сторонами равны.

$$S_{\Delta MNK} = \frac{1}{2}MK \cdot KN\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}.$$

б) $OK \perp AD$, $(ADO) \perp NM \Rightarrow AD \perp MN$. $AD \perp MN$ и $AD \perp OK \Rightarrow$ $\Rightarrow AD \perp (MNK)$.

Тогда ΔMKN — сечение. $S_{\Delta MKN} = \dfrac{1}{2}OK \cdot MN$.

Поскольку ΔAMN — равносторонний, $MN = AM = \dfrac{2a}{3}$; $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

$$OK = AO\sin\angle DAO = \frac{a\sqrt{3}}{3}\sin\angle DAO.$$

Из ΔADL по теореме косинусов:

$DL^2 = AD^2 + AL^2 - 2AD \cdot AL\cos\angle DAO$;

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{a\cdot a\sqrt{3}}{2}\cos\angle DAO;$$

$$\frac{3a^2}{4} = \frac{4a^2+3a^2}{4} - a^2\sqrt{3}\cos\angle DAO; \quad \frac{7a^2-3a^2}{4} = a^2\sqrt{3}\cos\angle DAO;$$

$$1 = \sqrt{3}\cos\angle DAO \Rightarrow \cos\angle DAO = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

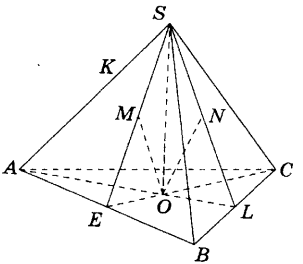
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \ \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha};$$

$$\sin\angle DAO = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}; \ OK = AO\sin\angle DAO = \frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{3};$$

$$S_{\Delta MKN} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2a}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{9}.$$

284. По условию задачи дан правильный тетраэдр. Фигура, которая образовалась в результате соединения средними линиями граней правильного тетраэдра, является восьмиугольником, а поскольку все ребра равны а грани — правильные треугольники, то восьмиугольник называется октаэдр.

285.

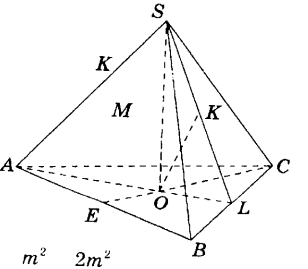


По условию $SABC$ — правильный тетраэдр. Поскольку все грани тетраэдра равны и любая из граней может считаться основанием, а другие три — боковыми гранями, то докажем равенство двух отрезков.

$\Delta SOE = \Delta SOL$, а значит $\Delta OEM = \Delta OLN \Rightarrow OE = OL$; $ME = LN$, $\Rightarrow OM = ON$.

286.

По условию $SABC$ — правильный тетраэдр. $SO = h$ — высота.



В ΔABC: $AO = R$; $AL = \frac{m\sqrt{3}}{2}$. По теореме синусов:

$$2R = \frac{BC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AO = R = \frac{m}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{m\sqrt{3}}{3};$$

Из ΔSOA по теореме Пифагора: $AS^2 = SO^2 + OA^2$

$$m^2 = \left(\frac{m\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = m^2 - \frac{3m^2}{9} = m^2 - \frac{m^2}{3} = \frac{2m^2}{3};$$

$$h^2 = \frac{2m^2}{3}; \ h = m\sqrt{\frac{2}{3}} \ m = h\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

б) Поскольку $OL = LK \Rightarrow OK \parallel AS$. $\Delta LOK \sim \Delta LAS$ ($\angle L$ — общий).

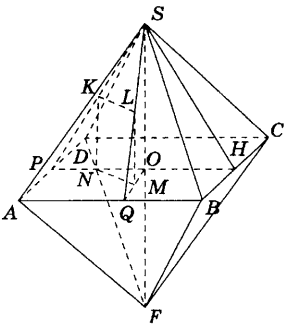
Из подобия $\frac{OL}{AS} = \frac{OL}{LA}$;

$$OL = AL - OA = \frac{m\sqrt{3}}{2} - \frac{m\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}m(3-2)}{6} = \frac{m}{2\sqrt{3}}.$$

$$\frac{n}{m} = \frac{m}{2\sqrt{3}} : \frac{m\sqrt{3}}{2} = \frac{2m}{2\sqrt{3}m\sqrt{3}} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{3} \Rightarrow n = \frac{m}{3}.$$

287. По условию дан правильный октаэдр, ребро которого a.



Из ΔADB по теореме Пифагора:

$DB = \sqrt{AD^2 + AB^2}$;

$DB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

DB — расстояние между двумя противоположными вершинами, потому что для всех вершин расстояния одинаковы.

б) Расстояние между центрами двух смежных граней, аналогично, одинаково. В гранях DSA и ASB: SP и SQ — высоты граней, точки K и L — центры граней, KL — расстояние между гранями.

$KN \perp PO$; $LM \perp OQ$; $KLMN$ — прямоугольник.

В ΔSHP по теореме косинусов:

$SH^2 = SP^2 + PH^2 - 2SP \cdot PH \cos\angle SPH$; $SH = SP$ — высота.

$$SH = SP = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad \frac{3a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} + a^2 - 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cos\angle SPH$$

$$a^2 = a^2\sqrt{3}\cos\angle SPH;$$

$$\cos\angle SPH = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \sin\angle SPH = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

PK — радиус вписанной окружности. $PK = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$;

$$PN = PK\cos\angle SPH = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{6}; \quad ON = OM = \frac{a}{2} - \frac{a}{6} = \frac{3a - a}{6} = \frac{a}{3}.$$

Из ΔNOM: $\angle O = 90^\circ$, $MN = ON \cdot \sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

в) Расстояние между противоположными гранями. Точки P и H — середины AD и BC квадрата $ABCD$.

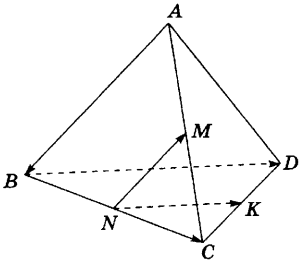
$PH \parallel AB$, $BC \parallel AD$; $SP \perp AD$, $KH \perp SP$, KH — расстояние между противоположными гранями. Из пункта б): $\sin\angle SPH = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

$$HK = PH\sin\angle SPH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

ГЛАВА 4. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ

320.

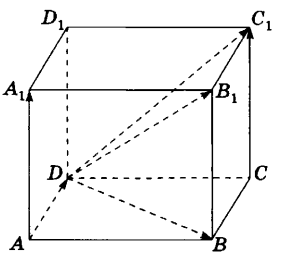


По условию $ABCD$ — тетраэдр.
M — середина $AC \Rightarrow AM = MC$;
N — середина $BC \Rightarrow BN = NC$;
K — середина $CD \Rightarrow CK = KD$.
$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = 3$, $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CB}| = 4$,
$|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{DB}| = 5$.
MN — средняя линия;
$|\overrightarrow{NM}| = |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$;
$|\overrightarrow{BN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$.

а) $|\overrightarrow{AB}| = 3$; $|\overrightarrow{BC}| = 4$; $|\overrightarrow{BD}| = 5$; $|\overrightarrow{MN}| = 1,5$; $|\overrightarrow{BN}| = 2$;
NK — средняя линия; $|\overrightarrow{NK}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$; $|\overrightarrow{NK}| = 2,5$.

б) $|\overrightarrow{CB}| = 4$; $|\overrightarrow{BA}| = 3$; $|\overrightarrow{DB}| = 5$; $|\overrightarrow{NC}| = |\overrightarrow{BN}| = 2$; $|\overrightarrow{KN}| = |\overrightarrow{NK}| = 2,5$.

321.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед.
$|\overrightarrow{AD}| = 8$; $|\overrightarrow{AB}| = 9$; $|\overrightarrow{AA_1}| = 12$. У параллелепипеда $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$.

а) $|\overrightarrow{CC_1}| = 12$; $|\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AD}| = 8$;
$|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}| = 9$.

б) $|\overrightarrow{DC_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{DD_1}|^2 + |\overrightarrow{D_1C_1}|^2}$. По теореме Пифагора: $|\overrightarrow{DC_1}| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.
Аналогично: $|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2}$;
$|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{145}$ (см);
$|\overrightarrow{DB_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{DB}|^2 + |\overrightarrow{BB_1}|^2} = \sqrt{(\sqrt{145})^2 + 12^2} = 17$.

322. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. M — середина B_1C_1, K — середина A_1D_1.

а) Сонаправленные векторы: $\overrightarrow{C_1B_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{D_1A_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{DK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CM}$.

б) Противоположно направленные векторы: $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{C_1B_1}$, $\overrightarrow{CC_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$.

в) Равные векторы: $\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DK}$.

323. По условию $ABCD$ — тетраэдр (рисунок в учебнике).

а) Равные векторы: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$.

б) NP и MQ — средние линияя ΔADC и ΔABC, потому что: M — середина AB, N — середина AD, P — середина DC, Q — середина BC; $NP = MQ$.

Аналогично MN и PQ — среднии линии ΔCBD и ΔADB.

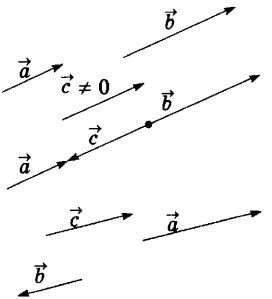
$$MQ \| NP \| AC;\ MN \| BD \| QP;\ BD \perp AC;\ MN = PQ = \frac{1}{2} BD.$$

Тогда $MNPQ$ — квадрат.

324. а) Два вектора, коллинеарные ненулевому вектору, будут параллельны или совпадут, то есть коллинеарны между собой.

б) Два вектора, сонаправленные с ненулевым вектором, сонаправлены.

в) Два вектора, коллинеарные ненулевому, могут быть направлены в противоположные стороны, т.е. не быть сонаправленными.

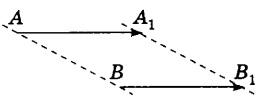


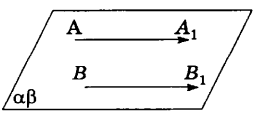
325. По условию $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$.

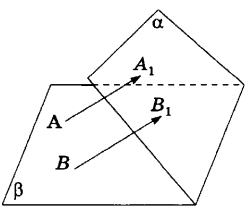
а) Расположение прямых AB и A_1B_1:
Они могут совпадать.
Или если $AA_1 \| BB_1 \Rightarrow AA_1BB_1$ — параллелограмм, $AB \| A_1B_1$.

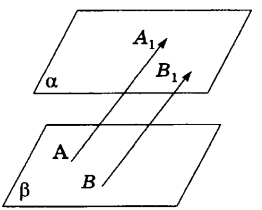
б) Расположение прямой AB и плоскости α, что проходит через A_1 и B_1.
$AB \in \alpha$, $A_1B_1 \in \alpha \Rightarrow AB \| A_1B_1$, $AB \| \alpha$.

в) Расположение плоскостей, когда одна из плоскостей α проходит через точки A и B, а другая β — через точки A_1 и B_1.
α и β совпадут или параллельны; α и β пересекаются.









326. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

M — середина B_1C_1; K — середина A_1D_1.

а) $\overrightarrow{CC_1}$ — вектор от точки C, что равный $\overrightarrow{DD_1}$;

б) $\overrightarrow{DK}$ — вектор от точки D, что равный $\overrightarrow{CM}$;

в) $\overrightarrow{A_1C_1}$ — вектор от точки A_1, что равный $\overrightarrow{AC}$;

г) $\overrightarrow{C_1B_1}$ — вектор от точки C_1, что равный $\overrightarrow{CB}$;

д) $\overrightarrow{MB_1}$ — вектор от точки M, что равный $\overrightarrow{KA_1}$.

§ 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

Умножение вектора на число

327. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед (рисунок в учебнике).

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AC_1}$ по правилу параллелограмма;

в) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{D_1D} = \overrightarrow{D_1A} = \overrightarrow{C_1B}$;

г) По правилу параллелограмма: $\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB_1}$;

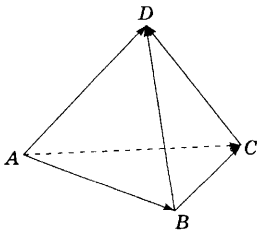
д) $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{DC_1}$.

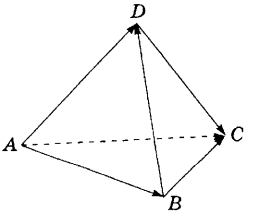
328. По условию $ABCD$ — тетраэдр.

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, поэтому $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$;

б) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$;

в) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}\end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.





329. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

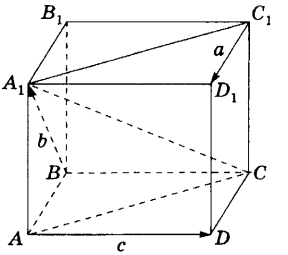
а) Векторы, противоположные вектору $\overrightarrow{CB}$: $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{BC}$.

б) Векторы, противоположные вектору $\overrightarrow{B_1A}$: $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{AB_1}$.

в) Векторы, равные вектору $-\overrightarrow{DC}$: $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{BA}$.

г) Векторы, равные вектору $-\overrightarrow{A_1B_1}$: $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$.

330. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.



а) $\overrightarrow{C_1D_1} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BA_1} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$;

$\vec{a} = \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BA_1}$;

$\vec{a} + \overrightarrow{AA_1} = \vec{b}$; $\vec{a} - \vec{b} = ?$ $\vec{a} - \vec{b} = -\overrightarrow{AA}$

б) $\vec{a} - \vec{c} = ?$

$\overrightarrow{C_1D_1} = \vec{a} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$;

$\overrightarrow{AD} = \vec{c} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -\vec{c}$; $\vec{a} + (-\vec{c}) = \overrightarrow{CA}$,

$\vec{a} - \vec{c} = \overrightarrow{CA}$.

в) $\vec{b} - \vec{a} = ?$

$\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} + \overrightarrow{A_1A} = \vec{a}$, $\vec{b} - \vec{a} = -\overrightarrow{A_1A}$, $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$.

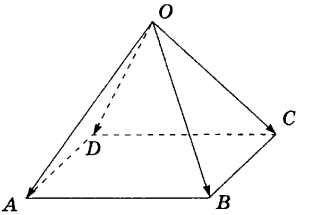
г) $\vec{c} - \vec{b} = ?$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA_1} = \vec{b}$, $\vec{c} + \overrightarrow{CA_1} = \vec{b}$, $\vec{c} - \vec{b} = -\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{A_1C}$.

д) $\vec{c} - \vec{a} = ?$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} - \vec{a} = \overrightarrow{AC}$.

331. $ABCD$ — параллелограмм.



а) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{BA}$;

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{CD}$;

$-\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$;

б) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{BC}$; $-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$;

$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$.

332. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед (рисунок в учебнике).

$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_1A}$;

$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1K} = -\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{KA_1} = \overrightarrow{KA_1} - \overrightarrow{A_1A}$.

333. а) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = (\underbrace{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{CB}} + \overrightarrow{DC}) + (\underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}}_{\overrightarrow{BD}}) =$

$= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = 0$;

б) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} =$

$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$.

334. По условию $KLMNK_1L_1M_1N_1$ — прямоугольный параллелепипед.

а) $\left|\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MM_1}\right| = \left|\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MM_1}\right|$; $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KK_1} = \overrightarrow{MK_1}$;

$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1K} = \overrightarrow{MK}$; $\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{M_1K}$; $\left|\overrightarrow{MK_1}\right| = \left|\overrightarrow{M_1K}\right|$ — диагонали в прямоугольном параллелепипеде равны.

б) $\left|\overrightarrow{K_1L_1} - \overrightarrow{NL_1}\right| = \left|\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MM_1}\right|$;

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{K_1L_1} - \overrightarrow{NL_1} = \overrightarrow{K_1L_1} + \overrightarrow{L_1N} = \overrightarrow{K_1N} \\ \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LL_1} = \overrightarrow{ML_1}\end{array}\right. \Rightarrow \left|\overrightarrow{K_1N}\right| = \left|\overrightarrow{ML_1}\right|$ — диагонали боковых граней равны.

в) $\left|\overrightarrow{NL} - \overrightarrow{M_1L}\right| = \left|\overrightarrow{K_1N} - \overrightarrow{LN}\right|$;

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{NL} - \overrightarrow{M_1L} = \overrightarrow{NL} + \overrightarrow{LM_1} = \overrightarrow{NM_1} \\ \overrightarrow{K_1N} - \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{K_1N} + \overrightarrow{NL} = \overrightarrow{K_1L}\end{array}\right. \Rightarrow \left|\overrightarrow{NM_1}\right| = \left|\overrightarrow{K_1L}\right|$ — диагонали боковых граней равны.

335. а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MN} +$
$+\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}$;

б) $\overrightarrow{FK} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{QK} + \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{MQ} +$
$+\overrightarrow{QK} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AK}$;

в) $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FK} +$
$+\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK} =$
$= \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{CP}$;

г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \vec{O}$.

336. а) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}$;
$\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - (-\overrightarrow{CD}) - (-\overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$;

б) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$;
$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} - (-\overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB}$;

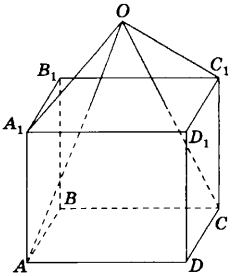
в) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$;
$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$;
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$.

337. а) $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD} =$
$= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AD}$;

б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EK} =$
$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AK}$;

в) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA} =$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{O}.$



338. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1};$

$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_1A};$

$\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{C_1C};$

$\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{C_1C} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1}.$

339. $BCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

x — ?

а) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{CD_1} + \vec{x} + \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{DB};$

$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD_1} + \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{A_1C_1} + \vec{x} = \overrightarrow{DB};$ $\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \vec{x} = \overrightarrow{DB};$

$\overrightarrow{DC_1} + \vec{x} = \overrightarrow{DB};$

$\vec{x} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC_1};$ $\vec{x} = \overrightarrow{C_1D} + \overrightarrow{DB};$ $\vec{x} = \overrightarrow{C_1B};$

б) $\overrightarrow{DA} + \vec{x} + \overrightarrow{D_1B} + \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC};$ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1B} + \overrightarrow{BA} + \vec{x} = \overrightarrow{DC};$

$\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1A} + \vec{x} = \overrightarrow{DC};$ $\overrightarrow{DA} + \vec{x} = \overrightarrow{DC};$ $\vec{x} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA};$ $\vec{x} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC};$

$\vec{x} = \overrightarrow{AC}.$

340. По условию $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма.

а) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C} - \vec{x} = \overrightarrow{BA};$

поскольку $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$

$\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C} - \vec{x} = \overrightarrow{BA};$

$\overrightarrow{BC} - \vec{x} = \overrightarrow{BA};$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \vec{x};$

$\vec{x} = \overrightarrow{AC};$

б) $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{BB_1} + \vec{x} = \overrightarrow{AB};$

$\overrightarrow{AC_1} + \vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1};$

$\overrightarrow{AC_1} + \vec{x} = \overrightarrow{AB_1};$

$\vec{x} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AC_1};$

$\vec{x} = \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AB_1};$

$\vec{x} = \overrightarrow{C_1B_1};$

в) $\overrightarrow{AB_1} + \vec{x} = \overrightarrow{AC} - \vec{x} + \overrightarrow{BC_1};$

$2\vec{x} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{AB_1};$

$2\vec{x} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC_1};$

$2\vec{x} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{BC_1},$ $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1};$ $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{B_1}.$

$2\vec{x} = -\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{BC},$ $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1};$

$2\vec{x} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1},$ $\overrightarrow{B_1C} = -\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{CB};$ $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1};$

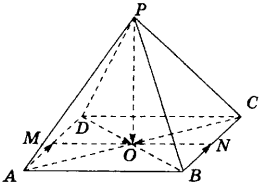
$2\vec{x} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC};$

$2\vec{x} = 2\overrightarrow{BC};$

$\vec{x} = \overrightarrow{BC}.$

341. По условию $ABCD$ — трапеция. P — вершина. $PABCD$ — пирамида, MN — средня линия, а точка O — середина средней линии.

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO};$



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AO}\\ \overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BO}\\ \overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CO}\\ \overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DO}\end{array}\right| +$$

$4\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{PC}+$

$+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DO}$; $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{AO}$;

$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MO}\Rightarrow\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{BO}$;

$\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{NO}\Rightarrow\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{NO}-\overrightarrow{NC}$. Тогда

$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NO}-\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MD}$

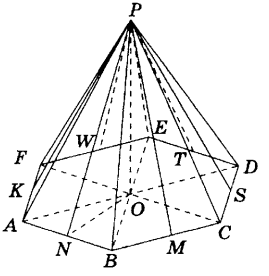
Поскольку $\overrightarrow{MO}=-\overrightarrow{NO}$, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$. Тогда

$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MD}+\underline{\overrightarrow{MQ}}+\underline{\underline{\overrightarrow{BN}}}-\underline{\overrightarrow{MQ}}-\underline{\overrightarrow{MQ}}-\underline{\underline{\overrightarrow{BN}}}-$

$-\overrightarrow{MD}+\underline{\overrightarrow{MQ}}=\vec{0}$.

Тогда $4\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$.

342.



По условию дана шестиугольная пирамида. PO — высота.

Рассмотрим грань PBC:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB}\\ \overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MC}\end{array}\right| + \text{ поскольку}$$

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}$

$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}$

Рассмотрим грань PBA:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}\\ \overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NB}\end{array}\right| + \text{ поскольку}$$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PN}$

$\overrightarrow{NA}=-\overrightarrow{NB}$

Рассмотрим грань PFA: $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KA}\\ \overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KF}\end{array}\right| +$ поскольку $\overrightarrow{KF}=-\overrightarrow{KA}$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PF}=2\overrightarrow{PK}$

Вывод: для каждой грани получаем векторное равенство вида: 2 · (вектор – апофема) = сумма векторов ребер.

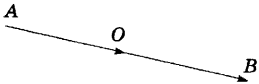
Тогда $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PF}=2\overrightarrow{PK}$; $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PA}$;

$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PS}$;

$2\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\ldots+\overrightarrow{PF})=2\cdot(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PK}+\ldots+\overrightarrow{PS})$;

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PM}$.

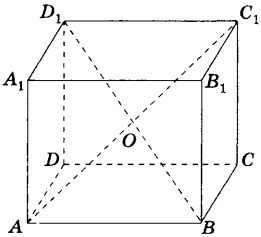
343. По условию $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. $\left|\overrightarrow{AO}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$;



$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Поскольку точки A, B, O принадлежат одному отрезку $AO = OB$, тогда точки A и B симметричны точке O.

344. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.



а) $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$;

$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$; $k = -1$;

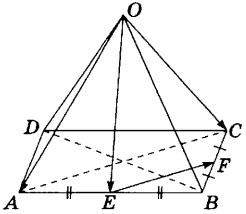
б) $\overrightarrow{AC_1} = k \cdot \overrightarrow{AO}$; AC_1 и AO — коллинеарны, тогда $\overrightarrow{AC_1} = 2\overrightarrow{AO}$; $k = 2$;

в) $\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{B_1D}$; $\overrightarrow{OB_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{O_1B}$;

$\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB_1} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{B_1D}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D}$;

$k = -\frac{1}{2}$.

345. По условию $ABCD$ — параллелограмм.



а) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = ?$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{AC}$;

E — середина AB; F — середина CB;

EF — средняя линия ΔABC.

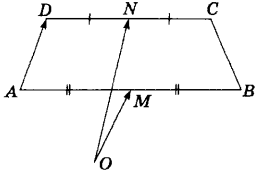
$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{EF}$;

б) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OF} = ?$

$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{EA}$;

$\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{DC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

346. По условию $ABCD$ — трапеция.



$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = ?$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{ON}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$;

$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{OA} -$

$-\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} =$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}) - \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

Поскольку $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{O}$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} -$

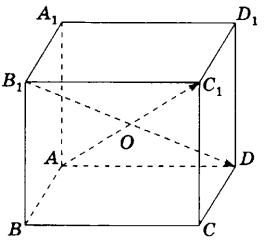
$-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

347. а) $2(\vec{m}+\vec{n})-3(4\vec{m}-\vec{n})+\vec{m}=\underline{2\vec{m}}+\underline{\underline{2\vec{n}}}-\underline{12\vec{m}}+\underline{\underline{3\vec{n}}}+\underline{\vec{m}}=5\vec{n}-9\vec{m};$

б) $\vec{m}-3(\vec{n}-2\vec{m}+\vec{p})+5(\vec{p}-4\vec{m})=\underline{\vec{m}}-3\vec{n}+\underline{6\vec{m}}-\underline{\underline{3\vec{p}}}+\underline{\underline{5\vec{p}}}-\underline{20\vec{m}}=$

$=2\vec{p}-3\vec{n}-13\vec{m}.$

348.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

$\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1D}=2\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{B_1D}$ — диагонали параллелепипеда.

$\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC_1}$;

$\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{B_1A}=$

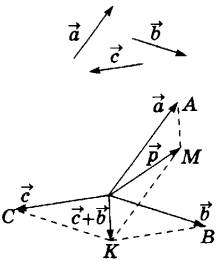
$=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{B_1A}$;

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{B_1A}=\overrightarrow{C_1D}=-\overrightarrow{DC_1}$;

$\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1D}=-\overrightarrow{DC_1}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC_1}=2\overrightarrow{BC}.$

349. Решение в учебнике.

350.



По условию $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — попарно не сонаправлены.

Совместим три вектора, чтобы они имели общее начало, параллельным переносом. Тогда:

1) Найдем $\vec{b}+\vec{c}$;

2) Построим $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3) $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{p}=\overrightarrow{OM}$; $|\overrightarrow{OK}|=|\vec{b}+\vec{c}|$;

$|\overrightarrow{KM}|=|\vec{a}|$; $|\vec{p}|<|\vec{a}|+|\vec{b}+\vec{c}|$;

$|\overrightarrow{OK}|<|\vec{b}|+|\vec{c}|\Rightarrow|\vec{p}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|.$

351. $\vec{a}$ и $\vec{c}$ — коллинеарны; $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — коллинеарны.

а) $\vec{a}$ и $\vec{c}$ — либо параллельны, либо совпадают;

$\vec{b}$ и $\vec{c}$ — аналогично, либо параллельны, либо совпадают.

$\vec{a}\parallel\vec{c}$; $\vec{b}\parallel\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Тогда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лежат на параллельныъ прямых или на одной $\Rightarrow$ коллинеарны.

б) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарны

$\vec{b}$ и $-\vec{b}$ — коллинеарны $\Rightarrow\vec{a}+(-\vec{b})$ — коллинеарны;

$\vec{b}$ и $\vec{c}$ — коллинеарны $\Rightarrow\vec{a}+(-\vec{b})$ и $\vec{c}$ — коллинеарны.

в) $\vec{a}$ и $3\vec{b}$ — коллинеарны;

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарны $\Rightarrow\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{b}$ — коллинеарны;

$\vec{b}$ и $\vec{c}$ — коллинеарны $\Rightarrow \vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{c}$ — коллинеарны.

г) $-\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{c}$

$\vec{a}$ и $-\vec{a}$ — коллинеарны

$\vec{b}$ и $2\vec{b}$ — коллинеарны $\Rightarrow -\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{b}$ — коллинеарны;

$\vec{b}$ и $\vec{c}$ — коллинеарны $\Rightarrow -\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{c}$ — коллинеарны.

352. По условию $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ — коллинеарны. Тогда:

$\vec{a} + \vec{b} = k(\vec{a} - \vec{b})$; $\vec{a} + \vec{b} = k\vec{a} - k\vec{b}$; $\vec{a} - k\vec{a} = -\vec{b} - k\vec{b}$; $k\vec{a} - \vec{a} = \vec{b} + k\vec{b}$;

$\vec{a}(k-1) = \vec{b}(1+k) \Rightarrow \vec{b} = \dfrac{k-1}{1+k}\vec{a} \Rightarrow \vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарны.

353. По условию $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{a} - 3\vec{b}$ — коллинеарны. Тогда:

$\vec{a} + 2\vec{b} = \lambda(\vec{a} - 3\vec{b})$; $\vec{a} + 2\vec{b} = \lambda\vec{a} - 3\lambda\vec{b}$; $\lambda\vec{a} - \vec{a} = 2\vec{b} + 3\lambda\vec{b}$;

$\vec{a}(\lambda - 1) = \vec{b}(2 + 3\lambda) \Rightarrow \vec{b} = \dfrac{\lambda - 1}{2 + 3\lambda}\vec{a} \Rightarrow \vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарны.

354. По условию $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ — не коллинеарны.

а) Допустим, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарны.

$\vec{b} = \lambda\vec{a}$; $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$; $\vec{d} = \vec{a} + \lambda\vec{a} = \vec{a}(1 + \lambda) \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{\vec{d}}{1+\lambda}$;

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$; $\vec{c} = \vec{a} - \lambda\vec{a} = \vec{a}(1 - \lambda) \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{\vec{c}}{1-\lambda}$;

$\dfrac{\vec{d}}{1+\lambda} = \dfrac{\vec{c}}{1-\lambda} \Rightarrow \vec{c} = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\vec{d} \Rightarrow \vec{c}$ и $\vec{d}$ — коллинеарны;

$\begin{matrix}\vec{c} = a - \vec{b} \\ \vec{d} = \vec{a} + \vec{b}\end{matrix}$ — коллинеарны, а это противоречит условию, тогда

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ — не коллинеарны.

б) Допустим, что векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$ — коллинеарны, тогда

$\vec{a} + 2\vec{b} = \lambda(2\vec{a} - \vec{b})$; $\vec{a} + 2\vec{b} = 2\lambda\vec{a} - \lambda\vec{b}$; $2\vec{b} + \lambda\vec{b} = 2\lambda\vec{a} - \vec{a}$;

$\vec{b}(2 + \lambda) = \vec{a}(2\lambda - 1) \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{2+\lambda}{2\lambda - 1}\vec{b}$;

$$\vec{a} + \vec{b} = \frac{2+\lambda}{2\lambda-1}\vec{b} + \vec{b} = \vec{b}\left(\frac{2+\lambda}{2\lambda-1} + 1\right) = \vec{b}\left(\frac{2+\lambda+2\lambda-1}{2\lambda-1}\right) = \vec{b}\left(\frac{3\lambda+1}{2\lambda-1}\right);$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \frac{2+\lambda}{2\lambda-1}\vec{b} - \vec{b} = \vec{b}\left(\frac{2+\lambda}{2\lambda-1} - 1\right) = \vec{b}\left(\frac{2+\lambda-2\lambda+1}{2\lambda-1}\right) = \vec{b}\left(\frac{3-\lambda}{2\lambda-1}\right);$$

$$\vec{b} = \frac{(\vec{a}+\vec{b})(2\lambda-1)}{3\lambda+1};\quad \vec{b} = \frac{(\vec{a}-\vec{b})(2\lambda-1)}{3-\lambda};\quad \frac{(\vec{a}+\vec{b})(2\lambda-1)}{3\lambda+1} = \frac{(\vec{a}-\vec{b})(2\lambda-1)}{3-\lambda};$$

$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3\lambda+1} = \dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{3-\lambda} \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} = \dfrac{3-\lambda}{3\lambda+1}(\vec{a}+\vec{b})$. Что противоречит условию.

§ 3. КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

355. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

а) Компланарные векторы: $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$.

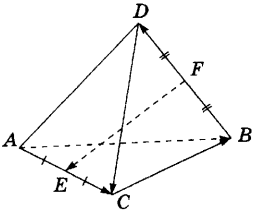
б) Компланарные векторы: нет.

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ — не компланарные.

в) $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{AC}$ — компланарные.

г) Не компланарные: $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$.

356.



По условию $ABCD$ — тетраэдр, E — середина AC, F — середина BD.

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{FD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$;

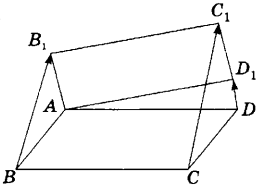
$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$;

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{FE} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{FE} &= -\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{aligned}\right| + \begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{CE} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$2\overrightarrow{FE} = \cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}} + \overrightarrow{DC} - \cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}} - \cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}} + \overrightarrow{BA} + \cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA};$$

$$\overrightarrow{FE} = \frac{\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC} \text{ — компланарные.}$$

357.



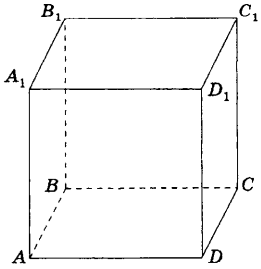
По условию $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ — параллелограммы.

$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1C_1}$;

$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{DD_1} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1})$;

$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BB_1}$, тогда $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ — компланарные.

358.



По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} =$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;
$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$;

б) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD_1} =$
$= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{DB_1}$; $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$;
$\overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BB_1}$;

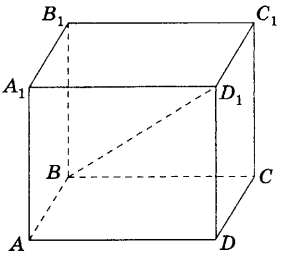
в) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{BB_1} =$

$= \overrightarrow{D_1B_1} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{D_1B_1} = \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1B_1} = \overrightarrow{DB_1}$;

г) $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1D} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1D} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A_1C}$;

д) $\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{BD_1}$.

359. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.



а) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{DD_1}$;

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$;

$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BD_1}$;

$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$;

б) $\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{B_1D_1}$;

$\overrightarrow{B_1A_1} = -\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B}$;

$\overrightarrow{B_1D_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1} = -(\overrightarrow{A_1B} - \overrightarrow{A_1A}) + \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} - \overrightarrow{A_1B}$.

360. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, ребро $= a$, q — точечные заряды, E — напряженность.

а) $\overline{E} = \dfrac{kq}{OM^2} \cdot \overrightarrow{OM}$, k — коэффициент, M — точка

$\overline{E}(A) = \dfrac{kq}{a^3} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \dfrac{kq}{a^3} \cdot \overrightarrow{BA} + \dfrac{kq}{a^3} \cdot \overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

$\overline{E}(A) = \dfrac{kq}{a^3}(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AD}) = \dfrac{kq}{a^3}(-\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) =$

$= \dfrac{-kq}{a^3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \dfrac{-kq}{a^3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC}) = \dfrac{-kq}{a^3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) = \dfrac{-kq}{a^3}\overrightarrow{AC_1}$;

$|\overrightarrow{A_1C_1}| = |\overrightarrow{DC_1}| = |\overrightarrow{BC_1}| = a\sqrt{2}$;

$\overline{E}(C_1) = \dfrac{kq}{(a\sqrt{2})^3}\overrightarrow{A_1C_1} + \dfrac{kq}{(a\sqrt{2})^3}\overrightarrow{DC_1} + \dfrac{kq}{(a\sqrt{2})^3}\overrightarrow{BC_1} =$

$= \dfrac{kq}{2\sqrt{2}a^3}(\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{BC_1}) =$

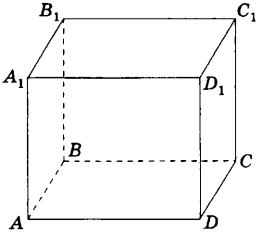
$= \dfrac{kq}{2\sqrt{2}a^3}(\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AB}) =$

$$= \frac{kq}{a^3 2\sqrt{2}}\left(3\overrightarrow{AC_1} - \underbrace{(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})}_{\overrightarrow{AC_1}}\right) =$$

$$= \frac{kq}{2\sqrt{2}a^3} \cdot 2\overrightarrow{AC_1} = \frac{kq}{\sqrt{2}a^3}\overrightarrow{AC_1};$$

б) $\vec{E}(C) = \frac{kq}{(a\sqrt{3})^3}\overrightarrow{A_1C} + \frac{kq}{a^3}\overrightarrow{BC} + \frac{kq}{a^3}\overrightarrow{DC};$

$$\vec{E}(C) = \frac{kq}{a^3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{kq}{a^3 3\sqrt{3}}\overrightarrow{A_1C} = \frac{kq}{a^3}\left(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{A_1C}\right);$$



$\left|\overrightarrow{A_1C}\right| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$ — диагональ куба;

$\left|\vec{d}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left|\overrightarrow{A_1C}\right|$; $\left|\vec{d}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a}{3}$.

В ΔACA_1 по определению косинуса:

$$\cos\angle ACA_1 = \frac{A_1C_1}{A_1C} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

По теореме косинусов:

$$\left|\vec{d} + \overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\vec{d}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\left|\vec{d}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\angle ACA_1;$$

$$\left|\vec{d} + \overrightarrow{AC}\right|^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{9} + 2a^2 + \frac{2a^2 \cdot 2}{3\sqrt{3}} =$$

$$= a^2\left(\frac{1}{9} + 2 + \frac{4}{3\sqrt{3}}\right) = a^2 \cdot \frac{19 + 4\sqrt{3}}{9};$$

$$\left|\vec{d} + \overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{\frac{19 + 4\sqrt{3}}{9}} = \frac{a}{3}\sqrt{19 + 4\sqrt{3}};$$

$$\left|\vec{E}(C)\right| = \frac{kq}{a^3}\left|\vec{d} + \overrightarrow{AC}\right| = \frac{kq}{a^3} \cdot \frac{a}{3}\sqrt{19 + 4\sqrt{3}} = \frac{kq}{3a^2}\sqrt{19 + 4\sqrt{3}};$$

$$\left|\vec{E}(C)\right| = \frac{kq}{3a^2}\sqrt{19 + 4\sqrt{3}}.$$

2) $\left|\vec{E}(B_1)\right| = \frac{kq}{a^3}\overrightarrow{A_1B_1} + \frac{kq}{a^3}\overrightarrow{BB_1} + \frac{kq}{(a\sqrt{3})^3}\overrightarrow{DB_1} =$

$$= \frac{kq}{a^3}\left(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{DB_1}\right) = \frac{kq}{a^3}\left(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{DB_1}\right) =$$

$$= \frac{kq}{a^3}\left(\overrightarrow{AB_1} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{DB_1}\right);$$

$$\vec{d} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{DB_1} \Rightarrow \left|\vec{d}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}a\sqrt{3} = \frac{a}{3};$$

$\vec{E}(B_1) = \frac{kq}{a^3}(\vec{d} + \overrightarrow{AB_1})$; $\left|\vec{E}(B_1)\right| = \frac{kq}{a^3}\left|\vec{d} + \overrightarrow{AB_1}\right|$.

По теореме косинусов:

$\left|\vec{d} + \overrightarrow{AB_1}\right|^2 = \left|\vec{d}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB_1}\right|^2 + 2\left|\vec{d}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB_1}\right| \cos\angle ACA_1$; $\left|\overrightarrow{AB_1}\right| = a\sqrt{2}$;

$\left|\vec{d} + \overrightarrow{AB_1}\right|^2 = a^2 \cdot \frac{1}{9} + 2a^2 + 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = a^2\left(\frac{1}{9} + 2 + \frac{4}{3\sqrt{3}}\right)$;

$\left|\vec{d} + \overrightarrow{AB_1}\right| = \frac{a}{3}\sqrt{19 + 4\sqrt{3}}$; $\left|\vec{E}(B_1)\right| = \frac{kq}{a^3} \cdot \frac{a}{3}\sqrt{19 + 4\sqrt{3}} = \frac{kq}{3a^2}\sqrt{19 + 4\sqrt{3}}$.

3) Пусть точка M — центр грани $A_1B_1C_1D_1$.

$$\vec{E}(M) = \frac{kq}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3}\overrightarrow{A_1M} + \frac{kq}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^3}\overrightarrow{BM} + \frac{kq}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^3}\overrightarrow{DM};$$

$\left|\overrightarrow{A_1M}\right| = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $\left|\overrightarrow{BM}\right| = \left|\overrightarrow{DM}\right| = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ — по теореме Пифагора

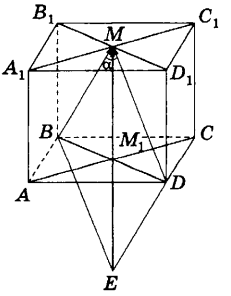
$$\vec{E}(M) = \frac{kq}{a^3}\left(2\sqrt{2}\overrightarrow{A_1M} + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM})\right);$$

$D_1M = M_1B = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow MB = DM = \sqrt{(a)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ — по теореме Пифагора.

По теореме косинусов:

$2a^2 = 2a^2 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{3}{2}\cos\alpha \quad | : a^2$;

$2 = 3 - 3\cos\alpha \Rightarrow 3\cos\alpha = 1$; $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.



По теореме косинусов в ΔDME:

$EM^2 = ED^2 + DM^2 - 2ED \cdot DM\cos(180° - \alpha)$;

$DM = ED$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;

$EM^2 = 2a^2\frac{3}{2} + 2a^2\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = 4a^2$; $EM = 2a$.

$$\vec{E}(M) = \frac{2\sqrt{2}kq}{a^3}\left(\overrightarrow{A_1M} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{EM}\right);$$

$\left|\vec{E}(M)\right| = \frac{2\sqrt{2}kq}{a^3}\left|\overrightarrow{A_1M} + \vec{d}\right|$; $\left|\vec{d}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left|\overrightarrow{EM}\right| = \frac{2a}{3\sqrt{3}}$;

$\left|\vec{d} + \overrightarrow{A_1M}\right| = \sqrt{\left|\vec{d}\right|^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{27} + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{35}}{3\sqrt{6}}$;

$$\left|\vec{E}(M)\right| = \frac{2\sqrt{2}kq}{a^3}\cdot\frac{a\sqrt{35}}{3\sqrt{6}} = \frac{2kq}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{105}}{9}$$

4) Пусть точка O — центр куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

$$\vec{E}(O) = \frac{kq}{\left|\overrightarrow{A_1O}\right|^3}\overrightarrow{A_1O} + \frac{kq}{\left|\overrightarrow{DO}\right|^3}\overrightarrow{DO} + \frac{kq}{\left|\overrightarrow{BO}\right|^3}\overrightarrow{BO};\quad \overrightarrow{A_1O} = \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BO} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$\vec{E}(O) = \frac{kq}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}(\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BO}) = \frac{8kq}{3\sqrt{3}a^3}(\overrightarrow{A_1O} + \underbrace{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}_{DD_1}) =$$

$$= \frac{8kq}{3\sqrt{3}a^3}\left(\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{D_1D}\right) = \frac{8kq}{3\sqrt{3}a^3}\overrightarrow{AO};\quad \overrightarrow{AO} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\left|\vec{E}(O)\right| = \frac{8kq}{3\sqrt{3}a^3}\left|\overrightarrow{AO}\right| = \frac{8kq}{3\sqrt{3}a^3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4kq}{3a^2}.$$

361. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = 0\cdot\overrightarrow{AD} - 1\cdot\overrightarrow{AB} + 0\cdot\overrightarrow{AA_1};$$

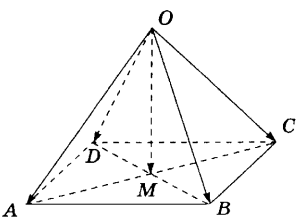
$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{AD_1};\quad \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1B} = \overrightarrow{AB};\quad \overrightarrow{D_1B} = 2\cdot\overrightarrow{D_1O};$$

$$\overrightarrow{AD_1} + 2\overrightarrow{D_1O} = \overrightarrow{AB};\quad \overrightarrow{D_1O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1});$$

$$\overrightarrow{D_1O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}).$$

362. Решение в учебнике.

363.



По условию $ABCD$ — параллелограмм.

$$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} = \vec{b};$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB};$$

$$\vec{c} + \overrightarrow{CB} = \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c};$$

$$\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a};$$

$$\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{b} - \vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a};$$

$$\overrightarrow{OD} = \vec{b} - (2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}) = \vec{b} - 2\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} = \quad = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c};$$

$$\overrightarrow{OD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c};\quad \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \vec{b};$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \frac{1}{2}(2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}) = \vec{b} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a};\quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

364. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, K — середина B_1C_1.

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$; $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = m$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$;

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1K} = \overrightarrow{AK}$;

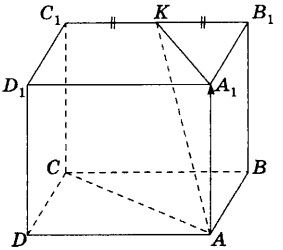
$\overrightarrow{AK} = \vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} =$

$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$;

$\overrightarrow{AK} = \vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$;

$\overrightarrow{C_1K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2}\vec{b}$;

$\overrightarrow{AK} = \sqrt{AA_1^2 + A_1K^2}$ — по теореме Пифагора

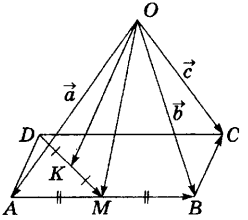


$\overrightarrow{A_1K} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5m^2}{4}} = \frac{m\sqrt{5}}{2}$; $|\overrightarrow{AK}| = \sqrt{m^2 + \frac{5m^2}{4}} = \sqrt{\frac{9m^2}{4}} = \frac{3m}{2}$;

$|\overrightarrow{AK}| = \frac{3m}{2}$.

365. По условию $ABCD$ — параллелепипед. K — середина MD, M — середина AB.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.



По правилу параллелограмма:

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$;

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$; $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{OM}$,

$\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DM} \Rightarrow \overrightarrow{OK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OM}$;

$\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{O}$; $\overrightarrow{DM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{O}$;

$\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$; $\vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{c} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$; $CD = -AB = \vec{a} - \vec{b}$;

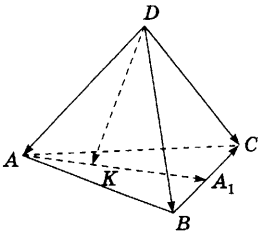
$\overrightarrow{DM} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} - \vec{b} + a - \vec{b} = \vec{O}$; $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}$;

$\overrightarrow{OK} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{OK} + \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = 0$;

$\overrightarrow{OK} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

366. Решение в учебнике.

367.



По условию $ABCD$ — тетраэдр.

$\frac{AK}{KA_1} = \frac{3}{7} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{3}{7}\overrightarrow{KA_1}$;

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{DK}$

$\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KA_1} = \overrightarrow{DA_1}$ $\Rightarrow \overrightarrow{DK} - \overrightarrow{DA} =$

$= \frac{3}{7}(\overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DK})$;

$7\overrightarrow{DK} - 7\overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{DA_1} - 3\overrightarrow{DK}$; $10\overrightarrow{DK} = 3\overrightarrow{DA_1} + 7\overrightarrow{DA}$;

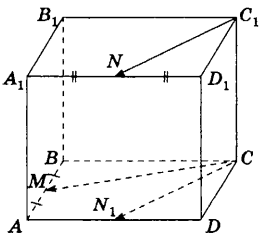
$\overrightarrow{DK} = \frac{3\overrightarrow{DA_1} + 7\overrightarrow{DA}}{10}$; $\overrightarrow{DA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB})$;

$\overrightarrow{DK} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + 3 \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + 7\overrightarrow{DA}}{10} = \frac{3\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{DB} + 14\overrightarrow{DA}}{20}$;

$\overrightarrow{DK} = 0,7\overrightarrow{DA} + 0,15\overrightarrow{DC} + 0,15\overrightarrow{DB}$.

368. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

а) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ — по правилу параллелограмма;



б) $\overrightarrow{CM}$ — ?

$\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{MC} = -(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC})$;

$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{CM} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;

в) N_1 — середина AD $\Rightarrow \overrightarrow{C_1N} - \overrightarrow{CN_1}$;

$\overrightarrow{N_1D} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{N_1C} = -\overrightarrow{CN_1}$; $\overrightarrow{N_1D} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$;

$CN_1 = -(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$; $C_1N = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$;

г) $\overrightarrow{AC_1}$ — ? нельзя, потому что $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ не копланарны;

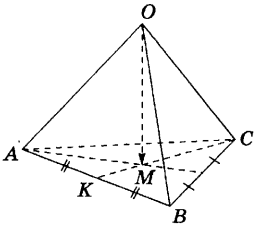
д) $\overrightarrow{A_1N} = \overrightarrow{AN_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 0 \cdot \overrightarrow{AB}$;

е) $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ — не компланарные векторы, тогда $\overrightarrow{AN}$ нельзя разложить;

ж) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{MD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

369. По условию $OABC$ — тетраэдр.
По правилу параллелограмма:



$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$; CM — медиана,

тогда $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MK}$;

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{OK}$;

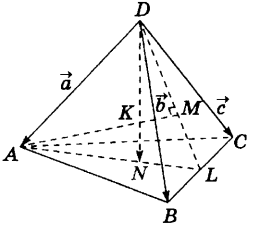
$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM}) = 2\overrightarrow{OK} - 2\overrightarrow{OM}$;

$\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OC}$;

$$\overrightarrow{OM} = \frac{2\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3};$$

$3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

370. По условию $ABCD$ — правильный тетраэдр, тогда $BD = BC = DC = AC = AB = AD$.



$DN \perp (ABC)$; $AM \perp (BCD)$; $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$;
$\overrightarrow{DB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$; $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$.

$AL \perp BC$; $DL \perp BC$. Точки N и M — центры граней тетраэдра.

$\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$.

а) $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$; б) $\overrightarrow{DK} = \lambda\overrightarrow{DN}$.

Допустим, что ребро тетраэдра равно a. По теореме косинусов в ΔADL:

$$a^2 = \frac{a^2 \cdot 3}{4} + \frac{a^2 \cdot 3}{4} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos\angle ALD; \quad a^2 = \frac{3a^2}{2} - \frac{3a^2}{2}\cos\angle ALD;$$

$$\cos\angle ALD = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{array}{l} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \\ \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}; \end{array} \quad \sin\angle ALD = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

По теореме синусов: $\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R = 2NA$; $NA = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

По определению тангенса: $\operatorname{tg}\angle ALD = \frac{NA}{NK}$;

$$\operatorname{tg}\angle ALD = \frac{\sin\angle ALD}{\cos\angle ALD} = 2\sqrt{2}; \quad 2\sqrt{2} = \frac{NA}{NK} \Rightarrow NK = \frac{a}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{6}}.$$

В ΔLND по определению синуса:

$$ND = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\angle ALD = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3};$$

$$DK = ND - KN = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{3a}{2\sqrt{6}};\quad DK = \frac{3a}{2\sqrt{6}};\quad ND = \frac{a\sqrt{6}}{3};$$

$$\frac{DK}{DN} = \frac{3a}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{3}{a\sqrt{6}} = \frac{3}{4} \Rightarrow DK = \frac{3}{4}DN.$$

Тогда $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DN};\ \lambda = \frac{3}{4};\ \overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c};$

в) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC});$

$\vec{a}+\overrightarrow{AB}+\vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a};\ \overrightarrow{AD} = \vec{a};\ \vec{a}+\overrightarrow{AC} = \vec{c} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \vec{c}-\vec{a};$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}-\vec{a}-\vec{a}) = \frac{1}{3}(-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\vec{a};$$

г) $KM = KN = \frac{a}{2\sqrt{6}};\ AM = DN = \frac{a\sqrt{6}}{3};$

$$\frac{KM}{AM} = \frac{a}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{3}{a\sqrt{6}} = \frac{3}{2\cdot 6} = \frac{1}{4} \Rightarrow KM = \frac{1}{4}AM;$$

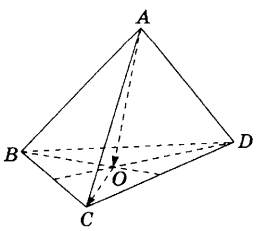
$$\lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{KN} = \frac{1}{4}\left(-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{12}\vec{b}+\frac{1}{12}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{a};$$

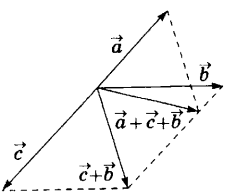
$$\overrightarrow{MK} = -\overrightarrow{KM} = \frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{12}\vec{b}-\frac{1}{12}\vec{c}.$$

371. По условию $ABCD$ — тетраэдр. Точка O — точка пересечения медиан ΔCBD.

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}).$$

$\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| < |\vec{a}|+|\vec{b}+\vec{c}|;\ |\vec{b}+\vec{c}| < |\vec{b}|+|\vec{c}|;$



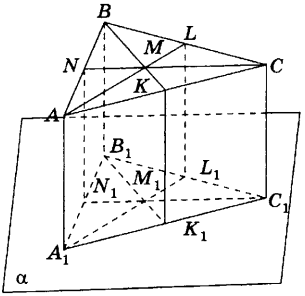


$$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right| < \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| + \left|\vec{c}\right|;$$

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right| < \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{AD}\right|; \quad \left|\overrightarrow{AO}\right| < \frac{1}{3}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{AD}\right|\right).$$

372. Решение в учебнике.

373. $MM_1 = \frac{1}{3}(AA_1 + BB_1 + CC_1)$;



Так как $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel MM_1$, то по теореме Фалеса $B_1N_1 \parallel A_1N_1$; $B_1L_1 = L_1C_1$; $A_1K_1 = K_1C_1$.
Значит, точка M_1 — точка пересечения медиан. Тогда

$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1});$$

$$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1A_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA_1};$$

$$\overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BB_1};$$

$$\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC_1};$$

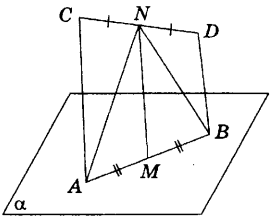
$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC_1}) =$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}_{=0});$$

$\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$; $\overrightarrow{MM_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BB_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CC_1}$, тогда

$$\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \frac{1}{3}\left(\left|\overrightarrow{AA_1}\right| + \left|\overrightarrow{BB_1}\right| + \left|\overrightarrow{CC_1}\right|\right).$$

374. $AB \in \alpha$; $CD \notin \alpha$



$$MN < \frac{1}{2}(AC + BD);$$

$CN = ND$, $AM = MB$;

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}); \quad \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CA};$$

$$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DB};$$

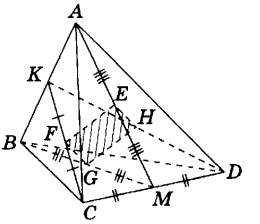
$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DB});$$

$$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = 0;$$

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD});$$

$$\left|\overline{MN}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AC} + \overline{BD}\right| \le \frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right| + \frac{1}{2}\left|\overline{BD}\right|;$$

$$MN < \frac{1}{2}(AC + BD), \text{ когда } \overline{AC} \uparrow\uparrow \overline{BD}.$$



375. По условию $ABCD$ — тетраэдр. K — середина AB, M — середина CD.
$KF = FC$, F — середина KC;
$AE = EM$; E — середина AM;
$BG = GM$; G — середина BM;
$KH = HD$; H — середина KD.

$FH \| CD$ — FH — средняя линия $\Delta DKC \Rightarrow FH = \frac{1}{2}DC$.

Точка O — точка пересечения GE и KM. $KO = OM$

$$\Delta FKO \sim \Delta CKM \Rightarrow \frac{FK}{CK} = \frac{OK}{MA} = \frac{FO}{CM};\ \frac{1}{2} = \frac{OK}{MK} = \frac{FO}{CM} \Rightarrow CM = 2FO;$$

$CM = MD \Rightarrow MD = 2 \cdot FO = 2 \cdot OH \Rightarrow FO = OH$.
Значит, точка O — середина FH.
Аналогично, GE — средняя линия ΔABC. $AK = KB$, $OE = OG$. O — средняя линия ΔABM. Точка O — середина GE. Тогда $EFGH$ — параллелограмм.