Вариант № 21165278

1. Задание 1 № 510667

В университетскую библиотеку привезли новые учебники для трёх курсов, по 430 штук для каждого курса. В книжном шкафу 6 полок, на каждой полке помещается 30 учебников. Какое наименьшее количество шкафов потребуется, чтобы в них разместить все новые учебники?

Решение.

Всего привезли $430 \cdot 3 = 1290$ учебников по геометрии. В книжном шкафу помещается $30 \cdot 6 = 180$ учебников. Разделим 1290 на 180:

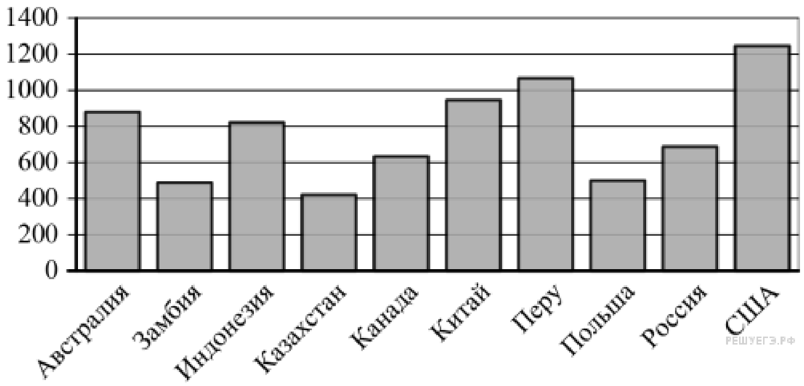
$$\frac{1290}{180} = \frac{129}{18} = 7\frac{1}{6}.$$

Значит, чтобы вместить все книги понадобится 8 шкафов.

Ответ: 8.
Ответ: 8

2. Задание 2 № 502986

На диаграмме показано распределение выбросов углекислого газа в атмосферу в 10 странах мира (в миллионах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выбросу углекислого газа в атмосферу занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимал Китай?



Решение.

Расположим страны в порядке убывания количества выбросов углекислого газа в атмосферу в год:

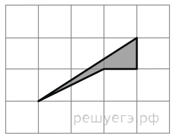
1) США
2) Перу
3) Китай
4) Австралия
5) Индонезия
6) Россия
7) Канада
8) Польша
9) Замбия
10) Казахстан

Китай находится на третьем месте

Ответ: 3.
Ответ: 3

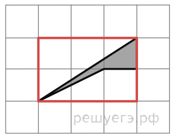
3. Задание 3 № 244999

Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение.

Площадь четырехугольника равна разности площади большого прямоугольного треугольника, маленького прямоугольного треугольника, гипотенуза которого является стороной исходного четырехугольника и площади маленького квадрата. Поэтому



$$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2-1\cdot 1=1 \text{ см}^2.$$

Ответ: 1

4. Задание 4 № 320174

В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение.

Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: 0,05 · 0,05 = 0,0025.

Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна 1 − 0,0025 = 0,9975.

Ответ: 0,9975.

Приведем другое решение.

Вероятность того, что исправен первый автомат (событие А) равна 0,95. Вероятность того, что исправен второй автомат (событие В) равна 0,95. Это совместные независимые события. Вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий, а вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения. Имеем:

P(A + B) = P(A) + P(B) − P(A·B) = P(A) + P(B) − P(A)P(B) = 0,95 + 0,95 − 0,95·0,95 = 0,9975.

Ответ: 0,9975

5. Задание 5 № 11149

Найдите корень уравнения: $x=\frac{-8x+15}{x-10}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Решение.

Область допустимых значений: $x\neq 10$. На этой области домножим на знаменатель:

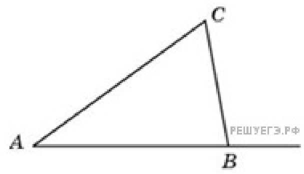
$$x=\frac{-8x+15}{x-10}\Leftrightarrow x(x-10)=-8x+15\Leftrightarrow x^2-2x-15=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Оба корня лежат в ОДЗ. Меньший из них равен −3.

Ответ: −3.
Ответ: -3

6. Задание 6 № 46089

В треугольнике ABC угол A равен $7°$, внешний угол при вершине B равен $22°$. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Сумма углов в треугольнике равна 180°, следовательно, величина угла C равна:

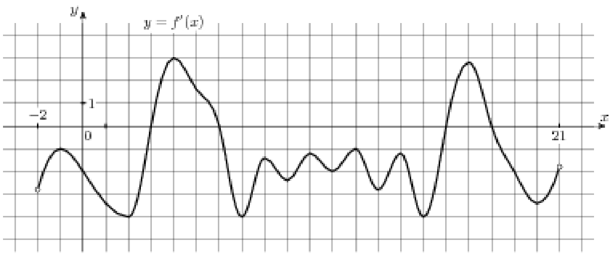
$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 7° - (180° - 22°) = 15°.$$

Ответ: 15.

Ответ: 15

7. Задание 7 № 7809

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 21)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[2; 19]$.



Решение.

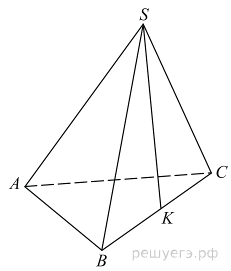
Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с минуса на плюс. На отрезке $[2; 19]$ функция имеет две точки минимума $x = 3$ и $x = 16$.

Ответ: 2.

Ответ: 2

8. Задание 8 № 922

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K – середина ребра BC, S – вершина. Известно, что SK = 4, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 54. Найдите длину ребра AC.



Решение.

Найдем площадь грани SBC:

$$S_{SBC} = \frac{S_{\text{бок}}}{3} = \frac{54}{3} = 18.$$

Отрезок SK является медианой равнобедренного треугольника SBC, а значит, и его высотой. Тогда

$$AC = BC = \frac{2S_{SAB}}{SK} = \frac{2 \cdot 18}{4} = 9.$$

Ответ: 9.

Ответ: 9

9. Задание 9 № 26855

Найдите значение выражения $(1 - \log_2 12)(1 - \log_6 12)$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$(1-\log_2 12)(1-\log_6 12)=(1-\log_2 2\cdot 6)(1-\log_6 2\cdot 6)=(1-1-\log_2 6)(1-\log_6 2-1)=-\log_2 6\cdot(-\log_6 2)=1.$$

Ответ: 1.

Ответ: 1

10. Задание 10 № 41417

В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t)=at^2+bt+H_0$, где $H_0=2$ м — начальный уровень воды, $a=\frac{1}{512}$ м/мин^2, и $b=-\frac{1}{8}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Решение.

Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с течением времени является

$$H(t)=\frac{1}{512}t^2-\frac{1}{8}t+2.$$

Вода будет вытекать из бака, пока её начальный уровень не понизится до нуля. Определим требуемое на это время, решая уравнение $H(t)=0$:

$$H(t)=0\Leftrightarrow\frac{1}{512}t^2-\frac{1}{8}t+2=0\Leftrightarrow t^2-64t+1024=0\Leftrightarrow t=32.$$

Это означает, что по прошествии 32 минут вся вода вытечет из бака.

Ответ: 32.

Ответ: 32

11. Задание 11 № 99592

Из городов A и B навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в B на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в A, а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из B в A велосипедист?

Решение.

Примем расстояние между городами 1. Пусть время движения велосипедиста равно x ч, тогда время движения мотоциклиста равно $x-3$ ч, $x>3$. К моменту встречи они находились в пути 48 минут и в сумме преодолели всё расстояние между городами, поэтому

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}\right)\cdot\frac{48}{60}=1\underset{x>3}{\Leftrightarrow}4(2x-3)=5(x^2-3x)\Leftrightarrow 5x^2-23x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4;\\x=\frac{3}{5}\end{array}\right.\underset{x>3}{\Leftrightarrow}x=4.$$

Таким образом, велосипедист находился в пути 4 часа.

Ответ: 4.

Ответ: 4

12. Задание 12 № 509200

Найдите наибольшее значение функции $y=33x-30\sin x+29$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

Решение.

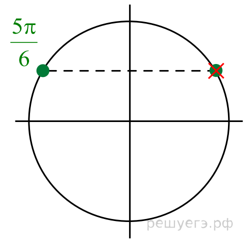
Найдем производную заданной функции: $y'=33-30\cos x$. Найденная производная не обращается в нуль, положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей. Тем самым, она принимает наибольшее значение на правом конце отрезка: $y(0)=29$.

Ответ: 29

13. Задание 13 № 507692

Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x - 5\sin x + 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0.$

Решение.



Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Преобразуем уравнение:

$$\frac{2\cos^2 x - 5\sin x + 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2\sin^2 x - 5\sin x + 3}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 3)}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0.$$

Поскольку $\sin x + 3 \neq 0,$ получаем:

$$2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая, что $\cos x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2},$ находим: $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

14. Задание 14 № 514603

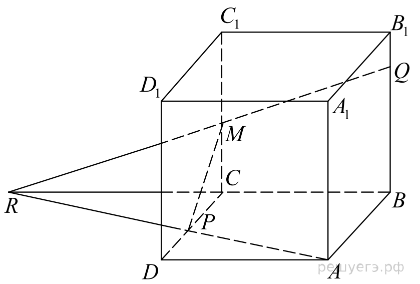
На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

Решение.

а) Пусть прямые AP и BC пересекаются в точке R (см. рисунок). Тогда точка M — точка пересечения прямых QR и CC_1.



Треугольники ARB и PRC подобны, откуда $\frac{RC}{RB}=\frac{PC}{AB}=\frac{2}{3}$, $RC=2BC=24$.

Треугольники QRB и MRC подобны, откуда $\frac{MC}{QB}=\frac{RC}{RB}$, следовательно, $MC=\frac{2}{3}QB=6$. Значит, M — середина CC_1.

б) Расстояние от точки C до плоскости APQ равно высоте h пирамиды $CPRM$, опущенной из вершины C. Объём пирамиды $CPRM$, с одной стороны

$$V_{CPRM}=\frac{1}{3}\cdot RC\cdot S_{MPC}=\frac{1}{3}\cdot RC\cdot\frac{1}{2}PC\cdot CM=192.$$

С другой стороны $V_{CPRM}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{RPM}$. Значит,

$$h=\frac{3\cdot 192}{S_{RPM}}.$$

В треугольнике RPM находим стороны: $RP=8\sqrt{10},\ RM=6\sqrt{17},\ MP=10.$

По теореме косинусов

$$\cos\angle MRP=\frac{MR^2+RP^2-MP^2}{2MR\cdot PR}=\frac{12}{\sqrt{170}},$$

откуда $\sin\angle MRP=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{170}}$.

Площадь треугольника RPM равна $S_{RPM}=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{17}\cdot 8\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{170}}=24\sqrt{26}.$

Следовательно, $h=\frac{3\cdot 192}{24\sqrt{26}}=\frac{12\sqrt{26}}{13}$.

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

15. Задание 15 № 508449

Решите неравенство: $(10x+7)(4-5x)\left(50x^2-5x-28\right)<0.$

Решение.

Заметим, что $(10x+7)(4-5x)(50x^2-5x-28)=-(10x+7)^2(4-5x)^2$, поэтому неравенство $-(10x+7)^2(4-5x)^2<0$ выполнено при всех x, кроме $x=-0,7$ и $x=0,8$.

Ответ: $(-\infty;\ -0,7)\cup(-0,7;\ 0,8)\cup(0,8;\ +\infty)$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

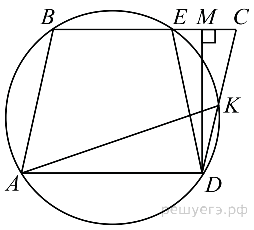
16. Задание 16 № 520940

Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и E и пересекает сторону CD в точках K и D.

а) Докажите, что $AE = AK$.

б) Найдите AD, если $CE = 10$, $DK = 9$ и $\cos\angle BAD = 0,2.$

Решение.



а) Заметим, что $\angle ABE = \angle ABC = \angle ADC = \angle ADK$ Значит, хорды окружности AE и AK стягивают равные дуги. Поэтому эти хорды равны.

б) Поскольку прямые BC и AD параллельны, $\angle EAD = \angle AEB$, поэтому $DE = AB = DC$.

Пусть DM — медиана равнобедренного треугольника CDE. Тогда

$$CD = \frac{CM}{\cos\angle ECD} = \frac{CE}{2\cos\angle BAD} = 25 \Leftrightarrow CK = CD - DK = 16.$$

По свойству секущей

$$CK \cdot CD = CE \cdot CB \Leftrightarrow AD = CB = \frac{CK \cdot CD}{CE} = 40.$$

Ответ: б) 40.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* и использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

17. Задание 17 № 506955

Транснациональная компания Amako Inc. решила провести недружественное поглощение компании First Aluminum Company (FAC) путем скупки акций миноритарных акционеров. Известно, что Amako было сделано три предложения владельцам акций FAC, при этом цена покупки одной акции каждый раз повышалась на 1/3. В результате второго предложения Amako сумела увеличить число выкупленных акций на 20% (после второй скупки общее число выкупленных акций увеличилось на 20%), а в результате скупки по третьей цене — еще на 20%. Найдите цену третьего предложения и общее количество скупленных акций FAC, если начальное предложение составляло $27 за одну акцию, а по второй цене Amako скупила 15 тысяч акций.

Решение.

Предложения	Цена одной акции ($)	Количество выкупленных акций	
		При данном предложении	**Общее количество выкупленных акций**
1	**27**		**75 000** $15000:0,2=75000$
2	**36** $27+\frac{1}{3}\cdot 27=27+9=36$	**15 000**	**90 000** $75000+15000=90000$
3	**48** $36+\frac{1}{3}\cdot 36=36+12=48$		**108 000** $90000\cdot 1,2=108000$

Ответ: цена третьего предложения составила $48 за одну акцию; всего было выкуплено 108 000 акций.

Критерии проверки:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Получено верное выражение для ежегодного платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу.	2
С помощью верных рассуждений получено уравнение, из которого может быть найдено значение ежегодного платежа, но коэффициенты уравнение неверные из-за ошибки в вычислениях.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

18. Задание 18 № 520520

Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2=10xy, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=10a^4 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Первое уравнение системы раскладывается на множители: $(x-3y)(y-3x)=0.$ Следовательно, уравнение задает пару прямых $x=3y$ и $y=3x.$

Второе уравнение при каждом $a\neq 0$ — уравнение окружности с центром (a,a) и радиусом $a^2\sqrt{10}.$

Если $a=0,$ то система имеет единственное решение и поэтому не удовлетворяет условию задачи.

Если $a\neq 0,$ то условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда окружность касается каждой из прямых, то есть расстояние от центра до каждой из прямых равно радиусу окружности. Получаем уравнение

$$\frac{|a-3a|}{\sqrt{10}}=a^2\sqrt{10}\Leftrightarrow a=\pm 0,2.$$

Ответ: $a=\pm 0,2.$

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений *a*	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений *a*	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

19. Задание 19 № 513433

Бесконечная арифметическая прогрессия a_1, a_2, ..., a_n, ... состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, ..., a_7 ровно три числа делятся на 100?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, ..., a_{49} ровно 11 чисел делятся на 100?

в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел a_1, a_2, ..., a_{2n} больше кратных 100, чем среди чисел a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n}?

Решение.

а) Подходящим примером является прогрессия с первым членом 50 и разностью 50. Среди первых семи её членов (50, 100, 150, 200, 250, 300, 350) ровно три делятся на 100.

б) Обозначим через d разность арифметической прогрессии a_1, a_2, ..., a_n, ... Из условия следует, что d — натуральное число. Пусть m и n — натуральные числа, $m > n$, НОД(d, 100) обозначает наибольший общий делитель чисел d и 100. Имеем

$$a_m - a_n = (a_1 + (m-1)d) - (a_1 + (n-1)d) = (m-n)d.$$

Следовательно, разность $a_m - a_n$ делится на 100 тогда и только тогда, когда разность $m - n$ делится на $k = \frac{100}{\text{НОД}(d,\ 100)}$. Значит, если среди членов арифметической прогрессии a_1, a_2, ..., a_n, ... есть кратные 100, то это члены с номерами вида $kp + q$, где q — номер первого члена, кратного $100 (q \le k)$, а p пробегает все неотрицательные целые числа. Поэтому среди любых k последовательных членов прогрессии a_1, a_2, ..., a_n, ... ровно один будет делиться на 100. Если $k \le 4$, то $12 < \frac{49}{k}$, и среди чисел a_1, a_2, ..., a_{49} будет по крайней мере 12 чисел, кратных 100. Если же $k \ge 5$, то $10 > \frac{49}{k}$, и среди чисел a_1, a_2, ..., a_{49} будет не более 10 чисел, кратных 100. Значит, не существует такой прогрессии, в которой среди чисел a_1, a_2, ..., a_{49} ровно 11 чисел делятся на 100.

в) Обозначим через $[x]$ целую часть числа x — наибольшее целое число, не превосходящее x. По доказанному в пункте б) среди любых k последовательных членов прогрессии a_1, a_2, ..., a_n, ... ровно один будет делиться на 100, где $k = \frac{100}{\text{НОД}(d,\ 100)}$, d — разность арифметической прогрессии.

Значит, среди чисел a_1, a_2, ..., a_{2n} кратными 100 будут не более $\left[\frac{2n}{k}\right] + 1$ чисел. Аналогично, среди чисел a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n} кратными 100 будут не менее $\left[\frac{3n}{k}\right]$ чисел. Неравенство $\left[\frac{2n}{k}\right] + 1 > \left[\frac{3n}{k}\right]$ выполнено тогда и только тогда, когда $\left[\frac{2n}{k}\right] = \left[\frac{3n}{k}\right]$. Пусть это равенство выполнено. Тогда разность между числами $\frac{3n}{k}$ и $\frac{2n}{k}$ меньше 1. Получаем, что $\frac{n}{k} < 1$ и $\frac{2n}{k} < 2$. Значит, $\left[\frac{3n}{k}\right] = \left[\frac{2n}{k}\right] < 2$, $\frac{3n}{k} < 2$ и $n < \frac{2k}{3}$. Поскольку число k не превосходит 100, отсюда следует, что $n \le 66$. Рассмотрим прогрессию с первым членом 69 и разностью 1. Тогда среди чисел a_1, a_2, ..., a_{132} ровно два делятся на 100 ($a_{32} = 100$ и $a_{132} = 200$). Среди чисел a_{133}, a_{134}, ..., a_{330} ровно одно делится на 100 ($a_{232} = 300$). Этот пример показывает, что n может равняться 66.

Ответ: а) Да, например, прогрессия 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, ...; б) нет; в) 66.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	510667	8
2	502986	3
3	244999	1
4	320174	0,9975
5	11149	-3
6	46089	15
7	7809	2
8	922	9
9	26855	1
10	41417	32
11	99592	4
12	509200	29