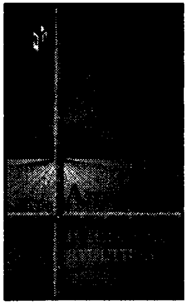
АЛГЕБРА

Решение упражнений к учебнику

А. Н. Колмогорова и др.



29. а) $(0;\ 1)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $(-1;\ 0)$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0;\ -1)$;

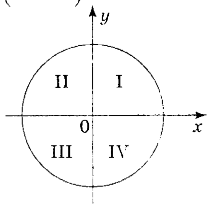
в) $(0;\ -1)$; $\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(-1;\ 0)$; г) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0;\ 1)$.

30. а) $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ — I четверть; $\alpha \in \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$ — III четверть;

$\alpha \in \left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$ — III четверть;

б) $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$ — IV четверть; $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$ — IV четверть;

$\alpha \in \left(-\frac{7\pi}{2};\ -3\pi\right)$ — II четверть;



в) $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$ — IV четверть; $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ — IV четверть;

$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ — II четверть;

г) $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ — II четверть; $\alpha \in \left(-\frac{5\pi}{2};\ -2\pi\right)$ — IV четверть;

$\alpha \in \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$ — III четверть.

31. а) $\sin\frac{3\pi}{7} > 0$; $\cos\frac{9\pi}{8} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8} < 0$;

$tg\, 2,3\pi = tg\,(2\pi + 0,3\pi) = tg\, 0,3\pi > 0$;

$\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{9\pi}{8} + \mathrm{tg}\, 2,3\pi = -\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{8}\,\mathrm{tg}\, 0,3\pi < 0$;

б) $\sin 1 \cdot \cos 3 \cdot \mathrm{ctg}\ 5 = \sin 1 \cdot (-\cos(\pi - 3)) \cdot (-\mathrm{ctg}\,(2\pi - 5)) =$
$= \sin 1 \cdot \cos(\pi - 3) \cdot \mathrm{ctg}\,(2\pi - 5) > 0$;

в) $\sin 1,3\pi \cdot \cos\frac{7\pi}{9} \cdot \mathrm{tg}\, 2,9 = \sin(\pi + 0,3) \cdot \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{9}\right) \cdot \mathrm{tg}\,(\pi - 2,9) =$

$= -\sin 0,3\pi \cdot \cos\frac{2\pi}{9} \cdot \mathrm{tg}(\pi - 2,9) < 0$;

* Решения и ответы приводятся к учебникам указанных годов.

г) $\sin 8 > 0$, т.к. $2{,}5 < 8 < 3\pi$; $\cos 0{,}7 > 0$, т.к. $\frac{\pi}{2} > 0{,}7 > 0$;

$\mathrm{tg}\, 6{,}4 > 0$, т.к. $2\pi < 6{,}4 < \frac{5\pi}{2}$.

$2{,}5 < 8 < 3\pi \Rightarrow \sin 8 > 0$; $\cos 0{,}7 > 0$; $\mathrm{tg}\, 6{,}4 - \mathrm{tg}\,(6 + 0{,}4) > 0$.
Значит, $\sin 8 \cdot \cos 0{,}7 \cdot \mathrm{tg}\, 6{,}4 > 0$.

32. а) $\sin 4\pi = 0$; $\cos 4\pi = 1$; $\sin(-\pi) = 0$; $\cos(-\pi) = -1$;

б) $\sin\frac{5\pi}{2} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\cos\frac{5\pi}{2} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$;

$\sin\left(-\frac{11\pi}{2}\right) = -\sin\left(6\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$;

$\cos\left(-\frac{11\pi}{2}\right) = \cos\frac{11\pi}{2} = \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$;

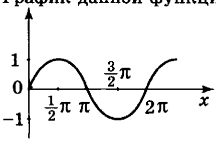
в) $\sin\pi = 0$; $\cos\pi = -1$; $\sin(-2\pi) = 0$; $\cos(-2\pi) = 1$;

г) $\sin\frac{9\pi}{2} = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\cos\frac{9\pi}{2} = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$;

$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1$; $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$.

33. а) $y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$.

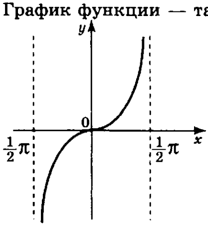
График данной функции — синусоида;



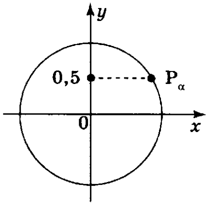
б) $y = -\sin(\pi + x) = \sin x$. См. пункт а);

в) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. См. пункт а);

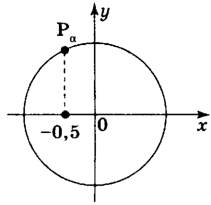
г) $y = \mathrm{tg}\,(x + \pi) = \mathrm{tg}\, x$; $y = \mathrm{tg}\, x$ имеет период π.
График функции — тангенсоида.



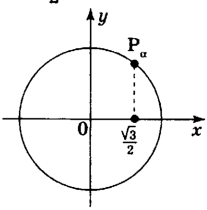
34. а) $P_\alpha(x;\ y)$, $y = 0{,}5$, $x > 0$;



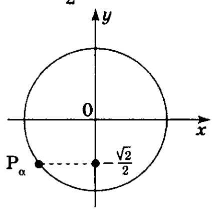
б) $x = -\frac{1}{2}$; $y > 0$;



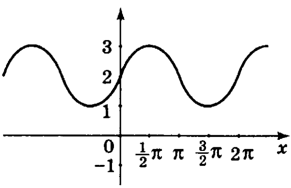
в) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y > 0$;



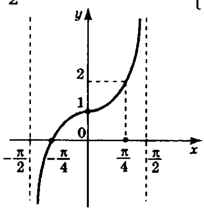
г) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x > 0$.



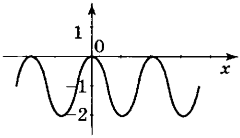
36. а) $y = \sin x + 2$; $D(y) = R$; т.к. $\sin x \in [-1;\ 1]$, то $E(y) = [1;\ 3]$;



б) $y = 1 + \operatorname{tg} x$. Т.к. функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена в точках вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, то $D(y) = R \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\right\}$; $E(y) = R$;



в) $y = \cos x - 1$; $D(y) = R$; т.е.$\cos x \in [-1; 1]$, то $E(y) = [-2; 0]$.



38. а) $y = \sin x$; $(\pi n; 0)$, $n \in Z$; $(0; 0)$;

б) $y = 1 + \cos x$; $(\pi + 2\pi n; 0)$, $n \in Z$; $(0; 2)$;

в) $y = \cos x$; $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$, $n \in Z$; $(0; 1)$;

г) $y = \sin x - 1$; $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$, $n \in Z$; $(0; -1)$.

39. а) $y = x^2 - 3x$;
пересечение с OX: $(0; 0)$ и $(3; 0)$; пересечение с OY: $(0; 0)$;

б) $y = \sin x - 1{,}5$
пересечение с OX график функции не имеет; пересечение с OY: $(0; -1{,}5)$;

в) $y = 2{,}5 + \cos x$;
пересечение с OX график функции не имеет; пересечение с OY: $(0; 3{,}5)$;

в) $y = 2{,}5 + \cos x$;

г) $y = \frac{1}{x} + 1$

пересечение с осью OX: $(-1; 0)$; пересечение с осью OY график функции не имеет.

40. а) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $f(-1) = -2$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$; $f(10) = 10{,}1$;

б) $f(x) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$; $f(0) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $f(\pi) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

в) $f(x) = \sqrt{5x - x^2}$; $f(0) = 0$; $f(1) = 2$; $f(2) = \sqrt{6}$;

г) $f(x) = 2 - \sin 2x$;

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \sin\frac{\pi}{2} = 2 + 1 = 3; \quad f(0) = 2 - \sin 0 = 2;$$

$$f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 - \sin\left(\frac{2 \cdot 5\pi}{12}\right) = 2 - \sin\frac{5\pi}{6} = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

41. а) $f(x) = x^2 + 2x$; $f(x_0) = x_0^2 + 2x_0$; $f(t + 1) = t^2 + 4t + 3$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$; $f(a) = \operatorname{tg} 2a$; $f(b - 1) = \operatorname{tg}(2b - 2)$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{x}+1;\ \ f(x_6)=\dfrac{1}{x}+1;\ \ x_6\neq 0;\ \ f(a+2)=\dfrac{a+3}{a+2};$

г) $f(x)=2\cos\dfrac{x}{3};\ \ f(z)=2\cos\dfrac{z}{3};\ \ f(h+\pi)=2\cos\dfrac{h+\pi}{3}=2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{h}{3}\right).$

42. а) и г) — являются графиком; б) и в) — не являются графиком.

43. а) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$; $D(f)$: $x^2-4x+3\neq 0;\ \ 2\pm\sqrt{4-3}=2\pm 1;\ \ 3;\ 1;$

$(x-3)(x-1)\neq 0;\ x\neq 3;\ x\neq 1.$

Ответ: $D(f)=R\setminus\{1;\ 3\}$.

б) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$; $D(f)$: $x^2-9\geq 0;\ (x-3)(x+3)\geq 0;\ x\geq 3;\ x\leq -3.$

Ответ: $D(f)=(-\infty;\ -3]\cup[3;\ +\infty)$.

в) $f(x)=\dfrac{5-x^2}{x^2+2x-8}$; $D(f)$: $x^2+2x-8\neq 0;\ x\neq -4;\ x\neq 2.$

Ответ: $D(f)=R\setminus\{-4;\ 2\}$.

г) $f(x)=\sqrt{36-x^2}$; $D(f)$: $36-x^2\geq 0;\ (6-x)(6+x)\geq 0;\ x\in[-6;\ 6].$

Ответ: $D(f)=[-6;\ 6]$.

44. а) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$; $D(f)$: $x\neq 0$.

Ответ: $D(f)=\mathrm{R}\setminus\{0\}$.

б) $D(f)=R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in \mathrm{Z}\right\};$

в) $D(f)=R\setminus\{\pi n\mid n\in \mathrm{Z}\};$

г) $D(f)=R\setminus\{0\}$.

45. а) $y=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; $D(y)=R$; $E(y)$: $-1\leq\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\leq 1;$

$-2\leq 2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\leq 2;\ \ E(y)=[-2;\ 2];$

б) $y=2+\dfrac{4}{x-3}$; $D(y)$: $x\neq 3$, т.е. $D(f)=R\setminus\{3\}$; $E(y)$: $2+\dfrac{4}{x-3};$

$y=\dfrac{2x-2}{x-3};\ y\cdot x-3y=2x-2;\ x(y-2)=3y-2;\ x=\dfrac{3y-2}{y-2};$

$y\neq 2$; $E(y)=\mathrm{R}\setminus\{2\}$.

в) $y=\dfrac{3}{x+1}-1$; $D(y)$: $x\neq -1$; $D(y)=R\setminus\{-1\}$; $E(y)$: $y=\dfrac{3-x-1}{x+1};$

$y=\dfrac{2-x}{x+1};\ y\cdot x+y=2-x;\ x(y+1)=2-y;\ x=\dfrac{2-y}{y+1};$

$y \neq -1$; $E(y) = \mathrm{R} \setminus \{-1\}$.

г) $y = 3 + 0,5\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; $D(y) = R$; $E(y)$: $-1 \leq \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1$;

$-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq \dfrac{1}{2}$; $3 - \dfrac{1}{2} \leq 3 + \dfrac{1}{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq \dfrac{1}{2} + 3$; $\dfrac{5}{2} \leq y \leq \dfrac{7}{2}$;

$E(y) = \left[\dfrac{5}{2}; \dfrac{7}{2}\right]$.

46. а) $D(f) = [-5; 6]$; $E(f) = [-2; 5]$. б) $D(f) = [-6; 4]$; $E(f) = [-2; 2]$;
в) $D(f) = [-6; 1{,}5] \cup (1{,}5; 6]$; $E(f) = [-3; 3)$;
г) $D(f) = [-4; 3]$; $E(f) = (-1; 4]$.

51. а) $f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0; \\ -x, x < 0; \end{cases}$ $f(-2) = 2$; $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$; $f(0) = 0$; $f(5) = 5$;

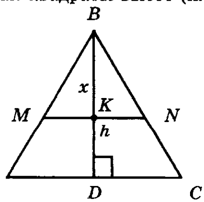
б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x \geq -1; \\ 1 - x, \quad x < -1; \end{cases}$ $f(-2) = 3$; $f(-1) = 0$; $f(4) = 15$;

в) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \qquad x > 0; \\ \cos x - 1, x \leq 0; \end{cases}$ $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$; $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$; $f(0) = 0$;

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$;

г) $f(x) = \begin{cases} 1, x > 0; \\ 0, x = 0; \\ -1, x < 0; \end{cases}$ $f(-1{,}7) = -1$; $f(-\sqrt{2}) = -1$; $f(0) = 0$; $f(3{,}8) = 1$.

52. Т.к. по условию $MN \parallel AC$, то $\Delta ABC \sim \Delta MDN$. Их площади относятся как квадраты высот (или сходственных сторон), т.е.



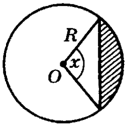
а)

$\dfrac{S_{ABC}}{A_{MNB}} = \dfrac{x^2}{h^2}$; $S_{MNB} = S_{ABC} \cdot \dfrac{x^2}{h^2} = \dfrac{bhx^2}{2h^2} = \dfrac{bx^2}{2h}$, отсюда $S_{ABC} = f(x)$.

$S_{MNC} = S_{ABC} - S_{MNB} = \dfrac{bh}{2} - \dfrac{bx^2}{2h} = \dfrac{b}{2}\left(h - \dfrac{x^2}{h}\right) = \dfrac{b(h^2 - x^2)}{2h}$,

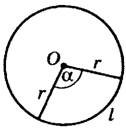
т.е. $S_{AMNC} = g(x)$.

б) $S_{\text{сегмента}} = \dfrac{Rx}{2}$, т.е. $S_{\text{сегмента}} = f(x)$.

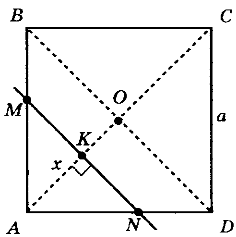


в) **Периметр** $P_{\text{сектора}} = 2r + l$, **где** l **— длина дуги.**

$l = \dfrac{\pi r l}{180°}$, т.е. $P_{\text{сектора}} = 2r + r \cdot \alpha = r \cdot (2 + \alpha)$, т.е. $P_{\text{сектора}} = f(\alpha)$, что требовалось доказать



г)



$ABCD$ — квадрат, AC, BD — диагонали, $AC = BD$.
$MN \parallel BD$; $AK = x$; $AB = a$.

$AC \perp BD$. $\Delta ABD(A = 90°)$:

$BD = a\sqrt{2} = AC$; $OC = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

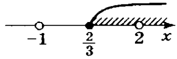
Т.к. $MN \parallel BD$, то $\Delta AMN \sim \Delta ABD$, $S_{\text{кв.}} = a^2$; $\dfrac{S_{AMN}}{S_{\text{кв.}}} = \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{a^2}{2}\right)}$;

$S_{\Delta AMN} = a^2 \cdot \dfrac{x^2 \cdot 2}{a^2} = 2x^2$, $x < KC$; $S_{MBCD} = S_{\text{кв.}} - S_{AMN} = a^2 - 2x^2$,

т.е. $S_{AMN} = f(x)$ и $S_{MBCD} = g(x)$, где $0 \le x \le \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

53. а) $y = \dfrac{\sqrt{3x-2}}{x^2 - x - 2}$; $D(y)$: $\begin{cases} 3x - 2 \ge 0; \\ x^2 - x - 2 \ne 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3}; \\ (x-2)(x+1) \ne 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3}; \\ x \ne -1;\ x \ne 2. \end{cases}$



Ответ: $D(y) = \left[\dfrac{2}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

б) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{16 - x^2}$; $D(y)$: $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \ge 0; \\ 16 - x^2 \ne 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-4)(x+1) \ge 0; \\ (4-x)(4+x) \ne 0; \end{cases} \Rightarrow$

Ответ: $D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; -1] \cup (4; +\infty)$.

в) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{3-2x}$; $D(y)$: $\begin{cases} x+2 \ge 0; \\ 3-2x \ne 0; \end{cases} \Rightarrow D(y) = \left[-2; \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$;

г) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-2x}$; $D(y)$: $\begin{cases} 4-x^2 \ge 0; \\ 1-2x \ne 0; \end{cases} \Rightarrow D(y) = [-2; 0{,}5) \cup (0{,}5; 2]$.

54. а) $y = 1 + \sin^2 x$; $D(y) = R$; $E(y) = [1; 2]$; т.к. $|\sin x| \le 1$;

б) $y = \dfrac{x-1}{x}$; $D(y)$: $x \ne 0$; $D(y) = R/\{0\}$; $E(y)$: $xy = x - 1$; $xy - x = -1$;

$x(y-1) = -1$; $x = \dfrac{-1}{y-1} = \dfrac{1}{1-y}$; $y \ne 1$; $E(y) = R/\{1\}$;

в) $y = \sqrt{x^2+4}$; $D(y) = R$, т.к. $x^2 + 4 > 0$ при любых x;

$y > 0$; $y^2 = x^2 + 4$; $x^2 = y^2 - x$; $x = \sqrt{y^2-4}$; $x \ge 2$;
$x \le -2$; $E(y) = [2; +\infty)$;

г) $y = 1{,}5 - 0{,}5\cos^2 x$; $D(y) = R$; $E(y) = [1; 1{,}5]$.

57. а) $f(x) = 3x^2 - x^4$; $f(-x) = 3(-x^2) - (-x)^4 = f(x)$; $D(f) = R$;

б) $f(x) = x^5 \cdot \sin\dfrac{x}{2}$; $f(-x) = -x^5 \cdot \left(-\sin\dfrac{x}{2}\right) = f(x)$; $D(f) = R$;

в) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$; $f(-x) = (-x^2) \cdot \cos(-x) = x^2 \cdot \cos x = f(x)$; $D(f) = R$;

г) $f(x) = 4x^6 - x^2$; $f(-x) = 4(-x)^6 - (-x)^2 = 4x^6 - x^2 = f(x)$; $D(f) = R$.

58. а) $f(x) = \dfrac{\cos 5x + 1}{|x|}$; $D(f) = R/\{0\}$ — симметрична относительно (0; 0);

$f(-x) = \dfrac{\cos(-5x)+1}{-x} = \dfrac{\cos 5x + 1}{|x|} = f(x)$, т.е. $f(x)$ — четная функция;

б) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2-1}$; $D(f) = R/\{\pm 1\}$ симметрична относительно (0; 0);

$f(-x) = \dfrac{\sin^2(-x)}{(-x)^2-1} = \dfrac{\sin^2 x}{x^2-1} = f(x)$, т.е. $f(x)$ — четная функция;

в) $f(x) = \dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}}{x^3}$; $D(f) = R/\{0\}$ симметрична относительно (0; 0);

$f(-x) = \dfrac{2\sin\left(-\dfrac{x}{2}\right)}{(-x)^3} = \dfrac{-2\sin\dfrac{x}{2}}{-x^3} = \dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}}{x^3} = f(x)$,

т.е. $f(x)$ — четная функция;

г) $f(x) = \dfrac{\cos x^3}{4-x^2}$; $D(f) = R/\{\pm 2\}$; симметрична относительно (0; 0);

$f(-x) = \dfrac{\cos(-x)^3}{4-(-x)^2} = \dfrac{\cos x^3}{4-x^2} = f(x)$, т.е. $f(x)$ — четная функция.

59. а) $f(x) = x^3 \sin x^2$; $f(-x) = -x^3 \sin(-x)^2 = -f(x)$; $D(f) = R$; $f(x)$ — нечетная функция;

б) $f(x) = x^2(2x - x^3)$; $f(-x) = x^2(-2x + x^3) = -f(x)$; $D(f) = R$; $f(x)$ — нечетная функция;

в) $f(x) = x^5 \cos 3x$; $f(-x) = -x^5 \cos(-3x) = -f(x)$; $D(f) = R$; $f(x)$ — нечетная функция;

г) $f(x) = x(5 - x^2)$; $f(-x) = -x(5 - (-x)^2) = -x \cdot (5 - x^2) = -f(x)$; $D(f) = R$; $f(x)$ — нечетная функция;

60. а) $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{2x^3}$; $D(f) = R/\{0\}$; симметрична относительно (0; 0);

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 + 1}{-2x^3} = -\frac{x^4 + 1}{2x^3} = -f(x);$$ $f(x)$ — нечетная функция;

б) $f(x) = \dfrac{\cos x^3}{x(25 - x^2)}$; $D(f) = R/\{0; \pm 5\}$; симметрична относительно (0; 0);

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)^3}{-x(25 - x^2)} = \frac{\cos x^3}{-(25 - x^2)} = -f(x);$$ $f(x)$ — нечетная функция;

в) $f(x) = \dfrac{3x}{x^6 + 2}$; $D(f) = R$;

$$f(-x) = \frac{-3x}{(-x)^6 + 2} = -\frac{3x}{x^6 + 2} = -f(x);$$ $f(x)$ — нечетная функция;

г) $f(x) = \dfrac{x^2 \sin x}{x^2 - 9}$; $D(f) = R/\{\pm 3\}$; симметрична относительно (0; 0);

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 \sin(-x)}{(-x)^2 - 9} = -\frac{x^2 \sin x}{x^2 - 9} = -f(x);$$ $f(x)$ — нечетная функция.

62. а) $f(x + T) = f(x + 4\pi) = \sin\left(\dfrac{x}{2} + 2\pi\right) = \sin\dfrac{x}{2} = f(x)$;

значит, T — период функции;

б) $f(x + T) = f\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\operatorname{tg}(3x + \pi) = 2\operatorname{tg} 3x = f(x)$;

значит, T — период функции;

в) $f(x + T) = f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 3\cos(4x + 2\pi) = 3\cos 4x = f(x)$;

значит, T — период функции;

г) $f(x + T) = f(x + 3\pi) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{3} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$;

значит, T — период функции.

64. а) $y_1 = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{4}$; $y_1 = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{1}{4}x\right)$; $T = 2\pi : \dfrac{1}{4} = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$;

б) $y_1 = 3\operatorname{tg}\dfrac{3x}{2}$; $T = \dfrac{\pi}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2\pi}{3}$;

в) $y_1 = 4\cos 2x$; $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$;

г) $y_1 = 5\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$; $T = \dfrac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$.

65. а) $y = \sin x \cdot \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$; $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$;

б) $y = \sin x \sin 4x - \cos x \cos 4x = -\cos(x + 4x) = -\cos 5x$; $T = \dfrac{2}{5}\pi$;

в) $y = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$; $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$;

г) $y = \sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x = \sin(3x + x) = \sin 4x$; $T = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$;

где T — наименьший положительный период функции $y(x)$.

68. а) не прав, т.к. T должно удовлетворять равенству $f(x + 1) = f(x)$, $x \in D(x)$;
б) не прав; в) не прав; г) не прав.

69. а) $y = \sin x + \operatorname{ctg} x - x$; $D(y) = R\backslash\{\pi n,\ n \in \mathrm{Z}\}$;
$y(-x) = -\sin x - \operatorname{ctg} x + x = -y(x) \to$ функция $f(x)$ нечетная;

б) $y = \dfrac{|x|}{\sin x \cos x} = \dfrac{2|x|}{\sin 2x}$; $D(y) = R \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}n,\ n \in \mathrm{Z}\right\}$;

$y(-x) = -\dfrac{2|x|}{\sin 2x} = -y(x) \to$ функция $f(x)$ нечетная;

в) $y = x^4 + \operatorname{tg}^2 x + x \sin x$; $D(y) = R \setminus \left\{\dfrac{\pi n}{2};\ n \in Z\right.$

$y(-x) = (-x)^4 + \operatorname{tg}^2(-x) + (-x)\cdot\sin(-x) = x^4 + \operatorname{tg}^2 x + x\sin x =$
$= y(x) \to$ функция $f(x)$ четная;

г) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{|x|}$; $D(y) = R \setminus \left\{\dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathrm{Z}\right\}$;

$$y(-x) = \frac{\operatorname{tg}(-x) - \operatorname{ctg}(-x)}{|-x|} = \frac{-\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{|x|} = \frac{-(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)}{|x|} = -y(x) \to$$

функция $y(x)$ нечетная.

70. а) $y = \dfrac{\sin x}{x^2 - 1}$; $D(y) = R\backslash\{1\}$ — не симметрична относительно нуля, поэтому $y(x)$ — функция общего вида;

б) $y = \dfrac{x + \sin x}{x - \sin x}$; $D(y) = R\backslash\{0\}$; $y(-x) = \dfrac{-x - \sin x}{-x + \sin x} = y(x)$ — функция четная;

в) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x}$; $D(y)$: $\begin{cases} 1 - x^2 \ge 0; \\ 1 - x \ne 0; \end{cases} \Rightarrow D(y) = [-1;\ 1)$ — не симметрична относительно нуля, т.е. $y(x)$ — функция общего вида;

г) $y = \dfrac{x + \operatorname{tg} x}{x \cos x}$; $D(y) = R \setminus \left\{0; \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\right\}$;

$y(-x) = \dfrac{-x - \operatorname{tg} x}{-x \cos x} = \dfrac{x + \operatorname{tg} x}{x \cos x} = y(x)$ — функция четная.

72. а) $h(x) = f(x) \cdot g^2(x)$, где f — четная функция, g — нечетная функция;
$h(-x) = f(-x) \cdot g^2(-x) = h(x)$, h — четная функция;
б) $h(x) = f(x) - g(x)$, где f, g — четные функции;
$h(-x) = f(-x) - g(-x) = h(x)$, $h(x)$ — четная функция;
в) $h(x) = f(x) + g(x)$, где f, g — нечетные функции;
$h(-x) = f(-x) + g(-x) = -h(x)$, $h(x)$ — нечетная функция;
г) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, где f, g — нечетные функции;
$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = h(x)$, $h(x)$ — четная функция.

73. а) $y = \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$;

б) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$; $D(y) = R \setminus \left\{\dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z\right\}$; $T = \dfrac{\pi}{2}$;

в) $y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x$;
$T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$;

г) $y = \left(\sin \dfrac{x}{2} + \sin \dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x$; $T = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$.

75. Допустим, функция $y = f(x)$ имеет период T, т.е. $y(x \pm T) = y(x)$, тогда для функции $y_1 = af(x) + b$:
$y_1(x \pm T) = a(y(x \pm T)) + b = ay(x) + b = af(x) + b = y_2(x)$. Причем $D(y_1) = D(y)$.
Значит, $y_1(x)$ является периодической.

76. а) $y = x^2 - 3$; при $x = 1$, $D(y)$: $y(x + 2) = y(3) = 6 \ne 1 = y(2)$.
Т.е. $T = 2$ — не период функции $y(x)$;
б) $y = \cos x$; при $x = \pi$, $D(y)$: $y(x + 2) = \cos(\pi + 2) = -\cos 2 \ne -1 = \cos \pi = y(\pi)$.
Т.е. $T = 2$ — не период функции $y(x)$;
в) $y = 3x + 5$ — функция не периодическая, т.е. $T = 2$ — не период функции $y(x)$;
г) $y = |x|$ — функция не периодическая, т.е. $T = 2$ — не период функции $y(x)$.

77. а) Функция возрастает на $x \in [-7; -5] \cup [1; 5]$;
убывает на $x \in [-5; 1] \cup [5; 7]$;
$x_{\max_1} = -5$; $y_{\max_1} = 5$; $x_{\max_2} = 5$; $y_{\max_2} = 3$; $x_{\min_1} = 1$; $y_{\min_1} = -3$;

б) функция возрастает на $x \in [-6; -4] \cup [-2; 4]$;
убывает на $x \in [-4; -2] \cup [4; 5]$;
$x_{\max_1} = -4$; $y_{\max_1} = 3$; $x_{\max_2} = 4$; $y_{\max_2} = 5$; $x_{\min_1} = -2$; $y_{\min_1} = -2$;

в) функция возрастает на $x \in [-3; 3]$;
убывает на $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$;
$x_{\max} = 3$ $y_{\max_1} = 2$; $x_{\min} = -3$; $y_{\min} = -2$;

г) функция возрастает на $x \in [-4; -2] \cup [0; 2] \cup [4; 6]$
убывает на $x \in [-6; -4] \cup [-2; 0] \cup [2; 4]$;

$x_{\max_1} = -2$; $y_{\max_1} = 3$; $x_{\max_2} = 2$; $y_{\max_2} = 3$; $x_{\min_1} = -4$;

$y_{\min_1} = -2$; $x_{\min_2} = 0$; $x_{\min_3} = 4$; $y_{\min_2} = -2$.

81. Функция возрастающая, если при $x_1 < x_2$ и $f(x_1) < f(x_2)$,
т.е. $f(x_2) - f(x_1) > 0$.
Рассмотрим $f(x) = kx + b$
а) $k > 0$, $kx_2 + b - kx_1 - b = 0$; $k(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow x_2 > x_1$; $f(x_2) > f(x_1)$.
Функция возрастает, что и требовалось доказать;
б) Если при $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$, то функция возрастающая.
$f(x) = kx + b$; $f(x_1) - f(x_2) = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = kx_1 - kx_2 =$
$= k(x_1 - x_2)$, но по условию $k < 0$, т.е. при $x_1 < x_2$ и $k < 0$ имеем
$f(x_1) - f(x_2) = k(x_1 - x_2) > 0$, что означает $\begin{cases} f(x_1) > f(x_2); \\ x_1 < x_2; \end{cases} \Rightarrow$
функция убывающая, что и требовалось доказать.

82. а) $y = -x^2 + 6x - 8 = 1 - (x - 3)^2$; $x_{\max} = 3$; $y_{\max} = 1$;
если $x \in (-\infty; 3]$, то функция возрастает; если $x \in [3; +\infty)$, то функция убывает;
б) $y = (x + 2)^4 + 1$; $y_{\min} = 1$; $x_{\min} = -2$;
если $x \in (-\infty; -2]$, то функция возрастает; если $x \in [-2; +\infty)$, то функция убывает;
в) $y = x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$; $x_{\min} = 2 = y_{\min} = -4$;
если $x \in (-\infty; 2]$, то функция убывает; если $x \in [2; +\infty)$, то функция возрастает;
г) $y = (x - 3)^4$; $y_{\min} = 0$; $x_{\min} = 3$;
если $x \in (-\infty; 0]$, то функция убывает; если $x \in [0; +\infty)$, то функция возрастает.

83. а) $y = \dfrac{3}{x - 2}$; $x \neq 2$.
1) $x_1 < x_2$; $y(x_1) < y(x_2)$; $y(x_1) - y(x_2) < 0$; $\dfrac{3}{x_1 - 2} - \dfrac{3}{x^2 - 2} < 0$;

$\frac{3(x_2 - 2 - x_1 + 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} < 0$; $\frac{x_2 - x_1}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} < 0$; $x_2 > x_1$, т.е. функция убывает на промежутках $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$, т.е. точек $Exts$ нет;

б) $y = -(x + 3)^5$.

1) $x_1 < x_2$. Если $y(x_1) < y(x_2)$, то функция возрастает, или для $y(x_1) - y(x_2) < 0$.
Имеем $-(x_1 + 3)^5 + (x_2 + 3)^5 < 0$, или
$y(x_1) = -(x_1 + 3)^5$. Выше: $-(x_1 + 3)^5 < -(x_2 + 3)^5$, т.е. $y_2 = -(x_2 + 3)^5$; $y_1 < y_2$, то есть функция возрастает. Точек Extr нет.

в) $y = \frac{-1}{x+3}$; $x \neq -3$.

$x_1 < x_2$; $y(x_1) = -\frac{1}{x_1 + 3}$; $y(x_2) = -\frac{1}{x_2 + 3}$;

$$y(x_2) - y(x_1) = -\frac{1}{x_2 + 3} + \frac{1}{x_1 + 3} = \frac{-x_1 - 3 + x_2 + 3}{(x_2 + 3)(x_1 + 3)} = \frac{x_2 - x_1}{(x_2 + 3)(x_1 + 3)} =$$

$$= \frac{-(x_1 - x_2)}{(x_2 + 3)(x_1 + 3)} < 0,$$

т.е. функция возрастает на $(-\infty; -3)$ и на $(-3; +\infty)$ и не имеет точек Extr;

г) $y = (x - 4)^3$. Если при $x_1 < x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$, то функция возрастающая. $y(x_1) - y(x_2) = (x_1 - 4)^3 - (x_2 - 4)^3 < 0$ при $x_1 < x_2$.
Ответ: функция возрастает на всей $D(y)$ и не имеет точек Extr.

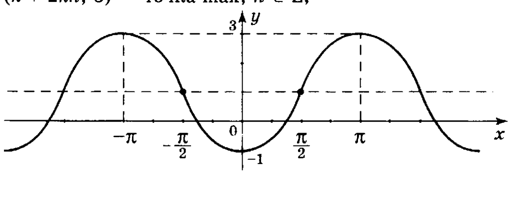
84. а) $y = 3 \sin x - 1$

Т.к. это синусоида, то на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$ функция убывает;

на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$ функция возрастает;

$x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $y_{\min} = -4$; $n \in Z$; $x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $y_{\max} = 2$; $k \in Z$;

б) $y = -2 \cos x + 1$; $D(y)$: R
Функция убывает на $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$; возрастает на $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.
Extr: $(2\pi n; -1)$ — точка min; $n \in Z$;
$(\pi + 2\pi n; 3)$ — точка max; $n \in Z$;



в) $y = 2\cos x + 1$;
на $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$ функция убывает; на $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$ функция возрастает;
$x_{min} = \pi + 2\pi n$; $y_{min} = -1$; $x_{max} = 2\pi n$; $y_{max} = 3$, $n \in Z$;

г) $y = 0{,}5\sin x - 1{,}5$;
на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$ функция убывает;
на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$ функция возрастает;
$x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $y_{min} = -2$; $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $y_{max} = -1$; $n \in Z$.

86. а) Т.к. $0 < \frac{2\pi}{9} < \frac{3\pi}{7}$, то $\cos\frac{2\pi}{9} > \cos\frac{3\pi}{7}$, т.к. $y = \cos x$ убывает на $[0; \pi]$;

б) Сравнить $\sin\frac{5\pi}{7}$ и $\sin\frac{7\pi}{8}$.
$\frac{5\pi}{7} < \frac{7\pi}{8}$ углы во II четверти. С увеличением угла во II четверти sin угла уменьшается. Имеем $\sin\frac{5\pi}{7} > \sin\frac{7\pi}{8}$;

в) Сравнить $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{7}$ и $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$.
$\frac{9\pi}{7} > \frac{6\pi}{5}$ углы в III четверти. $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{7} < \operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$;

г) Сравнить $\sin\frac{4\pi}{9}$ и $\sin\frac{3\pi}{8}$.
$\frac{4\pi}{9} > \frac{3\pi}{8}$ углы в I четверти. $\sin\frac{4\pi}{9} > \sin\frac{3\pi}{8}$.

87. Расположить в порядке возрастания
а) углы расположены в I, II, III четвертях. $1{,}3 < 3{,}2 < 3{,}8$.
$\sin 3{,}8 < \sin 3{,}2 < \sin 1{,}3$ на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;
б) $0{,}9 < 1{,}3 < 1{,}9$; $\cos 1{,}9 < \cos 1{,}3 < \cos 0{,}9$ на $[0; \pi]$;
в) $-0{,}3 < 0{,}5 < 1{,}4$; $\operatorname{tg}(-0{,}3) < \operatorname{tg}(0{,}5) < \operatorname{tg}(1{,}4)$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
г) $-1{,}2 < 0{,}8 < 1{,}2$; $\sin(-1{,}2) < \sin(0{,}8) < \sin(1{,}2)$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

91. Доказать, что функция
а) $f(x) = x^4 + 3x$ возрастает на $[0; +\infty)$.
Решение.

Функция возрастает, если при $x_1 < x_2$ (x_1, $x_2 \in [0; +\infty)$ выполняется $f(x_1) < f(x_2)$, или $f(x_1) - f(x_2) < 0$.
$x_1^4 + 3x_1 - x_2^4 - 3x_2 = (x_1^4 - x_2^4) + 3(x_1 - x_2) < 0$, т.е. функция возрастает, т.к. $x_1 - x_2 < 0$;

б) $f(x) = -x^3 - 2x$. Доказать убывание функции на R.
Функция убывает на R, если при $x_1 < x_2$
выполняется $y_1 > y_2$, т.е. $y_1 - y_2 > 0$,
$-x_1^3 - 2x_1 - (-x_2^3 - 2x_2) = -x_1^3 - 2x_1 + x_2^3 + 2x_2 = (x_2^3 - x_1^3) + 2(x_2 - x_1) > 0$,
т.е. функция убывает;

в) $f(x) = x^6 - 0{,}5$. Доказать, что функция убывает на $(-\infty; 0]$.
$x < 0$; $x_1 < x_2$; $f(x_1) - f(x_2) = (x_1^6 - 0,5) - (x_2^6 - 0,5) = x_1^6 - x_2^6 > 0$,
т.е. $f(x_1) > f(x_2)$; т.е. функция убывает;

г) $f(x) = x^5 + 1{,}5x$. Доказать, что функция возрастает на R.
Решение:
При $x_1 < x_2$ должно выполняться неравенство
$f(x_1) < f(x_2)$; или $f(x_1) - f(x_2) < 0$;
$f(x_1) - f(x_2) = x_1^5 + 1,5x_1 - x_2^5 - 1,5x_2 = (x_1^5 - x_2^5) + 1,5(x_1 - x_2) < 0$,
т.е. функция возрастает.

92. а) Если $f(x)$ — четная функция, то $f(x_0) = f(-x_0)$, значит, если x_0 — точка максимума, то $(-x_0)$ — тоже точка максимума.

б) Если функция $f(x)$ — нечетная, то $f(-x) = -f(x)$, а т.к. она убывает (по условию), то при $x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$ на $[a; b]$.
Пусть $-b \le x_1 < x_2 \le -a$, тогда $a \le -x_2 < -x_1 \le b$ и $f(-x_2) > f(-x_1)$ (по правилу убывания), откуда $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. функция убывает, что и следовало доказать.

в) По условию функция $f(x)$ — нечетная, т.е. $f(-x) = -f(x)$ и $f(x_0) = -f(x_0)$, x_0 — точка min по условию, тогда $-x_0$ — точка max.

г) Если по условию функция $f(x)$ — четная и на $[a; b]$ возрастает, то по определению возрастающей функции при $a \le x_1 < x_2 \le b$. $f(x_1) < f(x_2)$, а по симметричном ему относительно оси ординат отрезке $[-b; -a]$ функция убывает, что и требовалось доказать.

93. а) Исследование функции $y = f(x)$ по общей схеме. Рис. 57 учебника.
$D(f)$: $x \in [-8; 5]$; $E(f)$: $y \in [-2; 5]$.
Точки пересечения графика с осью абсцисс: (1; 0), (5; 0); с осью ординат: [0; 2,5).
Промежутки законопостоянства: $f(x) > 0$ на $[-8; 1]$; $f(x) < 0$ на $(1; 5]$.
Функция возрастает на $[-5; -1]$ и $[3; 5]$; убывает на $[-8; -5)$ и на $(-1; 3)$.
Функция непрерывна.
$\min f(-5) = 1$; $\max f(-1) = 3$; $\min f(3) = -2$.

б) $D(f)$: $R\backslash\{-2\}$; $E(f)$: $R\backslash\{2\}$. Ассимптоты: $x = -2$; $y = 2$.
Функция терпит разрыв в т. $x = -2$, точка пересечения с осями координат нет.
$f(x) > 0$ на $(-\infty; -2)$ и на $[0; +\infty)$; $f(x) < 0$ на $(-2; 0)$.
Функция возрастает на $(-\infty; -2)$ и на $(-2; +\infty)$; точек Extr нет.

в) Функция непрерывная, определена на $D(f)$: $x \in [-6; 6]$, $E(f)$: $y \in [-2; 2]$.

Точки пересечения с осью OX: $(-4; 0)$, $(0; 0)$, $(4; 0)$;
с осью OY: $(0; 0)$.
Промежутки законопостоянства: $y > 0$ на $(-4; 0)$ и на $(4; 6)$;
$y < 0$ на $(-6; -4)$, $(0; 4)$.
Функция возрастает на $[-6; -2]$ и на $[2; 6]$; убывает на $(-2; 2)$.
$f_{max}(-2) = 2$; $f_{min}(2) = -2$.

г) $D(f)$; $x \in [-5; 7]$, $E(f)$: $y \in [-3; 3]$.
Точки пересечения с осью абсцисс: $(-4; 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(5; 0)$;
с осью ординат: $(0; 1)$.
Промежутки законопостоянства: $y > 0$ на $(-5; -4)$, $(-1; 1)$, $(5; 7)$;
$y < 0$ на $(-4; -1)$, $(1; 5)$.
Функция возрастает на $[-3; 0]$ и на $[3; 7]$; убывает на $(-5; -3)$ и на $(0; 3)$.
$f_{min}(-3) = -2$; $f_{min}(3) = -3$; $f_{max}(0) = 1$.

100. а) $\operatorname{tg}\frac{18\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{20\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = -\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$;

$\sin\frac{28\pi}{3} = \sin\left(\frac{24\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$;

б) $\cos\left(-\frac{15\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{16\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$;

$\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{5}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\left(\frac{5\pi}{8} + \frac{3\pi}{5}\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(-\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right)\right) =$

$= \operatorname{ctg}\left(-\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$;

в) $\sin\left(-\frac{14\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{10\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) = -\sin\frac{4\pi}{5} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5}$;

$\operatorname{tg}\frac{15\pi}{8} = \operatorname{tg}\left(\frac{16\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$;

г) $\cos\frac{20\pi}{7} = \cos\left(\frac{14\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}\right) = \cos\frac{6\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7}$;

$\operatorname{ctg}\frac{35\pi}{9} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}$. &

101. а) $f(x) = 3\cos 2x - 1$; $D(f)$: $x \in R$; $E(f)$: $y \in [-4; 2]$,
т.к. $-1 \le \cos 2x \le 1$; $-3 - 1 \le 3\cos 2x - 1 \le 3 - 1$;
$-3 \le 3\cos 2x \le 3$; $-4 \le 3\cos 2x - 1 \le 2$;

б) $f(x) = 2 - \operatorname{ctg} 3x = 2 - \frac{\cos 2x}{\sin 3x}$; $\sin 3x \ne 0$; $3x \ne \pi n$, $x \ne \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;

в) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $f(x) = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$; $\cos\frac{x}{2} \ne 0$; $\frac{x}{2} \ne \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

$D(f)$: $x \ne \pi + 2\pi n$, $n \in Z$; $E(f)$; $y \in R$;

г) $f(x) = 1 + 0,5\sin\frac{x}{2}$; $D(f)$: R; $-1 \le \sin\frac{x}{2} \le 1$; $-0,5 \le 0,5\sin\frac{x}{2} \le 0,5$;

$1 - 0,5 \le 1 + 0,5\sin\frac{x}{2} \le 1,5$; $E(f)$: $y \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

102. Найти промежутки знакопостоянства и нули функции.

а) $f(x) = -\sin 3x$.

$-\sin 3x = 0$; $3x = \pi n$; $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;

$f(x) > 0$, $-\sin 3x > 0$; $\sin 3x < 0$; $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$;

$f(x) < 0$, $-\sin 3x < 0$; $\sin 3x > 0$; $x \in \left(0 + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

б) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{2x}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{2x}{3} = 0$; $\frac{2x}{3} = \pi n$; $x = \frac{3\pi n}{2}$, $n \in Z$;

$f(x) < 0$, если $x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}; \frac{3\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$; $f(x) > 0$,

если $x \in \left(\frac{3\pi n}{2}; \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$;

в) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$; $f(x) = 0$, если $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;

$f(x) > 0$, если $x \in (-\pi + 4\pi n; \pi + 4\pi n)$, $n \in Z$; $f(x) < 0$,
если $x \in (\pi + 4\pi n; 3\pi + 4\pi n)$, $n \in Z$;

г) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x$; $f(x) = 0$, если $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$;

$f(x) < 0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$; $f(x) > 0$,

если $x \in \left(\frac{\pi n}{4}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

103. Найти промежутки возрастания, убывания, точки Extr функций.

а) $f(x) = 4\cos 3x$.

Нули функции: $\cos 3x = 0$; $3x = \frac{\pi}{2} + \pi$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Функция возрастает на $\left[-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in Z$;

убывает на $\left(\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in Z$;

$x_{\min} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$; $y_{\min} = -4$, $n \in Z$;

$$x_{max} = 0 + \frac{2\pi n}{3} = \frac{2\pi n}{3};\ y_{max} = 4;\ n \in Z;$$

б) $f(x) = 0,5\operatorname{ctg}\frac{x}{4}$.

$$y = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{x}{4}}{\sin\frac{x}{4}};\ \sin\frac{x}{4} \neq 0;\ \ \frac{x}{4} \neq \pi n;\ x \neq 4\pi n,\ n \in Z.$$

Функция убывает на всей области определения, кроме $x = 4\pi n$, $n \in Z$ и значит, точек Extr нет.

в) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

$$f(x) = 2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}};\ D(f):\ \cos\frac{x}{2} \neq 0;\ \ \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Функция возрастает на всей области определения ($x \neq \pi + 2\pi n$. $n \in Z$) и, значит, точек Extr нет.

г) $f(x) = 0,2\sin 4x$;

$$D(f):\ R;\ \sin 4x = 0;\ 4x = \pi n,\ n \in Z;\ x = \frac{\pi n}{4},\ n \in Z,\ T = 2\pi : 4 = \frac{\pi}{2}.$$

Функция возрастает на $\left[-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right]$, $n \in Z$;

убывает на $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

Extr: $x_{max} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2};\ n \in Z;\ y_{max} = 0,2;$

$x_{min} = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2};\ n \in Z;\ y_{min} = -0,2.$

104. а) $f(x) = 0,5\cos\frac{x}{3};\ D(f) = R;\ E(f) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$;

Функция $f(x)$ — четная, т.к. $\cos(-x) = \cos x$.

Периодическая: $2\pi : \frac{1}{3} = 6\pi = T$.

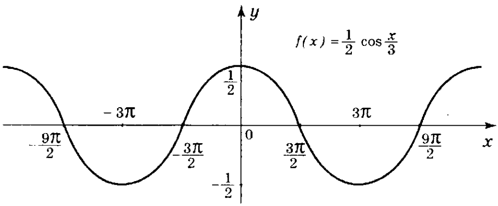
Нули функции: $f(x) = 0$, если $x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi n,\ n \in Z;\ \ f(0) = \frac{1}{2}$.

Промежутки знакопостоянства: $f(x) > 0$

на $\left(-\frac{3\pi}{2} + 6\pi n; \frac{3\pi}{2} + 6\pi n\right)$, $n \in Z$;

$f(x) < 0$ на $\left(\dfrac{3\pi}{2} + 6\pi n; \dfrac{9\pi}{2} + 6\pi n\right)$, $n \in Z$;
$f(x)$ возрастает на $[-3\pi + 6\pi n; 6\pi n]$, $n \in Z$;
$f(x)$ убывает на $[6\pi n; 3\pi + 6\pi n]$, $n \in Z$;

Точки Extr: $x_{\min} = 3\pi + 6\pi n$, $n \in Z$; $y_{\min} = -\dfrac{1}{2}$; $x_{\max} = 6\pi n$, $n \in Z$; $y_{\max} = \dfrac{1}{2}$;



б) $f(x) = -2\sin 2x$; $D(f) = R$; $E(f) = [-2; 2]$;
Функция $\sin x$ — нечетная, т.к. $\sin(-x) = -\sin x$.
Периодическая с $T = 2\pi : 2 = \pi$.

Нули функции: $f(x) = 0$, $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $f(0) = 0$.

Промежутки знакопостоянства: $f(x) > 0$ на $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in Z$;

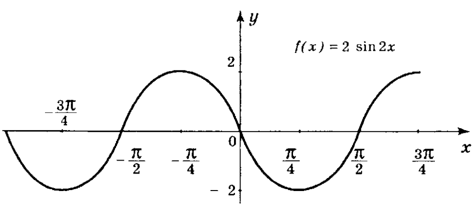
$f(x) < 0$ на $\left(\pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

Функция $f(x)$ возрастает на $\left[\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{3\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in Z$;

убывает на $\left[-\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

Точки Extr: $x_{\min} = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; $y_{\min} = -2$; $x_{\max} = \dfrac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

$y_{\max} = 2$;



в) $f(x) = -1{,}5 \cos 3x$; $D(f) = \mathrm{R}$; $E(f) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$;

Функция $\cos x$ — четная, $\cos(-x) = \cos x$.

Периодическая с $T = 2\pi : 3 = \frac{2\pi}{3}$.

Нули функции: $f(x) = 0$, если $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathrm{Z}$; $f(0) = -\frac{3}{2}$.

Промежутки знакопостоянства: $f(x) > 0$ на

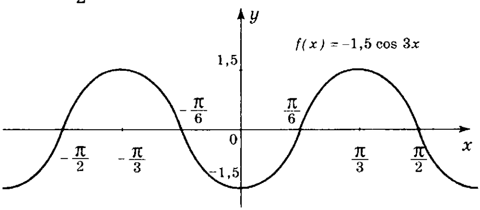
$\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi n\right)$, $n \in \mathrm{Z}$;

Функция возрастает на $\left[\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in \mathrm{Z}$;

убывает на $\left[-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in \mathrm{Z}$.

Точки Extr: $x_{\max} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathrm{Z}$; $y_{\max} = \frac{3}{2}$; $x_{\min} = \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathrm{Z}$;

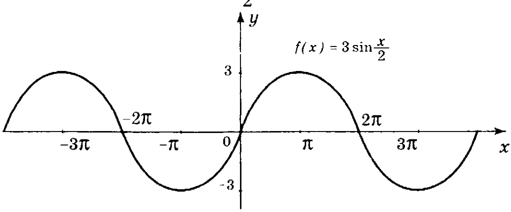
$y_{\min} = -\frac{3}{2}$;



г) $f(x) = 3\sin\frac{x}{2}$; $D(f) = \mathrm{R}$; $E(f) = [-3; 3]$;

Функция $\sin x$ — нечетная, $\sin(-x) = -\sin x$.

Периодическая с $T = 2\pi : \frac{1}{2} = 4\pi$.



Нули функции: $f(x) = 0$, если $x = 2\pi n$, $n \in Z$.
Промежутки знакопостоянства: $f(x) > 0$ на $(4\pi n;\ 2\pi + 4\pi n)$, $n \in Z$;
$f(x) < 0$ на $(-2\pi + 4\pi n)$, $n \in Z$.
Функция убывает на $[\pi + 4\pi n;\ 3\pi + 4\pi n]$, $n \in Z$.
Функция возрастает на $[-\pi + 4\pi n;\ \pi + 4\pi n]$, $n \in Z$;
Точки Extr: $x_{\min} = -\pi + 4\pi n$, $n \in Z$; $y_{\min} = -3$;
$x_{\max} = \pi + 4\pi n$, $n \in Z$; $y_{\max} = 3$.

105. а) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$; $D(f) = R / \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z\right\}$; $E(f) = R$;

Функция tg x — нечетная , tg $(-x) = -$tg x, значит и данная функция — нечетная функция.

Периодическая с $T = \frac{\pi}{2}$, поэтому выполним исследование ее на одном периоде.

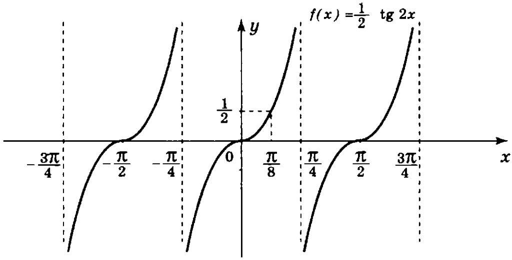
Нули функции: $f(x) = 0$, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $f(0) = 0$.

Промежутки законопостоянства: $f(x) > 0$

при $x \in \left(\frac{\pi}{2}n;\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n\right)$, $n \in Z$; $f(x) < 0$

при $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k;\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\right)$, $k \in Z$.

Функция возрастает на каждом промежутке $D(f)$. Точек max и min нет.



б) $f(x) = -3\cos\frac{3x}{2}$; $D(f) = R$; $E(f) = [-3;\ 3]$. Функция $\cos\frac{3x}{2}$ —

четная функция ($\cos(-x) = \cos x$).

Периодическая с $T = 2\pi : \frac{3}{2} = \frac{4\pi}{3}$.

Нули функции: $f(x) = 0$, если $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$; $f(0) = -3$;

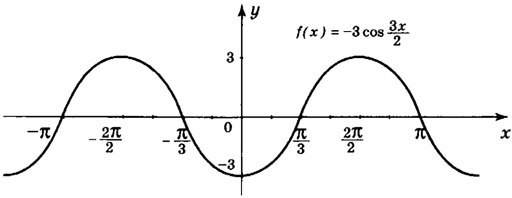
Промежутки законопостоянства: $f(x) > 0$

при $x \in \left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3}; \pi + \frac{4\pi n}{3}\right)$, $k \in Z$;

$f(x) < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}k; \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}k\right)$, $k \in Z$;

Функция возрастает на $x \in \left[\frac{4\pi n}{3}; \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3}\right]$, $n \in Z$;

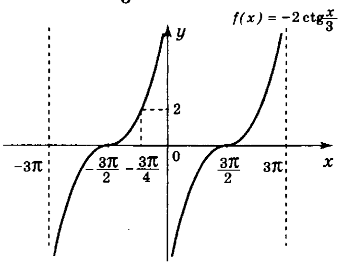
функция убывает на $x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3}; \frac{4\pi n}{3}\right]$, $n \in Z$.



Точки $Extr$: $x_{max} = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}n$, $n \in Z$; $y_{max} = 3$; $x_{min} = \frac{4\pi}{3}n$, $n \in Z$;

$x_{min} = -3$.

в) $f(x) = -2\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{3}$; $D(f) = R \backslash \{3\pi n,\ n \in Z\}$; $E(f) = R$.



Данная функция нечетная ($\mathrm{ctg}\,(-x) = -\mathrm{ctg}\,x$).

Периодическая с $T = \pi : \frac{1}{3} = 3\pi$.

Нули функции: $f(x) = 0$, $x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi n$, $n \in Z$.

Промежутки знакопостоянства: $f(x) < 0$

на $x \in \left(3\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$;

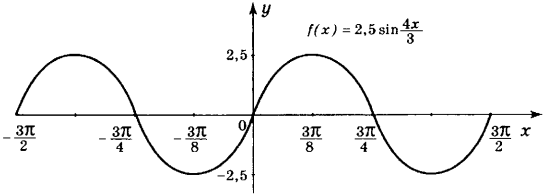
$f(x) > 0$ на $x \in \left(-\frac{3\pi}{2} + 3\pi n; 3\pi n\right)$, $n \in Z$.

Функция возрастает на каждом из интервалов $D(f)$. Точек max и min нет.

г) $f(x) = \frac{5}{2}\sin\frac{4x}{3}$; $D(f) = R$; $E(f) = \left[-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

Функция нечетная ($\sin(-x) = -\sin x$), периодическая:

$T = 2\pi : \frac{4}{3} = \frac{3\pi}{2}$.



Нули функции: $f(x) = 0$, если $x = \frac{3\pi n}{4}$, $n \in Z$; $f(0) = 0$; $f(x) > 0$ на $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Промежутки знакопостоянства: $f(x) < 0$ на $\left(-\frac{3\pi}{4}; 0\right)$.

Функция возрастает на $\left[-\frac{3\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$; убывает на $\left[\frac{3\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}\right]$.

Точки $Extr$: $x_{max} = \frac{3\pi}{8}$; $y_{max} = \frac{5}{2}$; $x_{min} = -\frac{3\pi}{8}$; $y_{min} = -\frac{5}{2}$.

106. Найти амплитуду, период, частоту колебания. Вычислить координату тела в момент времени t_1.

а) Тело движется по закону $x(t) = 3{,}5\cos(4\pi t)$, $t_1 = \frac{1}{12}$ с.

$A = 3{,}5$; период $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$; $\omega = 4\pi$, $x\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{7}{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{4}$.

б) $x(t) = 5\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, $t_1 = 4{,}5$ с.

$A = 5$; $T = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$; $\omega = 3\pi$;

$$x(4,5) = 5\cos\left(\frac{3\pi\cdot 9}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 5\cos\frac{82}{6}\pi =$$

$$= 5\cos\left(\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = -5\cos\frac{2\pi}{3} = -5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \text{ (см)}.$$

в) $x(t) = 1{,}5\cos 6\pi;\ t = 1\frac{1}{3}$ с.

$A = 1{,}5;\ T = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3};\ \omega = 6\pi;$

$x\left(\frac{4}{3}\right) = 1{,}5\cos\left(\frac{6\pi\cdot 4}{3}\right) = 1{,}5\cos 8\pi = 1{,}5$ (см).

г) $x(t) = 0{,}5\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{3}\right),\ t_1 = 8$ с.

$A = \frac{1}{2};\ T = 2\pi : \frac{\pi}{2} = 4;\ \omega = \frac{\pi}{2};$

$x(8) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 8 + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$ (см).

107. Найти амплитуду, период, частоту силы тока, если она изменяется по закону:

а) $f(x) = 0{,}25\sin(50\pi t)$

$A = 0{,}25$ (А); $T = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25};\ \omega = 50\pi;\ \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50\pi}{2\pi} = 25;$

б) $I(t) = 5\sin(20\pi t)$

$A = 5$ (А); $T = \frac{2\pi}{20\pi} = \frac{1}{10};\ \omega = 20\pi;$

в) $f(t) = \frac{1}{2}\sin(10\pi t)$

$A = \frac{1}{2}$ (А); $T = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5};\ \omega = 10\pi;$

г) $f(t) = 3\sin(30\pi t)$

$A = 3$ (А); $T = \frac{2\pi}{30\pi} = \frac{1}{15};\ \omega = 30\pi.$

108. Напряжение меняется по закону

а) $U(t) = 220\cos(60\pi t)$

$A = 220$ В; $T = \frac{2\pi}{\pi\cdot 60} = \frac{1}{30};\ \omega = 60\pi:$

б) $U(t) = 110\cos(30\pi t)$

$A = 110$ В; $T = \frac{2\pi}{30\pi} = \frac{1}{15};\ \omega = 30\pi;$

в) $U(t) = 360\cos(20\pi t)$

$A = 360$ В; $T = \frac{2\pi}{20\pi} = \frac{1}{10};\ \omega = 20\pi;$

г) $U(t) = 180\cos(45\pi t)$

$A = 180$ В; $T = \frac{2\pi}{45\pi} = \frac{2}{45};\ \omega = 45\pi.$

109. Расположить в порядке возрастания

а) cos 4; cos 7; cos 9; cos (−12,5)

cos (−12,5) = cos 12,5 (четная функция)

cos 4 = −0,65; cos 7 = 0,75; cos 9 = −0,91; cos 12,5 = 0,99.

Имеем cos 9 < cos 4 < cos 7 < cos 12,5;

б) tg (−8); tg 1,3; tg 4; tg 16

tg (−8) = −tg 8 (нечестность функции tg x)

−tg 8 = −(−6,79) = 6,79; tg 4 = 1,16; tg 1,3 = 3,6; tg 16 = 0,30.

Имеем tg 16 < tg 4 < tg 1,3 < tg (−8);

в) sin 6,7; sin 10,5; sin (−7); sin 20,5

sin (−7) = −sin 7 (нечетность функции sin x)

sin 10,5 = −0,88; sin (−7) = −sin 7 = −(−0,6) = 0,66; sin 10,5 = −0,88; sin 20,5 = 0,99.

Имеем sin 10,5 < sin (−7) < sin 6,7 < sin 20,5;

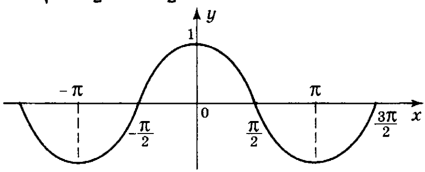
г) ctg 3,5 = 2,67; ctg (−9) = 2,21; ctg 5 = −0,30; ctg 15 = −1,17.

Получаем ctg 15 < ctg 5 < ctg (−9) < ctg 3,5.

110. Найти область определения функции

а) $y = \dfrac{1}{1-\sin x}$. $D(y)$: $\sin x \neq 1$; $x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

б) $y = \sqrt{\sin^2\dfrac{x}{2} - \cos^2\dfrac{x}{2}}$; $y = \sqrt{-\cos x}$. $D(y)$: $-\cos x \geq 0$ или $\cos x \leq 0$.



$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z;$$

в) $y = \dfrac{1}{\cos x - 1}$. $D(y)$: $\cos x \neq 1$; $x \neq 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: R.

г) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$.

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1 \cdot 2}{2\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}; \quad y = \sqrt{\frac{2}{\sin 2x}};$$

$$D(y): \begin{cases} \sin 2x \neq 0; \\ \sin 2x > 0; \end{cases} \quad 2x \neq \pi n, \ x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$$

$0 + 2\pi n < 2x < \pi + 2\pi n,\ n \in Z;\ \pi n < x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$

$x \in \left(\pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z.$

111. Найти множество значений функции.

а) $y = \sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x$

$\sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 2 \cdot \left(\sin x \sin\dfrac{\pi}{6} - \cos x \cos\dfrac{\pi}{6}\right) = -2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right);$

$-1 \le \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \le 1;\ \ -2 \le 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \le 2;$

или $-2 \le -2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \le 2$ (тоже).

Ответ: $E(y) = [-2;\ 2]$.

б) $y = \dfrac{3}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$

$1 + \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, т.е. $y = \dfrac{3}{\cos^2 x}$; $y \ne 0;\ 0 < \cos^2 x \le 1;$

$D(y)$: $\cos x \ne 0$.

Ответ: $E(y) = (0;\ 3]$.

в) $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$

$1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x;\ y = \sqrt{2\sin^2 2x} = \sqrt{2} \cdot |\sin 2x|;$

$0 < |\sin 2x| \le 1;\ 0 < \sqrt{2} \cdot |\sin 2x| \le \sqrt{2}.$

Ответ: $E(y) = (0;\ \sqrt{2}]$.

г) $y = \dfrac{2}{1 + \mathrm{ctg}^2 x}$

$1 + \mathrm{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x};\ \ y = \dfrac{2}{\sin^2 x};\ \ y \ne 0;\ y > 0;\ \sin x \ne 0.$

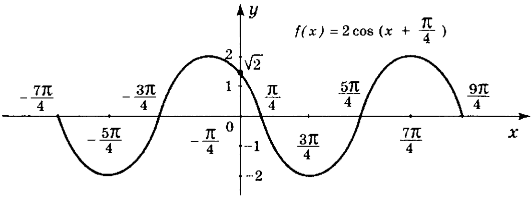
Ответ: $E(y)$: $y \in (0;\ 2]$.

112. а) $f(x) = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; $D(f) = R$; $E(f) = [-2;\ 2]$; функция периодическая с $T = 2\pi$;

Нули функции: $f(x) = 0$, если $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$; $f(0) = \sqrt{2}$ — точка пересечения с OY.

Точки экстремумов функции:

$x_{max} = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \ y_{max} = 2;\ \ x_{min} = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \ y_{min} = -2.$



б) $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; $D(f) = \mathrm{R}$; $E(f) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Функция имеет период $T = 2\pi$.

Нули функции: $f(x) = 0$, если $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$; $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ — точка пересечения с OY.

Точки min и max функции:

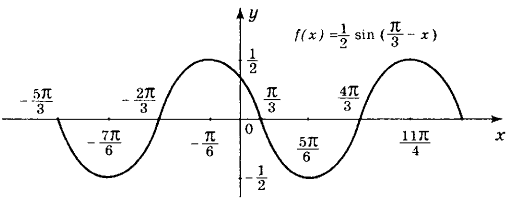
$x_{\max} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$; $y_{\max} = \frac{1}{2}$; $x_{\min} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$;

$y_{\min} = -\frac{1}{2}$.

Монотонность функции:

функция возрастает на $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathrm{Z}$;

убывает на $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathrm{Z}$.



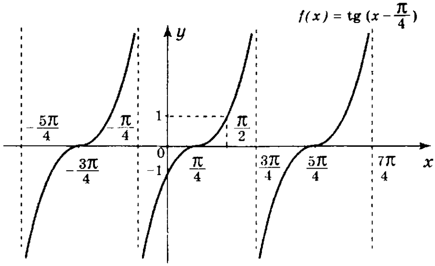
в) $f(x) = \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; $D(f) = \mathrm{R} / \left\{\frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathrm{Z}\right\}$; $E(f) = \mathrm{R}$.

Функция периодическая: $T = \pi$.

Точки пересечения с осями координат:

$f(x) = 0$, если $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$; $f(0) = -1$.

Функция возрастает на каждом из интервалов $D(f)$. Точек max и min нет.



г) $f(x) = 1,5\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$; $D(f) = \text{R}$; $E(f) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$;

т.е. $-1 \le \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \le 1$; $-\frac{3}{2} \le 1,5\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \le \frac{3}{2}$.

Функция периодическая: $T = 2\pi$; $f(x) = 0$, если

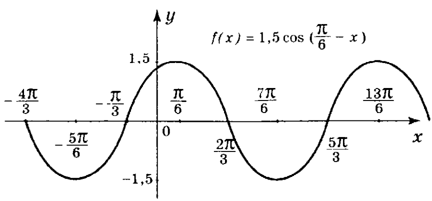
$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \text{Z}$; $f(0) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ — точки пересечения с осями координат.

Точки экстремумов:

$x_{\max} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \text{Z}$; $y_{\max} = 1,5$; $x_{\min} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \text{Z}$; $y_{\min} = -1,5$.

Функция возрастает на $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in \text{Z}$;

убывает на $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \text{Z}$.



113. а) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$; $D(f) = \text{R}$; $E(f) = [-1; 1]$.

Функция периодическая: $T = \pi$.

Точки пересечения с осями координат:

$f(x) = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $f(0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

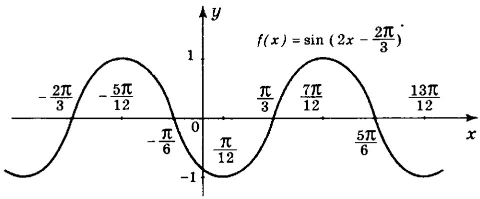
Точки Extr: $x_{max} = -\dfrac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in Z$; $y_{max} = 1$; $x_{min} = \dfrac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in Z$;

$y_{min} = -1$.

Монотонность функции:

Функция возрастает на $\left[\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n; \dfrac{7\pi}{12} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

убывает на $\left(-\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{12} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.



б) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$; $D(f)$: $\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$; $x \neq -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$;

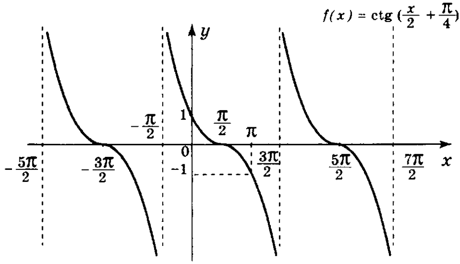
$E(f) = R$.

Функция периодическая: $T = 2\pi$; $f(x) = 0$,

если $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; $f(0) = 1$.

Функция убывает на каждом из интервалов $D(f)$.

Extr не имеет.



в) $f(x) = 4\cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right)$; $D(f) = R$; $E(f) = [-4; 4]$;

т.к. $-1 \le \cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right) \le 1;\quad -4 \le 4\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right) \le 4.$

Функция периодическая: $T = 6\pi$.

Точки пересечения с осями координат:

$f(x) = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + 3\pi k,\ k \in Z;\ f(0) = 2.$

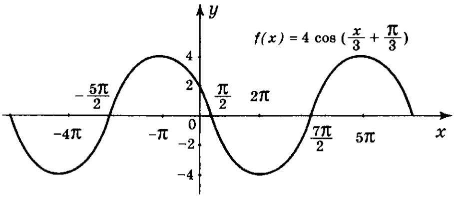
Точки Extr функции:

$x_{max} = -\pi + 6\pi n,\ n \in Z;\ y_{max} = 4;\ x_{min} = 2\pi + 6\pi k,\ k \in Z;\ y_{min} = -4.$

Монотонность:

Функция возрастает на $[-4\pi n + 2\pi n; -\pi + 2\pi n],\ n \in Z$;

убывает на $(-\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)m\ n \in Z$.



г) $f(x) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4} - 3x\right);\ D(f):\ \cos\left(\dfrac{3\pi}{4} - 3x\right) \ne 0;\quad x \ne \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z;$

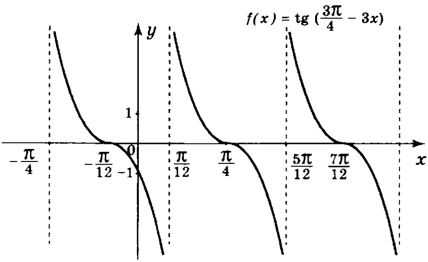
$E(f) = R.$

Функция периодическая: $T = \dfrac{\pi}{3}$.

Точки пересечения с осями координат: $f(x) = 0$,

если $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z;\ f(0) = -1.$

Функция убывает на каждом из интервалов $D(f)$. Точек max и min нет.



114. а) $A = 15$ (A); $T = \dfrac{2}{5}$ (c); $\omega = 5\pi$ (рад/с); $I = 15 \sin 5\pi t$;

б) $A = 90$ (В); $T = \frac{2}{25}$ (с); $\omega = 25\pi$ (рад/с); $U = 90\sin 25\pi t$;

в) $A = 12$ (А); $T = \frac{6}{5}$ (с); $\omega = \frac{5\pi}{3}$ (рад/с); $I = 12\sin\frac{5\pi}{3}t$;

г) $A = 100$ (Вт); $T = \frac{4}{5}$ (с); $\omega = \frac{5\pi}{2}$ (рад/с); $U = 100\sin\frac{5\pi}{2}t$.

§ 3. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

8. Арксинус, арккосинус и арктангенс

116. а) Функция $y = x^7$ на $(-\infty; +\infty)$ монотонно возрастает, поэтому уравнение $x^7 = 3$ имеет на R один корень;

б) Функция $y = \frac{3}{x-2}$ на $(-\infty; 1)$ убывающая, значит, уравнение $\frac{3}{x-1} = -5$ имеет один корень;

в) $y = x^6$ — функция возрастающая на $(-\infty; 0)$, отсюда — уравнение $x^6 = 4$ имеет единственный корень;

г) $y = \frac{5}{x+2}$ на $(-2; +\infty)$ убывающая, отсюда — уравнение $\frac{5}{x+2} = 2$ имеет единственный корень.

117. а) Уравнение $(x-3)^3 = 4$ на $(-\infty; +\infty)$ имеет единственный корень т.к. функция $y = (x-3)^3$ монотонно возрастает.

б) Уравнение $2\sin x = 1{,}5$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет единственный корень, т.к. функция $y = 2\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает.

в) Уравнение $(x+2)^4 = 5$ на $[-2; +\infty)$ имеет единственный корень, т.к. функция $y = (x+2)^4$ на $[-2; +\infty)$ возрастает.

г) Уравнение $0{,}5\cos x = -\frac{1}{4}$ на $[0; \pi]$ имеет единственный корень, т.к. функция $y = 0{,}5\cos x$ на $[0; \pi]$ убывает.

121. а) $\arcsin 0 = 0$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

в) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$;

г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

122. а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$;

б) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$;

г) $\arccos 1 = 0$.

123. а) $\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$;

б) $\mathrm{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$;

в) $\mathrm{arctg}\; 0 = 0$;

г) $\mathrm{arctg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

124. а) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = \alpha$, $\sin\alpha = -\frac{2}{3} \in [-1; 1]$, т.е. $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ имеет смысл.

б) $\arccos\sqrt{5} = \alpha$, $\cos\alpha = \sqrt{5} = 2,23 > 1$, т.е. $\arccos\sqrt{5}$ не имеет смысла.

в) $\arcsin 1,5 = \alpha$, $\sin \alpha = 1,5$ не может быть, т.к. $|\sin \alpha| \le 1$ и , значит, $\arcsin 1,5$ не имеет смысла.

г) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} = \alpha$, $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$, т.е. выражение $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$ имеет смысл.

125. а) $\arccos \pi = \alpha$, $\cos \alpha = \pi$ не имеет смысла; т.к. $\pi > 1$.

б) $\arcsin(3 - \sqrt{20}) = \alpha$, $\sin\alpha = 3 - \sqrt{20} = 3 - 4,5 \approx -1,5$ не имеет смысла, т.к. $|\sin \alpha| \le 1$;

в) $\arccos(-\sqrt{3})$ не имеет смысла, т.к. $\cos\alpha = -\sqrt{3}$ не имеет смысла; т.к. $|\cos \alpha| \le 1$;

г) $\arcsin\frac{2}{7}$ имеет смысл, т.к. $\frac{2}{7} < 1$.

126. а) $\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$;

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$;

в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$;

г) $\arcsin(-1) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$.

127. а) $\arccos(-0,5) + \arcsin(-0,5) = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$;

г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$.

128. а) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$;

б) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg} 0 = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg} 0 = -\frac{\pi}{3}$;

г) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$.

129. а) Сравнить

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$; $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) < \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\operatorname{arctg}(-1)$

Решение.

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$; $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3} > -\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) > \operatorname{arctg}(-1)$.

в) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\arcsin 1$

Решение.

$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{3} > \arcsin 1$;

г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\arcsin\frac{1}{2}$

Решение.

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6};\quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};\quad \frac{5\pi}{6} > \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > \arcsin\frac{1}{2}$.

130. а) $\arcsin 0{,}3010 \approx 0{,}3057$;
$\operatorname{arctg} 2{,}3 \approx 1{,}1607$;
б) $\arccos 0{,}6081 \approx 0{,}9171$;
$\operatorname{arctg} 0{,}3541 \approx 0{,}3404$;
в) $\arcsin 0{,}7801 \approx 0{,}8948$;
$\arccos 0{,}8771 \approx 0{,}5010$;
г) $\operatorname{arctg} 10 \approx 1{,}4711$;
$\arcsin 0{,}4303 \approx 0{,}4448$.

131. Вычислить

а) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3}$;

б) $3\arcsin\frac{1}{2} + 4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = 3\cdot\frac{\pi}{6} + 4\cdot\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}$;

в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1 = -\frac{\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{6\pi}{6} = \pi$;

г) $\arcsin(-1) - \frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2} + 3\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - 3\cdot\frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$.

132. а) На $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает, т.е. при $x_1 < x_2$ $\sin x_1 < \sin x_2$ и обратная ей функция $\arcsin x$ — возрастающая, т.е. $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$;

б) Функция $y = \cos x$ убывает на $[0; \pi]$ и имеет себе обрануую $\arccos x$, тоже убывающую, т.е. при $x_1 < x_2$ из $[-1; 1]$; $\arccos x_1 > \arccos x_2$.

133. а) Функция $y = \operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает и имеет себе обратную $\operatorname{arctg} x$ тоже возрастающую, т.е. при $x_1 < x_2$, $\operatorname{arctg} x_1 < \operatorname{arctg} x_2$.

б) $\operatorname{arcctg} x$ — функция, обратная функции $\operatorname{ctg} x$ на $(0; \pi)$, обе убывающие, т.е. при $x_1 < x_2$; $\operatorname{arcctg} x_1 > \operatorname{arcctg} x_2$.

134. Для решения используем определение возрастания функции $\sin x$ и убывания функции $\cos x$.

а) $\arcsin(-0,3) < \arcsin\frac{\pi}{6} < \arcsin 0,9$, т.к. на $[-1;\ 1]$ $-0,3 < \frac{\pi}{6} < 0,9$;

б) $\arcsin(-0,7) < \arcsin(-0,5) < \arcsin\frac{\pi}{8}$,

т.к. на $[-1;\ 1]$ $-0,7 < -0,5 < \frac{\pi}{8}$;

в) $\arccos 0,4 < \arccos(-0,2) < \arccos(-0,8)$, т.к. на $[-1;\ 1]$ $-0,8 < -0,2 < 0,4$;

г) $\arccos 0,9 < \arccos\frac{\pi}{5} < \arccos(-0,6)$, т.к. на $[-1;\ 1]$ $-0,6 < \frac{\pi}{5} < 0,9$.

135. а) Функция $y = \operatorname{tg} x$ на промежутках $D(y)$ возрастает и имеет себе обратную, тоже возрастающую, а т.к. $-5 < 0,7 < 100$, то $\operatorname{arctg}(-5) < \operatorname{arctg}(0,7) < \operatorname{arctg} 100$.

б) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на промежутках $D(y)$ и имеет себе обратную функцию $\operatorname{arcctg} x$, тоже убывающую, т.е. т.к. $-5 < 1,2 < \pi$, то $\operatorname{arcctg}\pi < \operatorname{arcctg} 1,2 < \operatorname{arcctg}(-5)$.

в) Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутках $D(y)$ и имеет себе обратную $\operatorname{arctg} x$, тоже возрастающую, т.е. при $-95 < 3,4 < 14$ имеем $\operatorname{arctg}(-95) < \operatorname{arctg} 3,4 < \operatorname{arctg} 17$.

г) аналогично б): при $-7 < -2,5 < 1,4$ имеем $\operatorname{arcctg} 1,4 < \operatorname{arcctg}(-2,5) < \operatorname{arcctg}(-7)$.

136. а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$;

в) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$;

г) $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.

137. а) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$;

б) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$; $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$;

в) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$; $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$;

г) $2\cos x - 1 = 0$; $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

138. а) $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$;

в) $\sin x = -\frac{1}{2}$; $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

г) $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

139. а) $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$; $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$;

б) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$; $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$;

в) $2\sin x - 1 = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^{k} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

г) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$; $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

140. а) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$;

б) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; $x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$;

в) $\operatorname{tg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

г) $\operatorname{tg} x = 0$; $x = \pi n,\ n \in Z$.

141. а) $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$; $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$;

б) $\operatorname{ctg} x + 1 = 0$; $\operatorname{ctg} x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0$; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$;

г) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x - 1 = 0$; $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

142. а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $2x = (-1)^{k} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; $x = (-1)^{k} \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$;

б) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$; $\frac{x}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ x \in Z$; $x = \pm 2\pi + 6\pi k,\ k \in Z$;

в) $\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{x}{4} = (-1)^{k} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; $x = (-1)^{k} \cdot \frac{2\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in Z$;

г) $\cos 4x = 0;\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4},\ k \in Z.$

143. а) $\sin x = -0{,}6;\ x = (-1)^{k+1} \arcsin 0{,}6 + \pi k,\ k \in Z;$

б) $\mathrm{ctg}\, x = 2{,}5;\ x = \mathrm{arctg}\, 2{,}5 + \pi k,\ k \in Z;$

в) $\cos x = 0{,}3;\ x = (-1)^k \arccos 0{,}3 + 2\pi k,\ k \in Z;$

г) $\mathrm{tg}\, x = -3{,}5;\ x = -\mathrm{arctg}\, 3{,}5 + \pi k,\ k \in Z.$

144. а) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{x}{3} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;$

$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{3\pi}{4} - 3\pi k,\ k \in Z;$

б) $\mathrm{tg}\,(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \mathrm{tg}\, 4x = -\frac{1}{\sqrt{3}};\ x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z;$

в) $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ 2x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n;\ 2x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z;$

г) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1;\ -\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

145. а) $2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3};\ \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z;$

1) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 4\pi n = \frac{2\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z;$

2) $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 4\pi n = 4\pi n,\ n \in Z;$

б) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2};\ \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

$3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ 3x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;$

$x = \frac{\pi}{12} + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z;$

в) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 3;\ \mathrm{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{x + \pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;$

$x + \pi = \pi + 3\pi n,\ n \in Z;\ x = 3\pi n,\ n \in Z;$

г) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0;\ \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -1;\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;\ x = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z.$

146. а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-1;\ \frac{\pi}{6}-2x=\pi+2\pi k,\ k\in Z;\ x=\frac{-5\pi}{12}+\pi k,\ k\in Z;$

б) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\sqrt{3};\ \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k;$

$-\frac{x}{4}=-\frac{\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k;\ x=\frac{4\pi}{3}+(-1)^k\cdot\frac{4\pi}{3}+4\pi k,\ k\in Z;$

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-1;\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}1+\pi n;\ x=\pi+2\pi n,\ n\in Z;$

г) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2};\ 3x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ x=\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z.$

147. а) $\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin(3x-x)=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2};$

$2x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z;\ x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$

б) $\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}=1;\ \cos\frac{x}{2}=-1;\ \frac{x}{2}=\pi+2\pi n,\ n\in Z;\ x=2\pi+4\pi n,\ n\in Z;$

в) $\sin 2x\cos 2x=-\frac{1}{4};\ \sin 4x=-\frac{1}{2};$

$4x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z;\ x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}, k\in Z$

г) $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$

$\frac{x}{3}-\frac{\pi}{5}=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;\ \frac{x}{3}=\frac{\pi}{5}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;$

$x=\frac{3\pi}{5}+(-1)^n\cdot\frac{3\pi}{4}+3\pi k,\ k\in Z.$

148. а) $\begin{cases}y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right);\\ x=4,5\pi;\end{cases}\ y=2\cos\left(9\pi-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}=-1;$

т. пересечения $\left(\frac{9}{2}\pi;-1\right);$

$\begin{cases}x=4,5\pi;\\ y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1;\end{cases}\ \left(\frac{9\pi}{2};1\right).$

б) $\begin{cases}y=-1;\\ y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2};\end{cases}$

$2x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;\quad 2x=\frac{\pi}{3}\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$

$x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

Точки пересечения: $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\pi n;-1\right)=\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;-1\right), n\in Z$

и $\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+\pi n;-1\right)=\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;-1\right), n\in Z$

$\begin{cases}y=-1\\ y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}\Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-1;\ \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n; n\in Z;$

$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+2\pi n; x=-\frac{3\pi}{2}+4\pi n, n\in Z$

Точки пересечения: $\left(-\frac{3\pi}{2}+4\pi n;\ -1\right)$.

в) $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1;\ \ \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2};\ \ 2x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$

$2x=\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\quad x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

Точки пересечения: $\left(\left(\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{6}+\pi n\right); 1\right), n\in Z.$

$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1;\ \ \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \ \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+2\pi n;$

$x=\frac{\pi}{2}+4\pi n,\ n\in Z.$

Точки пересечения: $\left(\frac{\pi}{2}+4\pi n; 1\right), n\in Z.$

г) $\begin{cases}y=0;\\ y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right);\end{cases}\ \Rightarrow 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0;\ \ \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0;$

$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$2ч=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi n; 2x=\frac{5\pi}{6}+\pi n; x=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$

Точки пересечения: $\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}; 0\right), n\in Z.$

$$\begin{cases} y = 0; \\ y = \sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right); \end{cases} \Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0; \;\; \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n; \;\; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Точки пересечения: $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}.$

149. 1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = \dfrac{1}{2}$; $\;x = \dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;

а) $x = \dfrac{\pi}{3}$ — наименьший положительный корень;

б) $x = -\dfrac{2\pi}{3};\ 0;\ \dfrac{\pi}{3};\ \pi;\ \dfrac{4\pi}{3}$;

в) $x = -\dfrac{2\pi}{3}$ — наибольший отрицательный корень;

г) $x = -\dfrac{2\pi}{3};\ 0;\ \dfrac{\pi}{3}$;

2) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$; $2x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $2x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

$x = -\dfrac{3\pi}{8} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;

а) $\dfrac{5\pi}{8}$;

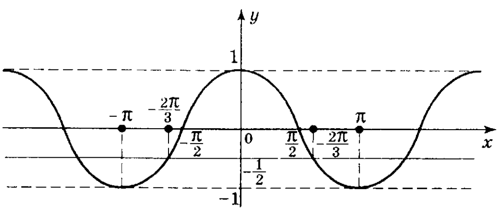
б) $-\dfrac{3\pi}{8};\ \dfrac{5\pi}{8}$;

в) $-\dfrac{3\pi}{8}$;

г) $-\dfrac{3\pi}{8}$.

10. Решение простейших тригонометрических неравенств

155. а) $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$; $\;x \in \left[-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n\right],\ n \in \mathbb{Z}$;

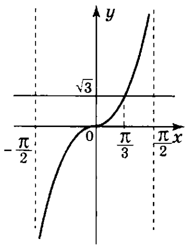


б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

в) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

г) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

156. а) $\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$; $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right]$, $n \in Z$;



б) $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

в) $\operatorname{tg} x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x \in \left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

г) $\operatorname{tg} x < -1$; $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

157. а) $2\cos x - 1 \geq 0$; $\cos x \geq \frac{1}{2}$; $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

б) $2\sin x + \sqrt{2} \geq 0$; $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

в) $2\cos x - \sqrt{3} \leq 0$; $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

г) $3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \geq 0$; $\operatorname{tg} x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

158. а) $\sin 2x < \frac{1}{2}$; $2x = t$; $\sin t < \frac{1}{2}$; $t \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

$x \in \left(-\frac{7\pi}{12} + \pi n; \frac{\pi}{12} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

б) $\cos\frac{x}{3} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{x}{3} \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 6\pi n; \frac{\pi}{2} + 6\pi n\right)$, $n \in Z$;

в) $\sin\frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{x}{2} \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

$x \in \left(-\frac{4\pi}{3} + 4\pi n; -\frac{2\pi}{3} + 4\pi n\right)$, $n \in Z$;

г) $\operatorname{tg} 5x > 1$; $5x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

$x \in \left(\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}\right)$, $n \in Z$.

159. а) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \le 1$; $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \le \frac{1}{2}$;

$\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

$2x \in \left[0 + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; $x \in \left[\pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right]$, $n \in Z$;

б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 1$; $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$; $3x \in \left(-\frac{4\pi}{6} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in Z$;

$x \in \left(-\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in Z$;

в) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \ge 1$; $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; $\frac{x}{2} \in \left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

$x \in [4\pi n; \pi + 4\pi n]$, $n \in Z$;

г) $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$; $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; $4x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

$x \in \left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

160. а) $\sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6} \le \frac{1}{2}$; $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \le \frac{1}{2}$;

$$\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z;$$

$$x\in\left[-\pi+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in Z;$$

б) $\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2};$

$$\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\in\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z;$$

$$x\in\left[-\pi+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right],\ n\in Z$$

или $x\in\left(-\pi+2\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z;$

в) $4\sin 2x\cos 2x\geq\sqrt{2};\quad \sin 4x\geq\frac{\sqrt{2}}{2};\quad 4x\in\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right],\ n\in Z;$

$$x\in\left[\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}\right],\ n\in Z;$$

г) $\cos\frac{\pi}{8}\cos x-\sin x\sin\frac{\pi}{8}<-\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2};$

$$\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\in\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ -\frac{7\pi}{8}+2\pi n\right),\ n\in Z;$$

$$x\in\left[\frac{17\pi}{24}+2\pi n;\ \frac{25\pi}{24}+2\pi n\right],\ n\in Z.$$

161. а) $\operatorname{ctg}x\geq\sqrt{3};\quad x\in\left(\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right),\ n\in Z;$

б) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)>1;\quad \operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{\sqrt{3}}{3};$

$$x\in\left(\frac{11\pi}{24}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{5\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in Z;$$

в) $\operatorname{ctg}3x\leq\frac{\sqrt{3}}{3};\quad x\in\left[\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3};\ \frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{3}\right),\ n\in Z;$

г) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)>-\sqrt{3};\quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)<\frac{\sqrt{3}}{3};$

$$x\in\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

162. а) $3\sin\frac{x}{4}\geq 2;\quad \sin\frac{x}{4}\geq\frac{2}{3};$

$$\frac{x}{4}\in\left[\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n;\ \pi-\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n\right],\ n\in Z;$$

$x \in \left[4\arcsin\frac{2}{3}+8\pi n;\ 4\pi-4\arcsin\frac{2}{3}+8\pi n\right],\ n\in Z;$

б) $4\cos\frac{x}{3}<-3;\ \ \cos\frac{x}{3}<-\frac{3}{4};$

$\frac{x}{3}\in\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+2\pi n;\ 2\pi-\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+2\pi n\right),\ n\in Z;$

$x\in\left(3\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+6\pi n;\ 6\pi-3\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+6\pi n\right),\ n\in Z;$

в) $5\ \mathrm{tg}\ 2x\le 3;\ \ \mathrm{tg}\,2x\le\frac{3}{5};\ \ x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in Z;$

г) $\frac{1}{2}\sin 4x<-\frac{1}{5};\ \ \sin 4x<-\frac{2}{5};$

$x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\arcsin\frac{2}{5}}{4}+\frac{\pi n}{2};\ -\frac{\arcsin\frac{7}{5}}{4}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in Z.$

163. а) $\sin x\ge-\frac{1}{2};\ \ x\in\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z.$

Данному промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $x\in\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}\right];$

б) $\cos\frac{x}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ \frac{x}{2}\in\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z;$

$x\in\left(-\frac{\pi}{3}+4\pi n;\ \frac{\pi}{3}+4\pi n\right),\ n\in Z.$

Данному промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$ принадлежат корни: $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\ 0\right];$

в) $\mathrm{tg}\ x\ge-1;\ \ x\in\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z.$

Данному промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right]$ принадлежат корни: $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right];$

г) $\sin 2x<\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ \frac{x}{2}\in\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z;$

$x\in\left(-\frac{5\pi}{8}+\pi n;\ \frac{\pi}{8}+\pi n\right),\ n\in Z.$

Данному промежутку $[0;\ \pi]$ принадлежат корни: $x\in\left[0;\ \frac{\pi}{8}\right].$

164. а) $2\sin^2 x+\sin x-1=0$

Пусть $\sin x=t;\ 2t^2+t-1=0;\ t_1=-1;\ t_2=\frac{1}{2};$

$\sin x=-1;\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;$

$\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

б) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$
Пусть $\sin x = t$; $3t^2 - 5t - 2 = 0$; $t_1 = -\frac{1}{3}$; $\sin x = -\frac{1}{3}$;

$x = (-1)^{k+1} \cdot \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$; $t_2 = 2$; $\sin x \neq 2$, т.к. $|\sin x| \le 1$;

в) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
Пусть $\sin x = t$; $2t^2 - t - 1 = 0$;

$t_1 = -\frac{1}{2}$; $\sin x = -\frac{1}{2}$; $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

$t_2 = 1$; $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z$;

г) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$
Пусть $\sin x = t$; $4t^2 + 11t - 3 = 0$;

$t_1 = \frac{1}{4}$; $\sin x = \frac{1}{4}$; $x = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{1}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

$t_2 = -3$; $\sin x = -3$ не имеет смысла, т.к. $|\sin x| \le 1$.

165. а) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$
Пусть $\cos x = t$; $|t| \le 1$; $6t^2 + t - 1 = 0$;

$t_1 = -\frac{1}{2}$; $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$;

$t_2 = \frac{1}{3}$; $\cos x = \frac{1}{3}$; $x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$;

б) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; $2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$;
$2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0$; $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$
Пусть $\cos x = t$; $2t^2 - 3t - 2 = 0$;

$t_1 = -\frac{1}{2}$; $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$;
$t_2 = 2$ — посторонний корень;

в) $4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$
Пусть $\cos x = t$; $|t| \le 1$; $4t^2 - 8t + 3 = 0$;

$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{4} = \frac{4 \pm 2}{2}$; $t_1 = \frac{1}{2}$; $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$;

$t_2 = \frac{3}{2}$ — посторонний корень; т.к. $\frac{3}{2} > 1$

г) $5\sin^2 x + 6\cos x - 6 = 0$; $5(1 - \cos^2 x) + 6\cos x = 0$;
$-5\cos^2 x + 6\cos x - 1 = 0$; $5\cos^2 x - 6\cos x + 1 = 0$.
Если $\cos x = t$, $|t| \le 1$, то $5t^2 - 6t + 1 = 0$;
$t_1 = 1$; $\cos x = 1$; $x = 2\pi n,\ n \in Z$;

$t_2 = \frac{1}{5}$; $\cos x = \frac{1}{5}$; $x = \pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n,\ n \in Z$.

166. а) $2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$

$2(1 - \sin^2 x) + \sin x + 1 = 0$; $-2\sin^2 x + \sin x + 3 = 0$;

$2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$.

Пусть $\sin x = t$, $|t| \le 1$; $2t^2 - t - 3 = 0$;

$t = -1$; $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;

$t_2 = \frac{3}{2}$; $\sin x = \frac{3}{2}$ — не имеет решений;

б) $\cos^2 x + 3\sin x = 3$; $1 - \sin^2 x + 3\sin x - 3 = 0$;

$\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$.

Возьмем $\sin x = t$; $|t| \le 1$; $t^2 - 3t + 2 = 0$;

$t_1 = 1$; $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;

$t_2 = 2$ — не удовлетворяет условию $|t| \le 1$.

в) $4\cos x = 4 - \sin^2 x$; $4\cos x = 4 - (1 - \cos^2 x)$;

$4\cos x = 3 + \cos^2 x$; $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$.

Пусть $\cos x = t$; $|t| \le 1$.

Имеем $t^2 - 4t + 3 = 0$; $t_1 = 3$ не имеет решения;

$t_2 = 1$; $\cos x = 1$; $x = 2\pi n,\ n \in Z$;

г) $8\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$; $8 - 8\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$;

$8\cos^2 x - \cos x - 9 = 0$

Пусть $\cos x = t$; $|t| \le 1$; $8t_2 - t - 9 = 0$; $t_{1,2} = \frac{1 \pm 17}{16}$;

$t_1 = \frac{-16}{16} = -1$; $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$;

$t_2 = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} > 1$, что не удовлетворяет условию.

167. а) $3\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 1 = 0$; $\mathrm{tg}\, x = t$; $3t^2 + 2t - 1 = 0$; $t = -1$; $t = \frac{1}{3}$;

1) $\mathrm{tg}\, x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$;

2) $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{3}$; $x = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

б) $\mathrm{tg}\, x - 2\,\mathrm{ctg}\, x + 1 = 0$; $\mathrm{ctg}\, x = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}$; $\mathrm{tg}\, x - \frac{2}{\mathrm{tg}\, x} + 1 = 0$;

$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$

Пусть $\mathrm{tg}\, x = t \in R$;

$t_1 = -2$; $\mathrm{tg}\, x = -2$; $x = \mathrm{arctg}\,(-2) + \pi n,\ n \in Z$; $x = -\mathrm{arctg}\, 2 + \pi n,\ n \in Z$

$t_2 = 1$; $\mathrm{tg}\, x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

в) $2\,\mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x - 2 = 0$; $\mathrm{tg}\, x = t$; $2t^2 + 3t - 2 = 0$;

$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$;

$t_1 = -2$; $\operatorname{tg} x = -2$; $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z$;

$t_2 = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$; $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi m,\ m \in Z$.

г) $2 \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x + 5 = 0$; $\frac{2}{\operatorname{tg} x} - 3\operatorname{tg} x + 5 = 0$;

$-3 \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 2 = 0$; $3 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x - 2 = 0$;

$\operatorname{tg} x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$; $\operatorname{tg} x = 2$; $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z$

или $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$; $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi m,\ m \in Z$.

168. а) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$; $\cos x \cdot (2\cos x + \sqrt{3}) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0; \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z; \\ x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z; \end{array}\right.$$

б) $4 \cos^2 x - 3 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos x - \sqrt{3} = 0; \\ 2\cos x + \sqrt{3} = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z; \\ x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z; \end{array}\right.$$

в) $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 0$; $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0; \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in Z; \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z; \end{array}\right.$$

г) $4 \sin^2 x - 1 = 0$; $(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin x = 1; \\ 2\sin x = -1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2}; \\ \sin x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z; \\ x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z; \end{array}\right.$$

169. а) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x = 2 \cos^2 x$ — однородное уравнение. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$.

Имеем; $3 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$; $\operatorname{tg} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6}$;

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1; \\ \operatorname{tg} x = \frac{2}{3}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z; \\ x = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi m,\ m \in Z; \end{array}\right.$$

б) $2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0 \mid : \cos^2 x \neq 0 \mid 2 - 3 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x = 0$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}; \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 2; \\ \operatorname{tg} x = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z; \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z; \end{array}\right.$$

в) $9 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 2 \sin^2 x \mid : \cos^2 x \neq 0$; $9 \operatorname{tg} x - 7 - 2 \operatorname{tg}^2 x = 0$;

$$2 \operatorname{tg}^2 x - 9 \operatorname{tg} x = 0; \quad \operatorname{tg} x = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{4} = \frac{9 \pm 5}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}; \\ \operatorname{tg} x = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} \dfrac{7}{2} + \pi n,\ n \in Z; \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z; \end{array}\right.$$

г) $2 \sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x \mid : \cos^2 x \neq 0$; $2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0$;

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1; \\ \operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1; \\ \operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z; \\ x = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2} + \pi m,\ m \in Z. \end{array}\right.$$

170. а) $4 \sin^2 x - \sin 2x = 3$; $4 \sin^2 x - \sin 2x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$;
$\sin^2 x - 3 \cos^2 x \cos x - 2 \sin x \cos x = 0$ — однородное уравнение.
Делим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$.
Имеем: $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$; $\operatorname{tg} x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$;

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1; \\ \operatorname{tg} x = 3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z; \\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi m,\ m \in Z; \end{array}\right.$$

б) $\cos 2x = 2 \cos x - 1$; $\cos^2 x - \sin^2 x - 2 \cos x + 1 = 0$;
$\cos^2 x - 2 \cos x + \cos^2 x = 0$; $2 \cos^2 x - 2 \cos x = 0$;
$2 \cos x(\cos x - 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0; \\ \cos x = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z; \\ x = 2\pi n,\ n \in Z; \end{array}\right.$$

в) $\sin 2x - \cos x = 0$; $2 \sin x \cos x - \cos x = 0$; $\cos x(2 \sin x - 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0; \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z; \\ x = (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z; \end{array}\right.$$

г) $\sin 2x + 4 \cos^2 x = 1$; $2 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$;
$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0 \mid : \cos^2 x \neq 0$;
$\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$;

$\operatorname{tg} x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2;$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = -1; \\ \operatorname{tg} x = 3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z; \\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi m,\ m \in Z\end{array}\right.$

171. а) $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x;$ $2\sin^2 x - \sqrt{3}\cdot 2\sin x\cos x = 0 \ \big|: \cos^2 x \neq 0:$

$2\operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg} x = 0;$ $2\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0;$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 0; \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \pi n,\ n \in Z; \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;\end{array}\right.$

б) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\operatorname{ctg} x = 2;$ $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - \dfrac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x} - 2 = 0;$

$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0;$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{1 \pm 2}{\sqrt{3}};$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}; \\ \operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z; \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in Z;\end{array}\right.$

в) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \ \big|: \cos x \neq 0,$ однородное уравнение

$\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0;$ $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3};$ $x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;$

г) $\operatorname{tg} x = 3\operatorname{ctg} x = 0;$ $\operatorname{tg} x - 3\cdot\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = 0;$ $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0;$ $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3};$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z. \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in Z.\end{array}\right.$

172. а) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1;$ $2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x =$
$= \cos^2 x + \sin^2 x;$ $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0 \ \big|: \cos^2 x \neq 0$

$3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 1 = 0;$ $\operatorname{tg} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \dfrac{1 \pm 2}{3};$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{3}; \\ \operatorname{tg} x = 1;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z; x = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi n, n \in Z; \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.\end{array}\right.$

б) $\sin^4 \dfrac{x}{4} - \cos^4 \dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{2};$ $\left(\sin^2 \dfrac{x}{4} - \cos^2 \dfrac{x}{4}\right)\left(\sin^2 \dfrac{x}{4} + \cos^2 \dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{1}{2};$

$-\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2};$ $\cos\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{2};$ $x = \pm\dfrac{4\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in Z.$

в) $3\sin 2x + \cos 2x = 2\cos^2 x;$ $6\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - 2\cos^2 x =$

$= 0$; $\sin^2 x - 6\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$; $1 - 6\sin x\cos x = 0$;

$1 - 3\sin 2x = 0$; $3\sin 2x = 1$; $\sin 2x = \frac{1}{3}$;

$2x = (-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$; $x = (-1)^k \cdot \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$;

г) $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$; $2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} = 0$; $2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0$;

$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2} = 0;\\ \sin\frac{x}{2} = 1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2} = \pi n;\\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = 2\pi n,\ n \in Z;\\ x = \pi + 4\pi n,\ n \in Z.\end{array}\right.$

173. а) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; $2\sin 2x\cos 2x + \sin^2 2x = 0$;

$\sin 2x \cdot (2\cos 2x + \sin 2x) = 0$;

$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0;\\ 2\cos 2x + \sin 2x = 0\ |: \cos 2x \neq 0;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}2x = \pi n,\ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;\\ \operatorname{tg} 2x + 2 = 0;\ \operatorname{tg} 2x = -2;\ 2x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in Z;\end{array}\right.$

имеем $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;\\ x = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in Z;\end{array}\right.$

б) $\frac{3}{5\operatorname{tg} x + 8} = 1$

$5\operatorname{tg} x + 8 = 3$; $5\operatorname{tg} x = -5$; $\operatorname{tg} x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

в) $\frac{5}{3\sin x + 4} = 2$; $5 = 6\sin x + 8$; $6\sin x = -3$; $\sin x = -\frac{1}{2}$;

$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

г) $1 - \sin 2x = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2$;

$1 - \sin 2x = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; $1 - \sin 2x = 1 - \sin x$;

$\sin x - 2\sin x\cos x = 0$; $\sin x(1 - 2\cos x) = 0$; $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0;\\ \cos x = \frac{1}{2};\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x = \pi n,\ n \in Z;\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z.\end{array}\right.$

174. а) $\cos 5x - \cos 3x = 0$; $-2\sin 4x \sin x = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0\\ \sin x = 0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}4x = \pi n, n \in Z\\ x = \pi m, m \in Z\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi n}{4}, n \in Z\\ x = \pi m, m \in Z\end{array}\right.$$

б) $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$; $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$;

$2\sin 3x \cdot \cos 4x = \cos 4x$; $\cos 4x\,(2\sin 3x - 1) = 0$; $\left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0;\\ \sin 3x = \dfrac{1}{2};\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}4x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4},\ n \in \mathrm{Z};\\ 3x = (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathrm{Z};\end{array}\right. \quad x = (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi k}{3},\ k \in \mathrm{Z};$$

в) $\sin 5x - \sin x = 0$; $2\sin 2x \cos 3x = 0$; $\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0;\\ \cos 3x = 0;\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}2x = \pi n;\ x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathrm{Z};\\ 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m;\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi m}{3},\ m \in \mathrm{Z};\end{array}\right.$$

г) $\cos 3x + \cos x = 4\cos 2x$; $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$2\cos 2x \cos x - 4\cos 2x = 0$; $2\cos 2x(\cos x - 2) = 0$;

1) $\cos 2x = 0$; $2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathrm{Z}$;

2) $\cos x - 2 = 0$; но $\cos x \neq 2$, т.е. нет решений.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathrm{Z}$.

175. Метод подстановки в решении системы двух уравнений

а) $\begin{cases}x + y = \pi;\\ \cos x - \cos y = 1;\end{cases}$ $\begin{cases}y = \pi - x;\\ \cos x - \cos(\pi - x) = 1;\end{cases}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$$\begin{cases}y = \pi - x;\\ -2\sin\dfrac{x+\pi-x}{2}\sin\dfrac{x-\pi+x}{2} = 1;\end{cases}\quad \begin{cases}y = \pi - x;\\ \sin\dfrac{\pi}{2}\cdot\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}y = \pi - x;\\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{2};\end{cases}\quad x - \dfrac{\pi}{2} = (-1)^{k+1}\cdot\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathrm{Z};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z; \\ y = \pi - \frac{\pi}{2} - (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} - \pi k,\ k \in Z; \end{cases}$$

или $y = \frac{\pi}{2} - (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} - \pi k,\ k \in Z;$

$$\begin{cases} y = \pi - x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2} \end{cases};\quad \begin{cases} y = \pi - x \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases};\quad \begin{cases} y = \pi - x \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z \\ y = \pi - \left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m\right), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z \\ \left[\begin{array}{l} y = \pi - \frac{\pi}{3} - 2\pi m = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z \\ y = \pi + \frac{\pi}{3} - 2\pi m = \frac{4\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z \end{array}\right. \end{cases}$$

б) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2}; \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x - \frac{\pi}{2}; \\ \cos^2 x + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x - \frac{\pi}{2}; \\ 2\cos^2 x = 2; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x - \frac{\pi}{2}; \\ \cos^2 x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - \frac{\pi}{2}; \\ \cos x = \pm 1; \end{cases}$$

1) $\begin{cases} y = x - \frac{\pi}{2}; \\ \cos x = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2\pi n - \frac{\pi}{2},\ n \in Z; \\ x = 2\pi n,\ n \in Z; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x - \frac{\pi}{2}; \\ \cos x = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z; \\ y = \pi + 2\pi n - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = \pi; \\ \sin x + \sin y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pi - x; \\ \sin x + \sin(\pi - x) = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pi - x; \\ 2\sin x = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pi - x; \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \pi - x; \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z; \\ y = \pi - (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} - \pi k,\ k \in Z; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z; \\ y = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi(1 - k),\ k \in Z; \end{cases}$$

г) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}; \\ \sin^2 x - \sin^2 y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - x; \\ \sin^2 x - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 1; \end{cases}$

$\sin^2 x - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 1;$ $\sin^2 x - \cos^2 x = 1;$ $-\cos 2x = 1;$

$2x = \pi + 2\pi n;$ $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$ $y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} - \pi n = -\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ -\pi n \,/\, n \in Z\right\}.$

176. а) $\begin{cases} \sin x - \cos y = 0; \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x = \cos y; \\ \sin^2 x + \sin^2 x = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos y = \sin x; \\ 2\sin^2 x = 2;\ \sin^2 x = 1; \end{cases}$

1) $\begin{cases} \sin x = 1; \\ \cos y = \sin x; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z; \\ \cos y = 1;\ y = 2\pi m,\ m \in Z; \end{cases}$

т.е. $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z\right); (2\pi m,\ m \in Z)\right\};$

2) $\begin{cases} \sin x = -1; \\ \cos y = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z; \\ y = \pi + 2\pi m,\ m \in Z; \end{cases}$

т.е. $\left\{\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z\right); (\pi + 2\pi m,\ m \in Z)\right\};$

б) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}; \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{6}; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{4} - x; \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1}{6}; \end{cases}$ $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1}{6};$

$\operatorname{tg} x \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\operatorname{tg} x} = \dfrac{1}{6};$ $6\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 1 = 0.$

Примем $\operatorname{tg} x = t;$ $6t^2 - 5t + 1 = 0;$ $t = \dfrac{1}{3}$ или $t = \dfrac{1}{2};$

1) $t = \dfrac{1}{3};$ $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$ и $y = \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} - \pi n,\ n \in Z;$

2) $t = \dfrac{1}{2};$ $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z$ и $y = \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - \pi k,\ k \in Z.$

Ответ:

$$\left\{\begin{bmatrix}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi n\right); \\ \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi k\right)/\ n,\ k\in Z\end{bmatrix}\right\}.$$

в) $\begin{cases}\sin x+\cos y=1; \\ \sin^2 x-\cos^2 y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}\sin x+\cos y=1; \\ (\sin x+\cos y)(\sin x-\cos y)=1;\end{cases}$

$\begin{cases}\sin x+\cos y=1; \\ + \\ \sin x-\cos y=1;\end{cases}$ метод алгебраического сложения.

$2\sin x=2$; $\sin x=1$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; $2\cos y=0$; $\cos y=0$;

$y=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)/\ n,\ k\in Z\right\}.$

г) $\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{6}; \\ \sin x\cos y=\frac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}y=x-\frac{\pi}{6}; \\ \sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};\end{cases}$

$\begin{cases}y=x-\frac{\pi}{6}; \\ \sin x\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};\end{cases}$ $\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=\frac{1}{2};$

$\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x=1$; $\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x$;

$\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=0 \ \big|:\cos^2 x\neq 0$; $\sqrt{3}\operatorname{tg} x-1=0$; $\sqrt{3}\operatorname{tg} x=1$;

$\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z; \\ y=\frac{\pi}{6}+\pi n-\frac{\pi}{6}=\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$

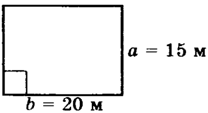
Ответ: $\left\{\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right\},\ n\in Z.$

ГЛАВА II. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ

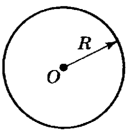
12. Приращение функции

177. а)



1) $P = (15 + 20) \cdot 2 = 70$ (м)
$\Delta P = 2(a + \Delta a) + b) - 2(a + b) =$
$= 2(a + b) + 2\Delta a - 2(a + b) = 2\Delta a =$
$= 2 \cdot 0{,}11 = 0{,}22$ (м) — приращение периметра;
2) $\Delta P = 2(a + (b + \Delta b)) - 2(a + b) =$
$= 2(a + b) + 2\Delta b - 2(a + b) = 2\Delta b = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$ (м);
$\Delta S_1 = (a + \Delta a) \cdot b - ab = \Delta a \cdot b = 0{,}11 \cdot 20 = 2{,}2$ (м^2);
$\Delta S_2 = a \cdot (b + \Delta b) - ab = ab + a \cdot \Delta b - ab = a \cdot \Delta b = 15 \cdot 0{,}2 = 3$ (м^2);

б)



$R = 2$ см; $S_{кр} = \pi R^2 = 4\pi$ (см^2)
1) $\Delta S = \pi \cdot (2 + 0{,}2)^2 - \pi \cdot 2^2 = \pi \cdot (2^2 + 0{,}8 + 0{,}04 - 2^2) = 0{,}84\pi$ (см^2);
2, 3, 4) — аналогично.

178. Найти приращение функции f в точке x_0, если

а) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$; $x_0 = -2$; $\Delta x = 0{,}1$;

$$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -\frac{2}{x_0 + \Delta x} - \left(-\frac{2}{x_0}\right) =$$

$$= -\frac{2}{-2 + 0{,}1} + \frac{2}{-2} = \frac{20}{19} - 1 = \frac{20}{19} - \frac{19}{19} = \frac{1}{19};$$

б) $f(x) = 2x^2 - 3$; $x_0 = 3$; $\Delta x = -0{,}2$;

$$\Delta f = 2(x_0 + \Delta x)^2 - 3 - 2x_0^2 + 3 = 2x_0^2 + 4 \cdot x_0 \cdot \Delta x + 2\Delta x^2 - 2x_0^2 =$$
$$= 4 \cdot 3 \cdot (-0{,}2) + 2 \cdot (-0{,}2)^2 = -2{,}4 + 0{,}08 = -2{,}32;$$

в) $f(x) = 3x + 1$; $x_0 = 5$; $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta f = 3(x_0 + \Delta x) + 1 - 3x_0 - 1 =$
$= 3x_0 + 3\Delta x - 3x_0 = 3 \cdot 0{,}01 = 0{,}03$;

г) $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$; $x_0 = 2$; $\Delta x = 0{,}1$;

$$\Delta f(x) = \frac{(x_0 + \Delta x)^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} = \frac{x_0^2}{2} + x_0 \cdot \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} =$$

$$= 2 \cdot 0{,}1 + \frac{0{,}1^2}{2} = 0{,}1 \cdot \left(2 + \frac{0{,}1}{2}\right) =$$

$$= 0,1 \cdot \frac{4,1}{2} = 0,205.$$

179. а) Найти Δx и Δf в точке x_0, если $f(x) = \cos^2 x$; $x_0 = \frac{2\pi}{3}$; $x = \frac{3\pi}{4}$.

Решение.

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi - 8\pi}{12} = \frac{\pi}{12};$$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \cos^2 x - \cos^2 \frac{2\pi}{3} =$$

$$= \cos^2 \frac{3\pi}{4} - \cos^2 \frac{2\pi}{3} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$

б) $f(x) = 4x - x^2$; $x_0 = 2,5$; $x = 2,6$;
$\Delta x = x - x_0 = 2,6 - 2,5 = 0,1$;
$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 4 \cdot 2,6^2 - 4 \cdot 2.5 + 2,5^2 =$
$= 4 \cdot 0,1 - 6,76 + 6,25 = 0,4 - 0,51 = -0,11$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{3}$;

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12};$$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - 1;$$

г) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$; $x_0 = 1,22$; $x = 1,345$; $\Delta x = 1,345 - 1,22 = 0,125$;

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{2 \cdot 1,345 - 1} - \sqrt{2 \cdot 1,22 - 1} =$$

$$= \sqrt{2,69 - 1} - \sqrt{2,44 - 1} =$$

$$= \sqrt{1,69} - \sqrt{1,44} = 1,3 - 1,2 = 0,1.$$

180. а) $f(x) = 1 - 3x^2$; $\Delta f(x_0) = ?$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 1 - 3(x_0 + \Delta x)^2 - 1 + 3x_0^2 =$$

$$= -3x_0^2 - 6x_0\Delta x - 3\Delta x^2 + 3x_0^2 =$$

$$-3\Delta x(2x_0 + \Delta x);$$

б) $f(x) = ax + b$; $\Delta f(x_0) = a(x_0 + \Delta x) + b - ax_0 - b =$
$= ax_0 + a\Delta x + b - ax_0 - b = a\Delta x$;

в) $f(x) = 2x^2$;

$$\Delta f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^2 = 2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2\Delta x^2 - 2x_0^2 =$$

$$= 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 = 2\Delta x(2x_0 + \Delta x);$$

г) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$; $\Delta f(x) = -\dfrac{1}{x_0 + \Delta x} + \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{-x_0 + x_0 + \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \dfrac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$.

181. Средняя скорость равна:

а) $v_{ср} = \dfrac{S(3) - S(0)}{\Delta t} = 50$ км/ч;

б) $v_{ср} = \dfrac{S(5) - S(3)}{\Delta t} = 65$ км/ч;

в) $v_{ср} = \dfrac{S(5,25) - S(3,25)}{\Delta t} = 65$ км/ч;

г) $v_{ср} = \dfrac{S(8) - S(0)}{\Delta t} = 57,5$ км/ч.

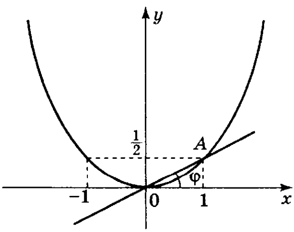
182. а) $\Delta x = x(2,5) - x(2) = 3,75$ — перемещение в положительном направлении оси OX; средняя скорость $v_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{3,75}{2,5 - 2} = 7,5$;

б) $\Delta x = x(8) - x(7) = -3$ — перемещение в отрицательном направлении оси OX; средняя скорость $v_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = -3$;

в) $\Delta x = x(5) - x(4) = 3 + 12 \cdot 5 - 5^2 - 12 \cdot 4 + 4^2 = 3$ — перемещение в положительном направлении оси OX; средняя скорость $v_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = 3$;

г) $\Delta x = x(8) - x(6) = 3 + 12 \cdot 8 - 8^2 - 3 - 12 \cdot 6 + 6^2 = -4$ — перемещение в отрицательном направлении оси OX; средняя скорость $v_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = -2$.

184.



$y = \dfrac{1}{2}x^2$ — парабола

а) Точки с абсциссами $x_1 = 0$; $x_1 = 1$ — общие для секущей и параболы.

В $\Delta OA1$: $k = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2} > 0$;

φ — острый угол секущей с OX;

б) $x_1 = -1$; $x_2 = -2$;

$$k = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2}{-2 + 1} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{-1} = \frac{1,5}{-1} = -1,5 < 0;$$

φ — тупой угол между секущей и осью OX;

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$; $\Delta x = 2 - 1 = 1$; $\Delta y = y(x_2) - y(x_1) =$

$= \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{2}(1)^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow$

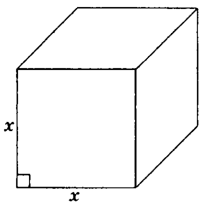
φ — острый угол;

г) $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $\Delta x = 0 - (-1) = 1$;

$\Delta y = y(x_2) - y(x_1) = y(0) - y(-1) = 0 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 = -\frac{1}{2}$;

$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ φ — тупой угол межу секущей и положительным направлением оси абсцисс.

185.



$S_{\text{полн}} = 6x^2$; Δx;

$S'_{\text{полн}} = 6\cdot(x + \Delta x)^2 = 6x^2 + 12x\cdot\Delta x + 6\cdot(\Delta x)^2$;

$\Delta S = 6x^2 + 12x\cdot\Delta x + 6(\Delta x)^2 - 6x^2 =$

$= 6\Delta x\cdot(2x + \Delta x)$.

186. а) $\Delta x = x - x_0$; $x = x_0 + \Delta x$; $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Для функции $f(x) = -x^3 + 3x$;

$\Delta f = -(x_0 + \Delta x)^3 + 3(x_0 + \Delta x) - (-(x_0)^3 + 3x_0) =$

$= -x_0^3 - 3x_0^2\cdot\Delta x - 3x_0\cdot(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3 +$

$+ x_0^3 - 3x_0 + 3x_0 + 3\Delta x = -3x_0^2\cdot\Delta x - 3x_0\cdot(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3 + 3\Delta x =$

$= \Delta x(-3x_0^2 - 3x_0\Delta x - (\Delta x)^2 + 3)$;

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -3x_0^2 - 3x_0\cdot\Delta x - (\Delta x)^2 + 3$;

б) $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{(x_0 + \Delta x)^2 - 1} - \frac{1}{x_0^2 - 1} = \frac{-2x_0\Delta x - (\Delta x)^2}{((x_0 + \Delta x)^2 - 1)(x_0^2 - 1)}$;

$\Delta x = x - x_0$; $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{2x_0\Delta x - (\Delta x)^2}{((x_0 + \Delta x)^2 - 1)(x_0^2 - 1)}$;

в) $\Delta x = x - x_0$; $x = x_0 + \Delta x$;

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3x_0^2\cdot\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2\Delta x =$

$= \Delta x(3x_0^2 - 2) + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = \Delta x\cdot(3x_0^2 + 3x_0\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 - 2)$;

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - 2$;

г) $x = x_0 + \Delta x$;

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{x_0^2 + 1 - (x_0 + \Delta x)^2 - 1}{((x_0 + \Delta x)^2 + 1)(x_0^2 + 1)} =$

$$= \frac{-2x_0\Delta x - (\Delta x)^2}{((x_0+\Delta x)^2+1)(x_0^2+1)}; \ \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{2x_0+\Delta x}{((x_0+\Delta x)^2+1)(x_0^2+1)}.$$

187. а) $x(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$; Δt; $v_{\text{средн.}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$;

$$\Delta x = x(t_0+\Delta t) - x(t_0) = V_0(t_0+\Delta t) - \frac{g}{2}(t_0+\Delta t)^2 - V_0 t_0 + \frac{g}{2}t_0^2 =$$

$$= V_0\Delta t - gt_0\Delta t - \frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

$$V_{\text{ср.}} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = V_0 - gt_0 - \frac{g}{2}\Delta t;$$

б) $x(t) = -at + b$;

$\Delta x = x(t_0+\Delta t) - x(t_0) = -a(t_0+\Delta t) + b - at_0 - b = -a\Delta t$;

$$V_{\text{ср.}} = -\frac{a\Delta t}{\Delta t} = -a;$$

в) $x(t) = \frac{gt^2}{2}$;

$$\Delta x = x(t_0+\Delta t) - x(t_0) = \frac{g}{2}(t_0+\Delta t)^2 - \frac{g}{2}t_0^2 = gt_0\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

$$V_{\text{ср}} = \frac{gt_0\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2}{\Delta t} = gt_0 + \frac{g}{2}\Delta t;$$

г) $x(t) = at - b$;

$\Delta x = x(t_0+\Delta t) - x(t_0) = a(t_0+\Delta t) - b - at_0 + b = a\Delta t$.

$$V_{\text{ср}} = \frac{a\Delta t}{\Delta t} = a.$$

13. Понятие о производной

189. а) Примем угол касательной к графику функции в данной точке за φ, угловой коэффициент — k.
В т. x_1 $k < 0 \Rightarrow \varphi$ — тупой угол;
в т. x_φ $k > 0 \Rightarrow \varphi$ — острый угол;
в точках x_2 и x_3 касательной нет.

б) В точках x_1, x_2, x_3, x_4 (функция возрастает) углы φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 — острые, $k > 0$.

в) В точка x_3, x_4 угловые коэффициенты $k > 0$, φ_3, φ_4 — острые; в т. x_1 $k < 0$; φ — тупой угол.

г) Функция убывающая, угловые коэффициенты в точках x_1, x_2, x_3, x_4 $k < 0 \Rightarrow$ углы φ тупые.

190. Промежутки возрастания функции на графике: $[a; b]$ и $[c; d]$.
Промежутки убывания: $[b; c]$ и $[d; e]$.

Касательные к графику в точках b, c и d параллельны оси абсцисс; $k = 0$.
В точках x_1, x_3 $k > 0 \Rightarrow$ углы наклона касательной к OX острые; в т. x_2, x_4 $k_2 < 0$; $k_4 < 0 \Rightarrow$ углы тупые.

191. а) $f(x) = 2x^2$; $x_0 = 1$; $\Delta x = 0,5$.

Найти $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ в т. x_0.

Решение.

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^2 =$

$= 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 = 2\Delta x(2x_0 + \Delta x);$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2(2x_0 + \Delta x) \mid x_0 = 1;\ \Delta x = 0,5 = 2 \cdot (2 \cdot 1 + 0,5) = 2,5 \cdot 2 = 5.$

Если $\Delta x = 0,1$; $0,01$, решение аналогично.

Ответы: 4,2; 4,02.

б) $f(x) = x^2$; $x_0 = 1$; $\Delta x = 0,5$;

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 =$

$= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x);$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = (2x_0 + \Delta x)\Bigg|_{\substack{x_0 = 1\\ \Delta x = 0,5}} = 2 + 0,5 = 2,5.$$

При $\Delta x = 0,1$; $\Delta x = 0,01$ решения аналогичны.

Ответы: 2,1; 2,01.

192. а) При $\Delta x \to 0$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 8x_0 + 4\Delta x \to 8x_0\Big|_{x_0 = 2} \to 16$

Если $x_0 = -2$, то $8x_0 = -8$.

б) При $\Delta x \to 0$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \to 3x_0^3\Big|_{x_0 = 1} \to 3$

при $x_0 = -21$, $3x_0^2 \to 3 \cdot (-21)^2 \to 1323;$

в) При $\Delta x \to 0$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = -2x_0 + \Delta x \to -2x_0\Big|_{x_0 = 1} \to -2$

при $x_0 = 2$; $-2x_0 \to -4$.

193. а) $f(x) = x^3$; $x_0 = 2$; $-1,5$.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 =$

$= \Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2);$

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \to 3x_0^2$ при $\Delta x \to 0$.

Ответ: $f'(x_0) = (x^3)' = 3x_0^2\Big|_{x_0 = 2} = 12$. При $x_0 = -1{,}5$; $f' =$

$= 3 \cdot (-1{,}5)^2 = 6{,}75$.

б) $f(x) = 4 - 2x$; $x_0 = 0{,}5$; -3;

1) $\Delta f = 4 - 2(x_0 + \Delta x) - (4 - 2x_0) = 4 - 2x_0 - 2\Delta x - 4 + 2x_0 = -2\Delta x$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = -2$ — постоянно при любом x_0.

Ответ: $(4 - 2x)' = -2$.

в) $f(x) = 3x - 2$; $x_0 = 5$; -2

1) $\Delta f = 3(x_0 + \Delta x) - 2 - 3x_0 + 3 = 3\Delta x$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{3\Delta x}{\Delta x} = 3$ — постоянно при любых x_0.

Ответ: $(3x - 2)' = 3$.

г) $f(x) = x^2$; $x_0 = 2{,}5$; -1

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x)$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \to 2x_0$ при $\Delta x \to 0$;

$2x_0\Big|_{x_0 = 2,5} = 2 \cdot 2{,}5 = 5$; $2x_0\Big|_{x_0 = -1} = 2 \cdot (-1) = -2$.

Ответ: $(x^2)' = 2x$.

194. а) $f(x) = x^2 - 3x$. Найти $f'(x_0)$ при $x_0 = -1$; 2

$f'(x_0) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$; $x = x_0 + \Delta x$;

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) - x_0^2 + 3x_0 =$

$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x_0 - 3\Delta x - x_0^2 + 3x_0 = \Delta x(2x_0 - x + \Delta x)$;

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x_0 + \Delta x - 3)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x - 3 \to 2x_0 - 3$ при $\Delta x \to 0$;

$f'(x_0) = (2x_0 - 3)\Big|_{x_0 = -1} = -2 - 3 = -5$;

$f'(x_0) = (2x_0 - 3)\Big|_{x_0 = 2} = 4 - 3 = 1$.

б) $f(x) = 2x^3$. Найти $f'(x_0)$ при $x_0 = 0$ и $x_0 = 1$.

$\Delta f = 2(x_0 + \Delta x)^3 - 2x_0^3 = 2x_0^3 + 6x_0^2\Delta x + 6x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x_0^3 =$
$= \Delta x(6x_0^2 + 6x_0\Delta x + (\Delta x)^2)$;

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 6x_0^2 + 6x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \to 6x_0$ при $\Delta x \to 0$

$f'(x_0) = 6x_0^2\Big|_{x_0=0} = 0;\quad f'(x_0) = 6x_0^2\Big|_{x_0=1} = 6.$

в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Найти $f'(x_0)$ при $x_0 = -2;\ 1$

$$\Delta f = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)};$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)} = -\frac{1}{x_0^2 + x_0\Delta x} \to -\frac{1}{x_0^2} \text{ при } \Delta x \to 0,$$

т.е. $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}\Big|_{x_0=-2} = -\dfrac{1}{4};\quad f'(1) = -\dfrac{1}{1^2} = -1.$

г) $f(x) = 4 - x^2$. Найти $f'(3)$, $f'(0)$

$f'(x_0) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x};$

$\Delta f = 4 - (x_0+\Delta x)^2 - 4 + x_0^2 = -x_0^2 - 2x_0\Delta x - (\Delta x)^2 + x_0^2 =$

$= -\Delta x(2x_0 + \Delta x);$

$f'(x_0) = \dfrac{-\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x} = -2x_0 - \Delta x \to -2x_0$ при $\Delta x \to 0;$

$f'(3) = -2\cdot 3 = -6;\ f'(0) = 0.$

195. а) $f(x) = x^2$. Найти уравнение касательной к графику функции через точку с абсциссой $x_0 = -1$.

Уравнение касательной: $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

1) $f(x_0) = f(-1) = 1;$

2) $f'(x_0) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x};\ \Delta f = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2(\Delta x)^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x);$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \to 2x_0$ при $\Delta x \to 0;$

$f'(x_0) = 2x_0\Big|_{x_0=-1} = -2.$

Имеем уравнение касательной: $y = 1 - 2(x+1)$' $y = -2x - 1$

б) $x_0 = 3$; $f(3) = 3^2 = 9$; $f'(3) = 2\cdot 3 = 6$; $y = 9 + 6(x-3)$; $y = 6x - 9$;

в) $x_0 = 0$; $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $y = 0$;

г) $x_0 = 2$; $f(2) = 4$; $f'(2) = 4$; $y = 4 + 4(x-2) = 4x - 4$; $y = 4x - 4$.

196. а) Найти мгновенную скорость точки, движущейся по закону $x(t) = -t^2 + 8t$, $t_0 = 6$.

Решение.

$\Delta x = x(t_0+\Delta t) - x(t_0) = -(t_0+\Delta t)^2 + 8(t_0+\Delta t) + t_0^2 - 8t_0 =$

$= -t_0^2 - 2t_0\Delta t - (\Delta t)^2 + 8t_0 + 8\Delta t + t_0^2 - 8t_0 = \Delta t(-2t_0 + 8 - \Delta t);$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0) = \frac{(-2t_0 - \Delta t + 8)\cdot\Delta t}{\Delta t} = -2t_0 - \Delta t + 8 \to -2t_0 + 8$$

при $\Delta x \to 0$, т.е. мгновенная скорость:

$$\upsilon_{\text{мгн}}(t_0) = (-2t_0 + 8)\Big|_{t_0 = 6} = -12 + 8 = -4.$$

б) $x(t) = 3t^3 + 2,\ t_0 = 2$

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = 3(t_0 + \Delta t)^3 + 2 - 3t_0^3 - 2 =$$
$$= 3t_0^2 + 9t_0^2\Delta t + 9t_0(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3 - 3t_0^3 =$$
$$= \Delta t(9t_0^2 + 9t_0\Delta t + (\Delta t)^2);$$
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 9t_0^2 + 9t_0\Delta x + (\Delta t)^2 \to 9t_0^2 \text{ при } \Delta x \to 0,$$

т.е. $x'(t_0) = 9t_0^2 = \upsilon_{\text{мгн}}(t_0)\Big|_{t_0 = 2} = 9 \cdot 4 = 36.$

в) $x(t) = \dfrac{t^2}{4};\ t_0 = 4$

$$\Delta x = \frac{(t_0 + \Delta t)^2}{4} - \frac{t_0^2}{4} = \frac{1}{4}(t_0^2 + 2t_0\Delta t + (\Delta t)^2 - t_0^2) = \frac{\Delta t(2t_0 + \Delta t)}{4};$$
$$x'(t_0) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{4}(2t_0 + \Delta t) \to \frac{t_0}{2} \text{ при } \Delta t = 0;$$
$$\upsilon_{\text{мгн}} = x'(t_0) = \frac{t_0}{2}\Big|_{t_0 = 4} = \frac{4}{2} = 2.$$

г) $x(t) = 5t - 3;\ t_0 = 10$

$$\Delta x = 5(x_0 + \Delta t) - 3 - 5x_0 + 3 = 5x_0 + 5\Delta t - 5x_0 = 5\Delta t;$$
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0) = \frac{5\Delta t}{\Delta t} = 5;\ \upsilon_{\text{мгн}} = 5 \text{ при любом } t.$$

14. Понятие о непрерывности функции в предельном переходе

197. Рис. *а*: Функция непрерывна на $D(y)$ в т. x_1, x_2, x_3;
рис. *б*: в т. x_2 функция претерпевает разрыв;
рис. *в*: разрыв функции в т. x_3;
рис. *г*: функция непрерывна в т. x_1, x_2, x_3.

199. а) Функция $f(x) = x^3 - 4x$ в каждой точке $D(f)$: $(-\infty; +\infty)$ непрерывна;

б) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ в точке $x = 1$ терпит разрыв;
$x = 1 \notin [2; +\infty)$, значит на $[2; +\infty)$ непрерывна;

в) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$ и, значит, на $[-10; 20]$;

г) $f(x) = 5x - \sqrt{x};\ f_1(x) = 5x$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$, и значит, на $[0; +\infty)$;
$f_2(x) = \sqrt{x}$ непрерывна при $x \geq 0$, т.е. на $(0; +\infty)$.

Вывод: $f(x)$ непрерывна на $(0; +\infty)$.

200. а) $f(x) = x^2 - 3x + 4 \to 4$ при $x \to 0$ (т.е. $f(x)$ — непрерывна);
$f(x) \to 2$ при $x \to 2$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ — функция непрерывна в любой точке $D(f)$ и, значит, при $x \to 1$, $f(x) \to \dfrac{1}{2}$, при $x \to 4$ $f(x) \to \dfrac{4}{17}$;

в) $f(x) = 4 - \dfrac{x}{2}$ — функция непрерывна при любых x, значит, при $x \to -2$, $f(x) \to 4+ + 1 = 5$;

при $x \to 0$ $f(x) \to 4$;

г) $f(x) = 4x - \dfrac{x^2}{4}$ — функция непрерывна при любых x;

При $x \to -1$ $f(x) \to -4 - \dfrac{1}{4} = -4\dfrac{1}{4}$;

при $x \to 4$, $f(x) \to 16 - \dfrac{16}{4} = 12$.

201. а) $m(x) = 3f(x)g(x) \to 3 \cdot 1 \cdot (-2) = -6$;
при $f(x) \to 1$, $g(x) \to -2$;

б) $m(x) = \dfrac{f(x) - g(x)}{f(x) + g(x)}$; $f(x) \neq -g(x)$

При $f(x) \to 1$. $g(x) \to -2$; $m(x) \to \dfrac{1+2}{1-2} = -3$;

в) $m(x) = 4f(x) - g(x)$ — непрерывна.
При $f(x) \to 1$, $g(x) \to -2$; $m(x) \to 4 \cdot 1 - (-2) = 6$;

г) $m(x) = (3 - g(x))f(x)$
При $f(x) \to 1$, $g(x) \to -2$; $m(x) \to (3 + 2) \cdot 1 = 5$.

202. а) $m(x) = \dfrac{f(x)}{(g(x))^2}$; $g(x) \neq 0$

При $f(x) \to 3$, $g(x) \to -0{,}5$, $x \to -1$; $m(x) \to \dfrac{3}{(-0,5)^2} = 12$;

б) $m(x) = (f(x) - g(x))^2$
При $f(x) \to 3$, $g(x) = -0{,}5$; $m(x) \to (3 + 0{,}5)^2 = 12{,}25$;

в) $m(x) = (f(x))^2 + 2g(x)$
При $f(x) \to 3$, $g(x) \to -0{,}5$; $m(x) \to 3^2 + 2(-0{,}5) = 8$;

г) $m(x) = \dfrac{(g(x))^2}{f(x) - 2}$; $f(x) \neq 2$

$f(x) \to 3$, $g(x) \to -0{,}5$; $m(x) \to \dfrac{(-0,5)^2}{3-2} = 0,25$.

203. а) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x-3}$; $x\to 4$; $f(x)\to\dfrac{16+12+2}{4-2}=30$;

б) $f(x)=\dfrac{x^3-3x}{x^2-2x+7}\to\dfrac{-1+3}{1+2+7}=\dfrac{1}{5}$ при $x\to -1$;

в) $f(x)=\dfrac{5-2x}{2+x}\to\dfrac{5-4}{4}=\dfrac{1}{4}$ при $x\to 2$;

г) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}=x-3\to -4$ при $x\to -1$; $x\neq -3$.

204. $P_{\text{квадрата}}=4a$, a — сторона квадрата с точностью до 0,01 дм, $P=4a$ — будет с точностью $4\cdot 0{,}01=0{,}04$ дм.

205. Периметр правильного треугольника со стороной a вычислен с точностью до 0,03 дм. $P_\Delta=3a$, тогда сторону достаточно измерить с точностью до $0{,}03:3=0{,}01$ дм.

206. Длина окружности с радиусом R равна $2\pi R$ и вычислена с точностью до 0,06 дм.
Тогда радиус достаточно измерить с точностью

$|R-R_1|\le\dfrac{0,06}{2\pi}\le\dfrac{0,03}{\pi}$, т.е. $|R-R_1|\le 0{,}01$ (дм).

208. а) $f'(x)=(x^2+x^3)'=2x+3x^2$;

б) $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}+5x-2\right)'=-\dfrac{1}{x^2}+5$;

в) $f'(x)=(x^2+3x-1)'=2x+3$;

г) $f'(x)=(x^3+\sqrt{x})'=3x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

209. а) $f(x)=x^3\cdot(4+2x-x^2)=4x^3+2x^4-x^5$.
Ищем производную суммы (и применяем производную степени):
$f'(x)=12x^2+8x^3-5x^4=x^2(12+8x-5x^2)$;

б) $f(x)=\sqrt{x}\cdot(2x^2-x)$; $g(x)=\sqrt{x}$; $m(x)=2x^2-x$.

Ищем производную произведения:

$$f'(x)=g'(x)\cdot m(x)+m'(x)\cdot g(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(2x^2-x)+(4x-1)\cdot\sqrt{x}=$$

$$=\frac{2x^2-x+8x^2-2x}{2\sqrt{x}}=\frac{10x^2-3}{2\sqrt{x}};$$

в) $f(x)=x^2\cdot(3x+x^3)=3x^3+x^5$; $f'(x)=9x^2+5x^4=x^2(9+5x^2)$;

г) $f(x)=(2x-3)\cdot(1-x^3)$.
Производная произведения:
$f'(x)=(2x-3)'\cdot(1-x^3)+(1-x^3)'\cdot(2x-3)=2(1-x^3)+$
$+(-3x^2)\cdot(2x-3)=2-2x^3-6x^3+9x^2=2+9x^2-8x^3$.

210. а) $y = \dfrac{1+2x}{3-5x}$. Производная частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$;

$$y'(x) = \frac{(1+2x)' \cdot (3-5x) - (1+2x) \cdot (3-5x)'}{(3-5x)^2} = \frac{2(3-5x) + 5(1+2x)}{(3-5x)^2} =$$

$$= \frac{6 - 10x + 5 + 10x}{(3-5x)^2};$$

$$y'(x) = \frac{11}{(3-5x)^2};$$

б) $y = \dfrac{x^2}{2x-1}$. Производная частного

$$y'(x) = \frac{(x^2)'(2x-1) - (2x-1)' \cdot x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x(2x-1-x)}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2};$$

в) $y = \dfrac{3x-2}{5x+8}$. Ищем производную частного

$$y'(x) = \frac{(3x-2)' \cdot (5x+8) - (5x+8)' \cdot (3x-2)}{(5x+8)^2} = \frac{3(5x+8) - 5(3x-2)}{(5x+8)^2} =$$

$$= \frac{15x + 24 - 15x + 10}{(5x+8)^2};$$

$$y'(x) = \frac{34}{(5x+8)^2};$$

г) $y = \dfrac{3-4x}{x^2}$; $y'(x) = \dfrac{-4x^2 - 2x(3-4x)}{x^4} = \dfrac{-4x^2 - 6x + 8x^2}{x^4} = \dfrac{4x^2 - 6}{x^4}$;

$$y'(x) = \frac{4x-6}{x^3}.$$

211. Ищем производную суммы и применяем производную степени.

а) $y(x) = x^8 - 3x^4 - x + 5$; $y'(x) = 8x^7 - 12x^3 - 1$;

б) $y = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{x^2} + \sqrt{x}$; $y = \dfrac{1}{3}x - 4x^{-2} + x^{\frac{1}{2}}$;

$$y' = \frac{1}{3} + 8x^{-3} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{8}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

в) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$; $y' = 7x^6 - 20x^4 + 2$;

г) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{x^3} + 1$; $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x^{-3} + 1$; $y' = x - 9x^{-4} = x - \dfrac{9}{x^4}$.

212. а) $f(x) = x^2 - 3x$; $f'(x) = (2x-3)\Big|_{x=-\frac{1}{2}} = -1 - 3 = -4$; $f'(2) = 4 - 3 = 1$;

б) $f(x) = x - 4\sqrt{x};\ \ f(x) = x - 4x^{\frac{1}{2}};\ \ f'(x) = 1 - 2x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}};$

$$f'(0,01) = 1 - \frac{2}{\sqrt{0,01}} = 1 - \frac{2}{0,1} = -19;\ \ f'(4) = 1 - \frac{2}{\sqrt{4}} = 1 - 1 = 0;$$

в) $f(x) = x - \dfrac{1}{x};\ \ f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2};$

$$f'(\sqrt{2}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};\ \ f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 1 + 3 = 4;$$

г) $f(x) = \dfrac{3 - x}{2 + x};\ \ f'(x) = \dfrac{-1(2 + x) - 1(3 - x)}{(2 + x)^2} = \dfrac{-2 - x - 3 + x}{(2 + x)^2} = \dfrac{-5}{(2 + x)^2};$

$$f'(3) = \frac{-5}{(2 - 3)^2} = -5;\ \ f'(0) = -\frac{5}{4}.$$

213. а) Решить уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = 2x^2 - x$; $f'(x) = 4x - 1$;

$4x - 1 = 0;\ \ x = \dfrac{1}{4};$

б) $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + x^2 + 12;\ f'(x) = -2x^2 + 2x;\ -2x^2 + 2x = 0;\ -2x(x - 1) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} -2x = 0; \\ x - 1 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x - 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0;\ 1\}$.

в) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 1,5x^2 - 4x;\ f'(x) = x^2 - 3x - 4;\ f'(x) = 0;\ x^2 - 3x - 4 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2};\ x_1 = 4;\ x_2 = -1;$$

г) $f(x) = 2x - 5x^2;\ f'(x) = 2 - 10x;\ f'(x) = 0;\ 2 - 10x = 0;\ x = 0,2.$

214. а) Решить неравенство $f'(x) < 0$, если $f(x) = 4x - 3x^2$.

Решение.

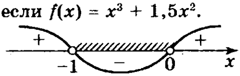
$f'(x) = 4 - 6x;\ 4 - 6x < 0;\ 4 < 6x;\ \ x > \dfrac{2}{3}.$

Ответ: $\left[\dfrac{2}{3};\ +\infty\right).$

б) Решить неравенство $f'(x) < 0$, если $f(x) = x^3 + 1,5x^2$.

Решение.

$f'(x) = 3x^2 + 3x;\ 3x(x + 1) < 0;$



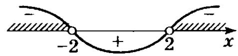
Ответ: $(-1;\ 0)$.

в) $f(x) = x^2 - 5x;\ f'(x) = 2x - 5;\ f'(x) < 0;\ 2x - 5 < 0;\ \ x < \dfrac{5}{2}.$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

г) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$; $f'(x) = 4 - x^2$; $4 - x^2 < 0$; $(2 - x)(2 + x) < 0$;

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.



215. Найти производные функций

а) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{1 + 4x^5}$;

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 3)(1 + 4x^5) - 20x^4(x^2 - 3x)}{(1 + 4x^5)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 + 12x^7 - 3 - 12x^5 - 20x^7 + 60x^5}{(1 + 4x^5)^2} =$$

$$= \frac{-8x^7 + 48x^5 + 3x^2}{(1 + 4x^5)^2} = \frac{x^2(-8x^5 + 48x^3 + 3)}{(1 + 4x^5)^2};$$

б) $f(x) = \left(\dfrac{3}{x} + x^2\right)(2 - \sqrt{x})$;

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x} + x^2\right)' \cdot (2 - \sqrt{x}) + (2 - \sqrt{x})' \cdot \left(\frac{3}{x} + x^2\right) =$$

$$= \left(2x - \frac{3}{x^2}\right)(2 - \sqrt{x}) + \left(\frac{3}{x} + x^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$$

$$= 4x - 2x\sqrt{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{3}{2x} - \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{8x^3\sqrt{x} - 4x^4 - 12\sqrt{x} - 3x\sqrt{x} - x^4}{2x^2 \cdot \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}(8x^3 - 3x - 12) - 5x^4}{2x^2\sqrt{x}};$$

$$f(x) = \frac{5 - 2x^6}{1 - x^3} = \frac{-12x^5(1 - x^3) + 3x^2(5 - 2x^6)}{(1 - x^3)^2} =$$

в) $$= \frac{-12x^5 + 12x^8 + 15x^2 - 6x^8}{(1 - x^3)^2} =$$

$$= \frac{-12x^5 + 6x^8 + 15x^2}{(1 - x^3)^2} = \frac{x^2(15 - 12x^2 + 6x^6)}{(1 - x^3)^2};$$

г) $f(x) = \sqrt{x}(3x^5 - x)$;

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^5 - x) + \sqrt{x}(15x^4 - 1) =$$

$$= \frac{3x^5 - x + 2x(15x^4 - 1)}{2\sqrt{x}} = \frac{3x^5 - x + 30x^5 - 2x}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{33x^5 - 3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x(11x^4 - 1)}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}(11x^4 - 1).$$

216. **Найти значения x, при которых $f(x) = 0$.**

а) $f(x) = x^5 - 3\frac{1}{3}x^3 + 5x$; $f'(x) = 5x^4 - 10x^2 + 5$; $f'(x) = 0$;

$5(x^4 - 2x^2 + 1) = 0$; $(x^2 - 1)^2 = 0$; $x = \pm 1$;

б) $f(x) = 2x^4 - x^8$; $f'(x) = 8x^3 - 8x^7 = 8x^3(1 - x^4) = 8x^3(1 - x^2)(1 + x^2)$;

$f'(x) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = \pm 1; \end{array}\right.$

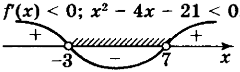
в) $f(x) = x^4 + 4x$; $f'(x) = 4x^3 + 4$; $f'(x) = 0$; $4 \cdot (x^3 + 1) = 0$; $x = -1$;

г) $f(x) = x^4 - 12x^2$; $f'(x) = 4x^3 - 24x$; $f'(x) = 0$; $4x \cdot (x^2 - 6) = 0$;

$\left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x^2 - 6 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = \pm\sqrt{6}. \end{array}\right.$

217. **Решить неравенство $f'(x) < 0$**

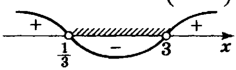
а) $f(x) = x^2 - 6x^2 - 63x$; $f'(x) = 3x^2 + 12x - 63 = 3(x^2 - 4x - 21)$;
$f'(x) < 0$; $x^2 - 4x - 21 < 0$; $(x - 7)(x + 3) < 0$;



Ответ: $(-3; 7)$.

б) $f(x) = 3x - 5x^2 + x^3$; $f'(x) = 3 - 10x + 3x^2$;

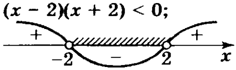
$3x^2 - 10x + 3 = 3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 3)$; $f'(x) < 0$; $\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 3) < 0$;



Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

в) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x$; $f'(x) = 2x^2 - 8$; $f'(x) < 0$; $2(x^2 - 4) < 0$;

$(x - 2)(x + 2) < 0$;



Ответ: $(-2; 2)$.

г) $f(x) = 3x^2 - 9x - \frac{1}{3}x^3$; $f'(x) = 6x - 9 - x^2$; $-x^2 + 6x - 9 < 0$

или $x^2 - 6x + 9 > 0$; $(x - 3)^2 > 0$.

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

218. Если $f'(x) = 2x + 3$, то одна из функций

а) $f(x) = x^2 + 3x$, или $f(x) = x^2 + 3x - 1$ и др.;

б) $f'(x) = 16x^3 - 0{,}4$; $f(x) = 4x^4 - 0{,}4x$; или $f(x) = 4x^4 - 0{,}4x + \text{const}$;

в) $f'(x) = 8x - 2$; $f(x) = 4x^2 - 2x$; или $f(x) = 4x^2 - 2x + \text{const}$;

г) $f'(x) = 9x^2 - \dfrac{1}{2}$; $f(x) = 3x^3 - \dfrac{1}{2}x + 7$.

219. а) Если каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не имеет производной в т. x_0, то утверждение, что $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ не имеет производной в т. x_0 неверно;

б) если $f_1(x)$ имеет производную, а $f_2(x)$ не имеет производной, то $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ не имеет производной в т. x_0.

16. Производная сложной функции

220. Задать формулами элементарные функции f и g, из которых составлена сложная функция $h(x) = g(f(x))$.

а) $h(x) = \cos 3x$; $y = f(x) = 3x$; $g(y) = \cos y$;

б) $h(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; $y = f(x) = 2x - \dfrac{\pi}{3}$; $g(y) = \sin y$;

в) $h(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; $y = f(x) = \dfrac{x}{2}$; $g(y) = \operatorname{tg} y$;

г) $h(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; $y = f(x) = 3x + \dfrac{\pi}{4}$; $g(y) = \cos y$.

221. а) $h(x) = (3 - 5x)^5$; $f(x) = y = 3 - 5x$; $g(y) = y^5$;

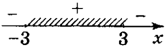
б) $h(x) = \sqrt{\cos x}$; $f(x) = y = \cos x$; $g(y) = \sqrt{y}$;

в) $h(x) = (2x + 7)^7$; $f(x) = y = 2x + 1$; $g(y) = y^7$;

г) $h(x) = \operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$; $f(x) = y = \dfrac{1}{x}$; $g(y) = \operatorname{tg} y$.

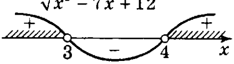
222. Найти область определения каждой из функций:

а) $y = \sqrt{9 - x^2}$; $D(y)$: $9 - x^2 \ge 0$; $(3 - x)(3 + x) \ge 0$;



Ответ: $[-3; 3]$.

б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$; $D(y)$: $x^2 - 7x + 12 > 0$; $(x - 3)(x - 4) > 0$;



Ответ: $(-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$.

в) $y = \sqrt{0,25 - x^2}$; $D(y)$: $0,25 - x^2 \geq 0$; $(x - 0,5)(x + 0,5) \geq 0$;

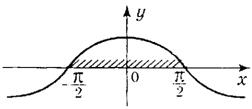
Ответ: $(-\infty; -0,5] \cup [0,5; +\infty)$.

г) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x + 5 - x^2}}$; $D(y)$: $4x - 5 - x^2 > 0$ или $x^2 - 4x - 5 < 0$;

$(x - 5)(x + 1) < 0$;

Ответ: $(-1; 5)$.

223. а) $y = \sqrt{\cos x}$; $D(y)$: $\cos x \geq 0$; $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;



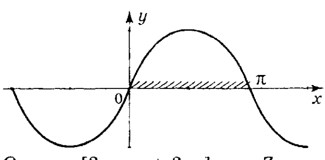
б) $y = \dfrac{1}{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)}$; $D(y)$: $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) \neq 0$; $x - \dfrac{\pi}{6} \neq \pi n$;

$x \neq \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$;

в) $y = \operatorname{tg} 2x$; $y = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$; $D(y)$: $\cos 2x \neq 0$; $2x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$;

$x \neq \dfrac{\pi}{4} + 4\pi n$, $n \in Z$;

г) $y = \sqrt{\sin x}$; $D(y)$: $\sin x \geq 0$; $[0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.



Ответ: $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

224. Найти производную функций

а) $f(x) = (2x - 7)^8$; $f'(x) = 8(2x - 7)^7 \cdot 2 = 16(2x - 7)^7$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{(5x + 1)^3}$; $f(x) = (5x - 1)^{-3}$; $f'(x) = -3(5x + 1)^{-4} \cdot 5 = \dfrac{-15}{(5x + 1)^4}$;

в) $f(x) = (9x + 5)^4$; $f'(x) = 4(9x + 5) \cdot 9 = 36(9x + 5)$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{(6x-1)^5}$; $f(x) = (6x - 1)^{-5}$; $f'(x) = -5(6x-1)^{-6} \cdot 6 = \dfrac{-30}{(6x-1)^6}$.

225. а) $f(x) = \left(3 - \dfrac{x}{2}\right)^{-9}$; $f'(x) = -9\left(3 - \dfrac{x}{2}\right)^{-10} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{2\left(3 - \dfrac{x}{2}\right)^{10}}$;

б) $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}x - 7\right)^8 - (1 - 2x)^4$.

Ищем производную разности двух функций и степени сложной функции:

$$f'(x) = 8\left(\frac{1}{4}x - 7\right)^7 \cdot \frac{1}{4} - 4(1-2x)^3 \cdot (-2) = 2\left(\frac{1}{4}x - 7\right)^7 + 8(1-2x)^3;$$

в) $f(x) = (4 - 1{,}5x)^{10}$; $f'(x) = 10(4 - 1{,}5x)^9 \cdot (-1{,}5) = -15(4 - 1{,}5x)^9$;

г) $f(x) = (5x - 2)^{13} - (4x + 7)^{-6}$; $f'(x) = 13(5x - 2)^{13} \cdot 5 +$

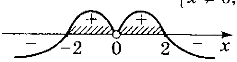
$+ 6(4x + 7)^{-7} \cdot 4 = 65(5x - 2) + 24 \cdot \dfrac{1}{(4x+7)^7}$.

226. Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$; $D(y)$: $1 - \cos 2x \geq 0$; $2\cos x \leq 1$; $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$;

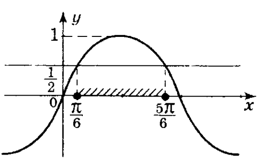
$x \in \left[\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

б) $y = \sqrt{\dfrac{4}{x^2} - 1}$; $D(y)$: $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2} - 1 \geq 0; \\ x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{4 - x^2}{x^2} \geq 0; \\ x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (2-x)(2+x) \leq 0; \\ x \neq 0; \end{cases}$



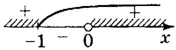
Ответ: $x \in [-2; 0) \cup (0; 2]$.

в) $y = \sqrt{\sin x - 0{,}5}$; $D(y)$: $\sin x - \dfrac{1}{2} \geq 0$; $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$;



Ответ: $x \in \left[\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

г) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x} + 1}$; $D(y)$: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + 1 \geq 0; \\ x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} \geq 0; \\ x \neq 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} (x+1) \cdot x \geq 0; \\ x \neq 0; \end{cases}$



Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$.

227. Заданы функции $f(x) = 3 - 2x$, $g(x) = x^2$. Выразить сложную функцию

а) $h(x) = f(g(x))$; $h(x) = 3 - 2x = 3 - 2 \cdot g(x) = 3 - 2 \cdot x^2$;

б) $f(x) = 3 - 2x$; $p(x) = \sin x$; $h(x) = g(p(x)) = \sin^2 x$;

в) $h(x) = g(f(x)) = (3 - 2x)^2$;

г) $h(x) = p(f(x))$; $p(x) = \sin x$; $h(x) = \sin(3 - 2x)$.

228. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $g(x) = \cos x$; $p(x) = \sqrt{x}$

Составить функции:

а) $h(x) = f(g(x)) = \dfrac{1}{\cos x - 1}$; $D(h)$; $\cos x \neq 1$; $x \neq 0 + 2\pi n$, $n \in Z$;

$x \neq 2\pi n$, $n \in Z$;

б) $h(x) = f(p(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$; $D(h)$: $\sqrt{x} \neq 1$; $x \neq 1$.

Ответ: R, кроме $x = 1$.

в) $h(x) = p(f(x)) = \sqrt{\cos x}$; $D(h)$: $\cos x \geq 0$;

$x \in \left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

г) $h(x) = p(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; $D(h)$: $x > 1$, т.е. $x \in (1; +\infty)$.

229. Найти такую функцию f, что $f(g(x)) = x$.

а) $g(x) = 2x$; $f(x) = \dfrac{x}{2}$. Проверим: $f(g(x)) = \dfrac{1}{2}(2x) = x$;

б) $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$; т.к. $f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$; $x \geq 0$;

в) $g(x) = 3x + 2$; $f(x) = \dfrac{x-2}{3}$; $f(g(x)) = \dfrac{(3x+2) - 2}{3} = x$;

г) $g(x) = x^2 + 1$; $x \leq 0$; $f(x) = -\sqrt{x-1}$,

т.к. $f(g(x)) = -\sqrt{(x^2+1) - 1} = -|x| = x$, $x \leq 0$.

230. а) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)^{17}$; $f'(x) = 17x(3x^2 - 4)(x^3 - 2x^2 + 3)^{16}$;

б) $f(x) = \sqrt{1 - x^4} + \dfrac{1}{x^2 + 3}$; $f(x) = (1 - x^4)^{\frac{1}{2}} + (x^2 + 3)^{-1}$;

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4x^3) - (x^2 + 3)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x^3}{\sqrt{1 - x^4}} - \frac{2x}{(x^2 + 3)^2};$$

в) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 5}$; $f(x) = (4x^2 + 5)^{\frac{1}{2}}$;

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4x^2 + 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot (8x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 5}};$$

г) $f(x) = (3 - x)^5 + \sqrt{2x - 7} = (3 - x^3)^5 + (2x - 7)^{\frac{1}{2}}$;

$$f'(x) = 5(3 - x^3)^4 \cdot (-3x^2) + \frac{1}{2}(2x - 7)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2) =$$

$$= -15x^2(3 - x^3)^4 + \frac{1}{\sqrt{2x - 7}}.$$

17. Производные тригонометрических функций

231. а) $y'(x) = 2\cos x$;

б) $y'(x) = -\frac{1}{2}\cos x$;

в) $y'x = -\frac{1}{2}\cos x$;

г) $y'(x) = \frac{3}{2}\cos x$.

232. а) $y'(x) = -3\sin x$;

б) $y'(x) = 1 - 2\sin x$;

в) $y'(x) = \sin x$;

г) $y'(x) = 2\cos x - \frac{3}{2}\sin x$.

233. а) $y'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x}$;

б) $y'(x) = -\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$;

в) $y'(x) = \frac{1}{2\cos^2 x}$;

г) $y'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - \cos x$.

234. а) $f'(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x - \pi))' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x) \cdot 2 = \sin 2x$; $f'(x) = f'(\pi) = 0$;

б) $f'(x) = x' + (\operatorname{tg} x)' = 1 + \frac{2}{\cos^2 2x}$; $f'(0) = f'(\pi) = 3$;

в) $f'(x) = 3\left(\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \sin\frac{x}{3}$; $f'(0) = 0$; $f'(\pi) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $f'(x) = 2\left(\cos\frac{x}{2}\right)' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\sin\frac{x}{3} = -\sin\frac{x}{2}$; $f'(0) = 0$;

$f'(\pi) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$.

235. Решить уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x$; $f'(x) = \frac{1}{2} - \sin x$; $f'(x) = 0$; $\frac{1}{2} - \sin x = 0$,

$\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

б) $f(x) = x - \operatorname{tg} x$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$; $f'(x) = 0$; $1 - \frac{1}{\cos^2 x} = 0$;

$1 = \frac{1}{\cos^2 x}$; $\cos x = 1$; $\left[\begin{array}{l}\cos x = 1;\\ \cos x = -1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = 2\pi n,\ n \in Z;\\ x = \pi + 2\pi n = \pi(2n+1),\ n \in Z;\end{array}\right.$

в) $f(x) = 2\sin x - 1$; $f'(x) = 2\cos x$; $f'(x) = 0$; $\cos x = 0$,

$x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$;

г) $f(x) = x - \cos x$; $f'(x) = 1 + \sin x$; $1 + \sin x = 0$, $\sin x = -1$;

$x = -\frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$.

236. Найти производные функций:

а) $f(x) = x^3 \sin 2x$. Ищем производную произведения двух функций:
$f'(x) = (x^3)' \cdot \sin 2x + (\sin 2x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot \sin 2x + x^3 \cdot \cos 2x \cdot 2 =$
$= x^2 \cdot (3\sin 2x + 2x\cos 2x)$;

б) $f(x) = x^4 + \operatorname{tg} 2x$. Производная суммы:

$f'(x) = 4x^3 + \frac{1 \cdot 2}{\cos^2 2x} = 4x^3 + \frac{2}{\cos^2 2x}$;

в) $f(x) = \frac{\cos 3x}{x}$. Производная частного двух функций ($x \neq 0$):

$f'(x) = \frac{-\sin 3x \cdot 3 - 1 \cdot \cos 3x}{x^2} = \frac{-3\sin 3x - \cos 3x}{x^2}$;

г) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$; $f'(x) = \frac{1 \cdot \sin x - \cos x \cdot x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$.

237. Найти производную каждой из функций:

а) $f(x) = \sin^2 x$; $f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x} =$

$= \frac{-\cos 2x \cdot 4}{4\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{-4\cos 2x}{\sin^2 2x}$;

в) $f(x) = \cos^2 x$; $f'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\sin x\cos x = -\sin 2x$;

г) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$; $f(x) = 1$; $f'(x) = 0$.

238. а) $f(x) = \cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x$; $f(x) = \sin(2x + x) = \sin 3x$;
$f'(x) = 3 \cos 3x$;

б) $f(x) = \cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4}$; $f(x) = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{4}\right) = \cos \frac{x}{2}$; $f'(x) = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$;

в) $f(x) = \sin 5x \sin 3x + \cos 5x \cos 3x)$; $f(x) = \cos (5x - 3x) = \cos 2x$;
$f'(x) = -2 \sin 2x$;

г) $f(x) = \sin 3x \cos 3x$; $f(x) = \frac{2 \sin 3x \cos 3x}{2} = \frac{1}{2} \sin 6x$; $f'(x) = 3 \cos 6x$.

239. Найти точки, в которых $f'(x) = 0$; $f'(x) > 0$, если:

а) $f(x) = 2 \sin^2 x - \sqrt{2}x$; $f'(x) = 2(2 \sin x \cos x) - \sqrt{2} = 2 \sin 2x - \sqrt{2}$;

$f'(x) = 0$; $2 \sin 2x - \sqrt{2} = 0$; $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $2x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$;

$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$;

$f'(x) > 0$; $\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; $2x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right),\ n \in Z$;

$x \in \left(\frac{\pi}{8} + \pi n; \frac{3\pi}{8} + \pi n\right),\ n \in Z$;

б) $f(x) = 2x + \cos(4x - \pi)$; $f(x) = 2x - \cos 4x$;

$f'(x) = 2 + 4 \sin 4x$; $f'(x) = 0$; $2(1 + 2 \sin 4x) = 0$; $\sin 4x = -\frac{1}{2}$;

$f'(x) > 0; \sin 4x > -\frac{1}{2}; 4x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4},\ k \in Z$;

$4x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z$; $x \in \left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}; \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}\right),\ n \in Z$;

в) $f(x) = \cos 2x$; $f'(x) = -2 \sin 2x$; $f'(x) = 0$; $\sin 2x = 0$; $2x = \pi n,\ n \in Z$;

$x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$;

$f'(x) > 0$; $-2 \sin 2x > 0$; $\sin 2x < 0$; $2x \in (-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n)$;

$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$;

г) $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}x$; $f'(x) = 2 \cos 2x - \sqrt{3}$; $f'(x) = 0$; $2 \cos 2x = \sqrt{3}$;

$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; $x = \pm \frac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z$;

$f'(x) > 0$; $\cos 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z$;

$x \in \left(-\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{\pi}{12} + \pi n\right), n \in Z.$

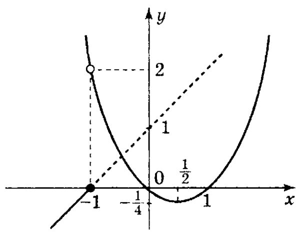
240. Задать формулой хотя бы одну функцию f, если:
а) $f'(x) = 1 - \sin x$; $f(x) = x + \cos x$ (или любая из $f(x) = x + \cos x + \text{const}$);
б) $f'(x) = 2\cos 2x$; $f(x) = \sin 2x$ (или любая из $f(x) = \sin 2x + \text{const}$);
в) $f'(x) = -\cos x$; $f(x) = -\sin x$ ($f(x) = -\sin x + \text{const}$);
г) $f'(x) = 3\sin x$; $f(x) = -3\cos x$ ($f(x) = -3\cos x + 5$; $f(x) = -3\cos x - 8$ и т.д.).

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И НЕПРЕРЫВНОСТИ

241. Является ли функция f непрерывной в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, если:
а) $f(x) = x^4 - 4 + 1$ — функция непрерывна и дифференцируема на $R = (-\infty; +\infty)$, $x = 0$, $x = -1$ принадлежат $(-\infty; +\infty)$;

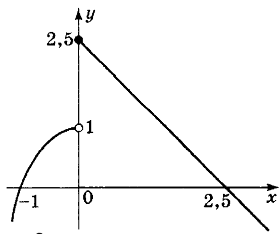
б) $f(x) = \begin{cases} x + 1; & x \le -1; \\ x^2 - x, & x > -1; \end{cases}$

Функция $m(x) = x + 1$ непрерывна на $(-\infty; -1]$;
функция $n(x) = x^2 - x$ непрерывна на $(-1; +\infty)$.
$(m'(x) = 1,\ n'(x) = 2x - 1)$
В т. $x = -1$ $f(x)$ терпит разрыв.



в) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0; \\ 5 - 2x, & x \ge 0; \end{cases}$

Функция $m(x) = 1 - x^2$ на D: $(-\infty; 0)$ непрерывна и дифференцируемая (а значит, и в точке -1).
Функция $n(x) = 5 - 2x$ на D: $[0; +\infty)$ непрерывна и дифференцируемая в т. $x = 0$, а в точке $x = -1$ не существует.



Ответ: $f(x)$ терпит разрыв в т. $x = 0$.

г) $f(x) = 2x - x^2 + x^2$; $D(f)$: $(-\infty; +\infty)$; $x = 0$ и $x = -1$ принадлежат $D(f)$.
Функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируемая на $D(f)$.

242. Найти промежутки непрерывности функции:

а) $f(x) = x^3 - 2x^2$; $f'(x) = 3x^2 - 4x$ определена на R, т.е. функция $f(x)$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$;

б) $f(x) = \dfrac{x^3+27}{3x+x^2}$; $f(x) = \dfrac{x^2+3^3}{x(3+x)} = \dfrac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x+3)\cdot x} = \dfrac{x^2-3x+9}{x}$;

$D(f)$: $x \neq 0$; $x \neq -3$;

$f(x)$ непрерывна на $(-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$;

в) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4$; $f'(x) = 8x^3 - 6x$; $D(f)$ и $D(f')$: $(-\infty; +\infty)$

Функция $f(x)$ — непрерывна на $(-\infty; +\infty)$;

г) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-8}$; $f(x) = \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \dfrac{x-3}{x^2+2x+4}$, $x \neq 2$;

$x^2 + 2x + 4 > 0$ при любых x; $f(x)$ непрерывна на $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

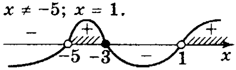
244. Решить неравенства:

а) $x^2 - 5x + 4 > 0$ решаем методом интервалов: $(x-1)(x-4) > 0$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$;

б) $\dfrac{x+3}{x^2+4x-5} \geq 0$ равносильно неравенству $(x+3)(x+5)(x-1) \geq 0$

$x \neq -5$; $x = 1$.



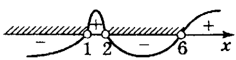
Ответ: $x \in (-5; -3] \cup (1; +\infty)$.

в) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$; $\dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$; 4; −1 $\Rightarrow (x+1)(x-4) \leq 0$.

Ответ: $x \in [-1; 4]$.

г) $\dfrac{x^2-7x+6}{x-2} < 0$; $\dfrac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \dfrac{7 \pm 5}{2}$; 6; 1.

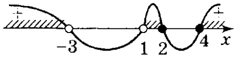
Неравенство принимает вид: $\dfrac{(x-6)(x-1)}{x-2} < 0$ равносильно $(x-1)(x-2)(x-6) < 0$.



Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; 6)$.

245. а) $\dfrac{(x-2)(x-4)}{x^2+2x-3} \geq 0$; $\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-3)} \geq 0$ равносильно

$(x-1)(x-2)(x-4)(x+3) \geq 0$.

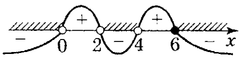


Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup 1; 2] \cup [4; +\infty)$.

б) $\dfrac{8}{x^2 - 6x + 8} < 1$; Выполним равносильное преобразование неравенства

$\dfrac{8}{x^2 - 6x + 8} - 1 < 0$; $\dfrac{8 - x^2 + 6x - 8}{x^2 - 6x + 8} < 0$; $\dfrac{x(6 - x)}{(x - 2)(x - 4)} < 0$ равносильно $x(6 - x)(x - 2)(x - 4) < 0$.

При $x = 0$ данное неравенство принимает вид $\dfrac{8}{8} < 1$, что неверно.



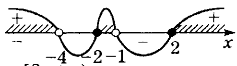
Ответ: $(-\infty; 0) \cup (2; 4) \cup [6; +\infty)$.

в) $\dfrac{2x^2 + 5x}{x^2 + 5x + 4} \geq 1$; Знаменатель: $\dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{-5 \pm 3}{2}$; -4; -1; $(x + 4)(x + 1)$

Выполним равносильные преобразования неравенства:

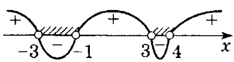
$\dfrac{2x^2 + 5x}{x^2 + 5x + 4} - 1 \geq 0$; $\dfrac{2x^2 + 5x - x^2 - 5x - 4}{x^2 + 5x + 4} \geq 0$; $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 4} \geq 0$;

$\dfrac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 1)(x + 4)} \geq 0$;



Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup [-2; -1) \cup [2; +\infty)$.

г) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x + 3)(x - 4)} < 0$; $\dfrac{(x + 1)(x - 3)}{(x + 3)(x - 4)} < 0$;



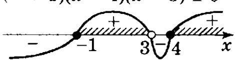
Ответ: $x \in (-3; -1) \cup (3; 4)$.

246. Найти область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{x - \dfrac{4}{x - 3}}$. $D(f)$: $\begin{cases} x - \dfrac{4}{x - 3} \geq 0; \\ x \neq 3; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 3} \geq 0; \\ x \neq 3; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{(x + 1)(x - 4)}{x - 3} \geq 0; \\ x \neq 3; \end{cases}$ равносильно неравенству:

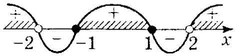
$(x + 1)(x - 4)(x - 3) \geq 0$



Ответ: $x \in [-1; 3) \cup [4; +\infty)$.

б) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3}{x^2 - x} + 1}$; $D(f)$: $\dfrac{3}{x^2 - 4} + 1 \ge 0$; $\dfrac{3 + x^2 - 4}{x^2 - 4} \ge 0$; $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \ge 0$;

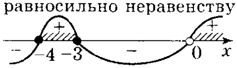
$\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \ge 0$;



Ответ: $D(f)$: $x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 1] \cup (2; +\infty)$.

в) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 7x + 12}{x}}$; $D(f)$: $\dfrac{x^2 + 7x + 12}{x} \ge 0$; $\dfrac{(x+3)(x+4)}{x} \ge 0$

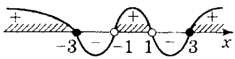
равносильно неравенству: $x(x + 3)(x + 4) \ge 0$, $x \ne 0$.



Ответ: $D(f)$: $x \in [-4; -3] \cup (0; +\infty)$.

г) $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{8}{x^2 - 1}}$; $D(f)$: $1 - \dfrac{8}{x^2 - 1} \ge 0$; $\dfrac{x^2 - 1 - 8}{x^2 - 1} \ge 0$;

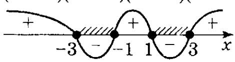
$\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x+1)} \ge 0$;



Ответ: $D(f)$: $x \in (-\infty; -3[\cup (-1; 1) \cup [3; +\infty)$.

248. Решить неравенства:

а) $x^4 - 10x^2 + 9 \le 0$; $5 \pm \sqrt{25 - 9} = 5 \pm 4$; 1; 9; $(x^2 - 1)(x^2 - 9) \le 0$;
$(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3) \le 0$;



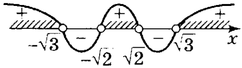
Ответ: $x \in [-3; -1] \cup [1; 3]$.

б) $x^4 - 8 \ge 7x^2$; $x^4 - 7x^2 - 8 \ge 0$; $\dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} = \dfrac{7 \pm 9}{2}$; 8; −1;

$(x^2 - 8)(x^2 + 1) \ge 0$; $(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})(x^2 + 1) \ge 0$;

Ответ: $x \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$.

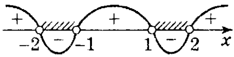
в) $x^4 - 5x^2 + 6 > 0$; $(x^2 - 3)(x^2 - 2) > 0$;
$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3}) > 0$;



Ответ: $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

г) $5x^2 - 4 > x^4$; $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$; $\dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$; 4; 1;

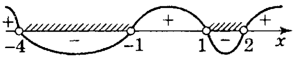
$(x^2 - 4)(x^2 - 1) < 0$; $(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1) < 0$;



Ответ: $x \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

249. а) $(x^2 - 1)(x + 4)(x^3 - 8) \le 0$; $(x - 1)(x + 1)(x + 4)(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \le 0$; $x^2 + 2x + 4$; $-1 \pm \sqrt{1-4}$; $D < 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 > 0$ при любых x.

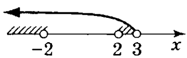
Имеем $(x - 1)(x + 1)(x + 4)(x - 2) \le 0$;



Ответ: $x \in [-4; -1] \cup [1; 2]$.

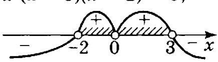
б) $\sqrt{x^2 - 4} \cdot (x - 3) < 0$; $\sqrt{x^2 - 4} > 0$, значит, $x - 3 < 0$.

Имеем: $\begin{cases} x^2 - 4 > 0; \\ x - 3 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x + 2)(x - 2) > 0; \\ x < 3; \end{cases}$



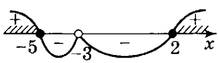
Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 3)$.

в) $x^2(x - 3)(x + 2) > 0$;



Ответ: $x \in (-2; 0) \cup (0; 3)$.

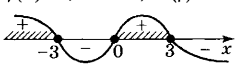
г) $\dfrac{(x - 2)^3(x + 5)}{(x + 3)^2} \ge 0$;



Ответ: $x \in (-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$.

250. Найти область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{9x - x^3}$; $D(f)$: $9x - x^3 \ge 0$; $x(3 - x)(3 + x) \ge 0$;



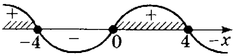
Ответ: $D(f)$: $x \in (-\infty; -3] \cup [0; 3]$.

б) $f(x) = \sqrt{x^2 - \dfrac{8}{x}}$; $x^2 - \dfrac{8}{x} \ge 0$; $\dfrac{x^3 - 8}{x} \ge 0$; $\dfrac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x} \ge 0$;

$x^2 + 2x + 4 > 0$ при любых x; $x(x - 2) \geq 0$;

Ответ: $D(f)$: $x \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$.

в) $f(x) = \sqrt{16x - x^3}$; $D(f)$: $16x - x^3 \geq 0$; $x(4 - x)(x + 4) \geq 0$;



Ответ: $D(f)$: $x \in (-\infty; -4] \cup [0; 4]$.

г) $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{27}{x^3}}$; $1 - \dfrac{27}{x^3} \geq 0$; $\dfrac{x^3 - 27}{x^3} \geq 0$; $\dfrac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x^3} \geq 0$;

$x^2 + 3x + 9 > 0$ при любых x; $\dfrac{x - 3}{x^3} \geq 0$;

Ответ: $D(f)$: $x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

19. Касательная к графику функции

251. На рисунках 97 определить, в каких точках графика касательная к нему:

1) горизонтальна:

а) в т. B и т. D; б) в т. B, т. C и т. D;

в) в т. A, т. C и т. E; г) в т. A, т. C и т. E;

2) Касательная образует с осью абсцисс острый угол:

а) в т. A и т. E; б) в т. E;

в) в т. B и т. F; г) в т. D;

3) Касательная образует с осью абсцисс тупой угол:

а) в т. C; б) в т. A;

в) в т. D; г) в т. B и т. F.

252. При каких значениях аргумента производная функции:

1) $f'(x) = 0$:

а) при $x = b$ и $x = d$; б) при $k = b$ и $k = d$;

в) при $x = a$, $x = d$ и $x = b$; г) при $x = b$ и $x = d$;

2) $f'(x) > 0$:

а) при $x = c$; б) при$x = a$ и $x = e$;

в) при $x = e$; г) при $x = c$;

3) $f'(x) < 0$:

а) при $x = e$; б) при $x = c$;

в) при $x = c$; г) при $x = a$ и $x = e$.

253–254. Найти тангенс угла наклона α к оси абсцисс касательной, проходящей через данную т. M графика.

В общем виде уравнение касательной:

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, где $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$ — угловой коэффициент.

253. а) $f(x) = x^2$; $M(-3; 9)$; $f'(x_0) = 2x\Big|_{x_0=-3} = -6$; $\operatorname{tg} \alpha = -6$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x$; $M\left(2; \dfrac{2}{3}\right)$. $f'(x) = x^2 - 1$; $f'(2) = 4 - 1 = 3$; $\operatorname{tg} \alpha = 3$;

в) $f(x) = x^3$; $M(-1; -1)$. $f'(x) = 3x^2$; $f'(-1) = 3$; $\operatorname{tg} \alpha = 3$;

г) $f(x) = x^2 + 2x$; $M(1; 3)$. $f'(x) = 2x + 2$; $f'(1) = 4$; $\operatorname{tg} \alpha = 4$.

254. а) $f(x) = 2 \cos x$; $M\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$; $f'(x) = -2 \sin x$; $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2\sin\dfrac{\pi}{2} = -2$;

б) $f(x) = -\operatorname{tg} x$; $M(\pi; 0)$; $f'(x) = -\dfrac{1}{\cos^2 x} = -1$; $\operatorname{tg} \alpha = -1$;

в) $f(x) = 1 + \sin x$; $M(\pi; 1)$; $f'(x) = \cos x$; $f'(\pi) = \cos \pi = -1$; $\operatorname{tg} \alpha = -1$;

г) $f(x) = -\cos x$; $M(-\pi; 1)$; $f'(x) = \sin x$; $f'(-\pi) = \sin(-\pi) = 0$; $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

255. Написать уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0.

а) $f(x) = \dfrac{3}{x}$; $x_0 = -1$; $x_0 = 1$

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$; $f(x_0) = \dfrac{3}{-1} = -3$; $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$; $f'(-1) = -3$.

$y = -3 - 3(x + 1)$, $y = -3x - 6$ — уравнение касательной в т. $x = -1$.

Если $x_0 = 1$, то $f'(1) = -3$; $f(1) = 3$. Уравнение касательной

$y = 3 - 3(x - 1)$; $y = -3x + 6$.

б) $f(x) = 2x - x^2$; $x_0 = 0$; $x_0 = 2$.

$f'(x) = 2 - 2x$; $f'(0) = 2$; $f(0) = 0$. Уравнение касательной

$y = 0 + 2(x - 0)$; $y = 2x$.

Если $x_0 = 2$, то уравнение касательной $y = -2(x - 2)$; $y = -2x + 4$.

в) $f(x) = x^2 + 1$; $x_0 = 0$ или $x_0 = -1$. Уравнение касательной:

$y = 1 + 0(x - 0)$; $y = 1$.

$f(0) = 1$; $f'(x) = 2x$; $f'(0) = 0$. Уравнение касательной:

$y = 2 + 2(x - 1)$; $y = 2x$.

Если $x_0 = 1$, то уравнение касательной $y = 2 + 2(x - 1)$; $y = 2x$.

г) $f(x) = x^3 - 1$; $x_0 = -1$; $f(x_0) = -1 - 1 = -2$; $f'(x) = 3x^2$; $f'(-1) = 3$.

Уравнение касательной: $y = -2 + 3 \cdot (x + 1)$; $y = 3x + 1$.

256. а) $f(x) = 3 \sin x$; $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_0 = \pi$.

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ — уравнение в общем виде.

$f(x_0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3\sin\dfrac{\pi}{2} = 3$; $f'(x) = 3 \cos x$; $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

Касательная $y = 3 + 0 \cdot \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$; $y = 3$.

Если $x_0 = \pi$, то $y = 3\sin\pi + 3\cos\pi \cdot (x - \pi) = 0 - 3\cdot(x - \pi)$;
$y = -3x + 3\pi$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$; $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^2 = 2$.

Уравнение касательной: $y = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$.

Если $x_0 = \frac{\pi}{3}$, то $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 : \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 : \frac{1}{4} = 4$.

Уравнение касательной: $y = \sqrt{3} + 4\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; $y = 4x + \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$;

в) $f(x) = 1 + \cos x$; $x_0 = 0$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$; $f(0) = 1 + \cos 0 = 2$;

$f'(x) = -\sin x$; $f'(0) = 0$; $y = 2$.

Если $x_0 = \frac{\pi}{2}$, то $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \cos\frac{\pi}{2} = 1$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$;

$y = 1 - 1\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; $y = -x + 1 + \frac{\pi}{2}$ — уравнение касательной;

г) $f(x) = -2\sin x$; $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_0 = \pi$.

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$; $f'(x) = -2\cos x$;

$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $y = 2$.

Если $x_0 = \pi$, то $f(\pi) = -2\sin\pi = 0$; $f'(\pi) = -2\cos\pi = -2\cdot(-1) = 2$.
$y = 2(x - \pi)$, $y = 2x - 2\pi$ — уравнение касательной.

257. Найти точки графика функции f, в которых касательная параллельна оси абсцисс.

а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ — функция непрерывна, дифференцируемая; $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ и если $f'(x) = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha = 0$, где α — угол наклона касательной к оси абсцисс, т.е. $\alpha = 0$ и касательная параллельна оси абсцисс в точке $x = 1$, т.к. $3\cdot(x^2 - 2x + 1) = 0$; $(x - 1)^2 = 0$; $x = 1$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 16x$; $f'(x) = 2x^3 + 16$; $f'(x) = 0$; $2\cdot(x^3 + 8) = 0$;

$x^3 = -8$; $x = -2$.
В точке $(-2; -8)$ касательная параллельна оси OX.
$(y = (-2)^3 - 3\cdot(-2) + 3\cdot(-2) = -8 + 6 - 6 = -8.)$

в) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$; $f'(x) = 12x^3 - 12x$; $f'(x) = 0$; $12x(x^2 - 1) = 0$;

$x = 0; \pm 1$

$f(0) = 2$; $f(1) = -1$; $f(-1) = 3 - 6 + 2 = -1$

В точках (0; 2), (1; −1); (−1; −1) касательная параллельна оси OX.

258. а) $f(x) = 2\cos x + x$; $f'(x) = -2\sin x + 1$; $f'(x) = 0$; $1 - 2\sin x = 0$.

$\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Выберем $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$;

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6}$.

В точках $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$ и

$\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$ касательная параллельна оси абсцисс.

б) $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}x$; $f'(x) = 2\cos 2x + \sqrt{3}$; $f'(x) = 0$; $2\cos 2x = -\sqrt{3}$;

$\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ или $2x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z$;

$x_1 = \frac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z$ или $x_2 = \frac{7\pi}{12} + \pi m,\ m \in Z$;

$f_1\left(\frac{5\pi}{12} + \pi n\right) = \sin\frac{2 \cdot 5\pi}{12} + \sqrt{3} \cdot \frac{5\pi}{12} + 2\pi n = \sin\frac{5\pi}{6} + \sqrt{3} \cdot \frac{5\pi}{12} + 2\pi n =$

$= \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in Z$;

$f_2\left(\frac{7\pi}{12} + \pi m\right) = \sin\frac{2 \cdot 7\pi}{12} + \sqrt{3} \cdot \frac{7\pi}{12} + 2\pi m = \sin\frac{7\pi}{6} + \sqrt{3} \cdot \frac{7\pi}{12} + 2\pi m =$

$= -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{7\pi}{12} + 2\pi m,\ m \in Z$.

В точках $(x_1; f_1)$ и $(x_2; f_2)$ касательная параллельна оси абсцисс.

в) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; $f'(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; $f'(x) = 0$;

при $x - \frac{\pi}{3} = \pi n,\ n \in Z$; $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$;

$f\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi n - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \pi n = -1$ при n — нечетном.

$f\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = \cos \pi n = 1$ при n — четном, т.е. касательная к графику функции параллельна оси абсцисс в точках: $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ 1\right)$ и $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ -1\right)$.

г) $f(x)=\sqrt{2}x-2\sin x$; $f'(x)=\sqrt{2}-2\cos x$; $f'(x)=0$; $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$;

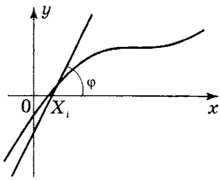
1) $x_1=\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $f_1\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)=$

$=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\pi n,\ n\in Z$;

2) $x_2=-\frac{\pi}{4}+2\pi m$; $f_2\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi m\right)=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2\sqrt{2}\pi m,\ m\in Z$.

Касательная параллельна оси абсцисс в точках $(x_1;\ f_1)$; $(x_2;\ f_2)$.

259. Под каким углом пересекается график функции с осью абсцисс?



а) $f(x)=3x-x^3$

1) Точка пересечения графика функции $f(x)$ с OX:

$y=0$; $x(3-x^2)=0$; $x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)=0$; $x_0=0$; $x_1=\sqrt{3}$; $x_2=-\sqrt{3}$;

2) $f'(x)=3-3x^2$; $\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0)$, φ — угол наклона касательной в т. x_0, x_1, x_2 к положительному направлению оси абсцисс

$f'(0)=3$; $\operatorname{tg}\varphi_0=3$; φ_0 — острый угол;

$f'(\sqrt{3})=3-3\cdot(\sqrt{3})^2=3-9=-6$; φ_1 — тупой угол, т.к. $\operatorname{tg}\varphi_1<0$;

$f'(-\sqrt{3})=3-3\cdot(-\sqrt{3})^2=-6$; $\operatorname{tg}\varphi_2=-6$; φ_2 — тупой угол.

Ответ: искомые углы: $\operatorname{arctg}3$; $\pi-\operatorname{arctg}6$.

б) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$; $x+\frac{\pi}{4}=\pi n,\ n\in Z$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$ — абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс;

2) $f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; $f'\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\pi n,\ n\in Z$.

$\cos \pi n = 1$ при n — четном и $\cos \pi n = -1$ при n — нечетном.

Имеем углы пересечения: $\frac{\pi}{4}$ в точке $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ 0\right)$ и $\frac{3\pi}{4}$ в точке $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ 0\right)$.

в) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$; $\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$; 2; 1 — абсциссы точек пересечения графика функции с OX;

2) $f'(x) = 2x - 3$;
$f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$; $\operatorname{tg} \varphi_1 = 1$; $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ в точке с абсциссой 2 (острый);
$f'(1) = 2 - 3 = -1$; $\operatorname{tg} \varphi_2 = -1$; $\varphi_2 = \pi - \frac{\pi}{4}$, т.е. $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$ — в точке с абсциссой 1 (тупой).

г) $f(x) = -\cos x$

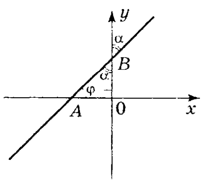
1) $\cos x = 0$; $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;

2) $f'(x) = \sin x$; $f'\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$, т.е. $\operatorname{tg} \varphi_1 = 1$; $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ в т. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 0\right)$, $n \in Z$;

$f'\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1$, $n \in Z$; т.е. $\operatorname{tg} \varphi_2 = -1$;

$\varphi_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ — угол пересечения графика функции с OX в точке $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 0\right)$.

260. Под каким углом график функции пересекается с осью ординат? Объяснение к нахождению угла.



ΔABO: φ — угол между касательной в т. A графика и осью абсцисс.
$\alpha = 90^\circ - \varphi$ в ΔABO и вертикальный ему угол — угол между касательной и осью ординат.

а) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ — гипербола; $x = 1$ — вертикальная ассимптота

1) $f(x) \neq 0$; $f(0) = -1$;

2) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$; $\operatorname{tg}\varphi = f'(0) = -1$; $\varphi = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$; $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ — угол наклона графика функции к OY.

б) $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

1) Точки пересечения графика с осью OY: $f(0) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$;

2) $f'(x) = \dfrac{1}{2\cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$; $f'(0) = \dfrac{1}{2\cos^2\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{2\cdot\dfrac{1}{2}} = 1$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{-f'(0)} = \dfrac{1}{-1} = -1$; $\alpha = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$ — угол пересечения графика функции с OY в точке $\left(0; -\dfrac{1}{2}\right)$.

в) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$; 1) $f(0) = \dfrac{1}{2}$; 2) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot 2(x-1) = x - 1$.

$f'(0) = -1$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{-f'(0)} = 1$; $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ — угол пересечения графика функции с осью OY в точке $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

г) $f(x) = \sin\left(2\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$;

1) $f(0) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$; 2) $f'(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$;

$f'(0) = 2\cos\dfrac{\pi}{6} = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{-f'(0)} = \dfrac{1}{-\sqrt{3}}$; $\alpha = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$ — угол пересечения графика функции с OY в точке $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

20. Приближенные вычисления

261. а) $f(2{,}016) \approx f(2) + (2{,}016 - 2)\cdot f'(2)$; $f'(x) = 4x^3 + 2$;
$f'(2) = 4\cdot 8 + 2 = 34$;
$f(2) = 16 + 2\cdot 2 = 20$; $f(2{,}016) \approx 20 + 0{,}016\cdot 34 = 20{,}544$;
$f(0{,}97) \approx f(1) + (0{,}97 - 1)\cdot f'(1)$; $f(1) = 1 + 2 = 3$; $f'(1) = 4 + 2 = 6$;
$f(0{,}97) \approx 3 - 0{,}03\cdot 6 = 2{,}82$;

б) $f'(x) = 5x^4 - 2$; $f(1{,}995) \approx f(2) + (2{,}995 - 2)\cdot f'(2)$; $f(2) = 2^5 - 2^2 = 28$;
$f'(2) = 5\cdot 16 - 2\cdot 2 = 76$; $f(1{,}995) \approx 28 - 0{,}005\cdot 76 = 27{,}62$;
$f(0{,}96) \approx f(1) + (0{,}96 - 1)\cdot f'(1)$; $f(1) = 0$; $f'(1) = 5 - 2 = 3$;
$f(0{,}96) \approx -0{,}04\cdot 3 = -0{,}12$;

в) $f'(x) = 3x^2 - 1$; $f(3{,}02) \approx f(3) + (3{,}02 - 3)\cdot f'(3)$; $f(3) = 3^3 - 3 = 24$;
$f'(3) = 3\cdot 3^2 - 1 = 26$; $f(3{,}02) \approx 24 + 0{,}02\cdot 26 = 24{,}52$;

$f(0{,}92) \approx f(1) + (0{,}92 - 1) \cdot f'(1)$;
$f(1) = 0$; $f'(1) = 3 - 1 = 2$; $f(0{,}92) = -0{,}08 \cdot 2 = -0{,}16$;
г) $f'(x) = 2x + 3$; $f(5{,}04) \approx f(5) + (5{,}04 - 5) \cdot f'(5)$; $f(5) = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40$;
$f'(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13$; $f(5{,}04) \approx 40 + 0{,}04 \cdot 13 = 40{,}52$;
$f(1{,}98) \approx f(2) + (1{,}98 - 2) \cdot f'(2)$;
$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10$; $f'(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$;
$f(1{,}98) \approx 10 - 0{,}02 \cdot 7 = 9{,}86$.

262. а) $1{,}001^{100} = (1 + 0{,}002)^{100} \cdot 1 + 100 \cdot 0{,}002 = 1{,}2$;
б) $0{,}995^6 = (1 - 06005)^6 \approx 1 - 6 \cdot 0{,}005 = 0{,}97$;
в) $1{,}003^{200} = (1 + 0{,}003)^{200} \approx 1 + 200 \cdot 0{,}003 = 1{,}6$;
г) $0{,}998^{20} = (1 - 0{,}002)^{20} \approx 1 - 20 \cdot 0{,}002 = 1{,}002$.

263. а) $\sqrt{1,004} = \sqrt{1+0,004} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,004 = 1,002;$

б) $\sqrt{25,012} = 5\sqrt{1,0048} \approx 5\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0,00048\right) = 5 + 0,0012 = 5,0012;$

в) $\sqrt{0,997} = \sqrt{1-0,003} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,003 = 0,9985;$

г) $\sqrt{4,0016} = 2\sqrt{1,0004} \approx 2\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0,0004\right) = 2 + 0,0004 = 2,0004.$

264. Вычислить по формуле $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ (1), где Δx мало отличается от 0.
а) $\operatorname{tg} 44^\circ$;
$x = 44^\circ$; $x_0 = 45^\circ$; $\Delta x = x - x_0 = 45^\circ - 44^\circ = 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$;
$f(x) = \operatorname{tg} x;\ f'(x) = \operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x};\ \ f'(x_0) = \operatorname{tg}'(45^\circ) = \frac{1}{\cos^2 45^\circ}.$
Подставим в формулу (1):

$$\operatorname{tg} 44^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 1) = \operatorname{tg} 45^\circ + \frac{1}{\cos^2 45^\circ} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 1 - \frac{2\pi}{180^\circ} = 1 - \frac{\pi}{90^\circ} \approx$$
$= 1 - 0{,}0349 \approx 0{,}9651$.
Ответ: $\operatorname{tg} 44^\circ \approx 0{,}9651$.
б) $\cos 61^\circ = \cos(60^\circ + 1^\circ)$
$x_0 = 60^\circ$; $x = 61^\circ$; $\Delta x = x - x_0 = 61^\circ - 60^\circ = 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$;

$f(x_0) = \cos x_0,\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2};\ f'(x) = -\sin x;\ f'(x_0) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$
Подставляем в формулу (1).
Имеем:

$$\cos 61^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0,5 - \frac{1,73 \cdot 3,14}{2 \cdot 180^\circ} \approx 0,5 - 0,0151 \approx 0,4849.$$
Ответ: $\cos 61^\circ \approx 0{,}4849$.
в) $\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ)$
$x = 31^\circ$; $x_0 = 30^\circ$; $\Delta x = x - x_0 = 31^\circ - 30^\circ = 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$;

$f(x) = \sin x;\ f(x_0) = f(30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$

$f'(x) = \cos x;\ f'(30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$f(x) = \sin 31^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1,73 \cdot 3,14}{2 \cdot 180^\circ} \approx 0,5 + 0,0151 \approx 0,5151.$

Ответ: $\sin 31^\circ \approx 0,5151$.

г) $\mathrm{ctg}\ 47^\circ = \mathrm{ctg}(45^\circ + 2^\circ)$

$x = 47^\circ;\ x_0 = 45^\circ;\ \Delta x = 2^\circ = \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90};\ \mathrm{ctg}\ (x_0) = \mathrm{ctg}\ 45^\circ = 1;$

$\mathrm{ctg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x};\ \mathrm{ctg}'(x_0) = -\frac{1}{\sin^2 45^\circ} = -2;$ Имеем

$\mathrm{ctg}\ 47^\circ = 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{90} = 1 - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{45^\circ} =$

$= 1 - \frac{3,14}{45} \approx 1 - 0,0698 \approx 0,9302.$

Ответ: $\mathrm{ctg}\ 47^\circ \approx 0,9302$.

265. Вычислить с помощью формулы $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ (1)

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0,04\right);\ f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \Delta x = 0,04;$

$f'(x) = \cos' x = -\sin x;\ f'(x_0) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$

Подставляем в формулу (1).
Имеем:

$\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0,04\right) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0,04 = \frac{\sqrt{3} - 0,04}{2} =$

$= \frac{1,73 - 0,04}{2} = \frac{1,69}{2} = 0,845.$

Ответ: $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0,04\right) \approx 0,845.$

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 0,02\right);\ f(x_0) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \Delta x = -0,02;$

$f'(x) = \sin'(x) = \cos x;\ f'(x_0) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$

$\sin\left(\frac{\pi}{3} - 0,02\right) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-0,02) = \frac{\sqrt{3} - 0,02}{2} =$

$= \frac{1,73 - 0,02}{2} = \frac{1,71}{2} \approx 0,855.$

Ответ: $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 0,02\right) \approx 0,855.$

в) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 0,03\right)$; $f(x_0) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $f'(x) = \cos x$;

$f(x_0) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\Delta x = 0,03$;

$f(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,03 = \frac{1 + 1,73 \cdot 0,03}{2} = \frac{1 + 0,0519}{2} = 0,5260.$

Ответ: $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0,05\right) \approx 0,5260.$

г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0,05\right)$;

$f(x) = \operatorname{tg} x$; $f(x_0) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$; $\Delta x = 0,05$;

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $f'(x_0) = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2$; $f(x) \approx 1 + 2 \cdot 0,05 = 1 + 0,1 = 1,1.$

Ответ: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0,05\right) \approx 1,1.$

266. а) $\frac{1}{1,003^{20}} = 1,003^{-20} = (1 + 0,003)^{-20} \approx 1 - 20 \cdot 0,003 = 1 - 0,06 = 0,94$;
$\Delta x = 0,003$; $x_0 = 1$; $x = 1 + 0,003.$

Ответ: $\frac{1}{1,003^{20}} \approx 0,94.$

б) $\frac{1}{0,996^{10}} = (1 - 0,004)^{-10} \approx 1 + 40 \cdot 0,004 = 1 + 0,16 = 1,16$; $\Delta x = -0,004$;

в) $\frac{1}{2,0016^3} = 2,0016^{-3} = (2 + 0,0016)^{-3} =$

$= 2^{-3} - 3 \cdot 2^{-4} \cdot 0,0016 = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{3 \cdot 0,0016}{2}\right) =$

$= \frac{1}{8}(1 - 3 \cdot 0,0008) = \frac{1}{8} \cdot (1 - 0,0024) = \frac{1}{8} \cdot 0,9976 \approx 0,1247;$

г) $\frac{1}{0,994^5} = 0,994^{-5} = (1 - 0,005)^{-5} \approx 1 + 5 \cdot 0,006 = 1 + 0,03 \approx 1,03.$

21. Производные в физике и технике

267. а) Скорость: $v(t) = x'(t) = \left(-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t\right)' = -t^2 + 4t + 5$ (м/сек);

б) $v(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 9$ (м/сек);

в) Остановка: $v = 0$; $-t^2 + 4t + 5 = 0$; $t = 5$ сек.

268. $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 8t$ (м/сек); $v(5) = 3 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 = 35$ (м/сек).

269. $w(t) = \varphi'(t) = 6t - 4$ (рад/сек); $w(4) = 6 \cdot 4 - 4 = 20$ (рад/сек).

270. $w(t) = \varphi'(t) = 4 - 0{,}6t$ (рад/сек); $w(2) = 4 - 2 \cdot 0{,}6 = 2{,}8$ (рад/сек).

271. $v(t) = x'(t) = 6t^2 + 1$ (см/сек); $a(t) = v'(t) = 12t$ (см/сек^2):

а) $a = 1$ (см/сек^2): $12t = 1$; $t = \frac{1}{12}$ сек;

б) $a = 2$ (см/сек^2); $12t = 2$; $t = \frac{1}{6}$ сек.

272. $v(t) = x'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 6t$ (м/сек); $a(t) = v'(t) = -t + 6$ (м/сек^2):

а) $a = 0$; $6 - t = 0$; $t = 6$ м;

б) $v(6) = -\frac{1}{2} \cdot 6^2 + 6 \cdot 6 = 18$ (м/сек).

273. $v(t) = x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$; $a(t) = v'(t) = -\frac{1}{4\sqrt{t}}$; $a(t) = -2v^3(t)$ — ускорение пропорционально скорости в кубе.

274. Скорость: $v(t) = x'(t) = 6t^2 - 2t$; $a(t) = v'(t) = 12t - 2$;
сила: $F(t) = m \cdot a(t)$; $F(2) = m \cdot (2 \cdot 2 - 2) = 22m$.

275. Скорость: $v(t) = x'(t) = 2t + 1$ (см/с); $a(t) = v'(t) = 2$ (см/сек^2)

а) сила: $F = m \cdot a = 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04$ (Н);

б) кинетическая энергия: $E(t) = \frac{m}{2} \cdot v^2(t)$;

$$E(2) = \frac{2}{2} \cdot (2 \cdot 2 + 1)^2 \cdot 0{,}01^2 = 0{,}025 \text{ (Дж)}.$$

276. Линейная плотсноть: $p(l) = m'(l) = 6l + 5$ (г/см)
а) $p(10) = 6 \cdot 10 + 5 = 65$ (г/см); б) $p(20) = 6 \cdot 20 + 5 = 125$ (г/см).

277. Пусть v_1 — скорость первой точки, v_2 — скорость второй точки.

$v_1(t) = x_1'(t)$; $v_2(t) = x_2'(t) = 3t^2$; $v_1(t) > v_2(t)$; $8t > 3t^2$; $3t\left(t - \frac{8}{3}\right) < 0$;

$0 < t < \frac{8}{3}$. При $t \in \left(0; \frac{8}{3}\right)$ скорость первой точки больше скорости второй точки.

6. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ

22. Признак возрастания (убывания) функции

279. Найти промежуток возрастания и убывания фукнции.

б) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ — непрерывна и дифференцируемая на $D(f)$: R. $f'(x) = -2x + 2$

При $f'(x) > 0$ функция возрастает, при $f'(x) < 0$ функция убывает. Т.е. при $-2x + 2 > 0$; $-2(x - 1) > 0$ при $x - 1 < 0$; $x < 1$ функция возрастает; при $x > 1$ функция убывает.

Ответ: функция возрастает на $(-\infty; 1]$, убывает на $(1; +\infty)$.

285. а) Доказать, что функция $f(x) = 3x + \cos 2x$ возрастает на всей $D(f)$.

Решение.

$f'(x) = 3 - 2\sin 2x$; $3 - 2\sin 2x > 0$; $2\sin 2x < 3$; $\sin 2x < \frac{3}{2}$; но $|\sin 2x| \le 1$ при любых x.

Ответ: данная функция монотонно возрастает на R.

б) $g(x) = -\frac{x^3}{3} - x$; $g'(x) = -x^2 - 1 = -(x^2 + 1)$.

Т.к. $x^2 + 1 > 0$ для любых x, то $g'(x) < 0$ на всей области определения R функции $g(x)$.

Ответ: данная функция монотонно убывает на R.

23. Критические точки функции, максимум и минимум

288. б) Найти критические точки функции $f(x) = 1 + \cos 2x$

Решение.

$D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$; $f'(x) = -2\sin 2x$; $-2\sin 2x = 0$; $\sin 2x = 0$ при $2x = \pi n$, $n \in Z$;

$x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ — критические точки функции.

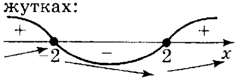
г) $f(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$. $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$. Функция на $D(f)$ непрерывна и дифференцируемая. $f'(x) = 4 - x^2$; $(2 - x)(2 + x) = 0$;

$x_1 = 2$; $x_2 = -2$ — критические точки функции.

290. Найти критические точки функции и определить их вид — точки max, min.

а) $f(x) = 5 + 12x - x^3$ — функция непрерывна, дифференцируемая на всей области определения $D(f)$: $(-\infty; +\infty)$.

$f'(x) = 12 - 3x^2$. Критические точки: $12 - 3x^2 = 0$; $3x^2 = 12$; $x^2 = 4$; $x_1 = 2$; $x_2 = -2$. Определим знаки производной на промежутках:



$(x - 2)(x + 2) = 0$.

Функция возрастает на $(-\infty; -2]$, где $f'(x) > 0$;
убывает на $[-2; 2]$, где $f'(x) < 0$, т.е. $x = -2$ — точка max.
Функция убывает на $[-2; 2]$ и возрастает на $[2; +\infty)$, т.е. в точке $x = 2$ функция имеет max.

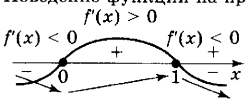
24. Применение производной функции к исследованию функции

300. а) Исследовать функцию и построить график.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5.$$

Решение.

1) $D(f)$: $(-\infty; +\infty)$; $E(f)$: R.
2) Функция непрерывна и дифференцируемая на $D(f)$.
$f'(x) = x - x^4 = x(1 - x^3)$; $f'(x) = 0$; $x(1 - x^3) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ — критические точки.
3) Поведение функции на промежутках:



Функции убывает на $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; 1]$, т.е. в точке $x = 0$ функция имеет min.
$f_{min}(x) = f_{min}(0) = 0$.
На $[0; 1]$ функция возрастает, на $[1; +\infty)$ убывает, т.е. в точке $x = 1$ функция имеет max.

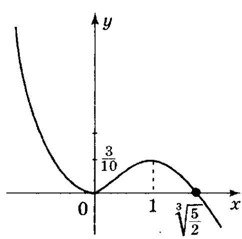
$$f_{max}(x) = f_{max}(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

4) Нули функции: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 = 0$;

$$x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x^3}{5}\right) = 0;$$

$$x^2 \cdot \left(\frac{5 - 2x^3}{10}\right) = 0;\quad x_1 = 0;$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \approx 1,26.$$



25. Наибольшее и наименьшее значения функции

305. а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на промежутках $[-1; 1]$ и $[0; 3]$.

Решение.

1) Функция непрерывна и дифференцируемая на всей области определения $D(f)$; R.

Находим критические точки: $f'(x) = 4x^3 - 16x$; $f'(x) = 0$; $4x(x^2 - 4) = 0$; $x(x - 2)(x + 2) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$.

2) Промежутку $[-1; 1]$ принадлежит т. $x = 0$.

Выберем наибольшее и наименьшее значения функции из:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -9 \\ f(-1) = -16 \\ f(1) = -16 \end{array}\right\} \Rightarrow \max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = -9; \ \min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = f(1) = -16.$$

Ответ: -9; -16.

Рассмотрим второй случай: промежутку $[0; 3]$ принадлежат критические точки 0; −2; 2.

Выберем наибольшее и наименьшее значение функции из:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -9 \\ f(-2) = (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2 - 9 = 16 - 32 - 9 = -25 \\ f(2) = -25 \\ f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 - 9 = 81 - 72 - 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\max_{[0;3]} f(x) = f(3) = 0; \ \min_{[0;3]} f(x) = f(-2) = f(2) = -25.$$

Ответ: 0; -25.

308. Найти значения аргумента на $[-2; 5]$, при которых скорость изменения функции $f(x) = 21x + 2x^2 - \dfrac{x^3}{3}$ будет наибольшей, или наименьшей.

Решение.

1) $D(f)$: R.

2) Функция непрерывна и дифферецируемая на $D(f)$. $f'(x) = 21 + 4x - x^2$.

$v(x) = f'(x)$ — это скорость изменения функции.

Чтобы найти ее наибольшее или наименьшее значение, надо найти ее производную на $D(f')$: R.

3) $(f'(x))' = f''(x) = 4 - 2x$. Критическая точка: $4 - 2x = 0$; $x = 2$.

$2 \in [-2; 5]$.

4) Определим значения скорости на $[-2; 5]$ и выберем наибольшее и наименьшее:

$$\left.\begin{array}{l} v(-2) = f'(-2) = 21 - 8 - 4 = 9 \\ v(2) = f'(2) = 21 + 8 - 4 = 25 \\ v(5) = f'(5) = 21 + 20 - 25 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \max_{[-2;5]} v(x) = v(2) = 25;$$

$$\min_{[-2;5]} v(x) = v(-2) = 9.$$

Ответ: 25; 9.

309. *Решение.*

Скорость материальной точки меняется по закону

$v(t) = \frac{1}{6}t^3 - 12t$ (м/с).

Ускорение — $a(t) = v'(t) = \frac{1}{2}t^2 - 12 = \frac{1}{2}(t^2 - 24) = \frac{1}{2}(t - \sqrt{24})(t + \sqrt{24})$.

Время $t \geq 0$, т.е. $D(a)$: $t \in [0; +\infty)$.

Функция $a(t)$ непрерывна и дифференцируемая на $D(a)$: $a'(t) = t$.

При $t = 10$ сек, $a(t) = a(10) = \frac{1}{2} \cdot 100 - 12 = 38$ (м/с^2).

$t = 50$ сек, $a(50) = \frac{2500}{2} - 12 = 1238$ (м/с^2); $[10; 50] \in D(a)$.

Ответ: $\min\limits_{[10;\,50]} a(t) = a(10) = 38$ (м/с^2).

311. Пусть первое слагаемое равно x, тогда второе слагаемое равно $24 - x$. Рассмотрим $f(x) = x^2 + (24 - x)^2$.

$\min\limits_{[0;\,24]} f(x)$: $f'(x) = 2x - 2 \cdot (24 - x) = 4(x - 12)$; $D(f') = [0; 24]$;

$f'(x) = 0$ при $x = 12$; $f(0) = 576 = f(24)$; $f(12) = 288$;

$\min\limits_{[0;\,24]} f(x) = f(12) = 288$.

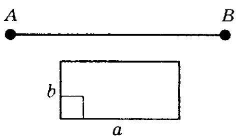
Первое слагаемое $x = 12$, а второе — $24 - 12 = 12$.

312. Пусть первое слагаемое равно y, тогда второе равно $4 - y$. Рассмотрим $g(y) = g(4 - y)$.

$\max\limits_{[0;\,4]} g(y)$: $g'(y) = 4 - y - y = 2(2 - y)$; $D(g') = [0; 4]$; $g'(y) = 0$,

при $y = 2$; $g(0) = g(4) = 0$; $g(2) = 4$; $\max\limits_{[0;\,4]} g(y) = g(2) = 4$. Т.е. $y = 2$ и $4 - y - 2$.

313.



$AB = 48$ м. $AB = P = 2(a + b)$; $b < a$.
Пусть $b = x$ (м), $a + b = 48 : 2 = 24$;
$a = 24 - b = 24 - x$.
Площадь $a \cdot b = x \cdot (24 - x) = S(x)$;
$D(S) = (0; 24)$.
Функция $S(x)$ — непрерывна и дифференцируемая на $D(S)$.

$S'(x) = 24 - 2x = 2 \cdot (12 - x)$. Критическая точка: $S'(x) = 0$; $x = 12$.
$S(0) = 0$; $S(12) = 12 \cdot (24 - 12) = 144$.

Ответ: $\max\limits_{[0;\,24]} S(x) = S(12) = 144$ м^2 при стороне $x = 12$ м.

314. Представить число 54 в виде суммы трех положительных слагаемых, два из которых пропорциональны числам 1 и 2, чтобы произведение трех чисел было наибольшим.

Решение.

Пусть искомые числа x; $2x$; $54 - (x + 2x) = 54 - 3x$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x \cdot 2x \cdot (54 - 3x) = 2x^2 \cdot (54 - 3x) =$

$= 108x^2 - 6x^3$ — непрерывна и дифференцируемая на $D(f) = \mathrm{R}$.
$f'(x) = 216x - 18x^2 - 18 \cdot x \cdot (12 - x)$. Критические точки: $x_1 = 0$; $x_2 = 12$.
$x \in [0; 18]$. Находим значения функции $f(x)$ на $[0; 18]$ и определим наибольшее из них:
$f(0) = 0$
$f(12) = 2 \cdot 144 \cdot (54 - 36) = 5184$
$f(18) = 0$
Первое слагаемое $x = 12$, второе — $2x = 24$, третье — $54 - 3x = 54 - 36 = 18$.
Ответ: 12; 24; 28.

315. Число 16 представить в виде произведения двух положительных чисел, сумма квадратов которых будет наименьшей.
Решение.
Пусть одно число — $x > 0$, второе число — $(16 : x) > 0$, или $\frac{16}{x}$.
Составим функцию, соответственно условию:

$f(x) = x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2$. Т.к. $x > 0$, то $D(f)$; $x \in (0; +\infty)$ и на $D(f)$ функция дифференцируема, непрерывна.

$$f'(x) = \left(\frac{x^4 + 256}{x^2}\right)' = \frac{4x^3 \cdot x^2 - 2x(x^4 + 256)}{x^4} = \frac{4x^4 - 2x^5 - 512x}{x^4};$$

$$f'(x) = \frac{2x^5 - 512x}{x^4} = \frac{2x(x^4 - 256)}{x^4} = \frac{2(x^2 - 16)(x^2 + 16)}{x^3} =$$
$$= \frac{2(x - 4)(x + 4)(x^2 + 16)}{x^3}.$$

Определяем критические точки, промежутки возрастания, убывания по знаку производной:
$f'(x) = 0$; $x = 4$; $x = -4 \notin (0; +\infty)$.

$f'(x) < 0$ $\quad f'(x) > 0$
$+$
$0 \quad 4 \quad x$

Проходя через критическую точку $x = 4$, производная меняет знак с минуса на плюс, т.е. функция убывает на $(0; 4]$ и возрастает на $[4; +\infty)$, а значит, точка $x = 4$ — точка min.
Сумма квадратов двух чисел будет наименьшей, если первое число $x = 4$, а второе число $\frac{16}{4} = 4$.
Ответ: числа 4; 4.

§ 7. ПЕРВООБРАЗНАЯ

26. Определение первообразной

326. а) $F(x) = x^5$ является первообразной для $f(x) = 5x^4$ на $(-\infty; +\infty)$, т.к. $F'(x) = (x^5)' = 5x^4 = f(x)$;

б) $F(x) = x^{-3}$ — первообразная для $f(x) = -3x^{-4}$ на $(0; +\infty)$, т.к. $F'(x) = -3x^{-4} = f(x)$;

в) $F(x) = \frac{1}{7}x^7$ — первообразная для $f(x) = x^6$ на $(-\infty; +\infty)$,

т.к. $F'(x) = \frac{7}{7} \cdot x^6 = x^6 = f(x)$;

г) $F(x) = -\frac{1}{6}x^{-6}$ — первообразная для $f(x) = x^{-7}$ на $(0; +\infty)$,

т.к. $F'(x) = -\frac{1}{6} \cdot (-6)x^{-7} = x^{-7} = f(x)$.

328. Найти одну из первообразных $F(x)$ на R для данных функции $f(x)$:

а) $f(x) = 3{,}5$; $F(x) = 3{,}5x$ (или $F(x) = 3{,}5x + const$, т.к. $F'(x) = 3{,}5 = f(x)$);

б) $f(x) = \cos x$; $F(x) = \sin x - 2$ (т.к. $F'(x) = \cos x = f(x)$);

в) $f(x) = 2x$; $F(x) = x^2 + 7$;

г) $f(x) = \sin x$; $F(x) = -\cos x + \frac{1}{2}$ (т.к. $F'(x) = \sin x = f(x)$).

330. а) $F(x) = \sin^2 x$; $f(x) = \sin 2x$; $x \in$ R;

$F'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$, т.е. $F'(x) = f(x)$, что является доказательством, что $F(x)$ — первообразной для $f(x)$ на R;

б) $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$ является первообразной для $f(x) = -\sin 2x$ на R,

т.к. $F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2(-\sin 2x) = -\sin 2x = f(x)$;

в) $F(x) = \sin 3x$ является первообразной для $f(x) = 3\cos 3x$ на R, т.к. $F'(x) = 3\cos 3x = f(x)$;

г) $F(x) = 3 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ является первообразной для $f(x) = \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$

на $(-\pi; \pi)$, т.к. $F'(x) = 0 + \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = f(x)$ на $(-\pi; \pi)$.

331. а) $F(x) = 2x + \cos\frac{x}{2}$ является первообразной для $f(x) = 2 - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$

на R, т.к. $F'(x) = 2 - \dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = f(x)$;

б) $F(x)=\sqrt{4-x^2}$ является первообразной для $f(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

на $(-2;\ 2)$, т.к. $F'(x)=\left((4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=$

$$=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=f(x);$$

г) $F(x)=4x\sqrt{x}$ является первообразной для $f(x)=6\sqrt{x}$ на $(0;\ \infty)$,

т.к. $F'(x)=\left(4x^{\frac{3}{2}}\right)'=4\cdot\dfrac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}=6\sqrt{x}=f(x)$.

332. Найти одну из первообразных для $f(x)$ на R:

а) $f(x)=x+2$; $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x+5$ — первообразная для $f(x)$,

т.к. на R $F'(x)=x+2=f(x)$;

б) $f(x)=\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2=\sin^2\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}=1-\sin x$

и $F(x)=x+\cos x$ на R;

в) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$; $f(x)=1$, т.е. $F(x)=x+5$, т.к. $F'(x)=1$ на R;

г) $f(x)=3x^2+1$; $F(x)=x^3+x+const$ — первообразная для $f(x)$ на R, т.к. $F'(x)=3x^2+1=f(x)$.

333. Две первообразные для $f(x)$;

б) $f(x)=1-\sin x$; $F_1(x)=x+\cos x+2$; $F_2(x)=x+\cos x-5$;

г) $f(x)=\cos x+2$; $F_1(x)=\sin x+2x$; $F_2(x)=\sin x+2x+5$.

334. а) Для $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ первообразной является $g(x)=-\dfrac{1}{x}$,

т.к. $g'(x)=\left(-\dfrac{1}{x}\right)'=(-x^{-1})'=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$ на $R/\{0\}$;

а т.к. $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'=-\dfrac{2}{x^3}=h(x)$, то $f(x)$ является первообразной

для $h(x)=-\dfrac{2}{x^3}$;

б) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\cos x$ является первообразной для функции

$h(x)=x+\sin x$, т.к. $f'(x)=\dfrac{2x}{2}+\sin x=x+\sin x=h(x)$;

$h(x)=x+\sin x$ — первообразная для $g(x)=1+\cos x$,

т.к. $h'(x)=1+\cos x$;

г) $f(x)=3-2\sin x$ имеет первообразную для $g(x)=3x+2\cos x$ на R, т.к. $g'(x)=3-2\sin x=f(x)$;

а т.к. $f'(x)=-2\cos x=h(x)$; то $f(x)$ является первообразной для $h(x)$.

27. Основное свойство первообразной

335. Общий вид первообразных для функций $f(x)$:

а) Для $f(x) = 2 - x^4$ первообразные: $F(x) = 2x - \frac{x^5}{5} + \text{const}$ (далее — C);

б) для $f(x) = x + \cos x$ первообразные: $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$;

в) для $f(x) = 4x$ первообразные: $F(x) = 2x^2 + C$;

г) для $f(x) = -3$ первообразные: $F(x) = -3x + C$.

337. а) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $F\left(\frac{1}{2}\right) = -12$; $F(x) = -\frac{1}{x} + C$; $F\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + C$;

т.е. $-2 + C = -12$; $C = -10$; $F(x) = -\frac{1}{x} - 10$;

б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $F(x) = tg\, x + C$, а т.к. $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, то $0 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + C$;
$C = -1$. Имеем $F(x) = tg\, x - 1$;

в) $f(x) = x^3$; $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, а т.к. по условию $F(-1) = 2$,

то $2 = \frac{(-1)^4}{4} + C$; $C = 1\frac{3}{4}$ и $F(x) = \frac{x^4}{4} + 1\frac{3}{4}$;

г) $f(x) = \sin x$; $F(x) = -\cos x + C$, а т.к. по условию $F(-\pi) = -1$,
то $-1 = -\cos(-\pi) + C$; $-1 = 1 + C$; $C = -2$.

338. а) $F(x) = \sin x - x\cos x$ является первообразной для $f(x) = x\sin x$,
т.к. $F'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = \cos x - \cos x + x\sin x =$
$= x\sin x = f(x)$;

б) $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$;

$$F'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = x(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x),$$

т.е. $F(x)$ — первообразная для $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

в) $F(x) = \cos x + x\sin x$ является первообразной для $f(x) = x\cos x$,
т.к. $F'(x) = -\sin x + \sin x + x\cos x = x\cos x = f(x)$;

г) $F(x) = x - \frac{1}{x}$ является первообразной для $f(x) = \frac{1 + x^2}{x^2}$,

т.к. $F'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2} = f(x)$.

339. а) $f(x) = 2\cos x$; $M\left(-\frac{\pi}{2}; 1\right)$

Найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через т. M.

Решение.
$F(x) = 2\sin x + C$, а т.к. $M \in$ графику $F(x)$, то $1 = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C$;
$1 = -2 + C$; $C = 3$, т.е. $F(x) = 2\sin x + 3$;

б) $f(x) = 1 - x^2$; $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + C$; а т.к. $M(-3; 9)$ принадлежит

графику $F(x)$, то $9 = -3 - \frac{(-3)^3}{3} + C$; $9 = -3 + 9 + C$; $C = 3$,

т.е. $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + 3$;

в) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; $F(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$, а т.к. $M\left(\frac{2\pi}{3}; -1\right) \in$

графику $F(x)$, то $-1 = -\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + C$; $-1 = -\cos\pi + C$;

$C = -2$, т.е. $F(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$;

г) $f(x) = \frac{1}{x^4}$; $F(x) = -\frac{1}{3x^3} + C$, а т.к. по условию $M\left(\frac{1}{2}; 3\right)$

лежит на графике $F(x)$, то $3 = -\frac{1}{3 \cdot \frac{1}{8}} + C$; $C = 3 + \frac{8}{3} = \frac{17}{3}$,

т.е. $F(x) = -\frac{1}{3x^3} + \frac{17}{3}$.

340. а) $f(x) = 2 - \sin x$; $a = 4$ — расстояние между точками графиков с равными абсциссами.
Решение.
$F_1(x) = 2x + \cos x$; $F_2(x) = 2x + \cos x + C \Rightarrow$ расстояние
$F_2(x) - F_1(x) = C = 4$;

б) $f(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$; $a = 1$. Запишем $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, первообразные

$F_1(x) = tg\ x + C$; $F_2(x) = tg\ x$, т.е. $a = F_2(x) - F_1(x) =$
$= tg\ x + C - tg\ x = C = 1$;

в) $f(x) = \sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = -\cos x$; $a = 0{,}5$; $F_1(x) = -\sin x$;

$F_2(x) = -\sin x + C$; $a = F_2(x) - F_1(x) = C = 0{,}5$;

г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $F_1(x) = 2\sqrt{x}$; $F_2(x) = 2\sqrt{x} + C$; $a = F_2(x) - F_1(x) = C = 2$.

341. а) $a(t) = -2t$ — ускорение точки; скорость $v(t) = -t^2 + C_1$;

движение точки: $x(t) = -\frac{t^3}{3} + C_1 \cdot t + C_2$ — функция от времени.

По условию: $t = 1$; $x_0 = 4$; $v_0 = 2$, т.е.

$v(1) = -1 + C_1$, $2 = -1 + C_1$; $C_1 = 3$; $x(1) = -\frac{1}{3} + 3 \cdot 1 + C_2$;

$4 = -\frac{1}{3} + 3 + C_2$; $C_2 = 1\frac{1}{3}$.

Имеем: $x(t) = -\frac{t^3}{3} + 3t + 1\frac{1}{3}$;

б) $a(t) = \sin t$; $v(t) = -\cos t + C_1$; $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, т.е. $1 = -\cos\frac{\pi}{2} + C_1$; $C_1 = 1$;

$x(t) = -\sin t + C_1 \cdot t + C_2$; $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$; $2 = -\sin\frac{\pi}{2} + 1 \cdot \frac{\pi}{2} + C_2$;

$2 = -1 + \frac{\pi}{2} + C_2$; $C_2 = 3 - \frac{\pi}{2}$; т.е. $x(t) = -\sin t + t + 3 - \frac{\pi}{2}$;

в) $a(t) = 6t$; $v(t) = 3t^2 + C_1$; $v(0) = 1$; $1 = 3 \cdot 0 + C_1$; $C_1 = 1$;
$x(t) = t^3 + t + C_2$; $x(0) = 3$; $3 = 0 + 0 + C_2$; $C_2 = 3$.
Имеем: $x(t) = t^3 + t + 3$;

г) $a(t) = \cos t$; $v(t) = \sin t + C_1$; $v(\pi) = 0$; $0 = \sin\pi + C_1$; $C_1 = -\sin\pi = 0$;
$x(t) = -\cos t + C_2$; $x(\pi) = 1$; $1 = -\cos\pi + C_2$; $1 = 1 + C_2$; $C_2 = 0$.
Имеем: $x(t) = -\cos t$.

28. Три правила нахождения первообразных

342. а) $f(x) = 2 - x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Общий вид первообразных: $F(x) = 2x - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2} + C$;

б) $f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x = x - 2x^{-5} + \cos x$.

Общий вид первообразных: $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^4} + \sin x + C$;

в) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$; $f(x) = x^{-2} - \sin x$.

Общий вид первообразных: $F(x) = -\frac{1}{x} + \cos x + C$;

г) $f(x) = 5x^2 - 1$; $F(x) = \frac{5x^3}{3} - x + C$ — общий вид первообразных.

343. а) Для $f(x) = (2x - 3)^5$ первообразные:

$F(x) = \frac{(2x-3)^6}{6} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{(2x-3)^6}{12} + C$;

б) для $f(x) = 3\sin 2x$ общий вид первообразных:

$F(x) = -3\cos 2x \cdot \frac{1}{2} + C = -\frac{3}{2}\cos 2x + C$;

в) для $f(x) = (4 - 5x)^7$ общий вид первообразных:

$F(x) = \frac{(4-5x)^8}{8} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + C = -\frac{(4-5x)^8}{40} + C$;

г) для $f(x) = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ первообразные:

$$F(x) = -\frac{1}{3}\cdot\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 3 + C = -\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

344. а) Для функции $f(x) = \dfrac{3}{(4-15x)^4} = 3\cdot(4-15x)^{-4}$ общий вид первообразных: $F(x) = 3\cdot(4-15x)^{-3}\cdot\left(-\dfrac{1}{15}\right)+C = -\dfrac{1}{5(4-15x)^3}+C;$

б) для функции $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)}$ общий вид первообразных:

$F(x) = -2\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+C;$

в) для $f(x) = \dfrac{4}{(3x-1)^2} = 4(3x-1)^{-2}$ общий вид первообразных:

$F(x) = -4\cdot\dfrac{1}{3}\cdot(3x-1)^{-2+1}+C = \dfrac{-4}{3(3x-1)}+C;$

г) для $f(x) = -\dfrac{2}{x^5}+\dfrac{1}{\cos^2(3x-1)} = -2x^{-5}+\dfrac{1}{\cos^2(3x-1)}$ общий вид первообразных: $F(x) = \dfrac{1}{2x^4}+\dfrac{1}{3}\cdot\mathrm{tg}\,(3x-1)+C.$

345. а) Для $f(x) = 4x+\dfrac{1}{x^2}$, $F(x) = \dfrac{4x^2}{2}-\dfrac{1}{x}+C = 2x^2-\dfrac{1}{x}+C.$

Т.к. $M(-1;\ 4)$ принадлежит графику первообразной, то $4 = 2\cdot(-1)^2+1+C$; $C = 4-3 = 1$, т.е. $F(x) = 2x^2-\dfrac{1}{x}+1;$

б) для $f(x) = x^2+2$ первообразные: $F(x) = \dfrac{x^4}{4}+2x+C,$

а т.к. $M(2;\ 15)$ принадлежит графику первообразной, то $15 = \dfrac{2^4}{4}+2\cdot 2+C$; $C = 15-8 = 7$, т.е. $F(x) = \dfrac{x^4}{4}+2x+7;$

в) для $f(x) = 1-2x$ первообразные:

$F(x) = x-2\cdot\dfrac{x^2}{2}+C = x-x^2+C$, а т.к. $M(3;\ 2)$ принадлежит графику первообразной, то $2 = 3-9+C$; $C = 8$,
т.е. $F(x) = x-x^2+8;$

г) для $f(x) = \dfrac{1}{x^3}-10x^4+3$ первообразные:

$F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}-2x^5+3x+C$, а т.к. $M(1;\ 5)$ принадлежит графику первообразной, то $5 = -\dfrac{1}{2}-2+3+C$; $C = 4{,}5$,

т.е. $F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}-2x^5+3x+4{,}5.$

346. Общий вид первообразных:

а) для $f(x) = 1 - \cos 3x + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

$F(x) = x - \frac{1}{3}\sin 3x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C$;

б) для $f(x) = \frac{1}{\sin^2 4x} + \frac{1}{\sqrt{2 - x}} - 3x^2$;

$F(x) = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg} 4x - 2\sqrt{2 - x} - x^3 + C$;

в) для $f(x) = \frac{1}{\cos^2(3x + 1)} - 3\sin(4 - x) + 2x$;

$F(x) = \frac{2\operatorname{tg}(3x + 1)}{3} - 3\cos(4 - x) + x^2 + C$;

г) для $f(x) = \frac{1}{(3 - 2x)^3} + \frac{3}{\sqrt{5x - 2}} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

$F(x) = \frac{1}{4(3 - 2x)^2} + \frac{6\sqrt{5x - 2}}{5} + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + C$.

347. Т. M принадлежит графику первообразной $F(x)$

а) для $f(x) = 2x + 1$; $F(x) = \frac{2x^2}{2} + x + C = x^2 + x + C$; $M(0; 0)$;

$0 = 0 + 0 + C$; $C = 0$; $F(x) = x^2 + x$;

б) для $f(x) = 3x^2 - 2x$; $F(x) = \frac{3x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = x^3 - x^2 + C$; $M(1; 4)$;

$4 = 1 - 1 + C$; $C = 4$; $F(x) = x^3 - x^2 + 4$;

в) для $f(x) = x + 2$ первообразные: $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + C$;

$M(1; 3)$ принадлежит графику $F(x)$, т.е. $3 = \frac{1}{2} + 2 + C$; $C = \frac{1}{2}$;

$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2}$;

г) для $f(x) = -x^2 + 3x$ первообразные: $F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C$;

$M(2; -1)$ принадлежит графику $F(x)$, т.е. $-1 = -\frac{8}{3} + \frac{3 \cdot 4}{2} + C$;

$C = -\frac{13}{3}$; $F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{13}{3}$.

348. Скорость точки $v(t) = t^2 + 2t - 1$, а $x'(t) = v(t)$,

т.е. $x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{2t^2}{2} - t + C = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + C$.

В начальный момент времени $t = 0$, $x(0) = 0$ (начало координат), т.е. $C = 0$, имеем $x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - t$.

349. Скорость точки: $\upsilon(t) = 2\cos\frac{t}{2}$; а $\upsilon(t) = x'(t)$, т.е. $x(t) = 4\sin\frac{t}{2} + C$.

По условию при $t = \frac{\pi}{3}$ точка находилась на расстоянии 4 м от (0; 0).

Имеем: $x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\frac{\pi}{6} + C = 4$; $4 \cdot \frac{1}{2} + C = 4$; $C = 2$.

Ответ: $x(t) = 4\sin\frac{t}{2} + 2$.

350. Ускорение точки: $a(t) = 12t^2 + 4$, $a(t) = \upsilon'(t)$, т.е.
$\upsilon(t) = \frac{12t^3}{3} + 4t + C$.
По условию $\upsilon(1) = 10$ м/с, т.е. $10 = 4 + 4 + C$; $C = 2$.
$\upsilon(t) = 4t^3 + 4t + 2C$; $x'(t) = \upsilon$;
$x(t) = \frac{4t^4}{4} + \frac{4t^2}{2} + 2t + C_1 = t^4 + 2t^2 + 2t + C_1$, а т.к. $x(1) = 12$,
то $12 = 1 + 2 + 2 + C_1$; $C_1 = 7$.
Имеем: $x(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + 7$.

351. Материальная точка массой m движется по оси OX под действием силы $F(t)$, направленной вдоль оси OX. $F(t) = m \cdot a$

а) Если $F(t) = 6 - 9t$, то $a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{6 - 9t}{3} = 2 - 3t$, т.е. по условию $m = 3$.

$\upsilon(t)$ — первообразная для $a(t)$, т.е. $\upsilon(t) = 2t - \frac{3t^2}{2} + C_1$, по условию

$t_0 = 1$; $\upsilon(t_0) = 4$, т.е. $4 = 2 - \frac{3}{2} + C_1$; $C_1 = 3\frac{1}{2}$; $\upsilon(t) = 2t - \frac{3t^2}{2} + \frac{7}{2}$.

$x(t)$ — первообразная для $\upsilon(t)$, т.е. $x(t) = \frac{2t^2}{2} - \frac{3t^2}{3 \cdot 2} + \frac{7}{2}t + C_2$,

т.е. $x_0 = -5$ по условию $-5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{7}{2} + C_2$; $C_2 = -9$,

имеем: $x(t) = t^2 - \frac{t^3}{2} + \frac{7t}{2} - 9$.

б) Решение аналогично а):
$F(t) = 14\sin t$; $t_0 = \pi$; $\upsilon_0 = 2$; $x_0 = 3$; $m = 7$.
$a(t) = \frac{14\sin t}{7} = 2\sin t$; $\upsilon(t) = -2\cos x + C_1$; $\upsilon(\pi) = -2\cos\pi + C_1$;
$2 = 2 + C_1$; $C_1 = 0$.
$\upsilon(t) = -2\cos x$; $x'(t) = \upsilon(t)$;
$x(t) = -2\sin x + C_2$; $x(\pi) = 3$; $3 = -2\sin\pi + C_2$; $C_2 = 3$;
$x(t) = -2\sin t + 3$.

в) $F(t) = 25\cos t;\ t_0 = \dfrac{\pi}{2};\ \upsilon_0 = 2;\ x_0 = 4;\ m = 5.$

$a(t) = \dfrac{25\cos t}{5} = 5\cos t;\ \upsilon'(t) = a(t);\ \upsilon(t) = 5\sin t + C;$

$2 = 5\sin\dfrac{\pi}{2} + C;\ C = -3;\ \upsilon(t) = 5\sin t - 3;\ x'(t) = \upsilon(t);\ x(t) =$
$= -5\cos t - 3t + C_1;\ x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4;\ 4 = -5\cos\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{2} + C_1;$

$4 = -\dfrac{3\pi}{2} + C_1;\ C_1 = 4 + \dfrac{3\pi}{2};\ x(t) = -5\cos t - 3t + 4 + \dfrac{3\pi}{2}.$

г) $F(t) = 8t + 8;\ t_0 = 2;\ \upsilon_0 = 9;\ x_0 = 7;\ m = 4.$

$a(t) = \dfrac{F(t)}{m} = \dfrac{8(t+1)}{4} = 2t + 2 + C_1;\ \upsilon'(t) = a(t);$

$\upsilon(t) = \dfrac{2t^2}{2} + 2t + C_1 = t^2 + 2t + C_1.\ \upsilon(2) = 9;\ 9 = 2^2 + 2\cdot 2 + C_1;$
$C_1 = 1;\ \upsilon(t) = t^2 + 2r + 1 = (t+1)^2;$

$x'(t) = \upsilon(t);\ x(t) = \dfrac{(t+1)^3}{3} + C_2;\ x(2) = 7;\ 7 = \dfrac{(2+1)^3}{3} + C_2;$

$7 - 9 = C_2;\ C_2 = -2.$

Получаем: $x(t) = \dfrac{(t+1)^3}{3} - 2.$

352. а) Для $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ общий вид первообразных:

$F(x) = 3\cdot\dfrac{x^3}{3} - 2\cdot\dfrac{x^2}{2} + 4x + C = x^3 - x^2 + 4x + C.$

Через т. $M(-1;\ 1)$ проходит график первообразной $F_1(x) =$
$= x^3 - x^2 + 4x + C_1;\ 1 = -1 - 1 - 4 + C_1;\ C_1 = 7$, т.е. $F_1(x) =$
$= x^3 - x^2 + 4x + 7.$
Если график $F(x)$ проходит через т. $N(0;\ 3)$, то $3 = C_2$, т.е. $F_2(x) = x^3 - x^2 + 4x + 3$, т.е. график $F_2(x)$ выше графика $F_1(x)$ на $F_2(x) - F_1(x) = 4$.

в) Решение аналогично:

$f(x) = 4x - x^3;\ F(x) = \dfrac{4x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4} + C = 2x^2 - \dfrac{x^4}{4} + C$ — общий вид первообразных.

Если $M(2;\ 1) \in$ графику $F(x)$, то $1 = 2\cdot 4 - \dfrac{16}{4} + C;\ 3 = 8 - 4 + C;$
$C = -3$, т.е. $F_1(x) = 2x^2 - \dfrac{x^4}{4} - 3.$

Если $N(-2;\ 3) \in$ графику функции $F(x)$, то $3 = 2\cdot(-2)^2 - \dfrac{(-2)^4}{4} + C;$
$3 = 8 - 4 + C;\ C = -1$, т.е. $F_2(x) = 2x^2 - \dfrac{x^4}{4} - 1.$

Имеем график $F_2(x)$ выше графика $F_1(x)$ на $F_2(x) - F_1(x) = -2.$

29. Интеграл. Площадь криволинейной трапеции

353. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

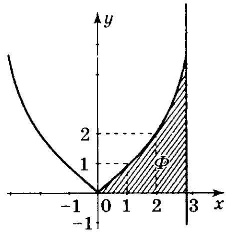
а) $y(x) = x^2$ — парабола; $y = 0$; $x = 3$

$S_Ф = F(b) - F(a)$; $a = 0$; $b = 3$;

$F(x) = \dfrac{x^3}{3}$; $F(3) = 9$; $F(0) = 0$;

$S_Ф = 9 - 0 = 0.$

Ответ: 9.

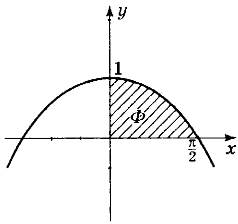


б) $y(x) = \cos x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2}$

$Y(x) = \sin x$;

$S_Ф = F(b) - F(a) = F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - F(0) =$

$= \sin\dfrac{\pi}{2} - \sin 0 = 1;$



в) $y = \sin x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \pi$

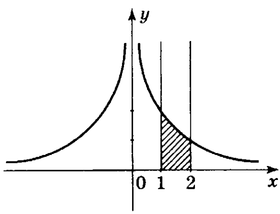
$Y(x) = -\cos x$; $S_Ф = F(b) - F(a) = -\cos(\pi) - (-\cos 0) = -(-1) + 1 =$
$= 1 = 1 = 2$; $S_Ф = 2$.

г) $y = \dfrac{1}{x^2}$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$

$Y(x) = -\dfrac{1}{x}$; $a = 1$; $b = 2$;

$S_Ф = Y(b) - Y(a) = -\dfrac{1}{2} - (-1) = \dfrac{1}{2}.$

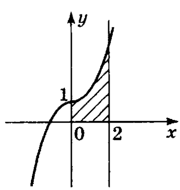
Ответ: $\dfrac{1}{2}$.



354. а) $y = x^3 + 1$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 2$

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} + x$; $S_Ф = F(b) - F(a) =$

$= F(2) - F(0) = 4 + 2 - 0 = 6;$



б) $y = 1 + 2\sin x$; $y = 0$; $x = 0$;

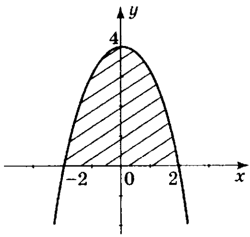
$x = \dfrac{\pi}{2}$

$F(x) = x - 2\cos x \quad F(b) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2};$

$F(a) = F(0) = -2; \; S_\Phi = F(b) - F(a) = \frac{\pi}{2} + 2;$

в) $f(x) = y = 4 - x^2; \; y = 0;$

$F(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$



Точки пересечения параболы с осью абсцисс: $4 - x^2 = 0;$
$x = \pm 2;$
$a = -2; \; b = 2$

$F(a) = -4\cdot 2 - \frac{(-2)^3}{3} = -8 + \frac{8}{3} = -\frac{16}{3};$

$F(b) = F(2) = 4\cdot 2 - \frac{8}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3};$

$S_\Phi = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}.$

Ответ: $10\frac{2}{3}$.

г) $y = f(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos x; \; y = 0; \; x = -\frac{\pi}{2}; \; x = \frac{\pi}{2}$

$F(x) = x + \frac{1}{2}\sin x; \quad F(a) = F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2};$

$F(b) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2};$

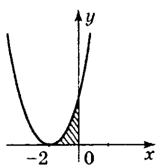
$S_\Phi = F(b) - F(a) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \pi + 1.$

Ответ: $\pi + 1$.

355. а) $y = (x+2)^2; \; y = 0; \; x = 0$

$F(x) = \frac{(x+2)^3}{3}; \; a = -2; \; b = 0;$

$F(a) = 0; \; F(b) = \frac{8}{3}; \; S_{\Phi} = F(b) - F(a) = \frac{8}{3};$



б) $y(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + 1; \; y = 0; \; x = 0; \; x = 2.$

$F(x) = -\frac{1}{x+1} + x \quad F(b) = F(2) = -\frac{1}{2+1} + 2 = 1\frac{2}{3}; \; F(a) = F(0) = -1;$

$S_\Phi = F(b) - F(a) = 1\frac{2}{3} - (-1) = 2\frac{2}{3}.$

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

в) $y = f(x) = 2x - x^2$; $y = 0$

$$F(x) = 2\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = x^2 - \frac{x^3}{3}.$$

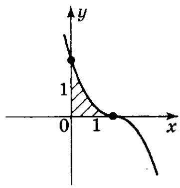
Точки пересечения графика $f(x)$ с осью абсцисс:
$y = 0$; $x(2 - x) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $a = 0$; $b = 2$

$$F(b) = F(2) = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3};\ F(a) = F(0) = 0;$$

$$S_Ф = F(b) - F(a) = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

г) $y = f(x) = -(x - 1)^3$; $y = 0$; $x = 0$



$$F(x) = -\frac{(x-1)^4}{4}.$$

При $x = 0$; $y = 1$; $(0; 1)$ — точка пересечения графика $f(x)$ с осью ординат.
При $y = 0$; $x = 1$; $(1; 0)$ — точка пересечения графика $f(x)$ с осью OX.

$$F(a) = F(0) = -\frac{1}{4};\ F(b) = F(1) = 0;$$

$$S_Ф = F(b) - F(a) = 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

356. а) $y = f(x) = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$; $y = 0$; $x = -\frac{3\pi}{4}$; $x = \frac{3\pi}{4}$

$$F(x) = -3\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right);$$

$$F(b) = F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -3\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = -3\cos\frac{3\pi}{2} = 0;$$

$$F(a) = F\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -3\cos\left(-\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = -3\cos 0 = -3;$$

$S_Ф = F(b) - F(a) = 0 - (-3) = 3.$
Ответ: 3.

б) $y = f(x) = 2\cos 2x$; $y = 0$; $x = -\frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{4}$

$F(x) = \sin 2x$ (т.к. $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$);

$$F(b) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{2\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$F(a) = F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1;$$

$S_Ф = F(b) - F(a) = 1 - (-1) = 2.$

Ответ: 2.

в) $y = f(x) = \sin x - \frac{1}{2}$; $y = 0$; $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{5\pi}{6}$

$$F(x) = -\cos x - \frac{1}{2}x; \quad F(b) = F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12};$$

$$F(a) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12};$$

$$S_Ф = F(b) - F(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

г) $y = f(x) = 1 - \cos x$; $y = 0$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$

$$F(x) = x - \sin x; \quad F(b) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1;$$

$$F(a) = F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 1;$$

$$S_Ф = F(b) - F(a) = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = \pi - 2.$$

Ответ: $\pi - 2$.

30. Интеграл. Формула Ньютона — Лейбница

357. Вычислить интегралы:

а) $\int_{-1}^{2} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{32+1}{5} = \frac{33}{5}$;

б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$;

в) $\int_{1}^{3} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{1}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81-1}{4} = 20$;

г) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1 - 0 = 1.$

358. а) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2(2x+1)}\Big|_{1}^{2} = -\frac{1}{2\cdot 5} - \left(-\frac{1}{2\cdot 3}\right) = -\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$;

б) $\int\limits_0^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}\,dx = 3\cdot 2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = 6\sin\frac{\pi}{2} - 6\sin 0 = 6 - 0 = 6;$

в) $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = \frac{9}{10};$

г) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{4} =$

$= -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$

359. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1;$ $\int\limits_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1;$

т.е. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^1 dx,$ что и требовалось доказать;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\cos\frac{\pi}{3} + \cos 0 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2};$

$\int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot 2}{1} = 2\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}} - 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$

т.е. получаем верное равенство $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}},$ что и требовалось доказать;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1;$ $\int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{3} - 0 = 1,$

т.е. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx,$ что и требовалось доказать;

г) $\int\limits_0^1 (2x+1)dx = \left(\frac{2x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = 1 + 1 - 0 = 2;$

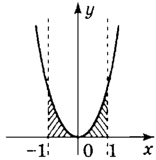
$\int\limits_0^2 (x^3 - 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{4} - 2 - 0 = 2,$

т.е. $\int\limits_0^1 (2x+1)dx = \int\limits_0^2 (x^3-1)dx,$ что и требовалось доказать.

360. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^4$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 1$;

$$S_Ф = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5};$$

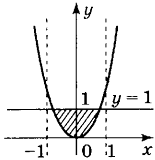


б) $y = x^4$; $y = 1$. Точки пересечения графиков.

$x^4 = 1$; $x = \pm 1$;

$$S_Ф = \int_{-1}^{1} (1 - x^4)dx = \left(x - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{5}\right) - \left(-1 + \frac{1}{5}\right) = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5};$$

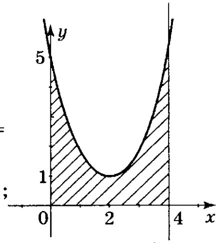


в) $y = x^2 - 4x + 5$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 4$.

$y = (x - 2)^2 + 1$ — парабола с вершиной (2; 1) ветвями вверх, пересекает ось ординат: $x = 0$; $y = 5$;

$$S_Ф = \int_{0}^{4} (x^2 - 4x + 5)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_{0}^{4} =$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 + 20\right) - 0 = \frac{64}{3} - 12 = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3};$$



г) $y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$; $y = 5$.

Точки пересечения графиков:

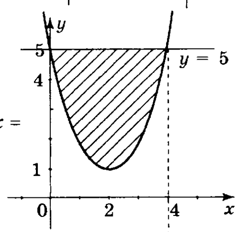
$x^2 - 4x + 5 = 5$; $x(x - 4) = 0$;

$x_1 = 0$; $x_2 = 4$.

$$S_Ф = \int_{0}^{4} (5 - x^2 + 4x - 5)dx = \int_{0}^{4} (-x^2 + 4x)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{4} = -\frac{64}{3} + 32 - 0 =$$

$$= \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3}.$$

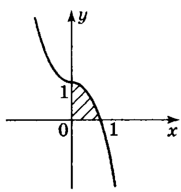


361. а) $y = 1 - x^3$; $y = 0$; $x = 0$.

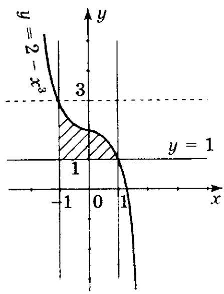
Точки пересечения графика с осями координат: $x = 0$; $y = 1$;

$y = 0$; $x = 1$.

$$S_Ф = \int_{0}^{1} (1 - x^3)dx = \left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1} = 1 - \frac{1}{4} - 0 = \frac{3}{4};$$



б) $y = 2 - x^3$; $y = 1$; $x = -1$; $x = 1$;



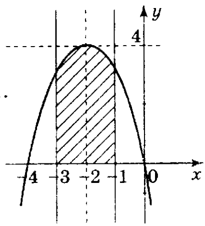
$$S_Ф = \int_{-1}^{1}(2 - x^3 - 1)dx = \int_{-1}^{1}(1 - x^3)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \left(-1 - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 2;$$

в) $y = -x^2 - 4x$; $y = 0$; $x = -3$; $x = -1$;



Точки пересечения с OX параболы:

$-x^2 - 4x = 0$; $-x(x + 4) = 0$;

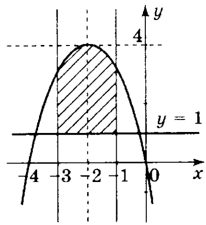
$x_1 = 0$; $x_2 = -4$.

Пределы интегрирования: $a = -3$; $b = -1$.

$$S_Ф = \int_{-3}^{-1}(-x^2 - 4x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 2\right) - \left(\frac{27}{3} - 18\right) = 7\frac{1}{3};$$

г) $y = -x^2 - 4x$; $y = 1$; $x = -3$; $x = -1$;



$$S_Ф = \int_{-3}^{-1}(-x^2 - 4x - 1)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-3}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 2 + 1\right) - \left(\frac{27}{3} - 18 + 3\right) =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 - 9 + 18 - 3 = 5\frac{1}{3}.$$

362. Вычислить интегралы:

а) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx = -3\cos\frac{x}{3}\Big|_{-\pi}^{2\pi} = -3\cos\frac{2\pi}{3} - \left(-3\cos\frac{\pi}{3}\right) = 3\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} = 3;$

б) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}} = \sqrt{2x+5}\Big|_{-2}^{2} = \sqrt{4+5} - \sqrt{-4+5} = 3 - 1 = 2;$

в) $\int_{0}^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}} = 9\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{9}\Big|_{0}^{3\pi} = 9\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{9} - 9\,\mathrm{tg}\,0 = 9\sqrt{3};$

г) $\int\limits_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = 2\sqrt{x+3}\Big|_{-2}^{6} = 2\sqrt{6+3} - 2\sqrt{-2+3} = 6 - 2 = 4.$

363. а) $\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)^2 dx = \int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(1 + 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\right)dx = \int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(1 + \sin\frac{x}{2}\right)dx =$

$= \left(x - 2\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_{0}^{\frac{2\pi}{3}} = \left(\frac{2\pi}{3} - 2\cos\frac{2\pi}{6}\right) - (0 - 2\cos 0) =$

$= \frac{2\pi}{3} - 1 + 2 = \frac{2\pi}{3} + 1;$

б) $\int\limits_{0}^{2} (1+2x)^3 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+2x)^4}{4}\Big|_{0}^{2} = \frac{5^4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{624}{8} = 78;$

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)dx = \left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{12}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{12} - 0 = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4};$

г) $\int\limits_{1}^{4} \left(x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx = \int\limits_{1}^{4} \left(x + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}\right)\Big|_{1}^{4} =$

$= (8+4) - \left(\frac{1}{2} + 2\right) = 9,5.$

364. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

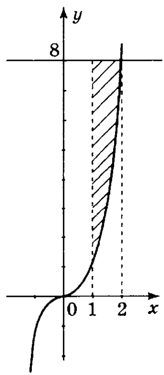
а) $y = x^3$; $y = 8$; $x = 1$

Точки пересечения графиков $y = x^3$ и $y = 8$; $x^3 = 8$; $x = 2$.

$S_\Phi = \int\limits_{1}^{2} (8 - x^3)dx = \left(8 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{1}^{2} =$

$= (16 - 4) - \left(8 - \frac{1}{4}\right) =$

$= 12 - 8 + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4};$

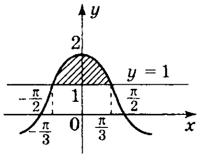


б) $y = 2\cos x$; $y = 1$; $x = -\frac{\pi}{3}$; $x = \frac{\pi}{3}$

$S_\Phi = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x - 1)dx = (2\sin x - x)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(2\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \left(-2\sin\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) =$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} =$$

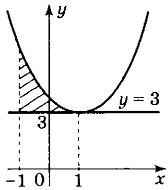
$$= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3};$$



в) $y = x^2 - 2x + 4$; $y = 3$; $x = -1$

$y = (x - 1)^2 + 3$; вершина параболы (1; 3).

Точки пересечения с OY: $x = 0$; $y = 4$

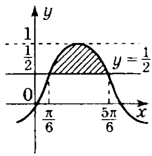


$$S_\Phi = \int_{-1}^{1}(x^2 - 2x + 4 - 3)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}(x^2 - 2x + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 1\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 2 = 2\frac{2}{3};$$

г) $y = \sin x$; $y = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{5\pi}{6}$



$$S_\Phi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)dx = \left(-\cos x - \frac{1}{2}x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= \left(-\cos\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{12}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

365. а) $y = 4x - x^2$; $y = 4 - x$;

Точки пересечения графиков функций $y = 4x - x^2$ и $y = 4 - x$: $4x - x^2 = 4 - x$;

$x^2 - 5x + 4 = 0$; $x_{1,2} = \frac{5\sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$;

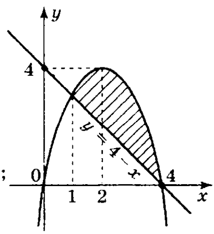
$x_1 = 1$; $x_2 = 4$;

$y = -(x - 2)^2 + 4$ — парабола;

$y = 4 - x$ — прямая.

Пересечение параболы с OX: $4x - x^2 = 0$;

$x(4 - x) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 4$.

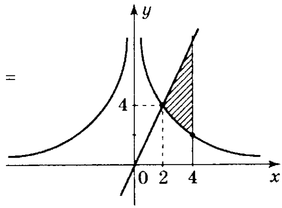


$$S_\Phi = \int_{1}^{4}(4x - x^2 - 4 + x)dx =$$

$$= \int_{1}^{4}(5x - x^2 - 4)dx = \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Bigg|_{1}^{4} =$$

$$=\left(40-\frac{64}{3}-16\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{3}-4\right)=4,5;$$

б) $y=\dfrac{16}{x^2}$; $y=2x$; $x=4$;



$$S_ф=\int_2^4\left(2x-\frac{16}{x^2}\right)dx=\left(x^2+\frac{16}{x}\right)\Bigg|_2^4=$$

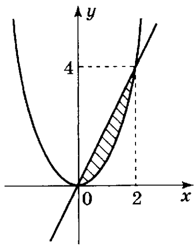
$=(16+4)-(4+8)=20-12=8;$

в) $y=x^2$; $y=2x$

Точки пересечения графиков

$x^2=2x$; $x^2-2x=0$; $x(x-2)=0$;

$x_1=0$; $x_2=2$.



$$S_ф=\int_0^2(2x-x^2)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=$$

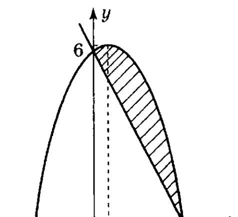
$$=\left(4-\frac{8}{3}\right)-0=\frac{4}{3};$$

г) $y=6-2x$; $y=6+x-x^2$

Точки пересечения графиков

$6-2x=6+x-x^2$; $x^2-3x=0$;

$x_1=0$; $x_2=3$.



$$S_ф=\int_0^3(6+x-x^2-6+2x)dx=$$

$$=\int_0^3(3x-x^2)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}=\frac{27}{6}=4,5.$$

366. а) $y=x^2-4x$; $y=4-x^2$. Найти $S_ф$.

$y_1=(x-2)^2$ — парабола

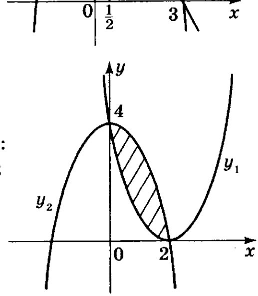
с вершиной (2; 0) пересекается

с параболой $y_2=-x^2+4$ в точках:

$x^2-4x+4=4-x^2$; $2x^2-4x=0$;

$2x(x-2)=0$; $x_1=0$; $x_2=2$.

При $x=0$; $y=4$



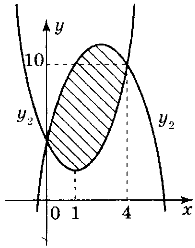
$$S_ф=\int_0^2(4-x^2-x^2+4x-4)dx=$$

$$= \int\limits_0^2 (-2x^2 + 4x)dx = -2 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot 8 + 2 \cdot 4 = \frac{24 - 16}{3} = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.

б) $y_1 = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$ — парабола с вершиной $(1; 1)$ ветвями вверх.
$y_2 = 2 + 6x - x^2) = -(x^2 - 6x - 2) = -((x - 3)^2 - 11) = -(x - 3)^2 + 11$ — парабола ветвями вниз с вершиной $(3; 11)$.
При $y_1 = y_2$; $x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 6x + 2$; $2x^2 - 8x = 0$; $2x(x - 4) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 4$; $y_1 = 2$; $y_2 = 10$ — точки пересечения парабол.



$$S_Ф = \int\limits_0^4 (2 + 6x - x^2 - x^2 + 2x - 2)dx = \int\limits_0^4 (8x - 2x^2)dx =$$

$$= \left(8 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= \left(4x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right)\Bigg|_0^4 = 4 \cdot 16 - \frac{2}{3} \cdot 64 - 0 = \frac{64}{3}.$$

Ответ: $\frac{64}{3}$.

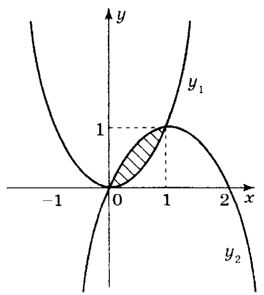
в) $y_1 = x^2$; $y_2 = 2x - x^2 = -(x - 1)^2 + 1$

$$S_D = \int\limits_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (2x - 2x^2)dx = \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.



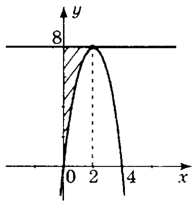
367. Фигура ограничена графиком функции $y = 8x - 2x^2 = -2(x - 2)^2 + 8$, касательной к параболе в т. $(2; 8)$ и прямой $x = 0$.
Пересечение параболы с осью абсцисс: $y = 0$; $2x(4 - x) = 0$, т.е. $x_1 = 0$; $x_2 = 4$.

$S_\Phi = \int\limits_0^2 (8 - 8x + 2x^2)dx =$

$= \left(8x - \frac{8x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 =$

$= 16 - 16 + \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$

Ответ: $\frac{16}{3}$



31. Применение интеграла

370. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

а) $y = x^2 + 1$; $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$

Используем формулу $V(x) = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

В данном случае $f(x) = x^2 + 1$.

Имеем: $V(x) = \pi\int\limits_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = \pi\int\limits_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1)dx =$

$= \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 = \pi\cdot\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{28}{15}\pi;$

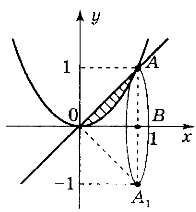
б) $y = \sqrt{x}$; $x = 1$; $x = 4$; $y = 0$

$V(x) = \pi\int\limits_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^4 = \frac{\pi\cdot 4^2}{2} - \pi\cdot\frac{1}{2} = 8\pi - \frac{\pi}{2} = 7\frac{1}{2}\pi.$

371. а) $y = x^2$; $y = x$

При вращении линий получаем конус.

$V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где R = AB = 1 — радиус основания; H = OB = 1 — высота конуса, т.е. $V_к = \frac{1}{3}\pi$.



$V_{кр.к.} = \pi\int\limits_0^1 x^4 dx = \pi\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5}\pi;$

$V_{иск.к.} = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{5}\pi = \frac{2\pi}{15}.$

373. Какую работу надо затратить на сжатие пружины на 4 см, если сила в 2 Н сжимает эту пружину на 1 см:

1 см = 0,01 м; 4 см = 0,04 м; $F = k\cdot x$; $k = \frac{F}{x}$.

Если $F = 2$ Н по условию, то $k = \frac{2\text{Н}}{x} = \frac{2\text{Н}}{0,01} = 200.$

$$A = \int_0^{0,04} 200x\,dx = \frac{200 \cdot x^2}{2} = 100x^2 \Big|_0^{0,04} = 100 \cdot 0,0016 = 0,16 \text{ (Дж)}.$$

§ 9. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ

32. Корень *n*-й степени и его свойства

381. б) $\sqrt[7]{-1} = 1$, т.к. $(-1)^7 = -1$;

в) $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$;

г) $\sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{(-3)^5} = -3$.

382. в) $\sqrt[3]{-343} = \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$.

383. а) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$; г) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$.

384. в) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2}\right)^3} = -\frac{3}{2}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^8}} = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$.

385. Решить уравнения:

а) $x^3 + 4 = 0$; $x^3 = -4$; $x = \sqrt[3]{-4}$ или $x = -\sqrt[3]{4}$;

б) $x^6 = 5$; $x = \pm\sqrt[6]{5}$; т.к. показатель 6 — четное число;

г) $x^4 = 10$; $x = \pm\sqrt[4]{10}$.

386. а) $x^{10} - 15 = 0$; $x^{10} = 15$; $x = \pm\sqrt[10]{15}$;

б) $x^7 + 128 = 0$; $x^7 = -128$; $x = -\sqrt[7]{128} = -\sqrt[7]{2^7} = -2$.

387. а) $16x^4 - 1 = 0$; $x^4 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$; $x_1 = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{2}$;

в) $0,02x^6 - 1,28 = 0$; $0,02x^6 = 1,28$; $x^6 = \frac{128}{2} = 64$; $x^6 = (\pm 2)^6$; $x = \pm 2$;

г) $12\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0$; $\frac{51}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0$; $\frac{51}{4} = \frac{3}{4}x^2$; $17 = x^2$; $x = \pm\sqrt{17}$.

388. а) $\sqrt[3]{x} = -0,6$;

Возведем обе части уравнения в куб: $(\sqrt[3]{x})^3 = (-0,6)^3$; $x = -0,216$;

б) аналогично: возводим обе части уравнения $\sqrt[4]{x} = 3$ в 4-ю степень, имеем: $x = 3^4$; $x = 81$.

389. Вычислить:

а) $(-\sqrt[4]{11})^4$. Воспользуемся свойством $\sqrt[n]{a^n}$ или $(\sqrt[n]{a^n})^n = a$.

$(-1 \cdot \sqrt[4]{11})^4 = (-1)^4 \cdot (\sqrt[4]{11})^4 = 11$;

б) $(2\cdot\sqrt[5]{-2})^5=(-2\sqrt[5]{2})^5=(-2)^5\cdot(\sqrt[5]{2})^5=-32\cdot 2=-64;$

г) $(-\sqrt[6]{2})^6=(-1)^6\cdot(\sqrt[6]{2})^6=1\cdot 2=2.$

392. а) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}=\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3;$ (Воспользовались правилом сокращения степени)

б) $\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[7]{-8}=-\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[7]{8}=-\sqrt[7]{16\cdot 8}=-\sqrt[7]{-128}=-\sqrt[7]{2^7}=-2;$

в) $\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{9}=\sqrt[5]{3^3\cdot 3^2}=\sqrt[5]{3^5}=3;$

г) $\sqrt[3]{-25}\cdot\sqrt[6]{25}=-\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}=-\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}=-\sqrt[3]{5^2\cdot 5}=-\sqrt[3]{5^3}=-5.$

393. а) $\dfrac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}=\dfrac{-\sqrt[3]{5^4}}{-\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{5^4}{5}}=\sqrt[3]{5^3}=5;$

б) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}=\sqrt[4]{\dfrac{2^7}{2^3}}=\sqrt[4]{2^4}=2;$

в) $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}=\dfrac{\sqrt[3]{3^5}}{-\sqrt[3]{3^2}}=-\sqrt[3]{\dfrac{3^5}{3^2}}=-\sqrt[3]{3^3}=-3;$

г) $\dfrac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^7}{2}}=\sqrt[6]{2^6}=2.$

394. а) 1) $\sqrt[6]{\dfrac{64}{100\,000\,000}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^6}{10^8}}=\dfrac{2}{\sqrt[6]{10^8}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{10^4}};$

2) $\sqrt[4]{39\dfrac{1}{6}}=\sqrt[4]{\dfrac{625}{16}}=\sqrt[4]{\dfrac{5^4}{2^4}}=\dfrac{5}{2};$ 3) $\sqrt[3]{-3\dfrac{19}{27}}=-\sqrt[3]{\dfrac{100}{27}}=-\dfrac{\sqrt[3]{10^2}}{3}.$

Имеем: $\sqrt[6]{\dfrac{64}{10^8}}\cdot\sqrt[4]{39\dfrac{1}{16}}:\sqrt[3]{-3\dfrac{19}{27}}=-\dfrac{2\cdot 5\cdot 3}{\sqrt[3]{10^4}\cdot 2\cdot\sqrt[3]{10^2}}=$

$=-\dfrac{15}{\sqrt[3]{10^6}}=-\dfrac{15}{10^2}=-0,15.$

б) $\sqrt[5]{1\dfrac{11}{16}\cdot 4,5}-\dfrac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}}=\sqrt[5]{\dfrac{27\cdot 9}{16\cdot 2}}-\sqrt[5]{\dfrac{9}{288}}=\sqrt[5]{\dfrac{3^5}{2^5}}-\sqrt[5]{\dfrac{3^2}{2^5\cdot 3^2}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1;$

в) $\sqrt[5]{-\dfrac{243}{1024}}\cdot\sqrt[3]{-4\dfrac{17}{27}}=-\sqrt[5]{\dfrac{3^5}{2^{10}}}\cdot\left(-\sqrt[3]{\dfrac{125}{27}}\right)=\dfrac{3}{2^2}\cdot\dfrac{5}{3}=\dfrac{5}{4};$

г) $\sqrt[4]{3\dfrac{3}{8}\cdot 1\dfrac{1}{2}}+\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}=\sqrt[4]{\dfrac{27\cdot 3}{8\cdot 2}}+\sqrt[4]{\dfrac{5}{80}}=\sqrt[4]{\dfrac{3^4}{2^4}}+\sqrt[4]{\dfrac{1}{2^4}}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{2}=2.$

398. а) $\sqrt[5]{0,2}>0;$

б) $\sqrt[12]{0,4}<\sqrt[12]{\dfrac{5}{12}};$ $\sqrt[12]{0,4}=\sqrt[12]{\dfrac{4}{10}}=\sqrt[12]{\dfrac{24}{60}}$ (1); $\sqrt[12]{\dfrac{5\cdot 5}{12\cdot 5}}=\sqrt[12]{\dfrac{25}{60}}$ (2); (1) < (2);

в) $\sqrt[7]{1,8}>1,$ т.к. $\sqrt[7]{1,8}>\sqrt[7]{1};$

г) $\sqrt[8]{0,2} < \sqrt[8]{0,3}$, т.к. 0,2 < 0,3.

401. а) $\sqrt[3]{-0,4} = -\sqrt[3]{0,4} = -\sqrt[15]{0,4^5}$; $\sqrt[5]{-0,3} = -\sqrt[5]{0,3} = -\sqrt[15]{0,3^3}$; $\Rightarrow$ т.к. $0,4^5 > 0,3^3$, то $-\sqrt[15]{0,4^5} < -\sqrt[15]{0,3^3}$, имеем: $\sqrt[3]{-0,4} < \sqrt[5]{-0,3}$;

в) $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} = -\sqrt[15]{2^5} = -\sqrt[15]{64}$; $\sqrt[5]{-4} = -\sqrt[5]{4} = -\sqrt[15]{4^3} = -\sqrt[15]{64}$; $\Rightarrow$

$32 < 64 \Rightarrow -\sqrt[15]{32} > -\sqrt[15]{64}$.

Ответ: $\sqrt[3]{-2} > \sqrt[5]{-4}$.

402. а) $\sqrt[6]{64a^8b^{11}} = \sqrt[6]{2^6 \cdot a^6 \cdot a^2 \cdot b^6 \cdot b^5} = 2ab \cdot \sqrt[6]{a^2 \cdot b^5}$, $a > 0$; $b > 0$;

б) $\sqrt[5]{-128a^7} = -\sqrt[5]{2^7 \cdot a^7} = -\sqrt[5]{2^5 \cdot a^7 \cdot 2^2} = -2a\sqrt[5]{4a^2}$;

в) $\sqrt[4]{6a^{12} \cdot b^6} = \sqrt[4]{6 \cdot a^{12} \cdot b^4 \cdot b^2} = a^3b \cdot \sqrt[4]{6b^2}$;

г) $\sqrt[3]{54a^{10}} = \sqrt[3]{27 \cdot 2 \cdot a^9 \cdot a} = 3a^3 \cdot \sqrt[3]{2a}$.

403. а) $-b\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{b^4 \cdot 3} = -\sqrt[4]{3b^4}$; $a > 0$; $b > 0$

б) $ab \cdot \sqrt[8]{\dfrac{5b^3}{a^7}} = \sqrt[8]{\dfrac{5b^3 \cdot a^8 \cdot b^8}{a^7}} = \sqrt[8]{5b^{11} \cdot a}$;

в) $a\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{a^4 \cdot 7} = \sqrt[4]{7a^4}$;

г) $-ab\sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{-a^3b^3 \cdot (-4)} = \sqrt[3]{4a^3b^3}$.

404. При каких значениях a верно равенство:

а) $\sqrt{a^2} = -a$, $a \le 0$;

б) $\sqrt[3]{a^3} = a$; a — любое;

в) $\sqrt[5]{a} = |a|$; $a \ge 0$;

г) $\sqrt[4]{a^4} = a$; $a \ge 0$.

405. а) $\sqrt[3]{a^3} = a$ при $a = 0$; б) $\sqrt[6]{a^6} = -a$ при $a \le 0$;

в) $\sqrt[4]{a^4} = |a|$ при любом a; г) $\sqrt[7]{a^7} = a$ при любом a.

406. а) $\dfrac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$.

Способ решения: домножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение знаменателю.

$$\frac{3 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{3(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{7 - 5} = \frac{3}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5});$$

б) $\dfrac{a - \sqrt{2}}{a + \sqrt{2}} = \dfrac{(a - \sqrt{2})(a - \sqrt{2})}{(a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2})} = \dfrac{(a - \sqrt{2})^2}{a^2 - 2}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$;

г) $\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1} = \dfrac{(\sqrt{6}+1)^2}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)} = \dfrac{(\sqrt{6}+1)^2}{6-1} = \dfrac{(\sqrt{6}+1)^2}{5}$,

или $\dfrac{6+2\sqrt{6}+1}{5} = \dfrac{7+2\sqrt{6}}{5}$.

407. а) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{a\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}} = \dfrac{a\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{a\sqrt[3]{4}}{2}$;

б) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$;

в) $\dfrac{4}{x\sqrt[4]{4}} = \dfrac{4\cdot\sqrt{2}}{x\sqrt[4]{4}} = \dfrac{4\cdot\sqrt{2}}{x\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{4^2\cdot\sqrt{2}}{2x} = \dfrac{2\sqrt{2}}{x}$;

г) $\dfrac{5}{3\sqrt[5]{5}} = \dfrac{5\cdot\sqrt[5]{5^4}}{3\cdot\sqrt[5]{5}\cdot\sqrt[5]{5^4}} = \dfrac{5\sqrt[5]{5^4}}{3\sqrt[5]{5^5}} = \dfrac{5\sqrt[5]{5^4}}{3\cdot 5} = \dfrac{\sqrt[5]{625}}{3}$.

410. Решить уравнения:

а) $\sqrt[3]{x} - 5\cdot\sqrt[6]{x} + 6 = 0$.

Введем новую переменную $\sqrt[6]{x} = t \ge 0$; $t^2 - 5t + 6 = 0$.

По теореме Виета: $t_1 = 2$; $t_2 = 3$.

$t_1 = 2$; $\sqrt[6]{x} = 2$, $x = 2^6 = 64$; $t_2 = 3$; $\sqrt[6]{x} = 3$, $x = 3^6 = 729$;

б) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 2$.

Пусть $\sqrt[4]{x} = t \ge 0$; $t^2 + 1 - 2 = 0$; $t_1 = -2$; $t_{1,2} = \dfrac{-1\pm 3}{2}$;

$t_1 = -2$ — не удовлетворяет условию $t \ge 0$;

$t_2 = 1$; $\sqrt[4]{x} = 1$, $x = 1$;

в) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0$; $\sqrt[4]{x} = t \ge 0$; $t^2 - 3t + 2 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 2$;

$t_1 = 1$; $\sqrt[4]{x} = 1$, $x = 1$; $t_2 = 2$; $\sqrt[4]{x} = 2$, $(\sqrt[4]{x})^4 = 2^4$; $x = 16$;

г) $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} = 6$; $\sqrt[6]{x} = t \ge 0$; $t^2 - 5t - 6 = 0$;

$t_{1,2} = \dfrac{5\pm\sqrt{25+24}}{2} = \dfrac{5\pm 7}{2}$;

$t_1 = \dfrac{5-7}{2} = -1$ — не удовлетворяет условию $t \ge 0$;

$t_2 = 6$; $\sqrt[6]{x} = 6$, $(\sqrt[6]{x})^6 = 6^6$; $x = 6^6 = 46\,656$.

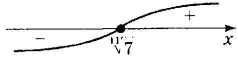
411. Решить неравенства:

а) $x^4 < 3$; $(x^2 - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}) < 0 \Rightarrow (x^2 - \sqrt{3}) < 0$; $(x - \sqrt[4]{3})(x + \sqrt[4]{3}) < 0$.

Ответ: $x \in (-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3})$.

б) $x^{11} \geq 7$; $x = \sqrt[11]{7}$;

Ответ: $x \in [\sqrt[11]{7}; +\infty)$.

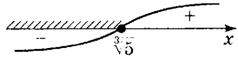


в) $x^{10} > 2$; $x = \pm\sqrt[10]{2}$;

Ответ: $(-\infty; -\sqrt[10]{2}) \cup (\sqrt[10]{2}; +\infty)$.

г) $x^3 \leq 5$; $x = \sqrt[3]{5}$; $x - \sqrt[3]{5} \leq 0$;

Ответ: $x \in (-\infty; \sqrt[3]{5})$.



413. а) $a \leq 0$; $\sqrt[6]{a^6} = -a$; б) $a \geq 0$; $\sqrt[4]{a^4} = a$; в) $\sqrt[5]{a^5} = a$.

414. а) $a \leq 0$; $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt{a^2} = a - (-a) = 2a$;

б) $a \geq 0$; $\sqrt[4]{a^4} + 2\sqrt[7]{a^7} = a + 2a = 3a$;

в) $a \geq 0$; $\sqrt[5]{a^5} - \sqrt[6]{a^6} = a - a = 0$;

г) $a \leq 0$; $\sqrt[3]{a^3} + 3\sqrt[8]{a^8} = a - 3a = -2a$.

415. а) $\sqrt[3]{10 + \sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10 - \sqrt{73}} = \sqrt[3]{100 - 73} = \sqrt[3]{27} = 3$;

б) $$\frac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4 - \sqrt{17}}} + \sqrt{17} = \frac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^2)(4 + \sqrt{17})}}{\sqrt[3]{4 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{4 + \sqrt{17}}} + \sqrt{17} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^3}}{\sqrt[3]{16 - 17}} + \sqrt{17} =$$

$$= \frac{4 + \sqrt{17}}{-1} + \sqrt{17} = -4 - \sqrt{17} + \sqrt{17} = -4;$$

в) $\sqrt[4]{9 - \sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9 + \sqrt{65}} = \sqrt[4]{81 - 65} = \sqrt[4]{16} = 2$;

г) $\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$.

416. Дополняем знаменатель до разности кубов.

а) $$\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3}} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) \cdot ((\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3^2}))} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{(\sqrt[3]{2})^3 - (\sqrt[3]{3})^3} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{-1} = -(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9});$$

г) $$\frac{3a}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{3a \cdot (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})((\sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2)} =$$

$$= \frac{3a \cdot (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3} = \frac{3a \cdot (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{a + b}.$$

33. Иррациональные уравнения

417. а) $\sqrt{x^4+19}=10$; $x^4+19>0$ при любых x; $x^4+19=100$; $x^4=81$; $x=\pm3$;

б) $\sqrt[3]{x^2-28}=2$; $x^2-28=2^3$; $x^2=28+8$; $x^2=36$; $x=\pm6$;

в) $\sqrt{61-x^2}=5$; $61-x^2=25$; $61-25=x^2$; $x^2=36$; $x=\pm6$;

г) $\sqrt[3]{x-9}=-3$; $x-9=(-3)^3$; $x-9=-27$; $x=-18$.

418. а) $\sqrt{x+1}=x-5$; $\begin{cases}x+1\ge0;\\x-5\ge0;\\x+1=(x-5)^2;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge-1;\\x\ge5;\\x^2-10x+25-x-1=0;\end{cases}\Rightarrow x\ge5;$

$x^2-11x+24=0$; $x_{1,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{121-96}}{2}=\dfrac{11\pm5}{2}$;

$x_1=3$ — посторонний корень; $x_2=8$.

Ответ: 8.

б) $x+\sqrt{2x+3}=6$; $\begin{cases}2x+3\ge0\Rightarrow x\ge-1,5;\\(\sqrt{2x+3})^2=(6-x)^2;\end{cases}$ $6-x\ge0$; $x\le6$;

$2x+3=36-12x+x^2$; $x^2-14x+33=0$;

$x_{1,2}=7\pm\sqrt{49-33}=7\pm4$; $x_1=3$;

$x_2=11$ — не удовлетворяет условию ОДЗ: $x\le6$.

Ответ: 3.

в) $\sqrt{2x-1}=x-2$; ОДЗ: $\begin{cases}2x-1\ge0;\\x-2\ge0;\end{cases}$ т.е. $\begin{matrix}x\ge\dfrac12\\x\ge2\end{matrix}\Rightarrow x\ge2$;

$(\sqrt{2x-1})^2=(x-2)^2$; $2x-1=x^2-4x+4$; $x^2-6x+5=0$;

$x_1=5$; $x_2=1$ — посторонний корень.

Ответ: 5.

г) $\sqrt{3x+1}=x-3$; $3+\sqrt{3x+1}=x$; ОДЗ: $\begin{cases}3x+1\ge0;\\x-3\ge0;\end{cases}$

$\begin{cases}x\ge-\dfrac13;\\x\ge3;\end{cases}\Rightarrow x\ge3$; $3x+1=x^2-6x+9$; $x^2-9x+8=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{81-32}}{2}=\dfrac{9\pm7}{2}$; $x_1=1$ — посторонний корень; $x_2=8$.

Ответ: 8.

419. а) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2-2x+4}$

$\begin{cases}2x+1\ge0;\\x^2-2x+4\ge0;\\2x+1=x^2-2x+4;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge-\dfrac12;\\x\in\mathbb{R}\ (\text{т.к. } D<0);\\x^2-4x+3=0;\end{cases}$ $x=2\pm1$; $x_1=1$; $x_2=3$.

Ответ: $\{1;\ 3\}$.

б) $\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - x - 3}$

$\begin{cases} x \geq 0; \\ x^2 - x - 3 \geq 0; \\ x = x^2 - x - 3; \end{cases}$ $x^2 - 2x - 3 = 0;$ $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2;$ $x_1 = -1;$

$x_2 = 3.$

Проверяем корни подстановкой в данное уравнение:

1) $x_1 = -1$ — не удовлетворяет условию, т.к. $x \geq 0$;

2) $x_2 = 3;$ $\sqrt{3} \overset{?}{=} \sqrt{9 - 3 - 3};$ $\sqrt{3} = \sqrt{3}.$

Ответ: 3.

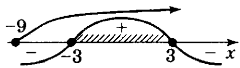
в) $\sqrt{x + 2} = \sqrt{2x - 3}$

$\begin{cases} x + 2 \geq 0; \\ 2x - 3 \geq 0; \\ x + 2 = 2x - 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2; \\ x \geq \dfrac{3}{2}; \\ x - 5 = 0; \end{cases}$ $\Rightarrow x \geq \dfrac{3}{2};$ $x = 5.$

Ответ: 5.

г) $\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{x + 9}$

$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0; \\ x + 9 \geq 0; \\ 9 - x^2 = x + 9; \end{cases}$ $\begin{cases} (3 - x)(3 + x) \geq 0; \\ x \geq -9; \\ x^2 + x = 0; \end{cases}$



$x \in [-3; 3];$

$x(x + 1) = 0;$

$x_1 = 0;$ $x_2 = -1.$

Ответ: $\{-1; 0\}$.

420. а) $x = \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 6x + 8};$ $x^3 = x^3 + x^2 - 6x + 8;$ $x^2 - 6x + 8 = 0;$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8};$ $x_{1,2} = 3 \pm 1;$ $x_1 = 2;$ $x_2 = 4$ — проверяем корни подстановкой в данное уравнение:

1) $x = 2;$ $2 = \sqrt[3]{8 + 4 - 12 + 8};$ $2 = \sqrt[3]{8};$ $2 = 2;$

2) $x = 4;$ $4 = \sqrt[3]{64 + 16 - 24 + 8};$ $4 = \sqrt[3]{64} = 4.$

Ответ: $\{2; 4\}$.

б) $x - 2 = \sqrt[3]{x^2 - 8};$ $(x - 2)^3 = x^2 - 8;$

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^2 - 8;$ $x^3 - 7x^2 + 12x = 0;$

$x(x^2 - 7x + 12) = 0;$ $x_1 = 0;$ $x_{2,3} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \dfrac{7 \pm 1}{2};$ $x_2 = 4;$ $x_3 = 4.$

Выполняем проверку корней:

1) $x = 0;$ $0 - 2 = \sqrt[3]{0 - 8};$ $-2 = \sqrt[3]{-8};$ $-2 = -2;$

2) $x = 3;$ $3 - 2 = \sqrt[3]{9 - 8};$ $1 = \sqrt[3]{1};$ $1 = 1;$

3) $x = 4;$ $4 - 2 = \sqrt[3]{16 - 8};$ $2 = \sqrt[3]{8};$ $2 = 2.$

Ответ: $\{0; 3; 4\}$.

в) $x = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - 8x + 20};$ $x^3 = x^3 - x^2 - 8x + 20;$ $-x^2 - 8x + 20 = 0;$

$x^2 + 8x - 20 = 0$; $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16+20} = -4 \pm 6$; $x_1 = -10$; $x_2 = 2$.
Проверка (устно, подстановкой).
Ответ: $\{-10; 2\}$.

г) $x + 1 = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}$; $(x+1)^3 = x^3 + 2x^2 + x$;
$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 2x^2 + x$; $x^2 + 2x + 1 = 0$; $(x+1)^2 = 0$;
$x = -1$.
Ответ: -1.

421. а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{y} = 1; \\ 3\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 10; \end{cases} \Big| \cdot 2$ $\quad + \begin{array}{l} \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{y} = 1; \\ 6\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y} = 20; \\ \hline 7\sqrt[3]{x} = 21;\ \sqrt[3]{x} = 3;\ x = 3^3;\ x = 27; \end{array}$

$\sqrt[3]{27} + 2\sqrt[3]{y} = 1$; $2\sqrt[3]{y} = 1 - 3$; $2\sqrt[3]{t} = -2$; $\sqrt[3]{y} = -1$; $y = -1$;

Ответ: $(27; -1)$.

б) $\begin{cases} 4\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 2\sqrt{2}; \\ 2\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[4]{y} = 8\sqrt{2}; \end{cases} \Big| \cdot 3$ $\quad + \begin{array}{l} 12\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[4]{y} = 6\sqrt{2}; \\ 2\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[4]{y} = 8\sqrt{2}; \\ \hline 14\sqrt[4]{x} = 14\sqrt{2};\ (\sqrt[4]{x})^4 = (\sqrt{2})^4;\ x = 4; \end{array}$

$4\sqrt[4]{4} - \sqrt[4]{y} = 2\sqrt{2}$; $4\sqrt[4]{4} - 2\sqrt{2} = \sqrt[4]{y}$; $4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt[4]{y}$;

$(2\sqrt{2})^4 = (\sqrt[4]{y})^4$; $y = 64$.
Ответ: $(4; 64)$.

г) $\begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 5\sqrt{5}; \\ 5\sqrt{y} - 2\sqrt{x} = \sqrt{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 5\sqrt{5}; \\ -2\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = \sqrt{5}; \end{cases} \Big| \cdot 2$

$+ \begin{array}{l} 2\sqrt{x} + 6\sqrt{y} = 10\sqrt{5}; \\ -2\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = \sqrt{5}; \\ \hline 11\sqrt{y} = 11\sqrt{5};\ \sqrt{y} = \sqrt{5};\ y = 5; \end{array}$

$5\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{x}$; $4\sqrt{5} = 2\sqrt{x}$; $(2\sqrt{5})^2 = (\sqrt{x})^2$; $4 \cdot 5 = x$; $x = 20$.

Ответ: $(20; 5)$.

422. а) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+6} = 6$; $\begin{cases} x + 1 \ge 0; \\ x + 6 \ge 0; \\ (x+1)(x+6) = 36; \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge -1; \\ x \ge -6; \\ x^2 + 7x + 6 = 36;\ x^2 + 7x - 30 = 0; \end{cases} \Rightarrow x \ge -1;$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{2} = \dfrac{-7 \pm 13}{2}$;

$x_1 = -10$ — не удовлетворяет условию; $x_2 = 3$.
Ответ: $\{3\}$.

б) $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{x-1}$; $\begin{cases} x - 1 \ge 0; \\ 2x - 1 > 0; \\ x + 1 = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-1}; \end{cases}$

$$\begin{cases} x \ge 1; \\ x > \dfrac{1}{2}; \Rightarrow x \ge 1; \\ (x+1)^2 = (x-1)(2x-1); \end{cases}$$

$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 3x + 1$; $x^2 - 5x = 0$; $x(x-5) = 0$;

$x_1 = 0$ — не удовлетворяет условию; $x_2 = 5$.

Ответ: $\{5\}$.

в) $\dfrac{x+6}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{3x+2}$; $\begin{cases} x - 2 > 0; \\ 3x + 2 \ge 0; \\ x + 6 = \sqrt{(3x+2)(x-2)}; \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 2; \\ x \ge -\dfrac{2}{3}; \Rightarrow x > 2; \\ (x+6)^2 = (3x+2)(x-2); \end{cases}$$

$\begin{cases} x > 2; \\ x^2 + 12x + 36 = 3x^2 - 4x - 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2; \\ 2x^2 - 16x - 40 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 2; \\ x^2 - 8x - 20 = 0; \end{cases}$ $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16+20} = 4 \pm 6$; $x_1 = 10$;

$x_2 = -2$ — не удовлетворяет условию.

Ответ: $\{10\}$.

г) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{2-x} = 2x$; $\begin{cases} x \ge 0; \\ 2 - x \ge 0; \\ x(2-x) = 4x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 0; \\ x \le 2; \\ 4x^2 + x^2 - 2x = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \le x \le 2; \\ 5x^2 - 2x = 0; \end{cases}$ $x(5x-2) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{2}{5}$.

Ответ: $\left\{0; \dfrac{2}{5}\right\}$.

423. а) $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x+3}} = 3$; $5 + \sqrt[3]{x+3} = 9$; $\sqrt[3]{x+3} = 4$; $x + 3 = 4^3$; $x = 64 - 3 = 61$.

б) $\sqrt{\sqrt{x^2-16} + x} = 2$; $\begin{cases} x^2 - 16 \ge 0; \\ \sqrt{x^2-16} + x = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-4)(x+4) \ge 0 \\ x^2 - 16 = (4-x)^2; \end{cases}$

$x^2 - 16 - 16 + 8x - x^2 = 0$; $8x - 32 = 0$; $x = 4$.

Ответ: $\{4\}$.

в) $\sqrt{18 - \sqrt[3]{x+10}} = 4$; $18 - \sqrt[3]{x+10} = 4^2$; $18 - 16 = \sqrt[3]{x+10}$;

$2^3 = x + 10$; $x = 8 - 10 = -2$.

Проверка — подстановкой

$x = -2$ в данное уравнение.

Ответ: $\{-2\}$.

г) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-5}}=1$; $\begin{cases} x^2-5\ge 0; \\ x-\sqrt{x^2-5}=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x\in(-\infty;-\sqrt{5}]\cup[\sqrt{5};+\infty); \\ \sqrt{x^2-5}=x-1;\ \ x\ge 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x\ge\sqrt{5}; \\ x^2-5=x^2-2x+1; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge\sqrt{5}; \\ 2x=6;\ x=3. \end{cases}$

Ответ: $\{3\}$.

424. а) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$; $\begin{cases} x-3\ge 0; \\ x-4\ge 0; \\ x-3=1+2\sqrt{x-4}+x-4; \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{matrix} x\ge 3; \\ x\ge 4; \end{matrix} \Rightarrow x\ge 4;$

$\begin{cases} x\ge 4; \\ 2\sqrt{x-4}=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 4; \\ x=4. \end{cases}$

Ответ: $\{4\}$.

б) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$; $\begin{cases} x\ge -2; \\ x\ge 6; \\ x+2+x-6-2\sqrt{(x+2)(x-6)}=4; \end{cases}$ $\Rightarrow x\ge 6;$

$\begin{cases} x\ge 6; \\ 2\sqrt{x^2-4x-12}=2x-8; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 6; \\ \sqrt{x^2-4x-12}=x-4; \end{cases}$

$\begin{cases} x\ge 6; \\ x^2-4x-12=x^2-8x+16; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 6; \\ 4x-28=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 6; \\ x=7. \end{cases}$

Ответ: $\{7\}$.

в) $2+\sqrt{10-x}=\sqrt{22-x}$; $\begin{cases} 10-x\ge 0; \\ 22-x\ge 0; \\ 4+4\sqrt{10-x}+10-x=22-x; \end{cases}$

$\begin{cases} x\le 10; \\ x\le 22; \\ 4\sqrt{10-x}=8; \end{cases}$ $\Rightarrow x\le 10;$ $\sqrt{10-x}=2$; $10-x=4$; $x=6$.

Ответ: $\{6\}$.

г) $\sqrt{1-2x}-3=\sqrt{16+x}$; $\begin{cases} 1-2x\ge 0,\ x\le\dfrac{1}{2}; \\ 16+x\ge 0,\ x\ge -16; \\ 1-2x-6\sqrt{1-2x}+9=16+x; \end{cases}$

$\begin{cases} -(x+2)=2\sqrt{1-2x}; \\ x+2\le 0,\ x\le -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x\in[-16;-2]; \\ x^2+4x+4=4(1-2x); \end{cases}$

$x^2+4x+4-4+8x=0$; $x^2+12x=0$; $x(x+12)=0$;
$x_1=0\notin[16;-2]$; $x_2=-12$.
Ответ: $\{-12\}$.

425. а) $\sqrt{x-3}-6=\sqrt[4]{x-3}$; $(\sqrt[4]{x-3})^2-\sqrt[4]{x-3}-6=0$.

Пусть $\sqrt[4]{x-3}=y$; $\sqrt{x-3}=y^2$; $x\ge 3$.

$y^2 - y - 6 = 0$; $y_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$;

$y_1 = -2$; $\sqrt[4]{x-3} \neq -2$, т.к. $\sqrt[4]{x-3} \geq 0$;

$y_2 = 3$; $\sqrt[4]{x-3} = 3$; $x - 3 = 3^4$; $x = 3 + 81 = 84$.

Ответ: $\{84\}$.

б) $\sqrt[3]{x+1} + 2\sqrt[6]{x+1} = 3$.

Введем новую переменную: $\sqrt[6]{x+1} = y$; $y \geq 0$. Тогда $\sqrt[3]{x+1} = y^2$.
$y^2 + 2y - 3 = 0$; $y_1 = -3$ — не удовлетворяет условию; $y_2 = 1$;
$\sqrt[6]{x+1} = 1$; $x + 1 = 1^6$; $x = 0$.
Ответ: $\{0\}$.

в) $\sqrt[4]{x-5} = 30 - \sqrt{x-5}$; $x \geq 5$.

Пусть $\sqrt[4]{x-5} = y$; $y \geq 0$, тогда $\sqrt{x-5} = y^2$.

$y^2 + y - 30 = 0$; $y_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \dfrac{-1 \pm 11}{2}$;

$y_1 = -6$ — не удовлетворяет условию;

$y_2 = 5$; $\sqrt[4]{x-5} = 5$; $x - 5 = 5^4$; $x = 630$.

Ответ: $\{630\}$.

г) $3\sqrt[10]{x^2-3} + \sqrt[5]{x^2-3} = 4$.

Пусть $\sqrt[10]{x^2-3} = y$; $y \geq 0$; $\sqrt[5]{x^2-3} = y^2$.

$y^2 + 3y - 4 = 0$; $y_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2}$;

$y_1 = -\dfrac{8}{2} = -4$ — не удовлетворяет условию;

$y_2 = 1$; $\sqrt[10]{x^2-3} = 1$; $x^2 - 3 = 1$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$.

Ответ: $\{-2; 2\}$.

426. а) $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5; \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 3; \end{cases}$ $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Метод подстановки: $\begin{cases} \sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 5; \\ \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 5) = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 5; \\ 2x - 5\sqrt{x} - 3 = 0. \end{cases}$

Вводим новую переменную: $\sqrt{x} = t$; $t \geq 0$;

$2t^2 - 5t - 3 = 0$; $t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \dfrac{5 \pm 7}{4}$;

$t_1 = -\dfrac{1}{2}$ — не удовлетворяет условию;

$t_2 = 3$; $\sqrt{x} = 3$; $x = 9$; $\sqrt{y} = 2\sqrt{9} - 5 = 1$; $y = 1$.

Ответ: (9; 1).

б) $\begin{cases} \sqrt{6+x} - 3\sqrt{3y+4} = -10; \\ 4\sqrt{3y+4} - 5\sqrt{6+x} = 6; \end{cases} \Big| \cdot 5$

$+\begin{cases} 5\sqrt{6+x} - 15\sqrt{3y+4} = -50; \\ -5\sqrt{6+x} + 4\sqrt{3y+4} = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} 6+x \ge 0; \\ 3y+4 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -6; \\ y \ge -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$

$-11\sqrt{3y+4} = -44$; $\sqrt{3y+4} = 4$;

$3y + 4 = 16$; $3y = 12$; $y = 4$;

$\sqrt{6+x} = 3\sqrt{3 \cdot 4 + 4} - 10 = 3 \cdot 4 - 10 = 2$; $\sqrt{6+x} = 2$; $6 + x = 4$; $x = -2$.

Ответ: (–2; 4).

в) $\begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 10; \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 8. \end{cases}$

Решаем методом подстановки $\begin{cases} \sqrt{x} = 10 - 3\sqrt{y}; \\ (10 - 3\sqrt{y}) \cdot \sqrt{y} = 8; \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x} = 10 - 3\sqrt{y}; \\ -3(\sqrt{y})^2 + 10\sqrt{y} - 8 = 0. \end{cases}$

Пусть $\sqrt{y} = a$; $a \ge 0$; $-3a^2 + 10a - 8 = 0$; $3a^2 - 10a + 8 = 0$;

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{3} = \frac{5 \pm 1}{3};$$

$a_1 = \dfrac{4}{3}$; $\sqrt{y} = \dfrac{4}{3}$; $y_1 = \dfrac{16}{9}$;

$$x_1 = (10 - 3\sqrt{y_1})^2 = \left(10 - 3 \cdot \frac{4}{3}\right)^2 = 6^2 = 36;$$

$a_2 = 2$; $\sqrt{y} = 2$; $y_2 = 4$; $x_2 = (10 - 3\sqrt{y_2})^2 = (10 - 3 \cdot 2)^2 = 4^2 = 16$.

Ответ: $\left(36; \dfrac{16}{9}\right)$; (16; 4).

г) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2} + \sqrt{5y+1} = 8; \\ 3\sqrt{x-2} - 2\sqrt{5y+1} = -2; \end{cases} \Big| \cdot 2$

$+\begin{cases} 4\sqrt{x-2} + 2\sqrt{5y+1} = 16; \\ 3\sqrt{x-2} - 2\sqrt{5y+1} = -2; \end{cases}$

$7\sqrt{x-2} = 14$; $\sqrt{x-2} = 2$; $x - 2 = 4$; $x = 6$.

Подставляем $x = 6$ в первое уравнение: $2\sqrt{6-2} + \sqrt{5y+1} = 8$;

$\sqrt{5y+1} = 4$; $5y + 1 = 16$; $5y = 15$; $y = 3$.

ОДЗ: $\begin{cases} x-2\ge 0; \\ 5y+1\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 2; \\ y\ge -\dfrac{1}{5}. \end{cases}$

Ответ: (6; 3).

427. а) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8,\ x\ge 0; \\ x-y=16,\ y\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8; \\ (\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=16; \end{cases}$

Делим второе уравнение на первое: $+\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8; \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2; \end{cases}$

$2\sqrt{x}=10;\ \sqrt{x}=5;$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=8\Rightarrow 5+\sqrt{y}=8;\ \sqrt{y}=8-5=3;\ y=9.$

Ответ: (5; 9).

б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5; \\ xy=216. \end{cases}$

Метод подстановки: $\begin{cases} \sqrt[3]{x}=5-\sqrt[3]{y};\ x=(5-\sqrt[3]{y})^3; \\ (5-\sqrt[3]{y})^3(\sqrt[3]{y})^3=6^3; \end{cases}$

т.е. $(5-\sqrt[3]{y})\cdot\sqrt[3]{y}=6;\ 5\sqrt[3]{y}-(\sqrt[3]{y})^2-6=0;\ \sqrt[3]{y}=a;$

$a^2-5a+6=0;\ a_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{5\pm 1}{2};$

$a_1=2;\ 2=\sqrt[3]{y};\ y_1=8;\ x_1=(5-\sqrt[3]{8})^3=(5-2)^3=27;$

$a_2=3;\ 3=\sqrt[3]{y};\ y_1=27;\ x_1=(5-\sqrt[3]{27})^3=(5-3)^3=8.$

Ответ: (27; 8); (8; 27).

в) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4; \\ x-y=32; \end{cases}$ $x\ge 0;\ y\ge 0;$ $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4; \\ (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=32; \\ x\ne y; \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4; \\ 4(\sqrt{x}+\sqrt{y})=32; \end{cases}$ $+\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4; \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8; \end{cases}$ $x=36;\ 6-\sqrt{y}=4;$

$2\sqrt{x}=12;\ \sqrt{x}=6;$

$\sqrt{y}=2;\ y=4.$

Отет: (36; 4).

г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2; \\ xy=27; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2; \\ (\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y})^3=3^3. \end{cases}$

Метод подстановки: $\begin{cases} \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x} - 2; \\ \sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[3]{x} - 2) = 3; \end{cases}$ $(\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} - 3 = 0.$

Пусть $\sqrt[3]{x} = a$; $a^2 - 2a - 3 = 0$; $a_{1,2} = 1 \pm 2$;

$a_1 = -1$; $\sqrt[3]{x} = -1$; $x_1 = -1$; $y_1 = (\sqrt[3]{x_1} - 2)^3 = (-1-2)^3 = -27$;

$a_2 = 3$; $\sqrt[3]{x} = 3$; $x_2 = 3^3 = 27$; $y_2 = (\sqrt[3]{x_2} - 2)^3 = (3-2)^3 = 1$.

Ответ: (–1; –27); (27; 1).

34. Степень с рациональным показателем

428. а) $3^{1,2} = 3^{\frac{12}{10}} = 3^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{3^6} = \sqrt[5]{729}$;

б) $5^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$;

в) $4^{1,25} = (2^2)^{1,25} = 2^{2,5} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$;

г) $6^{-1\frac{1}{2}} = 6^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{6^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{6^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{216}}$.

429. а) $\sqrt[3]{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt[7]{3b} = 3^{\frac{1}{7}} \cdot b^{\frac{1}{7}}$;

в) $16^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{16^5} = \sqrt[4]{(2^4)^5} = 2^5 = 32$; или $16^{\frac{5}{4}} = (2^4)^{\frac{5}{4}} = 2^5 = 32$;

г) $\sqrt[13]{b^{-7}} = b^{-\frac{7}{13}} = \dfrac{1}{b^{\frac{7}{13}}} = \dfrac{1}{\sqrt[13]{b^7}}$;

д) $\sqrt[8]{4^5} = \sqrt[8]{(2^5)^2} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{32}$ или $2\sqrt[4]{2}$.

430. а) $243^{0,4} = (3^5)^{0,4} = 3^2 = 9$;

б) $\left(\dfrac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}} = \left(\left(\dfrac{8}{3}\right)^8\right)^{-\frac{1}{8}} = \left(\dfrac{8}{3}\right)^{-1} = \dfrac{3}{8}$;

в) $16^{\frac{5}{4}} = (2^4)^{\frac{5}{4}} = 2^5 = 32$;

г) $\left(\dfrac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}} = \left(\left(\dfrac{3}{5^2}\right)^9\right)^{\frac{2}{9}} = \left(\dfrac{3}{25}\right)^2 = \dfrac{9}{625}$.

431. а) $8^{\frac{1}{2}}:\left(8^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{3}{2}}\right)=8^{\frac{1}{2}}\cdot 8^{-\frac{1}{6}}\cdot 9^{-\frac{3}{2}}=8^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{27}$;

б) $\sqrt[3]{100}\cdot(\sqrt{2})^{\frac{8}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{2^2\cdot 5^2}\cdot 2^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{-\frac{5}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{-\frac{5}{3}}=2^2\cdot 5^{-1}=\frac{4}{5}$;

в) $8^{2\frac{1}{3}}:81^{0,75}=8^{\frac{7}{3}}:81^{\frac{3}{4}}=2^7\cdot 3^{-3}=\frac{128}{27}=4\frac{20}{27}$;

г) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5}\cdot\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-0,5}\cdot\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$.

432. а) $(ax)^{\frac{1}{3}}+(ay)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)$; б) $a-a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)$;

в) $3+3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}\left(3^{\frac{1}{2}}+1\right)$; г) $(3x)^{\frac{1}{2}}-(5x)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}\left(3^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)$.

433. а) $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}+1=x^{\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{1}{3}}-1\right)-\left(y^{\frac{1}{3}}-1\right)=\left(y^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)$;

б) $c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}=c^{\frac{1}{4}}\left(c^{\frac{1}{4}}+1\right)$; $4-4^{\frac{1}{3}}=\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^3-4^{\frac{1}{3}}=$

$=4^{\frac{1}{3}}\left(4^{\frac{2}{3}}-1\right)=4^{\frac{1}{3}}\left(4^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(4^{\frac{1}{3}}+1\right)$;

г) $a+b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)+b^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$.

434. а) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$;

б) $\dfrac{z-8}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}=\dfrac{\left(z^{\frac{1}{3}}-2\right)\left(z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4\right)}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}=z^{\frac{1}{3}}-2$;

в) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-4}{\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+4\right)}=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}+4}$;

г) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$.

435. а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}=$

$=\dfrac{y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{4}}};$

б) $\dfrac{a-1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{3}{2}}-1}+2a^{\frac{1}{2}}=$

$=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}+1}+2a^{\frac{1}{2}}=$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^2+2a^{\frac{1}{2}}=a-2a^{\frac{1}{2}}+1+2a^{\frac{1}{2}}=a+1;$

в) $\left(\dfrac{1}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}(a-b)}\cdot\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=$

$=\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}(a-b)}\cdot\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{2a(a-b)}{a(a-b)}=2;$

г) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)}\cdot\dfrac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{1}=$

$=\dfrac{x^2-\sqrt{x}+x\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}=$

$=\dfrac{(x-1)(x+1)+\sqrt{x}(x-1)}{x+\sqrt{x}+1}=\dfrac{(x-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1}=x-1.$

436. а) $\sqrt[7]{3^3}=3^{\frac{3}{7}}<3^{\frac{19}{8}}$, т.е. $\dfrac{3}{7}<\dfrac{19}{8}$; а $6>1$;

б) $0,4^{-2,7}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2,7}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{189}{70}}>\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{15}{7}}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{150}{70}}$, т.е. $\dfrac{189}{70}>\dfrac{150}{70}$; а $\dfrac{5}{2}>1$;

в) $\sqrt[3]{6^5}=6^{\frac{5}{3}}=6^{\frac{50}{30}}<6^{1,7}=6^{\frac{51}{30}}$, т.е. $\dfrac{50}{30}<\dfrac{51}{30}$; а $6>1$;

г) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{35}{21}}<\sqrt[7]{\dfrac{1}{32}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{5}{7}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{15}{21}}$, т.е. $\dfrac{35}{21}>\dfrac{15}{21}$; а $\dfrac{1}{2}<1$.

437. Вычислить:

а) $81^{-0,75}+\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\dfrac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}=(3^4)^{-\frac{3}{4}}+(5^{-3})^{-\frac{1}{3}}-(2^{-5})^{-\frac{3}{5}}=$

$=3^{-3}+5-2^3=\dfrac{1}{27}-3=$

$=\dfrac{1-3^4}{27}=\dfrac{-80}{27}=-2\dfrac{26}{27}$;

б) $0,001^{-\frac{1}{3}}-(-2)^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}+(9^0)^2=\left(\dfrac{1}{10^3}\right)^{-\frac{1}{3}}-\dfrac{1}{2^2}\cdot(2^6)^{\frac{2}{3}}-(2^3)^{-\frac{4}{3}}+1=$

$=10-2^2-2^{-4}+1=10-4-\dfrac{1}{16}+1=7-\dfrac{1}{16}=6\dfrac{15}{16}$;

в) $27^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}-25^{0,5}=3^2+(2^{-4})^{-\frac{3}{4}}-(5^2)^{0,5}=9+8-5=12$;

г) $(-0,5)^{-4}-625^{0,25}-\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+19\cdot(-3)^{-3}=2^4-5^{4\cdot\frac{1}{4}}-\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{19}{27}=$

$=16-5-\dfrac{8}{27}-\dfrac{19}{27}=11-\dfrac{27}{27}=10.$

438. Упростить выражения:

а) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1=\dfrac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)\cdot\sqrt[4]{a}\cdot(\sqrt[4]{a}+1)\cdot a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}\cdot\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\cdot(\sqrt{a}+1)\cdot a^{\frac{1}{4}}}+1=$

$=\sqrt{a}-1+1=\sqrt{a}$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^4}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{(\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x})\cdot\sqrt[4]{x}+1-x}{(1-\sqrt{x})\cdot\sqrt[4]{x}}\right)^2\times$

$\times\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^4}-\sqrt[4]{x^2}+1-x}{(1-\sqrt{x})\cdot\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2}}=$

$=\dfrac{(1-\sqrt{x})^2\cdot\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})^2\cdot(\sqrt[4]{x})^2\cdot(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$;

в) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}-27a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-3\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-\sqrt[3]{a^2}=$

$$=\frac{a^{\frac{1}{3}}\left(\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3-(3\sqrt[3]{b})^3\right)\cdot a^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-3\sqrt[3]{b}\right)}-a^{\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{3}}\right)}-a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0;$$

г) $\left(\dfrac{1}{m+\sqrt{2}}-\dfrac{m^2+4}{m^3+2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{m}\right)=$

$$=\left(\frac{1}{m+\sqrt{2}}-\frac{m^2+4}{m^3+(\sqrt{2})^3}\right)\cdot\frac{m^2-\sqrt{2}m+2}{2m}=$$

$$=\frac{(m^2-m\sqrt{2}+2-m^2-4)(m^2-\sqrt{2}m+2)}{(m+\sqrt{2})(m^2-m\sqrt{2}+2)\cdot 2m}=$$

$$=\frac{-(\sqrt{2}m+2)}{(m+\sqrt{2})\cdot 2m}=\frac{-(\sqrt{2}m+2)}{(m+\sqrt{2})\cdot 2m}=$$

$$=\frac{-\sqrt{2}(m+\sqrt{2})}{(m+\sqrt{2})\cdot 2m}=-\frac{\sqrt{2}}{2m}.$$

439. а) $\dfrac{1}{8}\cdot\sqrt[7]{2^5\cdot ax^3}=2^{-3}\cdot 2^{\frac{5}{7}}\cdot a^{\frac{1}{7}}\cdot x^{\frac{3}{7}}=2^{-\frac{16}{7}}\cdot a^{\frac{1}{7}}\cdot x^{\frac{3}{7}};$

б) $\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[4]{a}}=\sqrt[3]{a^2\cdot a^{\frac{1}{4}}}=\sqrt[3]{a^{\frac{9}{4}}}=a^{\frac{9}{12}}=a^{\frac{3}{4}}.$

440. а) $3\cdot 2^{-\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{3^5\cdot 2^{-3}}=\sqrt[5]{\dfrac{3^5}{2^3}}=\sqrt[5]{\dfrac{243}{8}};$

б) $a^{\frac{3}{4}}:b^{\frac{2}{5}}=\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[5]{b^2}}=\dfrac{\sqrt[20]{a^{15}}}{\sqrt[20]{b^8}}=\sqrt[20]{\dfrac{a^{15}}{b^8}};$

г) $b^{\frac{1}{3}}\cdot c^{\frac{2}{7}}=\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[7]{c^2}=\sqrt[21]{b^7}\cdot\sqrt[21]{c^6}=\sqrt[21]{b^7c^6}.$

441. а) $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}}=\sqrt[3]{3^{-1}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}}$; т.к. $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{5}{6}}=3^{-\frac{5}{12}};$

$\sqrt[3]{3^{-1}\cdot 3^{-\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{3^{-\frac{5}{4}}} = 3^{-\frac{5}{4\,3}} = 3^{-\frac{5}{12}};$

б) $3^{600} > 5^{400}$; т.к. $(3^6)^{100} = 729^{100}$; $(5^4)^{100} = 625^{100}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}} = \sqrt{2}\cdot 2^{\frac{3}{14}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}} = 2^{\frac{5}{7}}$; $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{3}{14}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{14}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}} = 2^{\frac{10}{14}} = 2^{\frac{5}{7}}$;

г) $7^{30} > 4^{40}$, т.к. $7^{30} = (7^3)^{10} = 343^{10}$; $4^{40} = (4^4)^{10} = 256^{10}$.

443. Найти область определения выражений:

а) $(x+1)^{-\frac{2}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{(x+1)^2}}$, $x \neq -1$; б) $x^{\frac{5}{3}}$ имеет смысл при $x \geq 0$;

в) $x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$, $x > 0$, или $x > 0$; г) $(x-5)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x-5)^2}$, $x \in [5; +\infty)$.

444. а) $\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^6 = a$ верно при $a \geq 0$; б) $(a^4)^{\frac{1}{4}} = -a$ верно при $a \leq 0$;

в) $(a^8)^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{|a|}$ верно при $a = \pm 1$; г) $(a^{0,7})^{1\frac{3}{7}} = -a$ верно при $a = 0$.

35. Показательная функция

446. Найти область значений функций:

а) $y = -2^x$; $E(y)$: $y < 0$, т.е. $y \in (-\infty; 0)$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $E(y)$: $y > 1$, или $y \in (1; +\infty)$;

в) $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x$; $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 0$; $E(y)$: $y < 0$, т.е. $y \in (-\infty; 0)$;

г) $y = 5^x - 2$; $5^x > 0$; $5^x - 2 > -2$, т.е. $E(y)$: $(-2; \infty)$.

447. а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} > 1$, т.к. $\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{2}} > \left(\frac{7}{4}\right)^0$ (функция возрастает при основании $\frac{7}{4} > 1$);

б) $3^{-\sqrt{12}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2,8}$, т.к. $3^{-\sqrt{12}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{12}\approx 3,46} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2,8}$ (функция убывает при основании $\frac{1}{3} < 1$);

в) $2,5^{-\sqrt{2}} < 1$, т.к. $\left(\frac{5}{2}\right)^{-\sqrt{2}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2}} < 1 = \left(\frac{2}{5}\right)^0$; $\frac{2}{5} < 1$;

г) $0,3^{\frac{\sqrt{5}}{6}} < 0,3^{\frac{1}{3}}$, т.к. $0,3^{\frac{\sqrt{5}}{6}} \approx 0,3^{0,37}$; $0,3^{\frac{1}{3}} = 0,3^{0,33}$; $0,37 > 0,33$; осн. $0,3 < 1$.

448. а) $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$;

б) $3^{1-2\sqrt{3}} \cdot 9^{1+\sqrt{3}} = 3^{1-2\sqrt{3}} \cdot 3^{2+2\sqrt{3}} = 3^3 = 27$;

в) $8^{\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}} = 2^{3\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}} = 1$; г) $(3^{\sqrt[5]{8}})^{\sqrt[5]{4}} = 3^{\sqrt[5]{2^3\, 2^2}} = 3^{\sqrt[5]{2^5}} = 3^2 = 9$.

449. Упростить:

а) $a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}-\sqrt{2}+1} = a$;

б) $x^{\pi} \cdot \sqrt[4]{x^2 : x^{4\pi}} = \frac{x^{\pi} \cdot \sqrt[4]{x^2}}{\sqrt[4]{x^{4\pi}}} = \frac{x^{\pi} \cdot \sqrt{x}}{x^{\pi}} = \sqrt{x}$;

в) $(a^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}} = a^{\sqrt{5}\sqrt{5}} = a^5$;

г) $y^{\sqrt{2}} \cdot y^{1,3} : \sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}} = \frac{y^{\sqrt{2}} \cdot y^{1,3}}{y^{\sqrt{2}}} = y^{1,3}$.

450. а) $\frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1 = \frac{(a^{\sqrt{2}})^2 - (b^{\sqrt{3}})^2}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}} + 1 = \frac{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})(a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}})}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1 =$

$= \frac{a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}} + 1 = \frac{a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}} + a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}} = \frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}$;

в) $\frac{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}} + a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} b^{\frac{\sqrt{7}}{3}} + b^{\frac{3\sqrt{7}}{3}}} = \frac{\left(a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} - b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}\right)\left(\left(a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}\right)^2 + a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} \cdot b^{\frac{\sqrt{7}}{3}} + \left(b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}\right)^2\right)}{\left(a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}\right)^2 + a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} \cdot b^{\frac{\sqrt{7}}{3}} + \left(b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}\right)^2} =$

$= a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} - b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}$;

г) $\sqrt{(x^{\pi} + y^{\pi})^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} xy\right)^{\pi}} = \sqrt{x^{2\pi} + y^{2\pi} + 2(xy)^{\pi} - 4(xy)^{\pi}} =$

$= \sqrt{(x^{\pi})^2 - 2 \cdot x^{\pi} \cdot y^{\pi} + (y^{\pi})^2} =$

$= \sqrt{(x^{\pi} - y^{\pi})^2} = \left|x^{\pi} - y^{\pi}\right|$.

453. а) Функция $y = (\sqrt{2})^x$ — возрастающая, т.к. основание $\sqrt{2} \approx 1,41 > 1$;

$y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ — убывающая, т.к. основание $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$;

б) $y = (\sqrt{5} - 2)^x$ — убывающая, т.к. основание

$\sqrt{5} - 2 \approx 2,24 - 2 \approx 0,24 < 1$;

$y = \frac{1}{(\sqrt{5} - 2)^x}$ — убывающая, т.к. основание $\frac{1}{0,24} > 1$;

в) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ — возрастающая, т.к. $\frac{\pi}{3} > 1$;

$y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$ — убывающая, т.к. основание $\frac{\pi}{3} = \frac{3}{3,14} < 1$;

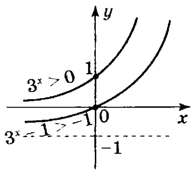
г) $y = (3 - \sqrt{7})^x$ — убывающая функция, т.к. основание

$3 - \sqrt{7} \approx 3 - 2,6 \approx 0,4 < 1$;

функция $y = \frac{1}{(3 - \sqrt{7})^x}$ — возрастающая, т.к. основание

$\frac{1}{3 - \sqrt{7}} \approx \frac{1}{0,4} > 1$.

454. а) $y = 3^{x+1} - 3$. Найти область значений функции.
$y = 3^{x+1} - 3 = 3^x \cdot 3 - 3 =$
$= 3(3^x - 1)$; $(3^x - 1) \cdot 3 > -3$.
Ответ: $E(y)$: $y > -3$ или $(-3; \infty)$;



б) $y = |2^x - 2|$. $E(y)$ — ?

Используем определение модуля числа: $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a < 0; \end{cases}$
но т.к. $a^x > 0$, то

$|2^x - 2| = \begin{cases} 2^x - 2, & x \geq 1; \\ 2 - 2^x, & x < 1; \end{cases} \Rightarrow$ при $x = 1$; $|2^x - 2| = 0$;

Ответ: $E(y)$: $[0; +\infty)$.

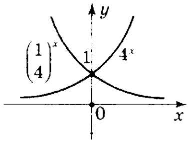
в) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$. Преобразуем функцию:

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 2 + 2 = 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1\right)$;

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 > 1$; $2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1\right) > 2$.

Ответ: $E(y)$: $(2; +\infty)$.

г) $y = 4^{|x|} = \begin{cases} 4^x, x \ge 0; \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x, x < 0. \end{cases}$



При $x = 0$; $y = 4^0 = 1$.

Ответ: $E(y)$: $[1; +\infty)$.

455. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на R:

а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$; $-1 \le \sin x \le 1$.

Для $\sin x$ min значение -1; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ — max значение функции.

Для $\sin x$ max значение 1; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$ — min значение функции.

б) $y = 5 + 3^{|\cos x|}$; $|\cos x| > 0$, т.е. $0 \le |\cos x| \le 1$;

$3^0 \le 3^{|\cos x|} \le 3^1 \,|+5 \Rightarrow 1 + 5 \le 3^{|\cos x|} + 5 \le 3 + 5$.

Имеем $6 \le 5 + 3^{|\cos x|} \le 8$.

Ответ: min $y = 6$; max $y = 8$.

в) $y = 4^{\cos x}$; $-1 \le \cos x \le 1$; $4^{-1} \le 4^{\cos x} \le 4^1$; $\frac{1}{4} \le 4^{\cos x} \le 4$.

Ответ: $\min y = \frac{1}{4}$; max $y = 4$.

г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|} - 2$; $-1 \le \sin x \le 1$; $0 \le |\sin x| \le 1$;

$\left(\frac{1}{3}\right)^0 \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^1$, или $\left(\frac{1}{3}\right)^1 \le \left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|} \le \left(\frac{1}{3}\right)^0$;

$\frac{1}{3} - 2 \le \left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|} - 2 \le 1 - 2$; $-1\frac{2}{3} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|} - 2 \le -1$.

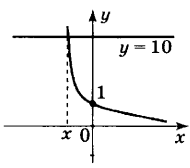
Ответ: минимальное значение функции y: $-1\frac{2}{3}$; максимальное значение функции y: -1.

456. Найти знак корня уравнения:

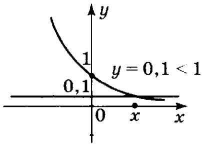
а) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 10$;

$x < 0$;

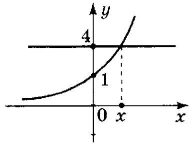
$y = 10 > 1$;



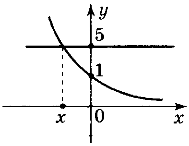
б) $0{,}3^x = 0{,}1$; $x > 0$;



в) $10^x = 4$; $y = 4 > 1$; $x > 0$;



г) $0{,}7^x = 5$; $y = 5 > 1$; $x < 0$.



457. Решить графически уравнения:

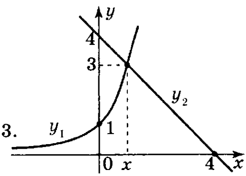
а) $3^x = 4 - x$; $\begin{cases} y_1 = 3^x; \\ y_2 = 4 - x; \end{cases}$

x — ? $y_1 = y_2$.

Алгебраическая проверка:

$x = 1$; $y_1 = 3^1 = 3$; $y_2 = 4 - 1 = 3$.

Ответ: $x = 1$.

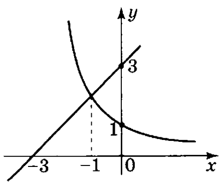


б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = x + 3$; $x = -1$.

При $x = -1$, $y_1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2$;

$y_2 = x + 3 = -1 + 3 = 2$;

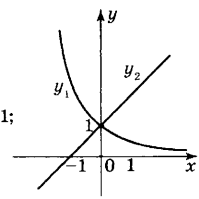
$\Rightarrow y_1 = y_2$ при $x = -1$.



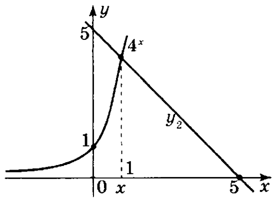
в) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = x + 1$; $\begin{cases} y_1 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x; \\ y_2 = x + 1; \end{cases}$

Ответ: $x = 0$, т.к. $y_1 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 = 1$;

$y_2 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow y_1 = y_2$.



г) $4^x = 5 - x$; $x = 1$.



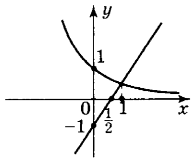
458. а) $3^{1-x} = 2x - 1$;

$y_1 = 3^{1-x} = 3 \cdot 3^{-x} = \dfrac{3}{3^x}$;

$y_2 = 2x - 1$; $x = 1$.

Проверка: $3^{1-x} = 3^{1-1} = 3^0 = 1$;

$2x - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \Rightarrow y_1 = y_2$.



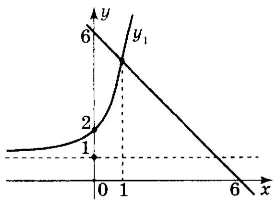
б) $4^x + 1 = 6 - x$;

$\begin{cases} y_1 = 4^x + 1; \\ y_2 = 6 - x; y_1 = y_2 \text{ при } x = 1 \end{cases}$

$y_2 = 6 - x$; $x = 1$.

Проверка: $y_1 = 4^1 + 1 = 5$;

$y_2 = 6 - 1 = 5 \Rightarrow y_1 = y_2$.

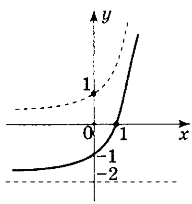


в) $2^x - 2 = 1 - x$;

$y_1 = 2^x - 2$; $y_2 = 1 - x$;

$x = 1$.

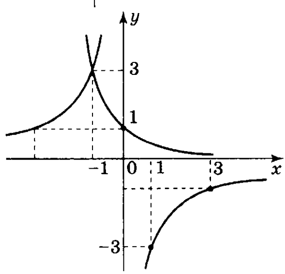
Проверка: $2^1 - 2 = 1 - 1$; $0 = 0$.



г) $3^{-x} = -\dfrac{3}{x}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = -\dfrac{3}{x}$; $x = -1$.

Проверка: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^1 = 3$;

$-\dfrac{3}{x} = \dfrac{-3}{-1} = 3$.



36. Решение показательных уравнений и неравенств

460. а) $4^x = 64;\ 4^x = 4^3;\ x = 3;$

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27;\ 3^{-x} = 3^3;\ -x = 3;\ x = -3;$

в) $3^x = 81;\ 3^x = 3^4;\ x = 4;$

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64};\ \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^6;\ x = 6.$

461. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64};\ \left(\frac{2\cdot 9}{3\cdot 8}\right)^x = \frac{27}{64};\ \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3;\ x = 3;$

б) $\sqrt{8^{x-3}} = \sqrt[3]{4^{2-x}};\ \sqrt{2^{3(x-3)}} = \sqrt[3]{2^{2(2-x)}};\ \sqrt{2^{3x-9}} = \sqrt[3]{2^{4-2x}};\ 2^{\frac{3x-9}{2}} = 2^{\frac{4-2x}{3}};$

$\frac{3x-9}{2} = \frac{4-2x}{3};\ 9x - 27 = 8 - 4x;\ 13x = 35;\ x = \frac{35}{13};$

в) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x} = 36;\ \sqrt{6^x} = 6^2;\ 6^{\frac{x}{2}} = 6^2;\ \frac{x}{2} = 2;\ x = 4;$

г) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3};\ \left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{3}{7}\right)^{3-5x};\ 3x + 1 = 3 - 5x;$

$8x = 2;\ x = \frac{1}{4}.$

462. а) $3^{6-x} = 3^{3x-2};\ 6 - x = 3x - 2;\ x = 2;$

б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7};\ \left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\ \left(\text{т.к. } \frac{\sqrt{7}}{7} = \frac{1}{\sqrt{7}}\right);$

$2x^2 + x - 0,5 = \frac{1}{2};\ 2x^2 + x - 1 = 0;\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4};$

$x_1 = -1;\ x_2 = \frac{1}{2};$

в) $\sqrt{3^x} = 9;\ 3^{\frac{x}{2}} = 3^2;\ \frac{x}{2} = 2;\ x = 4;$

г) $2^{x^2+2x-0,5} = 4\sqrt{2};\ 2^{x^2+2x-0,5} = 2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}};\ 2^{x^2+2x-0,5} = 2^{2,5};\ x^2 + 2x - 3 = 0;$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2;\ x_1 = -3;\ x_2 = 1.$

463. а) $7^{x+2} = 4\cdot 7^{x+1} = 539;\ 7^{x-1}\cdot(7+4) = 539;\ 7^{x+1} = \frac{539}{11} = 49;$
$7^{x-1} = 7^2;\ x + 1 = 2;\ x = 1;$

б) $3^{x+1} - 3^x = 15;\ 3^x\cdot(2\cdot 3 - 1) = 15;\ 3^x = \frac{15}{5} = 3^1;\ x = 1;$

в) $4^{x+1} + 4^x = 320;\ 4^x\cdot(4+1) = 320;\ 4^x = \frac{320}{5} = 64;\ 4^x = 4^3;\ x = 3;$

г) $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$; $3 \cdot 5^{x-1} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$; $5^{x-1}(75 + 2) = 77$;

$5^{x+1} = \frac{77}{77} = 1$; $5^{x-1} = 5^0$; $x + 1 = 0$; $x = -1$.

464. а) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$.

Вводим новую переменную: $y = 3^x > 0$; $9^x = 3^x = y^2$.

Имеем: $y^2 - 8y - 9 = 9$; $y_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16+9} = 4 \pm 5$;

$y_1 = 9$; $3^x = 9$; $3^x = 3^2$; $x = 2$;

$y_2 = -1 < 0$ — не удовлетворяет условию;

б) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$. Решение аналогично а):

$y = 10^x > 0$; $100^x = 10^{2x} = y^2$; $y^2 - 11y + 10 = 0$;

$$y_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-40}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2};$$

$y_1 = 1$; $1 = 10^x$; $10^0 = 10^x$; $x = 0$;

$y_2 = 10$; $10 = 10^x$; $x = 1$;

в) $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$. Пусть $6^x = y > 0$; $36^x = 6^{2x} = y^2$;

$y^2 - 4y - 12 = 0$; $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+12} = 2 \pm 4$;

$y_1 = 6$; $6^x = 6^1 = x = 1$;

$y_2 = -2 < 0$ — не удовлетворяет условию;

г) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$. Пусть $7^x = y > 0$; $49^x = 7^{2x} = y^2$; $y^2 - 8y + 7 = 0$;

$y_1 = 7$; $7^x = 7^1$; $x = 1$;

$y_2 = 1$; $7^x = 1$; $7^x = 7^0 = x = 0$.

465. а) $\begin{cases} 4^{x+y} = 16; \\ 4^{x+2y-1} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 4^{x+y} = 4^2; \\ x^{x+2y-1} = 4^0; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 2; \\ x + 2y - 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2 - x; \\ x + 2(2-x) - 1 = 0; \end{cases}$

$x + 4 - 2x - 1 = 0$; $-x + 3 = 0$; $x = 3$; $y = 2 - x = 2 - 3 = -1$.

Ответ: $(3; -1)$.

б) $\begin{cases} 6^{3x-y} = \sqrt{6}; \\ 2^{y-2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$ $\begin{cases} 6^{3x-t} = 6^{\frac{1}{2}}; \\ 2^{y-2x} = 2^{-\frac{1}{2}}; \end{cases}$ $+\begin{cases} 3x - y = \frac{1}{2}; \\ y - 2x = -\frac{1}{2}; \end{cases}$

$$\overline{\quad x = 0; \quad}$$

Из второго уравнения: $y = 2x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

в) $\begin{cases} 3^{2y-x} = \frac{1}{81}; \\ 3^{x-y+2} = 27; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{2y-x} = 3^{-4}; \\ 3^{x-y+2} = 3^3; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y - x = -4; \\ x - y + 2 = 3; \end{cases}$ $+\begin{cases} -x + 2y = -4; \\ x - y = 1; \end{cases}$

$$\overline{\quad y = -3; \quad}$$

$x - y = 1$; $x + 3 = 1$; $x = -2$.

Ответ: $(-2; -3)$.

г) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{4x-y} = 25; \\ 7^{9x-y} = \sqrt{7}; \end{cases}$ $\begin{cases} 5^{y-4x} = 5^2; \\ 7^{9x-y} = 7^{\frac{1}{2}}; \end{cases}$ $+\begin{cases} y - 4x = 2; \\ 9x - y = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

$5x = 2\dfrac{1}{2};\ x = \dfrac{1}{2};$

$y = 4x + 2 = 4 \cdot \dfrac{1}{2} + 2 = 4.$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2}; 4\right)$.

466. а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \geq 27;$ $3^{-x} \geq 3^3;$ $x \leq -3$ (свойство возрастания функции $y = 3^x$, где основание $3 > 1$);

б) $(\sqrt{6})^x \leq \dfrac{1}{36};$ $6^{\frac{1}{2}x} \leq 6^{-2};$ основание $6 > 1$, т.е. функция возрастающая и $\dfrac{1}{2}x \leq -2;$ $x \leq -4;$

в) $0,2^x \leq \dfrac{1}{25};$ $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^2$. Т.к. основание $\dfrac{1}{5} < 1,$ то функция убывающая и $x \geq 2;$

г) $(1,5)^x < 2,25;$ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x < \dfrac{9}{4};$ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x < \left(\dfrac{3}{2}\right)^2;$ основание $\dfrac{3}{2} > 1,$ значит $x < 2$.