Вариант № 21165265

1. Задание 1 № 78939

Света отправила SMS-сообщения с новогодними поздравлениями своим 19 друзьям. Стоимость одного SMS-сообщения 1 рубль 90 копеек. Перед отправкой сообщения на счету у Светы было 37 рублей. Сколько рублей останется у Светы после отправки всех сообщений?

Решение.

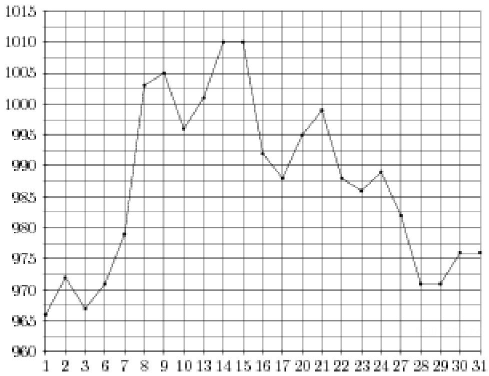
За 19 SMS-сообщений Света заплатила $19 \cdot 1{,}9 = 36{,}1$ рубля. Значит, после отправки всех сообщений у Светы осталось: $37 - 36{,}1 = 0{,}9$ рубля.

Ответ: 0,9.

Ответ: 0,9

2. Задание 2 № 263795

На рисунке жирными точками показана цена золота, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена золота в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену золота за указанный период. Ответ дайте в рублях за грамм.



Решение.

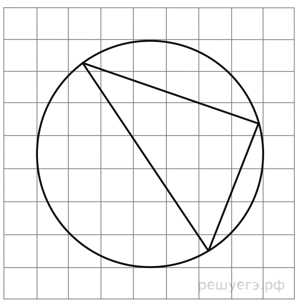
Из графика видно, что наибольшая цена золота за указанный период составила 1010 рублей. (см. рисунок).

Ответ: 1010.

Ответ: 1010

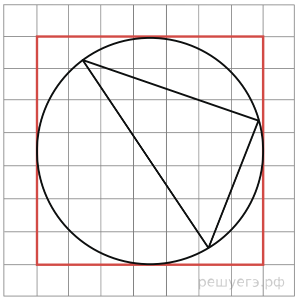
3. Задание 3 № 517227

На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



Решение.

Изображенная на рисунке окружность вписана в квадрат со стороной 7, поэтому радиус этой окружности равен 3,5.



Ответ: 3,5.
Ответ: 3,5

4. Задание 4 № 321403

В классе 21 учащийся, среди них два друга — Вадим и Олег. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе.

Решение.

Пусть Вадим оказался в одной из групп. Тогда в этой группе осталось еще 6 мест на которые могут претендовать 20 человек, в том числе и Олег. Вероятность оказаться в одной группе с Вадимом у любого учащегося, в том числе и у Олега, равна 6/20 = 0,3.

Ответ: 0,3
Ответ: 0,3

5. Задание 5 № 2855

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-3}=\frac{1}{49}$.

Решение.

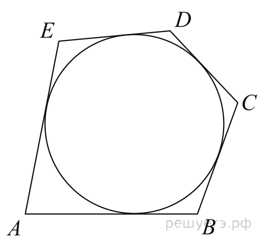
Перейдем к одному основанию степени:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-3}=\frac{1}{49}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-3}=\left(\frac{1}{7}\right)^{2}\Leftrightarrow 5x-3=2\Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: 1.
Ответ: 1

6. Задание 6 № 27640

Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, периметр которого равен 20. Найдите его площадь.



Решение.

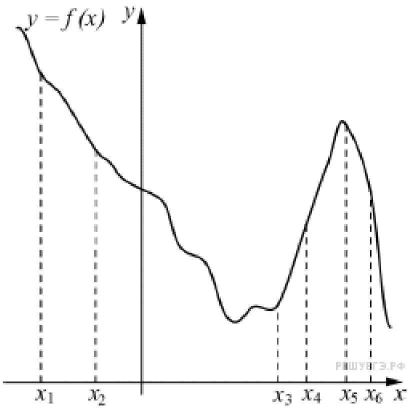
Радиус вписанной в многоугольник окружности равен отношению его площади к полупериметру. Пусть площадь равна S, полупериметр равен p, радиус окружности равен R. Тогда

$$S = Rp = 3 \cdot \frac{20}{2} = 30.$$

Ответ: 30.
Ответ: 30

7. Задание 7 № 509151

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, …, x_6. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Решение.

Положительным значениям производной соответствует интервалы, на которых функция $f(x)$, возрастает. На них лежат точки x_3, x_4. Таких точек 2.

Ответ: 2.
Ответ: 2

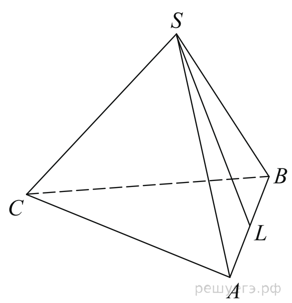
8. Задание 8 № 284911

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка L — середина ребра AB, S — вершина. Известно, что $BC = 5$, а площадь боковой поверхности равна 180. Найдите длину отрезка SL.

Решение.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему: $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot SL.$ Тогда

$$SL = \frac{2S_{\text{бок}}}{P_{ABC}} = \frac{2S_{\text{бок}}}{3BC} = \frac{2 \cdot 180}{3 \cdot 5} = 24.$$



Ответ: 24.
Ответ: 24

9. Задание 9 № 62203

Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{1,5} \cdot \sqrt{1,8}}{\sqrt{0,3}}$.

Решение.
Выполним преобразования:

$$\frac{\sqrt{1,5}\cdot\sqrt{1,8}}{\sqrt{0,3}}=\sqrt{\frac{1,5\cdot 1,8}{0,3}}=\sqrt{\frac{1,5\cdot 18}{3}}=\sqrt{9}=3.$$

Ответ: 3.
Ответ: 3

10. Задание 10 № 513899

Груз массой 0,25 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v=v_0\sin\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T=18$ с — период колебаний, $v_0=0,4$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 6 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение.
Найдем скорость груза через 6 секунд после начала колебаний:

$$v=v_0\sin\frac{2\pi t}{T}=0,4\cdot\sin\frac{2\pi\cdot 6}{18}=0,4\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=0,4\cdot\sin(\pi-\frac{\pi}{3})=0,4\cdot\sin\frac{\pi}{3}=0,4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Найдем кинетическую энергию груза через 6 секунд после начала колебаний:

$$E=\frac{mv^2}{2}=\frac{0,25\cdot(0,4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{2}=0,015$$

Ответ: 0,015
Ответ: 0,015

11. Задание 11 № 113587

Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 16 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого?

Решение.
Пусть v км/ч — скорость первого мотоциклиста, тогда скорость второго мотоциклиста равна $v+10$ км/ч. Пусть первый раз мотоциклисты поравняются через t часов. Для того, чтобы мотоциклисты поравнялись, более быстрый должен преодолеть изначально разделяющее их расстояние, равное половине длины трассы. Поэтому

$$(v+10)t-vt=8\Leftrightarrow 10t=8\Leftrightarrow t=\frac{4}{5}.$$

Таким образом, мотоциклисты поравняются через $t=\frac{4}{5}$ часа или через 48 минут.

Ответ: 48.
Ответ: 48

12. Задание 12 № 286703

Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2-28x+211}.$

Решение.
Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min}=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 14. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает минимума в той же точке, в которой достигает минимума подкоренное выражение.

Ответ: 14.
Ответ: 14

13. Задание 13 № 500386

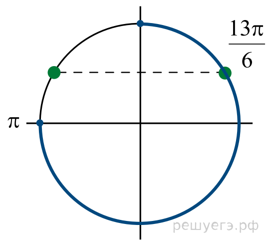
а) Решите уравнение $4\cos^2 x+4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-1=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$4-4\sin^2 x-4\sin x-1=0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x+4\sin x-3=0.$$



Значит, или $\sin x=-\frac{3}{2}$ — уравнение не имеет корней, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$. Получим число $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

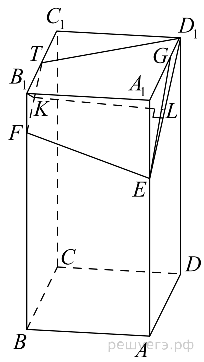
14. Задание 14 № 512336

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 1 : 2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 5$, а точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 6$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

Решение.



а) В плоскости AA_1D_1 проведём через точку E прямую, параллельную TF. Пусть она пересекает ребро A_1D_1 или его продолжение в точке G. Плоскость EFT проходит через точку G. Треугольник EGA_1 подобен равнобедренному треугольнику FTB_1, в котором $FB_1 = B_1T = 1$. Отсюда $EA_1 = A_1G = 2$, значит, точка G совпадает с точкой D_1.

б) В плоскости BB_1C_1 из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1K на отрезок FT. В плоскости EFT через точку K проведём перпендикуляр к FT, который пересекает ED_1 в точке L. Тогда $\angle B_1KL$ — угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 или смежный с ним. Из равнобедренного треугольника FB_1T
находим

$$B_1K = \frac{FB_1 \cdot B_1T}{FT} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из равнобедренной трапеции $EFTD_1$ находим

$$KL = \sqrt{TD_1^2 - \left(\frac{ED_1 - FT}{2}\right)^2} = \sqrt{17 - \left(\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{33}{2}}.$$

Точка L — середина отрезка ED_1, поэтому она удалена от сторон AA_1 и AD_1 параллелепипеда на 1. Значит, B_1L является диагональю параллелепипеда со сторонами 1, 1 и 4. Отсюда $B_1L = \sqrt{18}$. Из теоремы косинусов для треугольника B_1KL находим

$$\cos\angle B_1KL = \frac{B_1K^2 + KL^2 - B_1L^2}{2 \cdot B_1K \cdot KL} = -\frac{1}{\sqrt{33}}.$$

Ответ: б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{33}}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Максимальный балл	2

15. Задание 15 № 511471

Решите неравенство $(x-1)\log_2 6 + \log_2(3^x - 1) \le x + 1$.

Решение.

Воспользуемся свойствами логарифмов:

$$(x-1)\log_2 6+\log_2(3^x-1)\le x+1 \Leftrightarrow \log_2\left(6^{x-1}\cdot(3^x-1)\right)\le \log_2 2^{x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3^x-1>0,\\ 6^{x-1}\cdot(3^x-1)\le 2^{x+1}.\end{cases}$$

Решим второе неравенство полученной системы:

$$6^{x-1}\cdot(3^x-1)\le 2^{x+1}\Leftrightarrow 3^x(3^x-1)\le 12\Leftrightarrow 9^x-3^x-12\le 0.$$

Пусть $3^x=y,$ тогда неравенство примет вид:

$$y^2-y-12\le 0\Leftrightarrow -3\le y\le 4.$$

Откуда, учитывая первое неравенство системы, получаем:

$$1<3^x\le 4\Leftrightarrow 0<x\le \log_3 4.$$

Ответ: $(0;\ \log_3 4].$

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

16. Задание 16 № 509204

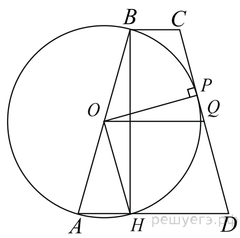
Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H, точка Q — середина CD.

а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите AD, если $\angle BAD=75°$ и $BC=1$.

Решение.

а) Треугольник AOH равнобедренный и трапеция $ABCD$ равнобедренная, поэтому $\angle AHO=\angle OAH=\angle CDA$. Значит, прямые OH и CD параллельны, а так как OQ — средняя линия трапеции, то параллельны прямые OQ и AD. Противоположные стороны четырёхугольника $DQOH$ попарно параллельны, следовательно, $DQOH$ — параллелограмм.



б) Пусть окружность с центром в точке O радиуса R касается стороны CD в точке P. В прямоугольных треугольниках OPQ и AHB имеем

$$OQ=\frac{OP}{\sin OQP}=\frac{R}{\sin 75°},\quad AH=AB\cos\angle BAH=2R\cos 75°.$$

Поэтому

$$\frac{AH}{DH}=\frac{AH}{OQ}=\frac{2R\cos 75°}{\frac{R}{\sin 75°}}=2\sin 75°\cdot\cos 75°=\sin 150°=\frac{1}{2}.$$

Пусть $AH=x$. Поскольку трапеция $ABCD$ равнобедренная, $AD=2AH+BC$; $DH=AH+BC=x+1$.

Тогда

$$\frac{AH}{DH}=\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2},$$

откуда $x=1$. Значит, $AD=2x+1=3$.

Ответ: б) 3.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3

Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* и использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

Источник: ЕГЭ по математике — 2015. Досрочная волна, Запад.

17. Задание 17 № 514486

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

− каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

− в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	0,8S	0,6S	0,4S	0

Найдите наибольшее S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

Решение.

Долг перед банком (в млн рублей) на июль каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$S;\ 0,8S;\ 0,6S;\ 0,4S;\ 0.$$

По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 25%, значит, долг в январе каждого года равен:

$$1,25S;\ S;\ 0,75S;\ 0,5S.$$

Следовательно, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют:

$$0,45S;\ 0,4S;\ 0,35S;\ 0,5S.$$

По условию, сумма выплат должна быть меньше 50 млн рублей.

$$0,45S+0,4S+0,35S+0,5S<50 \Leftrightarrow 1,7S<50 \Leftrightarrow S<29\frac{7}{17}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 29. Значит, искомый размер кредита — 29 млн рублей.

Ответ: 29.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследо-ванию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

Источник: Задания 17 (С5) ЕГЭ 2016

18. Задание 18 № 518963

Найдите все целые отрицательные значения параметра *a*, при каждом из которых существует такое действительное число $b>a$, что неравенство $20b\geq 6|2a+b|+2|b-2|-|2a-b|-5|4a^2-b+2|$ **не выполнено**.

Решение.

Решим вспомогательную противоположную задачу: найдём все a, при каждом из которых неравенство

$$20b\geq 6|2a+b|+2|b-2|-|2a-b|-5|4a^2-b+2|$$

выполнено при любом $b>a.$ Заметим далее, что данное неравенство равносильно неравенству

$$F(b)=20b-6|2a+b|-2|b-2|+|2a-b|+5|4a^2-b+2|\geq 0,$$

причём функция $F(b)$ строго монотонно возрастает на множестве действительных чисел и, следовательно, первоначальное неравенство выполняется для всех $b>a$ тогда и только тогда, когда $F(a)\geq 0,$ то есть

$$20a^2+15a-17|a|-2|a-2|+10\geq 0.$$

Отметим, что при $a\geq 0$ полученное неравенство верно. Если $a<0,$ то неравенство равносильно неравенству

$$10a^2+17a+3\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -0,2\leq a<0; \\ a\leq -1,5. \end{array}\right.$$

Таким образом, существует только одно целое отрицательное значение $a=-1,$ при котором условие вспомогательной задачи не выполнено. Следовательно, при значении $a=-1$ существует такое $b>a,$ что неравенство $20b\geq 6|2a+b|+2|b-2|-|2a-b|-5|4a^2-b+2|$ не выполнено.

Ответ: −1.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено все значения *a*, но ответ содержит лишнее значение.	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

19. Задание 19 № 509027

В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

Решение.

Пусть в первом взводе k солдат, во втором l солдат. Тогда числа k и l имеют общий делитель, больший 7, и при этом: $\begin{cases} 50 < k < l, \\ k + l \le 119. \end{cases}$

а) Например, 54 и 63 солдата. Вместе 117, их можно построить в колонну по 9 человек в ряду так, что 6 рядов будет заполнено солдатами только из первого взвода, а 7 рядов — только из второго.

б) Предположим, что общий делитель 11. Тогда, учитывая, что $50 < k < 60$, получаем, что $k = 55$. Наименьшее возможное значение l равно $55 + 11 = 66$, но вместе получается 121 человек, что противоречит условию.

в) Число $l - k$ больше нуля и делится на общий делитель чисел k и l, поэтому $l - k \ge 8$; $k - l \le -8$, что вместе с условием $k + l \le 119$ приводит к неравенству $2k \le 111$, то есть $k \le 55$. При этом $k + d \le l \le 119 - k$, где d — наименьший общий делитель, превосходящий 7.

Если $k = 51 = 3 \cdot 17$, то $d = 17$, $l = 68$, а в роте 119 солдат.

Если $k = 52 = 4 \cdot 13$, то $65 \le l \le 67$. Тогда $l = 65$, общий делитель 13 и $k + l = 117$.

Если $k = 53$, то $53 + 53 = 106 \le l \le 66$. Противоречие.

Если $k = 54 = 6 \cdot 9$, то $54 + 9 = 63 \le l \le 65$. Тогда $l = 63$, общий делитель равен 9, и в роте 117 солдат.

Если $k = 55 = 5 \cdot 11$, то $66 \le l \le 64$, но числа 63 и 64 взаимно просты с 55. Противоречие.

Ответ: а) Например, 54 и 63; б) нет; в) 117 и 119.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	78939	0,9
2	263795	1010
3	517227	3,5
4	321403	0,3
5	2855	1
6	27640	30
7	509151	2
8	284911	24
9	62203	3
10	513899	0,015
11	113587	48
12	286703	14