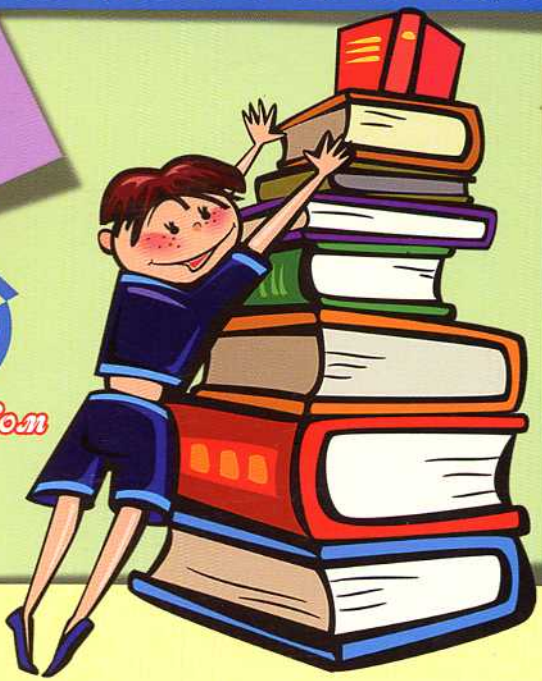
ВСЕ ДОМАШНИЕ РАБОТЫ

7 КЛАСС

АЛГЕБРА ГЕОМЕТРИЯ



ЛадКом

К самостоятельным и контрольным работам Л.П.Ершовой

В. К. Ерин

Все домашние работы к самостоятельным и контрольным работам А. П. Ершовой по АЛГЕБРЕ и ГЕОМЕТРИИ 7 КЛАСС

СТАНДАРТ
Москва
2014

УДК 882 (075)
ББК 812 Р-7
Е25

«Домашний репетитор.
Решебники для родителей»

Ерин В. К.
Все домашние работы к самостоятельным и контрольным работам А. П. Ершовой, В. В. Голобородько по алгебре и геометрии 7 класс. Издательство «Илекса». М.: ООО «СТАНДАРТ», 2014. – 224 с.

ISBN 978-5-91336-187-5

Пособие содержит решение всех самостоятельных и контрольных работ по алгебре и геометрии А. П. Ершовой за 7 класс.

Наш «Решебник» адресован, в первую очередь, родителям учащихся; его цель — наметить вместе с ребенком верный путь решения, проконтролировать правильность выполнения заданий.

Введение

Учебное издание «Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и геометрии 7 класс» А. П. Ершовой, В. В. Голобородько, А. С. Ершовой многократно переиздается и пользуется заслуженной популярностью среди учителей и учащихся. Эти дидактические материалы предназначены для организации дифференцированной самостоятельной работы на уроках и дома. Тематика и содержание работ охватывают требования действующей программы по математике для 7 класса по учебникам ФГОС Ю. Н. Макарычева, Ш. А. Алимова, А. В. Погорелова и Л. С. Атанасяна.

Наше пособие «Все домашние работы к самостоятельным и контрольным работам...» нацелено на помощь в решении наиболее сложных задач и упражнений. Благодаря «Решебнику», родителям учеников не придется вспоминать забытую школьную программу, чтобы проконтролировать правильность решения домашних заданий. У школьников появится возможность сравнить свой «черновик» контрольной работы с ответами, данными в «Решебнике».

В нашем пособии приведены все варианты и способы решения самостоятельных и контрольных работ по алгебре и геометрии для 7 класса, предложенных в дидактических материалах А. П. Ершовой.

Алгебра

Выражения, тождества, преобразования выражений

С-1. Тождественные преобразования выражений

Вариант А1

1. а) $-2x \cdot (-3y) = 6xy$;
б) $-4 \cdot (x - 2) = 8 - 4x$;
в) $(3x - 1) \cdot 2 = 6x - 2$.

2. а) $2x - 3 + (3x - 2) = 5x - 5$;
б) $(4 - x) - (5 - 2x) = x - 1$;
в) $6 + 2 \cdot (1{,}5x - 3) = 3x$.

3. $3 \cdot (a - 2) + (a + 4) = 3a - 6 + a + 4 = 4a - 2 = 4 \times$
$\times (-1{,}5) - 2 = -6 - 2 = -8$.

4. $6 \cdot (3y - 4) - 2 \cdot (9y - 11) + 2 = 18y - 24 - 18y + 22 + 2 = 0$.

5. $a - (b - (a + d)) = a - b + (a + d) = 2a - b + d$.

Вариант А2

1. а) $4a \cdot (-3b) = -12ab$;
б) $8 \cdot (2x - 3) = 16x - 24$;
в) $(4 - x) \cdot (-3) = 3x - 12$.

2. а) $x + 5 + (4x - 6) = 5x - 1$;
б) $(3x - 2) - (5x - 8) = 6 - 2x$;
в) $20 + 5 \cdot (0{,}2y - 4) = y$.

3. $2 \cdot (a - 4) - (1 - 2a) = 2a - 8 - 1 + 2a = 4a - 9 = 4 \times$
$\times (-1{,}5) - 9 = -15$.

4. $8 \cdot (2y - 5) - 4 \cdot (3y - 10) - 4y = 16y - 40 - 12y + 40 - 4y = 0$.

5. $z - (y + (z - t)) = z - y - (z - t) = z - y - z + t = t - y$.

Вариант Б1

1. а) $0{,}4a \cdot (-5b) = -2ab$;

б) $(2x-1)\cdot(-0{,}2)=0{,}2-0{,}4x$;
в) $3\cdot(-x-1)=-3x-3$.

2. а) $(4a-b)-5a+3b=2b-a$;
б) $-(3x-0{,}4)+(0{,}4x-3)=-2{,}6x-2{,}6$;
в) $9-2\cdot(x+1)+x=7-x$.

3. $3\cdot(a-3b)-5\cdot(a-2b)=3a-9b-5a+10b=b-2a=$
$=-1-2\cdot(-1{,}5)=2$.

4. $0{,}4y-0{,}6\cdot(y-4)+2\cdot(-1+0{,}1y)=0{,}4y-0{,}6y+2{,}4-$
$-2+0{,}2y=0{,}4$.

5. $5a-(4a-(3a-2))=5a-4a+3a-2=4a-2$.

Вариант Б2

1. а) $-0{,}2x\cdot(-5y)=xy$;
б) $(-2x-4)\cdot 0{,}1=-0{,}2x-0{,}4$;
в) $-5\cdot(2-x)=5x-10$.

2. а) $-6a-2a+(8a+b)=b$;
б) $(8x-0{,}5)-(0{,}5x-8)=7{,}5x+7{,}5$;
в) $4-3\cdot(x-2)-x=10-4x$.

3. $-4\cdot(a-b)+2\cdot(3a-b)=-4a+4b+6a-2b=2a+$
$+2b=2\cdot(-1{,}5)+2\cdot(-1)=-3-2=-5$.

4. $2{,}3y-1{,}7\cdot(y-2)+0{,}3\cdot(4-2y)=2{,}3y-1{,}7y+3{,}4+$
$+1{,}2-0{,}6y=4{,}6$.

5. $6a-(5a-(4a-3))=6a-5a+4a-3=5a-3$.

Вариант В1

1. а) $2{,}5x\cdot(-4y)\cdot(-0{,}1)=xy$;
б) $(y-2x-1{,}6)\cdot(-3)=-3y+6x+4{,}8$;
в) $1{,}2\cdot(3b-c+2)=3{,}6b-1{,}2c+2{,}4$.

2. а) $2{,}1b-3{,}4a-(b-2{,}6a)=1{,}1b-0{,}8a$;
б) $x-(4x-11)+(9-2x)=-5x+20$;
в) $10-9\cdot(a-\frac{2}{3})+5a-16=14a$.

3. $2\cdot(0{,}3a-1)-\frac{2}{5}(3a-5)=0{,}6a-2-1{,}2a+2=-0{,}6a=$
$=-0{,}6\cdot(-\frac{1}{3})=0{,}2$.

4. $-(12y-3\cdot(y-4))+9y=-12y+3y-12+9y=-12$.

5. $3a + 3b - 6 = 3 \cdot (a + b) - 6 = 3 \cdot 2 - 6 = 6.$

Вариант В2

1. а) $(-0{,}5y) \cdot 20 \cdot (-3x) = 30xy;$
б) $(-a + 3b - 1{,}2) \cdot 5 = -5a + 15b - 6;$
в) $-2{,}1 \cdot (x - 2y + 3) = -2{,}1x + 4{,}2y + 6{,}3.$

2. а) $4{,}6a - 4b - (-3{,}8b + 3{,}5a) = 0{,}9a - 0{,}2b;$
б) $2a - (8 - a) + (3a - 2) = 6a - 10;$
в) $8 - 6 \cdot (2x - \frac{1}{2}) + 12x - 2 = 9.$

3. $3 \cdot (0{,}9a - 1{,}5) - \frac{1}{2}(3a - 9) = 2{,}7a - 4{,}5 - 1{,}5a + 4{,}5 =$
$= 1{,}2a = 1{,}2 \cdot (-\frac{1}{3}) = -0{,}4.$

4. $-(4y - 9 \cdot (2y - 1)) - 14y = -4y + 18y - 9 - 14y = -9.$

5. $2a - 2b + 4 = 2 \cdot (a - b) + 4 = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$

С-2. Решение уравнений

Вариант А1

1. а) $2x = 4;\ x = 2;$
б) $x = 27;$
в) $2x - 5 - 3x + 7 = 4;\ x = -2;$
г) $5x - 6 - 3x = 2;\ 2x = 8;\ x = 4.$

2. $1{,}8y - 2 = 0{,}6y + 4;\ 1{,}2y = 6;\ y = 5.$

Вариант А2

1. а) $3y = 3;\ y = 3;$
б) $x = 36;$
в) $2 + 3x - 4x + 7 = 10;\ x = -1;$
г) $2x - 3 + x = 6;\ x = 9.$

2. $1{,}2y - 1 = 0{,}4y + 3;\ 0{,}8y = 4;\ y = 3{,}2.$

Вариант Б1

1. а) $0{,}3x = -6;\ x = -20;$
б) $5x = 3;\ x = 0{,}6;$
в) $7 - 2x - 6 = 9 - 6x;\ 4x = 8;\ x = 2;$

г) $4x - 2 - 2x - 0{,}6 = -2{,}6$; $2x = 0$; $x = 0$.

2. $7y - 2 = 2 \cdot (5y - 4)$; $7y - 2 = 10y - 8$; $3y = 6$; $y = 2$.

Вариант Б2

1. а) $0{,}4x = -6$; $x = -15$;
б) $3x = 1$; $x = \frac{1}{3}$;
в) $13 - 3x - 3 = 4 - 5x$; $2x = -6$; $x = -3$;
г) $0{,}6x - 1 - 0{,}3x + 0{,}3 = -0{,}7$; $0{,}3x = 0$; $x = 0$.

2. $8y + 2 = 5y + 3 + 5$; $3y = 6$; $y = 2$.

Вариант В1

1. а) $0{,}7x = -7$; $x = -10$;
б) $\frac{1}{2}x - 3 - 3 = \frac{1}{3}x$; $\frac{1}{6}x = 6$; $x = 36$;
в) $4 = -1 - 11x + 5$; $11x = 0$; $x = 0$;
г) $4x - 1{,}5 = -10 + 4x$; $8{,}5 = 0$; нет.

2. $3 \cdot (2y + 1{,}5) = 2y + 4{,}5 + 8$; $4y = 8$; $y = 2$.

Вариант В2

1. а) $1{,}3x = -13$; $x = -10$;
б) $\frac{2}{3}x + 6 - 2 = \frac{1}{6}x$; $0{,}5x = -4$; $x = -8$;
в) $-6 = -2 - 4 - 9x$; $9x = 0$; $x = 0$;
г) $6 - 4{,}8x = -4{,}8x - 6$; $12 = 0$; нет.

2. $4 + 3y - 0{,}5 + 3{,}5 = 4 \cdot (3y - 0{,}5)$; $9y = 9$; $y = 1$.

С-3. Линейные уравнения с модулем и параметром

Вариант 1

1. а) $a - 2 = 2 - a$; $a = 2$;
б) $a^2 - 9 < 0$; $-3 < a < 3$;
в) $a^2 \neq -1$; a – любое.

2. а) $x = \frac{5}{a}$; $a \neq 0$;
б) $x = \frac{1}{3-a}$; $a \neq 3$;
в) $x = 1$; $a \neq -1$; x – любое; $a = -1$;
г) $x = a$; $a \neq 2$; x – любое; $a = 2$.

3. а) $\left[\begin{array}{l} 2x-3=1 \\ -2x+3=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=4 \\ 2x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$

б) нет;

в) $x^2-x=0$; $x\cdot(x-1)=0$; $x=0$; $x=1$.

г) $\left[\begin{array}{l} |x-1|=7 \\ |x-1|=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\left[\begin{array}{l} x-1=7 \\ x-1=-7 \\ x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right.\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-6 \\ x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$

д) $\left[\begin{array}{l} ||x-3|-3|=6 \\ [||x-3|-3|=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\left[\begin{array}{l} |x-3|=9 \\ |x-3|=-3 \\ |x-3|=3 \\ |x-3|=-3 \end{array}\right.\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\left[\begin{array}{l} x-3=9 \\ x-3=-9 \\ x-3=3 \\ x-3=-3 \end{array}\right.\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-6 \\ x=6 \\ x=0 \end{array}\right.$

е) $\left[\begin{array}{l} |x+2|=1 \\ |x+2|=15 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\left[\begin{array}{l} x+2=1 \\ x+2=-1 \\ x+2=15 \\ x+2=-15 \end{array}\right.\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \\ x=13 \\ x=-17 \end{array}\right.$

ж) 1) $x < -1$; $-x-1+5-x = 20$; $2x = -16$; $x = -8$;
2) $-1 \le x \le 5$; $x+1+5-x = 20$; $14 = 0$; нет;
3) $x > 5$; $x+1-5+x = 20$; $2x = 24$; $x = 12$.

з) 1) $x < -2$; $-x+1-x-2 = 3$; $2x = -4$; $x = -2$;
2) $-2 \le x \le 1$; $-x+1+x+2 = 3$; $3 = 3$; $-2 \le x \le 1$.
3) $x > 1$; $x-1+x+2 = 3$; $2x = 2$; $x = 1$.

и) 1) $x < -8$; $-8-x+7-x = 10$; $2x = -11$; $x = -5{,}5$; нет;
2) $-8 \le x \le 7$; $8+x-7+x = 10$; $10 = 15$; нет.
3) $x > 8$; $8+x-7+x = 10$; $2x = 9$; $x = 4{,}5$; нет.

к) $\left[\begin{array}{l} |2x-3| = x+1 \\ |2x-3| = 1-x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3 = x+1 \\ 2x-3 = -x-1 \\ 2x-3 = 1-x \\ 2x-3 = -1+x \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \frac{2}{3} \\ x = \frac{2}{3} \\ x = 2 \end{array}\right.$

Вариант 2

1. а) $a+3 = -a-3$; $a = -3$;
б) $a^2 - 4 < 0$; $-2 < a < 2$;
в) $a^2 + 4 \ne 0$; $a^2 \ne -4$.

2. а) $x = \frac{-2}{a}$; $a \ne 0$;
б) $x = \frac{3}{a+2}$; $a \ne -2$;
в) $x = -1$; $a \ne 3$; x – любое; $a = 3$;
г) $x = a-2$; $a \ne -3$; x – любое; $a = -3$.

3. а) $\left[\begin{array}{l} 3x+2 = 4 \\ 3x+2 = -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 2 \\ 3x = -6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ x = -2 \end{array}\right.$

б) нет;

в) $x^2 + x = 0$; $x \cdot (x+1) = 0$; $x = 0$; $x = -1$;

г) $\left[\begin{array}{l} |x+3| = 5 \\ |x+3| = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+3 = 5 \\ x+3 = -5 \\ x+3 = 3 \\ x+3 = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -8 \\ x = 0 \\ x = -6 \end{array}\right.$

д) $\left[\begin{array}{l} ||x-3|+3| = 6 \\ ||x-3|+3| = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |x-3| = 3 \\ |x-3| = -9 \\ |x-3| = -3 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-3 = 3 \\ x-3 = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 0 \end{array}\right.$

е) $\left[\begin{array}{l} |x-1| = 2 \\ |x-1| = 18 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 = 2 \\ x-1 = -2 \\ x-1 = 18 \\ x-1 = -18 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \\ x = 19 \\ x = -17 \end{array}\right.$

ж) 1) $x < 1$; $-x + 1 + 5 - x = 18$; $2x = -12$; $x = -6$;

2) $1 \le x \le 5$; $x - 1 + 5 - x = 18$; $14 = 0$; нет;

3) $x > 5$; $x - 1 - 5 + x = 18$; $2x = 24$; $x = 12$.

з) 1) $x < -1$; $-x + 3 - x - 1 = 4$; $2x = -2$; $x = -1$;

2) $-1 \le x \le 3$; $-x+3+x+1 = 4$; $4 = 4$; $-1 \le x \le 3$.

3) $x > 3$; $x - 3 + x + 1 = 4$; $2x = 6$; $x = 3$.

и) 1) $x < -1$; $9 - x - 1 - x = 8$; $2x = 0$; $x = 0$; нет;

2) $-1 \le x \le 9$; $9 - x + 1 + x = 8$; $10 = 8$; нет;

3) $x > 9$; $-9 + x + 1 + x = 8$; $2x = 16$; $x = 8$; нет.

к) $x > 0$; $\left[\begin{array}{l} |3x+2| = x+4 \\ |3x+2| = -x+4 \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+2=x+4 \\ 3x+2=-x-4 \\ 3x+2=-x+4 \\ 3x+2=x-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-2 \\ 4x=-6 \\ 4x=2 \\ 2x=-6 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1{,}5 \\ x=0{,}5 \\ x=-3 \end{array}\right. \Rightarrow x=0{,}5.$$

К-1. Выражения, тождества, уравнения

Вариант А1

1. а) $(2a-3b)-(a-b)=a-2b$;
б) $5+2\cdot(x-1)=2x+3$.

2. x — длина.
$(x+x-4)\cdot 2=28$; $4x=36$; $x=9$.
Ответ: 9; 6.

3. а) $2x=8$; $x=4$;
б) $15-3x+3=5-4x$; $x=-13$;
в) $2x-1+1=9$; $2x=9$; $x=4{,}5$.

4. x — книг на второй полке.
$3x-32=x+32$; $2x=64$; $x=32$.
Ответ: 96; 32.

5. $\left[\begin{array}{l} x=25 \\ x=-25 \end{array}\right.$

ДЗ. $2p\cdot 2=32$; $p=8$.

Вариант А2

1. а) $-4b+a+5b-2a=b-a$;
б) $3+4x-8=4x-5$.

2. x — ширина.
$(3x + x) \cdot 2 = 24;\ 8x = 24;\ x = 3.$
Ответ: 9; 3.

3. а) $2x = 12;\ x = 6;$
б) $18 - 6x - 5 = 4 - 7x;\ x = -9;$
в) $6x + 3 - 3 = 9;\ 6x = 9;\ x = 1{,}5.$

4. x — яблок в первой корзине.
$2x - 14 = x + 14;\ x = 28.$
Ответ: 28; 56.

5. $\left[\begin{array}{l} x = 49 \\ x = -49 \end{array}\right.$

ДЗ. $3p \cdot 2 = 24;\ 6p = 24;\ p = 4.$

Вариант Б1

1. а) $2a - 3b + a + 3b - 2a = a;$
б) $6a - 12 - 6a + 15 = 3.$

2. x — сторона треугольника.
$x + (x + 2) + 2x = 22;\ 4x = 20;\ x = 5.$
Ответ: 5; 7; 10.

3. а) $2x = \frac{4}{7};\ x = \frac{2}{7};$
б) $21x + 7 - 11x = 2;\ 10x = -5;\ x = -0{,}5;$
в) $11x = 6 - 4x - 66;\ 15x = -60;\ x = -4.$

4. x — человек в бригаде.
$3 \cdot (x - 8) = x + 8;\ 3x - 24 = 8 + x; 2x = 32;\ x = 16.$
Ответ: 16.

5. $x = -3;\ x = 2.$

ДЗ. $\left\{\begin{array}{l} 2x = 10 \\ 3x = m - 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 \\ x = \frac{m-1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow m = 16.$

Вариант Б2

1. а) $5x + 7y - x - 3x - 7y = x;$
б) $8x - 24 + 20 - 8x = 4.$

2. x — сторона треугольника.
$x + (x + 6) + (x + 9) = 33$; $3x = 18$; $x = 6$.
Ответ: 6; 12; 15.

3. а) $3x = \frac{6}{11}$; $x = \frac{2}{11}$;
б) $8 - 16x + 6x = 3$; $10x = 5$; $x = 0{,}5$;
в) $9x = 5x - 72 + 2x$; $2x = -72$; $x = -36$.

4. x — тетрадей в папке.
$3 \cdot (x - 6) = x + 6$; $3x - 18 = 6 + x$; $2x = 24$; $x = 12$.
Ответ: 12.

5. $x = 4$; $x = -1$.

ДЗ. $\begin{cases} 3x = 6 \\ 5x = m + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{m+3}{5} \end{cases} \Rightarrow m = 7.$

Вариант В1

1. а) $x - 2x - 3 + 2 - 0{,}5x = -1{,}5x - 1$;
б) $2 + 3y - 1 - 1 - 2y = y$.

2. $BC = x$; $x + 0{,}5x + x - 2 = 28$; $2{,}5x = 30$; $x = 12$.
Ответ: $BC = 12$; $AB = 6$; $AC = 10$.

3. а) $-2x - 0{,}1 = 1{,}5 - 3x$; $x = 1{,}6$;
б) $19x - 3x + 4 = 20x - 4$; $4x = 8$; $x = 2$;
в) $x - 24 = x + 24$; нет.

4. x — молока во втором бидоне.
$3 \cdot (x + 5) = 5x - 5$; $3x + 15 = 5x - 5$; $2x = 20$; $x = 10$.
Ответ: 50; 10.

5. $|x| - 3 = 0$; $|x| = 3$; $x = \pm 3$.

ДЗ. $\begin{cases} x = 0{,}4a - 0{,}2 \\ x = \frac{a}{3} + 1 \end{cases} \Rightarrow 0{,}4a - 0{,}2 = \frac{a}{3} + 1 \Rightarrow \frac{a}{15} = 1{,}2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 18$.

Вариант В2

1. а) $1 + 0{,}5x - 3 - 1{,}5x + 4 = -x + 2$;
б) $1 - 2y - 4 + 1 - 5y = -7y - 2$.

2. $AB = x$; $x + 2x + 2x - 4 = 21$; $5x = 25$; $x = 5$.
Ответ: $BC = 10$; $AB = 5$; $AC = 6$.

3. а) $5x - 2 = -1{,}8 + 4x$; $x = 0{,}2$;
б) $10x - 2x + 4 = 12x - 8$; $4x = 12$; $x = 3$;
в) $4x - 16 = 4x - 16$; любое.

4. x — конфет взяли из второго.
$4 \cdot (11 - 3x) = 11 - x$; $44 - 12x = 11 - x$; $11x = 33$; $x = 3$.
Ответ: 9; 3.

5. $|x| - 1 = 0$; $|x| = 1$; $x = \pm 1$.

ДЗ. $\begin{cases} x = 0{,}5a + 2 \\ x = \frac{2a}{3} + 1\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow 0{,}5a + 2 = \frac{2a}{3} + 1\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 4$.

Функции

С-4. Функции и их графики

Вариант А1

1. а) $y = 2 \cdot 4 - 3 = 5$; б) $1 = 2x - 3$; $2x = 4$; $x = 2$;
в) $-5 = -1 \cdot 2 - 3$; да.

2. $S = 5x$.

3. $m = pV$.

Вариант А2

1. а) $y = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$; б) $8 = 3x + 2$; $3x = 6$; $x = 2$;
в) $0 = 3 \cdot 2 + 2$; нет.

2. $P = 2 \cdot (x + 5)$.

3. $V = \frac{m}{p}$.

Вариант Б1

1. а) $y = -(-2) + 3 = 5$; б) $4 = -x + 3$; $x = -1$; в) A, C, D.

2. $S = 60 - 12t$.

3. $v = \frac{s-s_0}{t}$.

Вариант Б2

1. а) $y = 4 - 3 \cdot (-4) = 16$; б) $1 = 4 - 3x$; $3x = 3$; $x = 1$; в) A, B.

2. $S = 60 - 4v$.

3. $t = \frac{s-s_0}{v}$.

Вариант В1

1. а) $y = \frac{1}{3} \cdot 6 - 6 = -4$; б) $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}x - 6$; $\frac{1}{3}x = 6\frac{2}{3}$; $x = 2\frac{2}{9}$; в) $x = \frac{1}{3}x - 6$; $\frac{2}{3}x = -6$; $x = -9$.

2. а) $m = 7q + 4$; б) $q = \frac{m-4}{7}$.

3. $s = (t - t_0)v$.

Вариант В2

1. а) $y = \frac{1}{2} \cdot (-8) + 4 = 0$; б) $-0{,}5 = 0{,}5x + 4$; $0{,}5x = -4{,}5$; $x = -9$;
в) $x = 0{,}5x + 4$; $0{,}5x = 4$; $x = 8$.

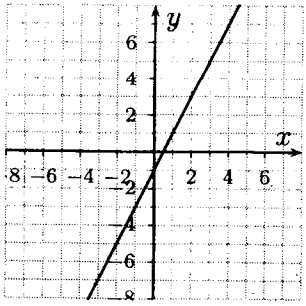
2. а) $m = 5n + 4$; б) $n = \frac{m-4}{5}$.

3. $v = \frac{(t-t_0)}{s}$.

С-5. Линейная функция. Прямая пропорциональность

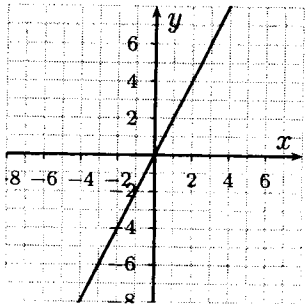
Вариант А1

1.



2. ox: (0,4), oy: (4,0).

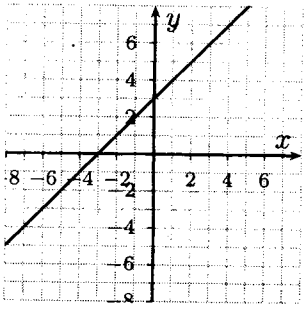
3.



4. Да.

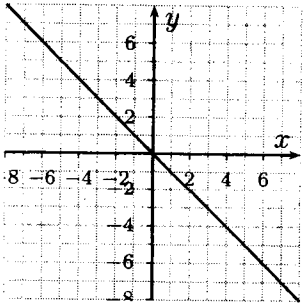
Вариант А2

1.



2. ox: $(0, -8)$, oy: (2,0).

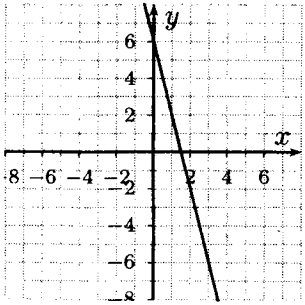
3.



4. Нет.

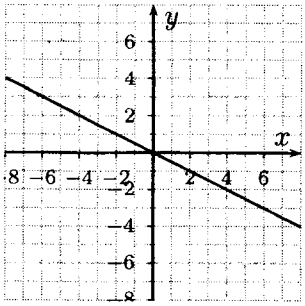
Вариант Б1

1.



2. ox: $(0, -11)$, oy: $(1\frac{5}{6}, 0)$.

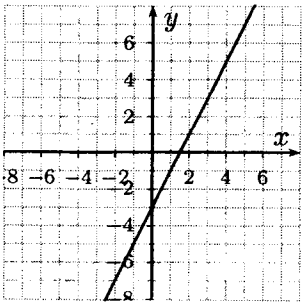
3.



4. Да.

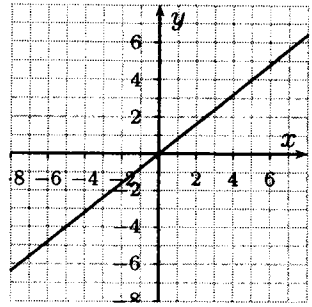
Вариант Б2

1.



2. ox: $(0,8)$, oy: $(\frac{4}{5}, 0)$.

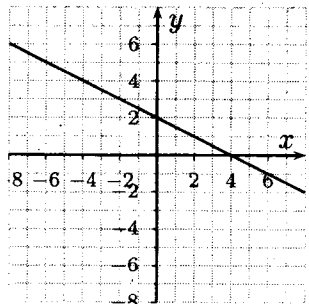
3.



4. Да.

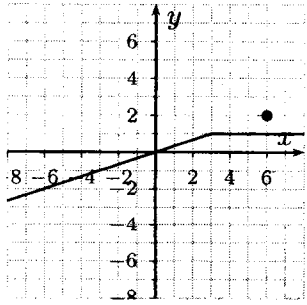
Вариант В1

1.



2. ox: $(0, -1)$, oy: $(\frac{1}{3}, 0)$.

3.

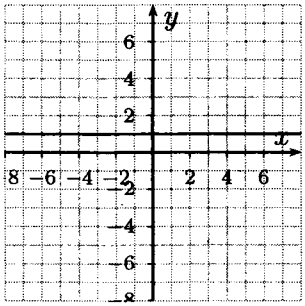


Нет.

4. $m = -2$.

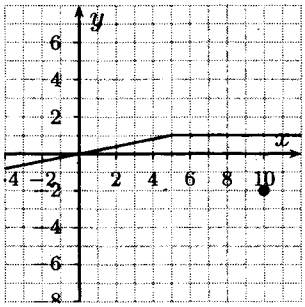
Вариант В2

1.



2. ox: $(0,1)$, oy: $(-5\frac{1}{2},0)$.

3.



Нет.

4. $m = 1$.

С-6. Функции и графики

Вариант 1

1. а) $x \neq 1$;

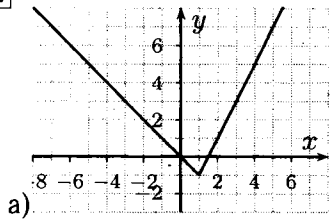
б) $x \neq 1$; $x \neq -3$;

в) $x \neq \pm 3$;

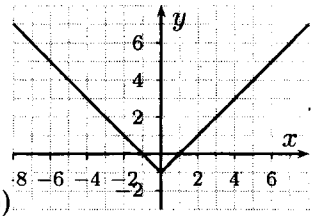
г) $x \neq 4$;

д) любое.

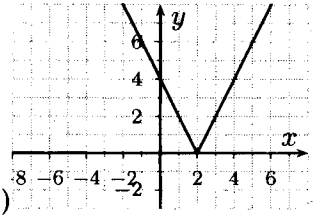
2.



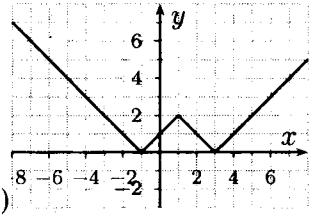
а)



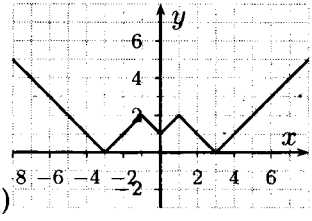
б)



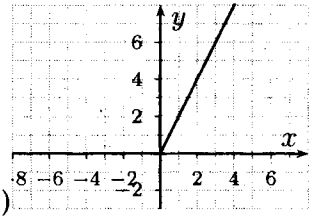
в)



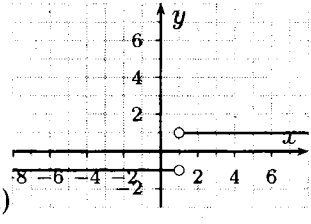
г)



д)



е)



ж)

Вариант 2

1. а) $x = -2$;

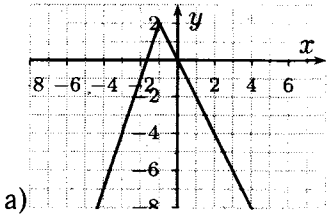
б) $x \neq -4$; $x \neq 2$;

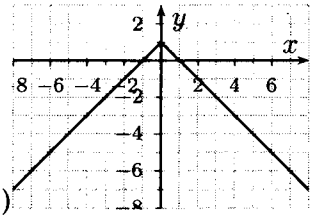
в) $x \neq \pm 5$;

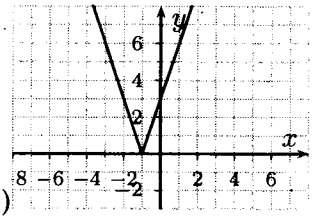
г) $x \neq -2$;

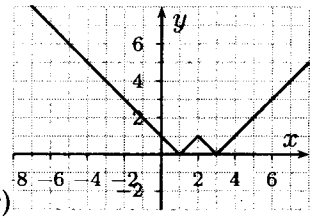
д) любое.

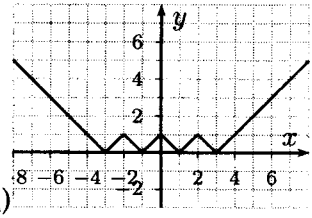
2.

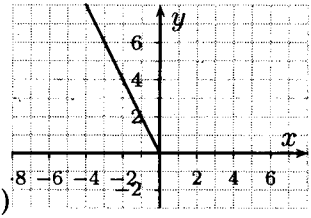


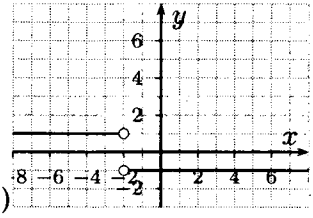










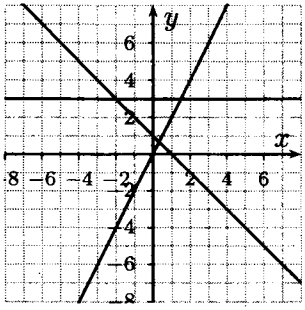


К-2. Линейная функция

Вариант А1

1. $y = 15 \cdot 2 - 1 = 29.$

2.



3. ox: (0,4),
oy: (−2,0).

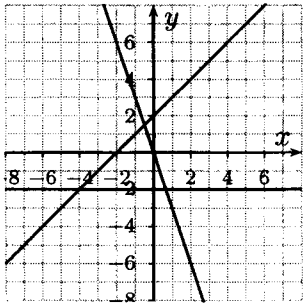
4. $-8x - 5 = 3;\ 8x = -8;\ x = -1;\ (-1,3)$.

5. $y = 2 + x$.

Вариант А2

1. $y = 6 \cdot 4 - 3 = 21$.

2.



3. ox: $(0, -4)$,
oy: (1,0).

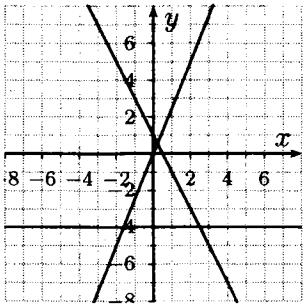
4. $-5x + 1 = -4;\ 5x = 5;\ x = 1;\ (1, -4)$.

5. $y = 2x - 3,\ y = 1 + 2x$.

Вариант Б1

1. $22 = 7x - 6;\ 7x = 28;\ x = 4$.

2.



3. ox: $y = -8$; $(0; -8)$,
oy: $0 = 8x - 8$; $x = 1$; $(1; 0)$.

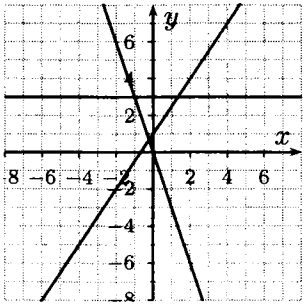
4. $10x - 14 = -3x + 12$; $13x = 26$; $x = 2$; $y = 10 \cdot 2 - 14 = 6$; $(2;\ 6)$.

5. $y = 9x$.

Вариант Б2

1. $-20 = 7x - 6$; $7x = -14$; $x = -2$.

2.



3. ox: $y = 7$; $(0; 7)$,
oy: $0 = 7x + 7$; $x = -1$; $(-1; 0)$.

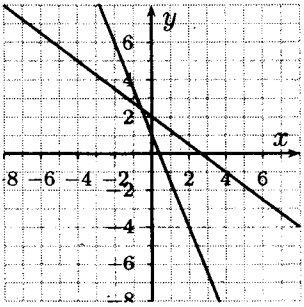
4. $6 - 9x = 5x - 8$; $14x = 14$; $x = 1$; $y = 6 - 9 = -3$; $(1; -3)$.

5. $y = -7x$.

Вариант В1

1. ox: $y = -18$; $(0; -18)$,
oy: $0 = 36 - 18x$; $x = 2$; $(2; 0)$.

2.



3. $y = -4x$.

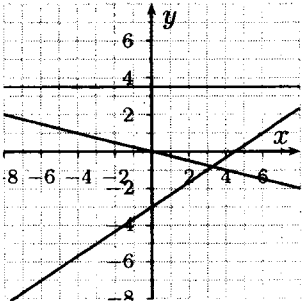
4. $\frac{x}{2} = 3x - 5$; $2{,}5x = 5$; $x = 2$; $y = \frac{2}{2} = 1$; $(2; 1)$.

5. $y = 2x - 3$.

Вариант В2

1. ox: $y = 21$; $(0; 21)$, oy: $0 = -42x + 21$; $x = \frac{1}{2}$; $(\frac{1}{2}; 0)$.

2.



3. $y = -3x$.

4. $-\frac{x}{3} = 12 - x$; $\frac{2}{3}x = 12$; $x = 18$.

5. $y = -x + 1$.

Степень с натуральным показателем

С-7. Степень и её свойства

Вариант А1

1. а) $40 - 9 = 31$;
б) $-1 - 1 = -2$.

2. $-(-2)^5 = 32.$

3. а) $c^{4+7-9} = c^2$;
б) $a^{4\cdot 3+1} = a^{13}$;
в) $16x^4$.

4. а) $(20 \cdot 0{,}5)^3 = 10^3 = 1000$;
б) $\frac{2^{2+5}}{2^7} = \frac{2^7}{2^7} = 1$.

5. $y^{2\cdot 3\cdot 4} = y^{24}$.

Вариант А2

1. а) $36 - 24 = 12$;
б) $-1 - 1 = -2$.

2. $-(-3)^3 = 27$.

3. а) $c^{18-15+2} = c^5$;
б) $a^{2\cdot 5-1} = a^9$;
в) $49y^2$.

4. а) $(0{,}25 \cdot 100)^2 = 25^2 = 625$;
б) $\frac{3^8}{3^{6+2}} = \frac{3^8}{3^8} = 1$.

5. $y^{3\cdot 4\cdot 5} = y^{60}$.

Вариант Б1

1. а) $0{,}2 \cdot 25 - 16 \cdot \frac{1}{16} = 5 - 1 = 4$;
б) $-0{,}125 - 1 = -1{,}125$.

2. $3 - (-1)^3 = 3 + 1 = 4$.

3. а) $c^{4\cdot 2+3} = c^{11}$;
б) $\frac{x^5}{x^5} = 1$;
в) $-27a^3b^3$.

4. а) $(0{,}4 \cdot 250)^2 = 100^2 = 10000$;
б) $\frac{5^3\cdot 5^4}{5^6} = 5^{3+4-6} = 5$.

5. $(-a)^{3\cdot 2\cdot 4} = (-a)^{24} = a^{24}$.

Вариант Б2

1. а) $81 \cdot \frac{1}{81} - 0{,}05 \cdot 100 = 1 - 5 = -4$;
б) $1 - 0{,}008 = 0{,}992$.

2. $1-(-1)^5=1+1=2.$

3. а) $c^{5\cdot 3+4}=c^{19}$;
б) $\frac{x^3}{x^3}=1$;
в) $16a^4b^4$.

4. а) $(1{,}25\cdot 8)^4=10^4=10000$;
б) $\frac{6^{12}}{6^2\cdot 6^9}=6^{12-2-9}=6$.

5. $(-a)^{2\cdot 3\cdot 4}=(-a)^{24}=a^{24}$.

Вариант В1

1. а) $-16\cdot\frac{1}{24}+1=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$;
б) $11\frac{1}{9}-27=-16\frac{8}{9}$.

2. $16-0{,}5\cdot(-2)^2=16+16=32.$

3. а) $\frac{c^{3\cdot 3+2}}{c^{11}}=c^{11-11}=1$;
б) $\frac{a^{(2+2)\cdot 2}}{a^7}=a^{8-7}=a$;
в) $-27a^3b^3c^3$.

4. а) $(1{,}1\cdot\frac{10}{11})^5=1^5=1$;
б) $\frac{10^6\cdot 10^7}{(2\cdot 5)^{13}}=10^{13-13}=1$.

5. $y^{(n+5)\cdot 2-2\cdot 3\cdot 2}=y^{2n+10-12}=y^{2n-2}$.

Вариант В2

1. а) $1-64\cdot\frac{1}{72}=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$;
б) $5\frac{1}{16}-8=-2\frac{15}{16}$.

2. $1-\frac{1}{27}\cdot(-3)^3=1+1=2.$

3. а) $\frac{c^{5\cdot 3+7}}{c^{22}}=c^{22-22}=1$;
б) $\frac{a^{(3+2)\cdot 2}}{a^9}=a^{10-9}=a$;
в) $-125x^3y^3z^3$.

4. а) $(2{,}3\cdot\frac{10}{23})^7=1^7=1$;
б) $\frac{6^6\cdot 6^4}{(2\cdot 3)^{10}}=6^{10-10}=1$.

5. $y^{(n-4)\cdot 5-4\cdot 2\cdot 3}=y^{5n-20-24}=y^{5n-44}$.

С-8. Одночлен

Вариант А1

1. $5\cdot(-1)\cdot 2^2=-20.$

2. а) $-a^4$;
б) $-2b^4c^{11}$.

3. а) $8a^6b^3$;
б) $-3a^3 \cdot a^4b^8 = -3a^7b^8$.

4. а) $M = 6a^5b^3 \div 3ab^2 = 2a^4b$;
б) $M = \sqrt{25x^6y^2} = 5x^3y$.

Вариант А2

1. $3 \cdot 2^2 \cdot (-1) = -12$.

2. а) $-b^5$;
б) $3a^5b^5$.

3. а) $9x^4y^2$;
б) $2b^2 \cdot (-a^6b^3)$.

4. а) $M = 12x^7y^4 \div 4x^6y^2 = 3xy^2$;
б) $M = \sqrt{49a^2b^8} = 7ab^4$.

Вариант Б1

1. $2 \cdot (-0{,}5)^2 \cdot (-2)^3 = 2 \cdot 0{,}25 \cdot (-8) = -4$.

2. а) $6xy^3$;
б) $-2x^6y^4$.

3. а) $-0{,}027a^3b^{12}$;
б) $a^{14}b^6 \cdot 4ab^9 = 4a^{15}b^{15}$.

4. а) $(\frac{1}{7}a^7b)^2$;
б) $(-3xy^2)^3$.

Вариант Б2

1. $3 \cdot (-3)^3 \cdot (-\frac{1}{3})^2 = 3 \cdot (-27) \cdot \frac{1}{9} = -9$.

2. а) $-12x^4y^2$;
б) $2a^5b^5$.

3. а) $-0{,}008x^3y^{15}$;
б) $8x^5y \cdot x^{12}y^{16} = 8x^{17}y^{17}$.

4. а) $(\frac{1}{6}xy^8)^2$;
б) $(-2a^4b)^3$.

Вариант В1

1. $-200 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-0{,}1)^3 = -0{,}1.$

2. а) $-0{,}4a^4b^3$;
б) $6a^3b^4c^4$.

3. а) $81x^4y^{12} \cdot (-\frac{1}{27}xy^2) = -3x^5y^{14}$;
б) $a^9b^6 \cdot 0{,}36a^2b^4 = 0{,}36a^{11}b^{13}$.

4. а) $4a^4b^2 = (2a^2b)^2 = m^2$;
б) $40a^6b^3 = 5(2a^2b)^3 = 5m^3$.

Вариант В2

1. $-800 \cdot (-\frac{1}{2})^3 \cdot (-0{,}1) = -10.$

2. а) $-0{,}4x^6y^3$;
б) $16x^4y^4z^2$.

3. а) $(-\frac{1}{27}a^3b^9) \cdot 81a^5b = -3a^8b^{10}$;
б) $-a^2b^{12} \cdot (-0{,}064)a^6b^3 = -0{,}064a^8b^{15}$.

4. а) $8a^6b^3 = (2a^2b)^3 = m^3$;
б) $12a^4b^2 = 3(2a^2b)^2 = 3m^2$;

Дополнительные упражнения

Вариант 1

1. $x + y = 2{,}7 \cdot 10^7 + 4{,}5 \cdot 10^6 = (27 + 4{,}5) \cdot 10^6 = 31{,}5 \cdot 10^6$;
$x - y = 2{,}7 \cdot 10^7 - 4{,}5 \cdot 10^6 = (27 - 4{,}5) \cdot 10^6 = 22{,}5 \cdot 10^6$;
$x \cdot y = 2{,}7 \cdot 10^7 \cdot 4{,}5 \cdot 10^6 = 12{,}15 \cdot 10^{13}$;
$x \div y = 2{,}7 \cdot 10^7 \div 4{,}5 \cdot 10^6 = 6.$

2. а) $x^{n+n+2-2n+1} = x$;
б) $y^{(n-3)\cdot 2+6+2n} = y^{2n-6+6+2n} = y^{4n}$.

3. $(-1)^{n+n+1+2n+4} = (-1)^{4n+5} = -1.$

Вариант 2

1.

$x + y = 3{,}6 \cdot 10^6 + 2{,}4 \cdot 10^5 = (36 + 2{,}4) \cdot 10^5 = 38{,}4 \cdot 10^5$;
$x - y = 3{,}6 \cdot 10^6 - 2{,}4 \cdot 10^5 = (36 - 2{,}4) \cdot 10^5 = 33{,}6 \cdot 10^5$;
$x \cdot y = 3{,}6 \cdot 10^6 \cdot 2{,}4 \cdot 10^5 = 8{,}64 \cdot 10^{11}$;

$x \div y = 3{,}6 \cdot 10^6 \div 2{,}4 \cdot 10^5 = 36 \div 2{,}4 = 15.$

2. а) $x^{n+4+n-3-2n-1} = x^0 = 1;$

б) $z^{3n-3-(n-1)\cdot 3} = z^{3n-3-3n+3} = z^0 = 1.$

3. $(-1)^{n+3+n+2n-1} = (-1)^{4n+2} = 1.$

С-9. Абсолютная и относительная погрешность

Вариант А1

1. 0,3; 0,025.

2. 0,4.

Вариант А2

1. 0,2; 0,04.

2. 0,32.

Вариант Б1

1. 1,6; 0,04; 0,025.

2. 0,182.

Вариант Б2

1. 0,8; 0,04; 0,05.

2. 0,364.

Вариант В1

1. 1,196; 0,0001; 0,000084.

2. 3,1416.

Вариант В2

1. 0,996; 0,0001; 0,0001.

2. 3,142.

К-3. Степень с натуральным показателем. Одночлен

Вариант А1

1. а) $-100 \cdot 0{,}2 = -20;$

б) $-2\frac{10}{27}$;

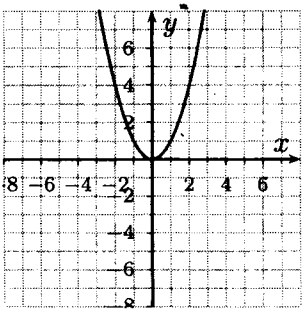
в) $1 + 1 = 2$.

2. а) x^5;

б) y^4;

в) $16c^{24}$.

3.



4. а) $2a^8b^3$;

б) $0{,}0001x^{12} \cdot 10x^{10} = 0{,}001x^{22}$;

в) $\frac{8}{27}a^3b^6 \cdot \frac{3}{2}a^3b^2 = \frac{4}{9}a^6b^8$.

5. $\frac{2^{10} \cdot 2^6}{2^{15}} = 2^{10+6-15} = 2$.

ДЗ. $a + b = 4200 + 210 = 4410$;

$a - b = 4200 - 210 = 3990$;

$a \cdot b = 4200 \cdot 210 = 882000$;

$a \div b = 4200 \div 210 = 20$.

Вариант А2

1. а) $-16 \cdot 0{,}5 = -8$;

б) $6\frac{1}{4}$;

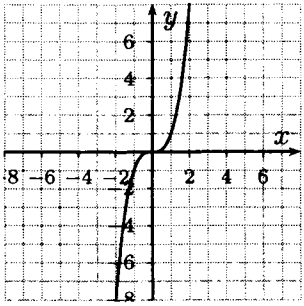
в) $-1 - 1 = -2$.

2. а) x^{10};

б) y^3;

в) $9c^8$.

3.



4. а) $3a^6b^5$;

б) $-0{,}008x^6 \cdot 5x^2 = -0{,}04x^8$;

в) $\frac{9}{49}a^4b^2 \cdot \frac{7}{3}b^2a = \frac{3}{7}a^5b^4$.

5. $\frac{3^{10} \cdot 3^3}{3^{12}} = 3^{10+3-12} = 3$.

ДЗ. $a + b = 64000 + 1600 = 65600$;

$a - b = 64000 - 1600 = 62400$;

$a \cdot b = 64000 \cdot 1600 = 1024 \cdot 10^5$;

$a \div b = 64000 \div 1600 = 40$.

Вариант Б1

1. а) $81 - 1 = 80$;

б) $-\frac{1000}{27} \cdot \frac{27}{1000} = -1$;

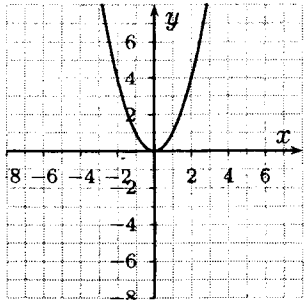
в) $49 \cdot \frac{4}{49} = 4$.

2. а) $\frac{x^4}{x^4} = 1$;

б) $0{,}16a^6b^2$;

в) $(m^5)^2 \cdot 8m^3 = 8m^{3+10} = 8m^{13}$.

3.



4. а) $-40a^7b^3$;
б) $-24x^6y \cdot \frac{1}{8}y^6 = -3x^6y^7$;
в) $-a^3b^6 \cdot 25a^4b^2 = -25a^7b^8$.

5. $\frac{(3^2)^5 \cdot (2^2)^5}{6^{10}} = \frac{(3 \cdot 2)^{10}}{6^{10}} = 1$.

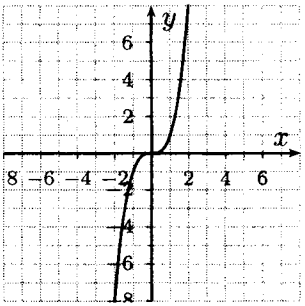
ДЗ. $a + b = 60 \cdot 10^n + 3 \cdot 10^n = 63 \cdot 10^n$;
$a - b = 60 \cdot 10^n - 3 \cdot 10^n = 57 \cdot 10^n$;
$a \cdot b = 60 \cdot 10^n \cdot 3 \cdot 10^n = 180 \cdot 10^{2n}$;
$a \div b = 60 \cdot 10^n \div 3 \cdot 10^n = 20$.

Вариант Б2

1. а) $4 - 9 = -5$;
б) $-\frac{125}{8} \cdot \frac{8}{125} = -1$;
в) $-625 \cdot \frac{16}{625} = -16$.

2. а) $\frac{x^{12}}{x^{12}} = 1$;
б) $-0{,}008a^3b^{15}$;
в) $16x^2 \cdot (x^6)^4 = 16x^{2+24} = 16x^{26}$.

3.



4. а) $-6a^9b^9$;
б) $-98xy^3 \cdot \frac{1}{49}x^4 = -2x^5y^3$;
в) $-64a^3b^9 \cdot a^4b^2 = -64a^7b^{11}$.

5. $\frac{(5^2)^7 \cdot (2^2)^7}{10^{13}} = \frac{(5 \cdot 2)^{14}}{10^{13}} = 10$.

ДЗ.
$a + b = 80 \cdot 10^{n+1} + 4 \cdot 10^{n+1} = 84 \cdot 10^{n+1}$;
$a - b = 80 \cdot 10^{n+1} - 4 \cdot 10^{n+1} = 76 \cdot 10^{n+1}$;
$a \cdot b = 80 \cdot 10^{n+1} \cdot 4 \cdot 10^{n+1} = 320 \cdot 10^{2n+2}$;
$a \div b = 80 \cdot 10^{n+1} + 4 \cdot 10^{n+1} = 20$.

Вариант В1

1. а) $2 - 1{,}96 = 0{,}04$;

б) $(-1)^4 = 1$;

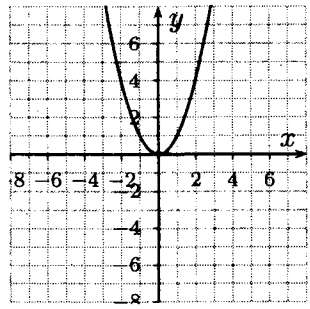
в) $(1 - 1\frac{1}{3})^3 = (-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}$.

2. а) $x^{(4+2)\cdot 3-17} = x^{18-17} = x$;

б) $1\frac{32}{49}a^6b^2c^{10}$;

в) $8a^{12} \cdot 2a^4 = 16a^{16}$.

3.



4. а) $2a^6b^8$;

б) $2\frac{1}{4}c^3d \cdot \frac{4}{9}c^2d^4 = c^5d^5$;

в) $-1000a^3b^9 \cdot (-0{,}001)a^9b^6 = a^{12}b^{15}$.

5. $\frac{2^{15}\cdot 3^5}{2^{14}\cdot 3^4} = 2 \cdot 3 = 6$.

6. $(-1)^{4n} = 1$.

Вариант В2

1. а) $1 - 4{,}5 = -3{,}5$;

б) $(-1)^6 = 1$;

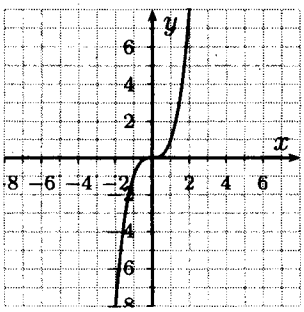
в) $(2 - 2{,}5)^4 = (-\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$.

2. а) $x^{5\cdot 2+4-13} = x^{14-13} = x$;

б) $-2\frac{10}{27}a^3b^{12}c^6$;

в) $-9b^6 \cdot 3b^3 = -27b^9$.

3.



4. а) a^6b^{12};

б) $3\frac{3}{8}c^3d^2 \cdot (-\frac{8}{27})c^6d^6 = -c^9d^8$;

в) $-8a^6b^9 \cdot (-0{,}125)a^3b^{12} = a^9b^{21}$.

5. $\frac{2^6 \cdot 3^{12}}{2^5 \cdot 3^{12}} = 2$.

6. $(-1)^{2n-2} = 1$.

С-10. Многочлен. Сложение и вычитание многочленов

Вариант А1

1. $(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 0$.

2. а) $x^3 - x^2 + 3x$;

б) $10xy^2 - 9x^2y$.

3. Сумма: $x^2 + 2x$. Разность: $3x^2 - 8x$.

4. $(6 + 1)x + (4 + 2)y = 7x + 6y$.

5. $2{,}3x - 1{,}4 - 2{,}8 + 0{,}7x = -4{,}2$; $3x = 0$; $x = 0$.

Вариант А2

1. $(-1)^2 - 6 \cdot (-1) - 7 = 0$.

2. а) $3x^3 - x^2 - 5x$;

б) $12a^2b - 12b^2$.

3. сумма: $2x^2 + 5x$. разность: $6x^2 - x$.

4. $(6 - 1)x + (4 - 2)y = 5x + 2y$.

5. $2{,}3x - 1{,}4 + 2{,}8 - 0{,}7x = 1{,}4$; $1{,}6x = 0$; $x = 0$.

Вариант Б1

1. $-3 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 2 = -12 + 10 + 2 = 0.$

2. а) $3x^3 + 4x^2 + 3x;$

б) $8x^2y^2 - 8xy^2 - 6x^2y^2 = 2x^2y^2 - 8xy^2.$

3. Сумма: $-x^2 - 2x - 5$. Разность: $3x^2 - 4x - 3$.

4. $(x + y) + (x - y) = 2x.$

5. $M = x^2 - xy + y^2 - 6x^2 + 3xy = -5x^2 + y^2 + 2xy.$

Вариант Б2

1. $-5 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot (-2) + 2 = -20 + 18 + 2 = 0.$

2. а) $-2x^3 - x^2 + x;$

б) $12x^3y - 12xy - 12x^3y = -12xy.$

3. Сумма: $-x^2 - 2x + 1$. Разность: $3x^2 + 4x - 5$.

4. $(x + y) - (x - y) = 2y.$

5. $M = x^2 + xy - y^2 + 4xy + 3y^2 = x^2 + 2y^2 + 5xy.$

Вариант В1

1. $-3 \cdot (-\frac{1}{3})^2 + 5 \cdot (-\frac{1}{3}) + 2 = -\frac{1}{3} - \frac{5}{3} + 2 = 0.$

2. а) $m^3 - 3m^2 - 2;$

б) $14x^3y^2 + 4x^2y^3 - 15x^3y^2 = 4x^2y^3 - x^3y^2.$

3. Сумма: $x^2 - 6y^2$. Разность: $15x^2 - 2xy$.

4. $x + (x + y) + (x + 2y) = 3x + 3y.$

5. $(2n - 1) + (2n + 1) = 4n.$

Вариант В2

1. $-3 \cdot (-\frac{1}{3})^2 - 10 \cdot (-\frac{1}{3}) - 3 = -\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} - 3 = 0.$

2. а) $-m^3 + 3m^2 - m + 2;$

б) $-15x^3y^2 - 16x^3y + 18x^3y^2 = 3x^3y^2 - 16x^3y.$

3. Сумма: $3x^2 + 4xy$. Разность: $-5x^2 - 4y^2$.

4. $(x + y) + (x + 2y) = 2x + 3y.$

5. $(2n - 1) + (2n + 1) + (2n + 3) = 6n + 3.$

С-11. Умножение многочлена на одночлен. Вынесение общего множителя за скобки

Вариант А1

1. а) $-6x^2 + 3x$;
б) $16ab - 8b^2 + 8b^2 = 16ab$.

2. а) $a \cdot (3x + 4)$;
б) $3x \cdot (2 - 1)$.

3. x — страниц планировала печатать в час.
$7x = 6 \cdot (x + 3)$; $7x = 6x + 18$; $x = 18$; $7 \cdot 18 = 126$.
Ответ: 126.

4. а) $5x - 2x - 2 = 13$; $3x = 15$; $x = 5$;
б) $x - 0{,}5x + 1{,}5 = 4$; $0{,}5x = 2{,}5$; $x = 5$.

Вариант А2

1. а) $-8y^2 + 4y$;
б) $5a^2 - 10ab + 10ab = 5a^2$.

2. а) $c \cdot (2b - 3)$;
б) $2y \cdot (5y^2 + 1)$.

3. x — часов планировала печатать.
$21x = 18 \cdot (x + 1)$; $21x = 18x + 18$; $3x = 18$; $x = 6$;
$21 \cdot 6 = 126$.
Ответ: 126.

4. а) $8x + 10 - 5x = 13$; $3x = 3$; $x = 1$;
б) $2x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 3$; $1\frac{2}{3}x = 3\frac{1}{3}$; $x = 2$.

Вариант Б1

1. а) $14b^5 + 2b^4 - 4b^3$;
б) $a^2 - 0{,}5ab - b^2 + 0{,}5ab - a^2 - b^2$.

2. а) $ab \cdot (2b - 1)$;
б) $6x^3(3x + 2)$.

3. x — скорость течения.
$8 \cdot (13{,}5 + x) = 2 \cdot 5 \cdot (13{,}5 - x)$; $108 + 8x = 135 - 10x$;
$18x = 27$; $x = 1{,}5$.
Ответ: 1,5.

4. а) $6x^2 + 3x - 6x^2 + x = 10$; $4x = 10$; $x = 2{,}5$;
б) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3} = 1$; $\frac{x}{6} = 1\frac{5}{6}$; $x = 11$.

Вариант Б2

1. а) $3a^3 - 27a^4 + 6a^2$;
б) $10xy - 2x^2 - 10xy + 2y^2 = -2x^2 + 2y^2$.

2. а) $xy \cdot (7y^2 + 1)$;
б) $3y^4(3y^2 - 2)$.

3. x — скорость лодки.
$8 \cdot (1{,}5 + x) = 2 \cdot 5 \cdot (x - 1{,}5)$; $12 + 8x = 10x - 15$;
$2x = 27$; $x = 13{,}5$.
Ответ: 13,5.

4. а) $4x^2 - 2x - 4x^2 - 8x = 4$; $-10x = 4$; $x = -0{,}4$;
б) $\frac{3x}{5} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 1$; $\frac{x}{10} = \frac{1}{2}$; $x = 5$.

Вариант В1

1. а) $-1{,}2a^4 + 0{,}4a^2 - \frac{1}{7}a$;
б) $5a^2 + 5ab - 3ab + b^2 + 2b^2 - 2ab = 5a^2 + 3b^2$.

2. а) $-a^6(a + 5a^5 + 3)$;
б) $4x^2y^2(2x^2 - 3y + 1)$.

3. x — количество роз.
$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 16$; $\frac{8x}{15} = 16$; $x = 30$.
Ответ: 30.

4. а) $x \cdot (4x - 3) = 0$; $x = 0$, $x = 0{,}75$;
б) $1{,}2x - 0{,}2 - 0{,}5 + 0{,}25x = 1{,}5x + 1$; $0{,}05x = -1{,}9$;
$x = -38$.

Вариант В2

1. а) $0{,}6x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3$;
б) $6ab - 6b^2 + 6ab - 3b^2 - 6ab + b^2 = -8b^2 + 6ab$.

2. а) $-x^4(x + 3x^3 + 2)$;
б) $3x^3y \cdot (1 - 2y + 3x)$.

3. x — количество атласов.

$\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = 15$; $\frac{5x}{30} = 15$; $x = 90$.
Ответ: 90.

4. а) $x \cdot (2x - 5) = 0$; $x = 0$, $x = 2{,}5$;
б) $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} + \frac{x}{3} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$; $\frac{x}{6} = 1\frac{1}{3}$; $x = 8$.

К-4. Многочлен

Вариант А1

1. а) $8x$;
б) $-x^3 + 3x^2$;
в) $2x^2 + 12x - 12x + 3x^2 = 5x^2$.

2. а) $4a \cdot (2b - c)$;
б) $x^3(x + 1)$.

3. x — риса продали в первый день.
$x + (x + 5) + (x + x + 5) = 50$; $4x + 10 = 50$; $4x = 40$; $x = 10$.
Ответ: 10; 15; 25.

4. а) $x \cdot (x - 1) = 0$; $x = 0$; $x = 1$;
б) $0{,}25x + 0{,}75 - 0{,}5x = 3$; $0{,}25x = -2{,}25$; $x = -9$.

5. $2 \cdot (2a - b) = 2 \cdot 5 = 10$.

Вариант А2

1. а) $-2a^2$;
б) $-3a^3 + a^2$;
в) $18x - 6x^2 - 2x^2 - 18x = -8x^2$.

2. а) $3y \cdot (x + 2a)$;
б) $y^3(1 - y)$.

3. x — мальчиков в 7-Б.
$(x + 3) + x + (x + x + 3) = 30$; $4x + 6 = 30$; $4x = 24$; $x = 6$.
Ответ: 9; 6; 15.

4. а) $x \cdot (x + 1) = 0$; $x = 0$; $x = -1$;
б) $\frac{x}{6} - \frac{1}{3} - \frac{x}{2} = 2$; $\frac{x}{3} = -2\frac{1}{3}$; $x = -7$.

5. $3 \cdot (2a - b) = 3 \cdot 5 = 15$.

Вариант Б1

1. а) $7a + 1$;
б) $16a^3 - 16a^3 + 6a^2 = 6a^2$;
в) $2a^2b + 2ab^2 - a^2b + ab^2 = a^2b + 3ab^2$.

2. а) $7y \cdot (2x + 3y)$;
б) $3y^3(1 - 2y^3)$.

3. x — дней по плану.
$6x = 8 \cdot (x - 2)$; $6x = 8x - 16$; $2x = 16$; $x = 8$.
Ответ: 48.

4. а) $x \cdot (x + 5) = 0$; $x = 0$; $x = -5$;
б) $2 - \frac{x}{9} - \frac{4}{9} = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$; $\frac{4x}{9} = 2\frac{2}{9}$; $x = 5$.

5. $8^5 + 2^{13} = 2^{15} + 2^{13} = (2^3 + 2) \cdot 2^{12} = 10 \cdot 2^{12}$.

Вариант Б2

1. а) $3a^2 + 1$;
б) $6a^4 - 6a^4 - 2a^3 = -2a^3$;
в) $x^2y - xy^2 - 2x^2y - 2xy^2 = -x^2y - 3xy^2$.

2. а) $5b \cdot (2a^2 - 5b)$;
б) $2x^2(1 + 2x^2)$.

3. x — деталей делал токарь по плану.
$6x = 8 \cdot (x - 2)$; $6x = 8x - 16$; $2x = 16$; $x = 8$.
Ответ: 48.

4. а) $x \cdot (x - 4) = 0$; $x = 0$; $x = 4$;
б) $4 - \frac{x}{6} - \frac{1}{6} = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$; $\frac{2x}{3} = 1\frac{2}{3}$; $x = 2{,}5$.

5. $9^6 - 3^{10} = 3^{12} - 3^{10} = (3^3 - 3) \cdot 3^9 = 24 \cdot 3^9$.

Вариант В1

1. а) $x^3 - 0{,}7x^2 - 3{,}3x$;
б) $3x^3 - 4x^2 - 3x^3 = -4x^2$;
в) $3ab^2 - 2a^2b^2 - 2a^2b^2 + 6ab^2 = 9ab^2$.

2. а) $4a^2(2a^2b^2 - 3b^3 + 1)$;
б) $(x + 6)(y - 5)$.

3. x — длина прямоугольника.

$(x-4)^2+12=x\cdot(x-4)$; $x^2+16-8x+12=x^2-4x$;
$4x=28$; $x=7$.
Ответ: 3.

4. а) $3x\cdot(1-9x)=0$; $x=0$; $x=\frac{1}{9}$;
б) $\frac{2x}{3}-\frac{x}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3x}{4}-\frac{5}{4}$; $\frac{5x}{12}=1\frac{1}{12}$; $x=2{,}6$.

5. $n\cdot(n-1)$ четно т. к. один из множителей четен.

Вариант В2

1. а) $-2x^2+2x-2$;
б) $8y^3-y^4+y^4=8y^3$;
в) $3x^2y-3x^2y^2-3x^2y^2+x^2y=4x^2y-6x^2y^2$.

2. а) $2y^3(3x^2y^2+6x^5-1)$;
б) $(a+2)(3-b)$.

3. x — ширина прямоугольника.
$(x+5)^2=x\cdot(x+5)+40$; $x^2+25+10x=x^2+5x+40$;
$5x=15$; $x=3$.
Ответ: 8.

4. а) $4x\cdot(1-5x)=0$; $x=0$; $x=0{,}2$;
б) $1-\frac{x}{3}-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{5x}{4}$; $2\frac{1}{12}x=0{,}5$; $x=\frac{6}{25}$.

5. $n\cdot(n+1)$ четно т. к. один из множителей четен.

С-12. Умножение многочленов. Способ группировки

Вариант А1

1. а) $x^2-2x+3x-6=x^2+x-6$;
б) $6x^2y^2-2x^4-3y^4+y^2x^2=-2x^4+7x^2y^2-3y^4$.

2. а) $x\cdot(a+b)+6\cdot(a+b)=(x+6)(a+b)$;
б) $x^2(x-1)+(x-1)=(x^2+1)(x-1)$;
в) $a\cdot(b-2)-2\cdot(b-2)=(a-2)(b-2)$.

3. $2-(-3-1)(-3+1)=2+4\cdot(-2)=2-8=-6$.

4. $3x+12-x^2-4x+x^2=0$; $x=12$.

Вариант А2

1. а) $x^2-x+7x-7=x^2+6x-7$;

б) $a^2b^2 - 4a^4 - 4b^4 + 16a^2b^2 = -4a^4 + 17a^2b^2 - 4b^4$.

2. а) $c \cdot (a + b) + 2 \cdot (a + b) = (c + 2)(a + b)$;

б) $a^2(a - 2) + (a - 2) = (a^2 + 1)(a - 2)$;

в) $3 \cdot (x + 3) - y \cdot (x + 3) = (3 - y)(x + 3)$.

3. $5 - (2 - 3)(2 - (-3)) = 5 + 1 \cdot 5 = 10$.

4. $4x + 20 - x^2 - 5x + x^2 = 0$; $x = 20$.

Вариант Б1

1. а) $32x^2 + 24x - 24x - 18 = 32x^2 - 18$;

б) $2y \cdot (2y^2 + y^3 - 2 - 2y) = 2y^4 + 4y^3 - 4y^2 - 4y$.

2. а) $a \cdot (x + 3y) + 5 \cdot (x + 3y) = (a + 5)(x + 3y)$;

б) $x^4(x + 2) - (x + 2) = (x^4 - 1)(x + 2)$;

в) $a \cdot (b - a) + c \cdot (b - a) = (a + c)(b - a)$.

3. $4y^3 - 2y^2 + y - 4y^3 + 2y^2 = y = \frac{1}{9}$.

4. $2 - x - 2x + x^2 = x^2 + 3x - 4x - 12$; $2x = 14$; $x = 7$.

Вариант Б2

1. а) $12x - 18x^2 + 8 - 12x = -18x^2 + 8$;

б) $x^2(2x + x^3 - 6 - 3x^2) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2$.

2. а) $c \cdot (2b + a) + 2 \cdot (2b + a) = (c + 2)(2b + a)$;

б) $x^3(x + 3) - (x + 3) = (x^3 - 1)(x + 3)$;

в) $x \cdot (y - a) + a \cdot (y - a) = (x + a)(y - a)$.

3. $y^3 - 3y^2 + 9y - y^3 + 3y^2 = 9y = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$.

4. $6 - 2x - 3x + x^2 = x^2 + 2x - 5x - 10$; $2x = 16$; $x = 8$.

Вариант В1

1. а) $9a^2 + a^4 - 3a^3 + 27a + 3a^3 - 9a^2 = a^4 + 27a$;

б) $(a^2 - 2a - 3a + 6)(a + 1) = a^3 - 5a^2 + 6a + a^2 - 5a + 6 = a^3 - 4a^2 + a + 6$.

2. а) $y \cdot (2x - 3a) + x \cdot (2x - 3a) = (y + x)(2x - 3a)$;

б) $ab^2(a - 1) + 2ab \cdot (a - 1) = (ab^2 + 2ab)(a - 1) = ab \times (b + 2)(a - 1)$;

в) $(y - x)^2 + 3 \cdot (y - x) = (y - x)(y - x + 3)$.

3. $2\cdot(2b^2+4b-b^3-2b^2)+2b^3+4b^2-4b^2-8b=4b^2+$
$+8b-2b^3-4b^2+2b^3+4b^2-4b^2-8b=0.$

4. $x^2+x+7x+7=x\cdot(x+1)+7\cdot(x+1)=(x+7)(x+1)=0;$
$x=-7;\ x=-1.$

Вариант В2

1. а) $2x^3+4x^2+x^4-4x^2-8x-2x^3=x^4-8x;$
б) $(a^2+2a+3a+6)(a-1)=a^3+5a^2+6a-a^2-5a-$
$-6=a^3+4a^2+a-6.$

2. а) $b\cdot(4a-c)+a\cdot(4a-c)=(b+a)(4a-c);$
б) $xy\cdot(x-y)+x\cdot(x-y)=x\cdot(y+1)(x-y);$
в) $(2-a)^2-5\cdot(2-a)=(2-a)(2-a-5)=(a+3)(a-2).$

3. $b\cdot(2b+6-2b^2-6b)+2b^3+6b^2-2b^2-6b=2b^2+6b-$
$-2b^3-6b^2+2b^3+6b^2-2b^2-6b=0.$

4. $x^2+2x+4x+8=x\cdot(x+2)+4\cdot(x+2)=(x+4)(x+$
$+2)=0;\ x=-2;\ x=-4.$

Дополнительные задания

1. а) $a\cdot(ab-1)-b\cdot(ab-1)-2\cdot(ab-1)=(a-b-2)(ab-1);$
б) $bx\cdot(ax+y)-y\cdot(ax+y)=(bx-y)(ax+y);$
в) $a^k(a+1)-(a+1)=(a^k-1)(a+1);$
г) $a^n(a^{n+1}+1)-(a^{n+1}+1)=(a^{n+1}+1)(a^n-1);$
д) $x^4+2x^2+14x^2+28=x^2(x^2+2)+14\cdot(x^2+2)=$
$=(x^2+14)(x^2+2).$

2. x — ширина домика.
$x\cdot(x-2)=2\cdot(2x-2)+4+16;\ x^2-2x=4x-4+16;$
$x^2-6x-16=0;\ x^2+2x-8x-16=x\cdot(x+2)-8\times$
$\times(x+2)=(x-8)(x+2)=0;\ x=8.$
Ответ: 8; 10.

К-5. Умножение многочленов. Способ группировки

Вариант А1

1. а) $2x^2-2x+x-1=2x^2-x-1;$
б) $3y-12-y^3+4y^2;$

в) $a^2 + 2a + 10 - a^2 - 5a = -3a + 10$;
г) $b^3 + b^2 - 2b - b^2 - b + 2 = b^3 - 3b + 2$.

2. а) $y \cdot (x + 3) + a \cdot (x + 3) = (y + a)(x + 3)$;
б) $a \cdot (2 - b) + 3 \cdot (2 - b) = (a + 3)(2 - b)$.

3. $3x \cdot (2x + 1 - 4x^2 - 2x) = 3x \cdot (1 - 4x^2) = 3x - 12x^3$.

4. а) $x^2(x + 4) - (x + 4) = (x^2 - 1)(x + 4)$;
б) $a \cdot (a^2 - 3b) - 2b \cdot (a^2 - 3b) = (a - 2b)(a^2 - 3b)$.

5. $x^2 + 14 = (x+1)(x+2)$; $x^2 + 14 = x^2 + 3x + 2$; $3x = 12$; $x = 4$.

Вариант А2

1. а) $2x^2 - x + 4x - 2 = 2x^2 + 3x - 2$;
б) $2y^2 + 6 - y^3 - 3y$;
в) $a - a^2 + 4 - 4a + a^2 = -3a + 4$;
г) $b^3 - b^2 + 2b + 2b^2 - 2b + 4 = b^3 + b^2 + 4$.

2. а) $b \cdot (a + 2) + c \cdot (a + 2) = (b + c)(a + 2)$;
б) $3 \cdot (3 - y) + x \cdot (3 - y) = (3 + x)(3 - y)$.

3. $2x \cdot (6x + 4 - 9x^2 - 6x) = 2x \cdot (4 - 9x^2) = 8x - 18x^2$.

4. а) $x^2(2x + 1) - (2x + 1) = (x^2 - 1)(2x + 1)$;
б) $b \cdot (4a - b^2) - 2a \cdot (4a - b^2) = (b - 2a)(4a - b^2)$.

5. $x^2 - 16 = (x-1)(x-2)$; $x^2 - 16 = x^2 - 3x + 2$; $3x = 18$; $x = 6$.

Вариант Б1

1. а) $6x^2 + 8x - 15x - 20 = 6x^2 - 7x - 20$;
б) $2xy - 5x^2 - 6y^2 - 15xy = -5x^2 - 6y^2 - 13xy$;
в) $a^2 - 5a - a^2 + 2a + 3a - 6 = -6$;
г) $8b^3 - 4b^2 + 2b + 4b^2 - 2b + 1 = 8b^3 - 1$.

2. а) $x^2(x + 2) + (x + 2) = (x^2 + 1)(x + 2)$;
б) $4 \cdot (x - y) + y \cdot (x - y) = (4 + y)(x - y)$.

3. $2x^2(12x^2 + 16x^4 - 12x^2 - 9) = 2x^2(16x^4 - 9) = 32x^6 - 18x^2$.

4. а) $a \cdot (a - c) + b \cdot (a - c) = (a + b)(a - c)$;
б) $3 \cdot (a - b) - ab \cdot (a - b) = (3 - ab)(a - b)$.

5. x — сторона квадрата.
$x^2 + 4 = (x + 2)(x - 1)$; $x^2 + 4 = x^2 + x - 2$; $x = 6$.

Вариант Б2

1. а) $8x^2 + 2x - 12x - 3 = 8x^2 - 10x - 3$;
б) $6xy - 21x^2 - 2y^2 - 7xy = -21x^2 - 2y^2 - xy$;
в) $a^2 + 4a - a^2 + 2a - 6a + 12 = 12$;
г) $9b^2 + 3b + 1 - 27b^3 - 9b^2 - 3b = -27b^3 + 1$.

2. а) $x^2(3x + 1) + (3x + 1) = (x^2 + 1)(3x + 1)$;
б) $2 \cdot (x + y) - x \cdot (x + y) = (2 - x)(x + y)$.

3. $3x^3(10x^2 - 4x^4 + 25 - 10x^2) = 3x^3(25 - 4x^4) = 75x^3 - 12x^7$.

4. а) $b \cdot (c + b) - a \cdot (c + b) = (b - a)(c + b)$;
б) $ab \cdot (a + b) - 2 \cdot (a + b) = (ab - 2)(a + b)$.

5. x — сторона квадрата.
$x^2 - 10 = (x + 2)(x - 3)$; $x^2 - 10 = x^2 - x - 6$; $x = 4$.

Вариант В1

1. а) $6x^2y - 15x^4 + 2y^2 - 5x^2y = x^2y - 15x^4 + 2y^2$;
б) $7x^3 - 28x^2 + 14x - x^2 + 4x - 2 = 7x^3 - 29x^2 + 18x - 2$;
в) $2a^3 - a^2b + 2ab^2 - b^3 - ab^2 + a^2b = 2a^3 + ab^2 - b^3$;
г) $-8b \cdot (2b - b^3 + 6 - 3b^2) = 8b^4 + 24b^3 - 16b^2 - 48b$.

2. а) $x^4(2x + 5) - x \cdot (2x + 5) = (x^4 - x)(2x + 5) = x \times (x^3 - 1)(2x + 5)$;
б) $3 \cdot (a - b) + (a - b)^2 = (a - b + 3)(a - b)$.

3. $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = x^5 + 1$.

4. а) $x \cdot (x - z) - 2y \cdot (x - z) + (x - z) = (x - 2y + 1)(x - z)$;
б) $a^2(a + 1) - ab \cdot (a + 1) = (a^2 - ab)(a + 1) = a \cdot (a - b)(a + 1)$.

5. $n \cdot (n - 1) + 14 = n \cdot (n + 1)$; $n^2 - n + 14 = n^2 + n$;
$2n = 14$; $n = 7$.
Ответ: 6; 7; 8.

Вариант В2

1. а) $4x^2y - 8x^4 + 3y^2 - 6x^2y = -8x^4 + 3y^2 - 2x^2y$;

б) $5x^3 - 10x^2 - 15x + 2x^2 - 4x - 6 = 5x^3 - 8x^2 - 19x - 6$;
в) $2a^3 + a^2b - 2ab^2 - b^3 - a^2b + ab^2 = 2a^3 - ab^2 - b^3$;
г) $-3b \cdot (5b + 2 - 5b^3 - 2b^2) = 15b^4 + 6b^3 - 15b^2 - 6b$.

2. а) $x^6(x + 9) - x \cdot (x + 9) = (x^6 - x)(x + 9) = x \cdot (x^5 - 1)(x + 9)$;
б) $(a + b)^2 + 2 \cdot (a + b) = (a + b + 2)(a + b)$.

3. $x^4 - x^3 + x^2 - x + x^3 - x^2 + x - 1 = x^4 - 1$.

4. а) $x \cdot (x - a) + y \cdot (x - a) - (x - a) = (x + y - 1)(x - a)$;
б) $b^2(a+b) - b \cdot (a+b) = (b^2+b)(a+b) = b \cdot (b+1)(a+b)$.

5. $(n - 1)^2 + 20 = n \cdot (n + 1)$; $n^2 + 1 - 2n + 20 = n^2 + n$; $3n = 21$; $n = 3$.
Ответ: 6; 7; 8.

Формулы сокращенного умножения

С-13. Квадрат суммы и квадрат разности

Вариант А1

1. а) $16 + a^2 + 8a$;
б) $4x^2 + 1 - 4x$;
в) $4a^2 + 9b^2 + 12ab$;
г) $x^6 + 9 - 6x^3$.

2. а) $(x + 3)^2$;
б) $(5x - y)^2$.

3. а) $16x^2 + 9 + 24x - 24x = 16x^2 + 9$;
б) $18c^2 - 2 \cdot (9c^2 + 1 - 6c) = 18c^2 - 18c^2 - 2 + 12c = 12c - 1$.

Вариант А2

1. а) $25 + x^2 + 10x$;
б) $1 + 9x^2 - 6x$;
в) $9a^2 + 100b^2 - 60ab$;
г) $x^4 + 16 + 8x^2$.

2. а) $(a + 2)^2$;
б) $(a - 4b)^2$.

3. а) $4x^2 + 25 - 20x + 20x = 4x^2 + 25$;
б) $36c - 3 \cdot (1 + 36c^2 + 12c) = 36c - 3 - 108c^2 - 36c =$
$= -3 - 108c^2$.

Вариант Б1

1. а) $121 + x^2 - 22x$;
б) $4x^2 + 0{,}25 + 2x$;
в) $9a^2 + 4b^2 - 12ab$;
г) $a^4 + b^6 + 2a^2b^3$.

2. а) $(x - 7)^2$;
б) $(5y + 2x)^2$.

3. а) $25x^2 + 9y^2 - 30xy + 30xy = 25x^2 + 9y^2$;
б) $4x^4 - 2 \cdot (x^8 + 1 + 2x^4) = 4x^4 - 2x^8 - 2 - 4x^4 = -2x^8 - 2$.

Вариант Б2

1. а) $y^2 + 225 + 30y$;
б) $25x^2 + 0{,}04 - 2x$;
в) $4a^2 + 49b^2 - 28ab$;
г) $a^6 + b^8 + 2a^3b^4$.

2. а) $(x + 6)^2$;
б) $(4x - 3y)^2$.

3. а) $36a^2 + 4b^2 + 24ab - 24ab = 36a^2 + 4b^2$;
б) $-6x^3 - 3 \cdot (x^6 + 1 - 2x^3) = -6x^3 - 3x^6 - 3 + 6x^3 =$
$= -3x^6 - 3$.

Вариант В1

1. а) $4y^2 + \frac{1}{16} + y$;
б) $49x^2 + 1 + 14x$;
в) $a^4 + 4b^2 - 4a^2b$;
г) $64x^2 + x^6 + 16x^4$.

2. а) $(10x - 1)^2$;
б) $(x^2 + 2y)^2$.

3. а) $9a^2 + b^2 - 6ab - 9a^2 - b^2 - 6ab = -12ab$;
б) $a^2 + (b - c)^2 + 2a \cdot (b - c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc + 2ab - 2ac$.

Вариант В2

1. а) $9x^2 + \frac{1}{9} - 2x$;
б) $36x^2 + 1 + 12x$;
в) $16a^2 + b^4 - 8ab^2$;
г) $x^8 + 81x^2 - 18x^5$.

2. а) $(1 - 9y)^2$;
б) $(4a + b^3)^2$.

3. а) $4x^2 + y^2 + 4xy - 4x^2 - y^2 + 4xy = 8xy$;
б) $(c - (a + b))^2 = c^2 + (a + b)^2 - 2c \cdot (a + b) = c^2 + a^2 + b^2 + 2ab - 2ac - 2bc$.

С-14. Разность квадратов. Сумма и разность кубов

Вариант А1

1. а) $9 - a^2$;
б) $4a^2 - b$;
в) $x^4 - 1$.

2. а) $(y - 10)(y + 10)$;
б) $(y - 0{,}4x)(y + 0{,}4x)$;
в) $(a^2 - 5)(a^2 + 5)$.

3. а) $x^2 - 1 - x^2 + 2x = 0$; $2x = 1$; $x = 0{,}5$;
б) $(x - 2)(x + 2) = 0$; $x = -2$; $x = 2$.

4. а) $(y + 2)(y^2 + 4 - 2y)$;
б) $(a - 1)(a^2 + 1 + a)$.

Вариант А2

1. а) $a^2 - 4$;
б) $y^2 - 25x^2$;
в) $1 - x^6$.

2. а) $(7 - x)(7 + x)$;
б) $(b - 0{,}1a)(b + 0{,}1a)$;
в) $(3 - a^2)(3 + a^2)$.

3. а) $x^2 - 4 - x^2 + 3x = 0$; $3x = 4$; $x = 1\frac{1}{3}$;
б) $(x - 1)(x + 1) = 0$; $x = -1$; $x = 1$.

4. а) $(y+10)(y^2+100+10y)$;
б) $(b-2)(b^2+4+2b)$.

Вариант Б1

1. а) x^2-144;
б) $4b^2-9a^2$;
в) n^2-16n^6.

2. а) $(20-y)(20+y)$;
б) $(yz-0{,}5x)(yz+0{,}5x)$;
в) $(x+1+2)(x+1-2)=(x+3)(x-1)$.

3. а) $x^2-x^2+9=3x$; $3x=9$; $x=3$;
б) $(2x-3)(2x+3)=0$; $x=1{,}5$; $x=-1{,}5$.

4. а) $(3x-y)(9x^2+y^2+3xy)$;
б) $(y+4)(y^2+16+4y)$.

Вариант Б2

1. а) $196-x^2$;
б) $9b^2-25a^2$;
в) n^2-4n^4.

2. а) $(x-11)(x+11)$;
б) $(bc+0{,}2a)(bc-0{,}2a)$;
в) $(x-1-3)(x-1+3)=(x-4)(x+2)$.

3. а) $x^2-x^2+16=2x$; $2x=16$; $x=8$;
б) $(5x-4)(5x+4)=0$; $x=1{,}25$; $x=-1{,}25$.

4. а) $(2a+y)(4a^2+y^2+2ay)$;
б) $(x-5)(x^2+25+5x)$.

Вариант В1

1. а) $25a^2-0{,}04$;
б) $4b^2-36a^2$;
в) $(b^2+4)(b^2-4)=b^4-16$.

2. а) $(4-a^2)(4+a^2)=(2-a)(2+a)(4+a^2)$;
б) $(8x-x+1)(8x+x-1)=(7x+1)(9x-1)$;
в) $(3x-3-x-2)(3x-3+x+2)=(2x-5)(4x-1)$.

3. а) $4x^2+1-4x-4\cdot(x^2-4)=0$; $4x^2+1-4x-4x^2+$ $+16=0$; $4x=17$; $x=4{,}25$;
б) $0{,}25x^2-0{,}16=0$; $(0{,}5x-0{,}4)(0{,}5x+0{,}4)=0$; $x=$ $=0{,}8$; $x=-0{,}8$.

4. а) $(2x+0{,}4y)(4x^2+0{,}16y^2-0{,}8xy)$;
б) $(x^2-4)(x^4+16+4x^2)=(x-2)(x+2)(x^4+16+4x^2)$.

Вариант В2

1. а) $0{,}09-100x^2$;
б) $9b^2-49a^2$;
в) $(x^2+9)(x^2-9)=x^4-81$.

2. а) $(9-a^2)(9+a^2)=(3-a)(3+a)(9+a^2)$;
б) $(5x-x-y)(5x+x+y)=(4x-y)(6x+y)$;
в) $(3x-2-x-1)(3x-2+x+1)=(2x-3)(4x-1)$.

3. а) $9x^2+1+6x-9x^2+9=0$; $6x=-10$; $x=-1\frac{2}{3}$;
б) $\frac{1}{9}x^2-0{,}81=0$; $(\frac{1}{3}x+0{,}9)(\frac{1}{3}x-0{,}9)=0$; $x=2{,}7$; $x=-2{,}7$.

4. а) $(3x+0{,}2y)(9x^2+0{,}04y^2-0{,}6xy)$;
б) $(1-x^2)(1+x^4+x^2)=(1-x)(1+x)(1+x^4+x^2)$.

С-15. Преобразование целого выражения в многочлен. Способы разложения на множители

Вариант А1

1. а) $2\cdot(y^2-9)=2\cdot(y-3)(y+3)$;
б) $2\cdot(x^2-6x+9)=2(x-3)^2$.

2. а) $2a^2-6a+3a-9-8a-2a^2=-11a-9$;
б) $1-x^2+x^2+1-2x=2-2x$.

3. $x^4+3x^3+9x^2-3x^3-9x^2-27x=x^4-27x$.

Вариант А2

1. а) $3\cdot(y^2-9)=3\cdot(y-3)(y+3)$;
б) $3\cdot(x^2+4x+4)=3(x+2)^2$.

2. а) $15a+5-3a^2-a-12a+3a^2=2a+5$;

б) $4 - x^2 + x^2 + 4 + 2x = 8 + 2x$.

3. $x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 = x^5 + 8x^2$.

Вариант Б1

1. а) $a \cdot (64 - a^2) = a \cdot (8 - a)(8 + a)$;

б) $x \cdot (x^2 - 10x + 25) = x(x - 5)^2$.

2. а) $a^2 - 2ab + ab - 2b^2 + 4b^2 - a^2 = 2b^2 - ab$;

б) $(3x + 2 + 3x - 1)(3x + 2 - 3x + 1) = 3 \cdot (6x + 1)$.

3. $x^4 - 9 + 6x^2 + 18 = x^4 + 6x^2 + 9 = (x^2 + 3)^2$.

Вариант Б2

1. а) $y^3(y^2 - 25) = y^3(y - 5)(y + 5)$;

б) $x \cdot (16 + 8x + x^2) = x(x + 4)^2$.

2. а) $3a^2 + 3ab - ab - b^2 + b^2 - 9a^2 = -6a^2 + 2ab$;

б) $(2x + 3 + 2x - 1)(2x + 3 - 2x + 1) = 4 \cdot (4x + 2)$.

3. $16 - x^4 + 2x^4 - 8x^2 = x^4 - 8x^2 + 16 = (4 - x^2)^2$.

Вариант В1

1. а) $x \cdot (x^2 - y^2) + 6 \cdot (x^2 - y^2) = (x + 6)(x^2 - y^2) = (x + 6)(x + y)(x - y)$;

б) $xy \cdot (8x^3 - y^3)xy \cdot (2x - y)(4x^2 + y^2 + 2xy)$.

2. а) $4x^2 - 2x + 6x - 3 - 4x^2 + 1 = 4x - 2$;

б) $9(a - b)^2 - 3(a - b)^2 = 6(a - b)^2$.

3. $(a^2 + 4 - 4a)(a^2 + 4 + 4a) = (a - 2)^2(a + 2)^2$.

Вариант В2

1. а) $a^2(a - 2) - 9 \cdot (a - 2) = (a^2 - 9)(a - 2) = (a - 3)(a + 3)(a - 2)$;

б) $a^2b^2(a^3 + 27b^3) = a^2b^2(a + 3b)(a^2 + 9b^2 - 3ab)$.

2. а) $3x^2 - 3x + x - 1 - 9x^2 + 1 = -6x^2 - 2x$;

б) $4(a + b)^2 - 2(a + b)^2 = 2(a + b)^2$.

3. $(16a^2 + 1 + 8a)(16a^2 + 1 - 8a) = (4a + 1)^2(4a - 1)^2$.

С-16. Все действия с многочленами

Вариант 1

1. а) $(7y+3x)(7y-3x)-10\cdot(7y-3x)=(7y+3x-$
$-10)(7y-3x)$;

б) $5\cdot(4a^2-9b^2+6b-1)=5\cdot(4a^2-(3b-1)^2)=5\times$
$\times(2a-3b+1)(2a+3b-1)$;

в) $x^4+x^2+3x^2+3=x^2(x^2+1)+3\cdot(x^2+1)=(x^2+$
$+3)(x^2+1)$;

г) $a^2-3ab+2{,}25b^2-0{,}25b^2=(a-1{,}5b)^2-0{,}25b^2=$
$=(a-1{,}5b-0{,}25b)(a-1{,}5b+0{,}25b)=(a-1{,}75b)(a-$
$-1{,}25b)$;

д) $27x^3+x^3-3x^2+3x-1=27x^3+(x-1)(x^2+1+$
$+x)-3x\cdot(x-1)=27x^3+(x-1)(x^2+1-2x)=$
$=27x^3+(x-1)^3=(3x+x-1)(9x^2+(x-1)^2-$
$-3x\cdot(x-1))=(4x-1)(9x^2+x^2+1-2x-3x^2+$
$+3x)=(4x-1)(7x^2+x+1)$.

2. $(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=(x+1)^2+(y-2)^2$.

3. а) $|x|=t$; $t^2-2t+1=0$; $(t-1)^2=0$; $t=1$; $|x|=1$;
$x=\pm1$;

б) $|x+1|=t$; $t^2-6t+9=0$; $(t-3)^2=0$; $t=3$;
$|x+1|=3$; $x=2$; $x=-4$;

в) $|x|=t$; $t^3+t=0$; $t\cdot(t^2+1)=0$; $t=0$; $|x|=0$;
$x=0$;

г) $x>0$: $2x+x^2=0$; $x\cdot(2+x)=0$; $x=0$; $x<0$:
$-x^2=0$; $x=0$;

д) $x>0$: $x^2+x-2=0$; $(x-1)(x+2)=0$; $x=1$;
$x<0$: $-x^2-3x-2=0$; $(x+1)(x+2)=0$; $x=-1$;
$x=-2$;

е) $x\neq0$: $x^2+x+1=1$; $x\cdot(x+1)=0$; $x=-1$;

4. а) $P_n=(n^2+n)(n+2)=n(n+1)(n+2)$; $P_{n+1}=(n+$
$+1)(n+2)(n+3)\Rightarrow P_{n-1}-P_n=(n+1)(n+2)(n+$
$+3)-n(n+1)(n+2)=3(n+1)(n+2)$.

б) $P_n = n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$; $P_{n+1} = n(n+1)(n+2) \Rightarrow P_{n-1} - P_n = n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) = 3n(n+1)$, то есть $P_{n+1} - P_n$ — кратно 3, а так как n и $n+1$ последовательные число то и 2.

в) $P_n = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ — четно, значит $n = 2k+1$. $P_k = 2k \cdot (2k+2) = 4k(k+1)$. Так как k и $k+1$ последовательные числа, то $k(k+1)$ кратно 2, а значит P_k кратно 8.

г) $P_n = 5^n - 1$; $P_{n+1} = 5 \cdot 5^n - 1 \Rightarrow P_{n+1} - P_n = 5 \times 5^n - 1 - 5^n + 1 = 5^n(5-1) = 4 \cdot 5^n$.

д) Дано $P_n = 1 + 2^n + 7^n + 8^n$, если n — нечетно, то $n = 2k+1$, где $k \in \mathbb{N}$, и $P_k = 1 + 2^{2k+1} + 7^{2+1} + 8^{2k+1}$. Тогда $P_k \bmod 9 = (1 + 2^{2k+1} + 7^{2+1} + 8^{2k+1}) \bmod 9 = (1 \bmod 9) + (2^{2k+1} \bmod 9) + (7^{2k+1} \bmod 9) + (8^{2k+1} \bmod 9)$; $(1 \bmod 9) = 1$, $(2^{2k+1} \bmod 9) = 2, 8, 5 \ldots$, $(7^{2k+1} \bmod 9) = 7, 1, 4 \ldots$, $(2^{2k+1} \bmod 9) = 8$, так как $(1 \bmod 9) + (2^{2k+1} \bmod 9) + (7^{2k+1} \bmod 9) + (8^{2k+1} \bmod 9) = 18$, то $1 + 2^n + 7^n + 8^n$ делится на 9 при нечетном n.

Вариант 2

1. а) $(8x - 5y)(8x + 5y) - 6 \cdot (8x + 5y) = (8x + 5y)(8x - 5y - 6)$;

б) $2 \cdot (9a^2 + 12a + 4 - 100b^2) = 2 \cdot ((3a+2)^2 - 100b^2) = 2 \cdot (3a + 2 - 10b)(3a + 2 + 10b)$;

в) $x^4 + 3x^2 + 5x^2 + 15 = x^2(x^2+3) + 5 \cdot (x^2+3) = (x^2 + 5)(x^2+3)$;

г) $a^2 + 4ab + 4b^2 - b^2 = (a+2b)^2 - b^2 = (a+2b+b)(a + 2b - b) = (a+3b)(a+b)$;

д) $125x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 125x^3 + (x+1)^3 = (5x + x + 1)(25x^2 + x^2 + 1 + 2x - 5x^2 - 5) = (6x+1)(21x^2 + 2x - 4)$.

2. $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = (x-2)^2 + (y+3)^2$.

3. а) $|x| = t$; $t^2 - 4t + 4 = 0$; $(t-2)^2 = 0$; $t = 2$; $|x| = 2$; $x = \pm 2$;

б) $|x-3| = t$; $t^2 - 10t + 25 = 0$; $(t-5)^2 = 0$; $t = 5$; $|x-3| = 5$; $x = 8$; $x = -2$;

в) $|x| = t$; $t^3 - t = 0$; $t \cdot (t^2 - 1) = 0$; $t = 0$; $t = 1$ $|x| = 0$; $x = 0$; $x = \pm 1$;

г) $x > 0$: $-x^2 = 0$; $x = 0$; $x < 0$: $-2x + x^2 = 0$; $x \cdot (x-2) = 0$; $x = -2$;

д) $x > 0$: $x^2 - 4x + 3 = 0$; $(x-1)(x-3) = 0$; $x = 1$; $x = 3$; $x < 0$: $-x^2 + 2x + 3 = 0$; $(3-x)(x+1) = 0$; $x = -1$.

е) $x \neq 0$: $x^2 - x + 1 = 1$; $x \cdot (x-1) = 0$; $x = 1$.

4. а) $P_n = 8n^2 - 2n = 2n(n^2-1) = 2n(n+1)(n-1)$; $P_{n+1} = 2n(n+1)(n+2) \Rightarrow P_{n-1} - P_n = 2n(n+1)(n+2) - 2n(n+1)(n-1) = 2n(n+1)(n+2-n+1) = 3 \cdot 2 \cdot (n+1)$.

б) $P_n = (n^2+2)(n+5) = n(n+1)(n+5)$; $P_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+6) \Rightarrow P_{n-1} - P_n = (n+1)(n+2)(n+6) - n(n+1)(n+5) = (n+1)[(n+2)(n+6) - n(n+5)] = (n+1)(n^2+2n+6n+12-n^2-5n) = 3n(n+1)$.

в) $P_n = n^3 - 4n = n(n^2-4) = n(n-2)(n+2)$ при $n = 2k \Rightarrow P_k = 2k(2k-2)(2k+2)$; $P_{k+1} - P_k = 8k(k+1)(k+2) - 8k(k-1)(k+1) = 8k(k+1)(k+2-k+1) = 24k(k+1)$. Так как k и $k+1$ — последовательные числа, то P_k кратно 48.

г) $P_n = 10^n - 1$; $P_{n+1} = 10 \cdot 10^n - 1 \Rightarrow P_{n+1} - P_n = 10 \cdot 10^n - 1 - 10^n + 1 = 9 \cdot 19^n$.

д) Дано $P_n = 6^n + 4^n + 3^n + 1$, если n — нечетно, то $n = 2k+1$, где $k \in \mathbb{N}$, и $P_k = 6^{2k+1} + 4^{2+1} + 3^{2k+1} + 1$. Тогда $P_k \bmod 7 = (6^{2k+1} + 4^{2+1} + 3^{2k+1} + 1) \bmod 7 = (6^{2k+1} \bmod 7) + (4^{2k+1} \bmod 7) + (3^{2k+1} \bmod 7) + (1 \bmod 7)$; $(1 \bmod 7) = 1$, $(6^{2k+1} \bmod 7) = 6$, $(4^{2k+1} \bmod 7) = 4, 1, 2\ldots$, $(3^{2k+1} \bmod 7) = 3, 6, 5\ldots$, так как $(6^{2k+1} \bmod 7) + (4^{2k+1} \bmod 7) + (3^{2k+1} \bmod 7) + (1 \bmod 7) = 14$, то $1 + 2^n + 7^n + 8^n$ делится на 7 при нечетном n.

К-6. Формулы сокращенного умножения

Вариант А1

1. а) $c^2 - 2c + 3c - 6 - c^2 = c - 6$;
б) $7x + 56 + x^2 - 64 = x^2 + 7x - 8 = (x - 1)(x + 8)$;
в) $4x^2 + 20x - 4x^2 - 20x - 25 = 25$.

2. а) $8 \cdot (x^2 - y^2) = 8 \cdot (x + y)(x - y)$;
б) $-(a^2 - 6a + 9) = -(a - 3)^2$;
в) $ab \cdot (b^2 - a^2) = ab \cdot (b - a)(b + a)$.

3. $x \cdot (x^2 - 2x + x - 2) = x^3 - x$; $x^3 - x^2 - 2x = x^3 - x$; $x^2 + x = 0$; $x \cdot (x + 1) = 0$; $x = 0$; $x = -1$.

4. а) $3 \cdot (x - y) + xy \cdot (x - y) = (3 + xy)(x - y)$;
б) $a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 4 + 2a)$.

5. $(2x - 5y)^2 \geq 0$.

Вариант А2

1. а) $c^2 + 4c - c - 4 - c^2 = 3c - 4$;
б) $5x - 20 - x^2 + 16 = -x^2 + 5x - 4 = (4 - x)(x - 1)$;
в) $48x - 64x^2 + 64x^2 + 9 - 48x = 9$.

2. а) $a \cdot (x^2 - y^2) = a \cdot (x + y)(x - y)$;
б) $-(x^2 + 10x + 25) = -(x + 5)^2$;
в) $a^2b^2(a^2 - b^2) = a^2b^2(a - b)(a + b)$.

3. $x \cdot (x^2 + 3x - x - 3) = x^3 + 2x^2$; $x^3 + 2x^2 - 3x = x^3 + 2x^2$; $3x = 0$; $x = 0$.

4. а) $xy \cdot (x + y) - 2 \cdot (x + y) = (xy - 2)(x + y)$;
б) $a^3 + 27 = (a + 3)(a^2 + 9 - 3a)$.

5. $(3x + 4y)^2 \geq 0$.

Вариант Б1

1. а) $-6x + 3x^2 + 3x^2 - 6x + x - 2 = 6x^2 - 11x - 2$;
б) $3 \cdot (4x^2 + 1 - 4x) + 12x = 12x^2 + 3 - 12x + 12x = 12x^2 + 3$;
в) $x^2 + 9 + 6x - x^2 + 4 = 6x + 13$.

2. а) $x \cdot (36x^2 - 1) = x \cdot (6x - 1)(6x + 1)$;

б) $2 \cdot (a^2 + 4ab + 4b^2) = 2(a + 2b)^2$;

в) $(a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$.

3. $x^4 - x^2 + 3x^2 - 3 = x^4 + 1 + 2x^2 + x$; $x = -4$.

4. а) $x \cdot (x^2 - y^2) - 3 \cdot (x^2 - y^2) = (x - 3)(x + y)(x - y)$;

б) $m^4(8 - m^3) = m^4(2 - m)(4 + m^2 + 2m)$.

5. $x^2 - 10x + 25 + 4 = (x - 5)^2 + 4$.

Вариант Б2

1. а) $-2x + 2x^2 + 2x^2 - 3x - 2x + 3 = 4x^2 - 7x + 3$;

б) $4 \cdot (1 + 9x^2 + 6x) - 24x = 4 + 36x^2 + 24x - 24x = 4 + 36x^2$;

в) $x^2 - 16 - x^2 - 9 + 6x = 6x - 25$.

2. а) $y \cdot (1 - 100y^2) = y \cdot (1 - 10y)(1 + 10y)$;

б) $7 \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = 7(a - b)^2$;

в) $(4 - y^2)(4 + y^2) = (2 - y)(2 + y)(4 + y^2)$.

3. $x^4 - 6x^2 + 2x^2 - 12 = x^4 + 4 - 4x^2 + x$; $x = -16$.

4. а) $x \cdot (y^2 - 1) - 5 \cdot (y^2 - 1) = (x - 5)(y + 1)(y - 1)$;

б) $m^5(m^3 + 27) = m^5(m + 3)(m^2 + 9 - 3m)$.

5. $x^2 + 8x + 16 + 3 = (x + 4)^2 + 3$.

Вариант В1

1. а) $1 - 8x^3 + 8x^3 = 1$;

б) $(4 - x^2)(x - 1) + x^2(x - 1) = (4 - x^2 + x^2)(x - 1) = 4 \cdot (x - 1)$;

в) $(x - 5 - 2x - 10)(x - 5 + 2x + 10) = (-x - 15)(3x + 5)$.

2. а) $-3 \cdot (x^2 + 4x + 4) = -3(x + 2)^2$;

б) $3y^2(8y^3 - 1) = 3y^2(2y - 1)(4y^2 + 2y + 1)$;

в) $2b \cdot (81b^2 - a^2) = 2b \cdot (9b - a)(9b + a)$.

3. $y^3 + 3y^2 - y - 3 = y^2(y + 3) - (y + 3) = (y^2 - 1)(y + 3) = (y + 1)(y - 1)(y + 3) = 0$;

$y = \pm 1; y = -3$.

4. а) $(x^2 + 2 - 2)^2 = x^4$;

б) $a^2 - (x + 3)^2 = (a - x - 3)(a + x + 3)$.

5. $-y^2 + 4y - 5 = -(y^2 - 4y + 4) - 1 = -(y-2)^2 - 1$; $y = 2$.

Вариант В2

1. а) $1 + 27x^3 - 27x^3 = 1$;
б) $(x+2)(9-x^2) + x^2(x+2) = (9 - x^2 + x^2)(x+2) = 9 \cdot (x+2)$;
в) $(x + 4 + 3x - 12)(x + 4 - 3x + 12) = (4x - 8)(16 - 2x) = 8 \cdot (x-2)(8-x)$.

2. а) $-5 \cdot (x^2 - 6x + 9) = -5(x-3)^2$;
б) $2y \cdot (y^3 + 27) = 2y \cdot (y+3)(y^2 + 9 - 3y)$;
в) $3x \cdot (y^2 - 49x^2) = 3x \cdot (y - 7x)(y + 7x)$.

3. $x^2(x+1) - 4 \cdot (x+1) = (x^2 - 4)(x+1) = (x-2)(x+2)(x+1) = 0$; $x = \pm 2$; $x = -1$.

4. а) $(x^2 - 1 + 3)^2 = (x^2 - 2)^2$;
б) $a^2 - (x-2)^2 = (a - x + 2)(a + x - 2)$.

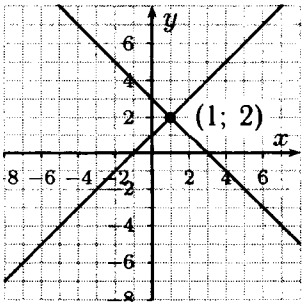
5. $-y^2 - 2y - 3 = -(y^2 + 2y + 1) - 2 = -(y+1)^2 - 2$; $y = -1$.

Системы линейных уравнений

С-17. Уравнения и системы. Уравнения с двумя переменными. Способ подстановки

Вариант А1

1.



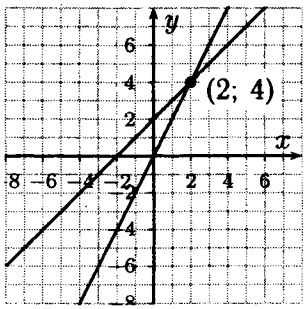
2. $2y - (y - 3) = 6;\ y = 3;\ x = 3 - 3 = 0.$

3. $\begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ x + 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 5.$

4. $-2 - 3 = -5 = a.$

Вариант А2

1.



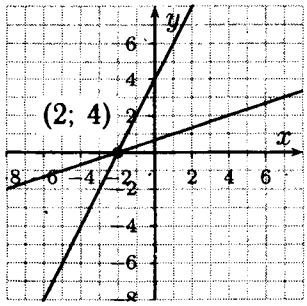
2. $3x - (5 - x) = 11;\ 4x = 16;\ x = 4;\ y = 5 - 4 = 1.$

3. $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ x - 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -4.$

4. $4 - (-1) = 5 = a.$

Вариант Б1

1.



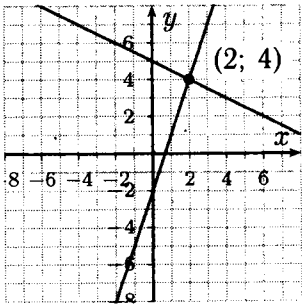
2. $\begin{cases} y = 7 - 3x \\ 9x - 4y = -7 \end{cases} \Rightarrow 9x - 4 \cdot (7 - 3x) = -7 \Rightarrow 21x = 21 \Rightarrow x = 1;\ y = 4.$

3. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 8x - 6y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = -2 \\ 8x - 6y = 14 \end{cases} \Rightarrow 12x = 12 \Rightarrow x = 1;\ y = -1.$

4. $\begin{cases} x = 3y + 2 \\ 6y - 2x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6y - 2 \cdot (3y + 2) + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0;$ бесконечно.

Вариант Б2

1.



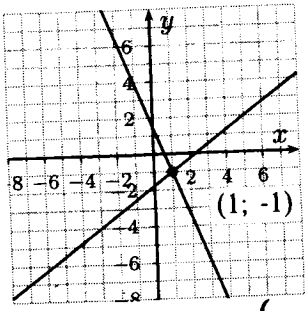
2. $\begin{cases} x = 3y + 6 \\ 2y - 5x = -4 \end{cases} \Rightarrow 2y - 5 \cdot (3y + 6) = -4 \Rightarrow -13y = 26 \Rightarrow y = -2;\ x = 0.$

3. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x + 4y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 4y = 8 \\ 6x + 4y = 16 \end{cases} \Rightarrow 12x = 24 \Rightarrow x = 2;\ y = 1.$

4. $\begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ 6y - 4x = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 = 0;$ бесконечно.

Вариант В1

1.



2. $\begin{cases} 3x + 3y + 1 = x + 4y \\ 7 - 2x + 2y = x - 8y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 10y - 3x = 7 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 20x - 10y = 10 \\ 10y - 3x = 7 \end{cases} \Rightarrow 17x = 17 \Rightarrow x = 1;\ y = 1.$

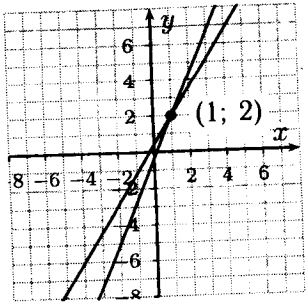
3. $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 6 \\ 0{,}75x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow 3{,}75x = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4;\ y = 6.$

4. $\begin{cases} -9x + 15y = -12 \\ ax + 15y = -12 \end{cases} \Rightarrow a = -9.$

Вариант В2

1.



2. $\begin{cases} 1+2x-2y=3x-4y \\ 10-4x-4y=3y-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-x=-1 \\ x+7y=10 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow 9y=9 \Rightarrow y=1;\ x=3.$

3. $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{9}=3 \\ \frac{x}{6}+\frac{y}{3}=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y=27 \\ 0{,}5x+y=-6 \end{cases} \Rightarrow 3{,}5x=21 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=6;\ y=-9.$

4. $\begin{cases} 4x-6y=2 \\ 4x+ay=2 \end{cases} \Rightarrow a=-6.$

С-18. Системы линейных уравнений. Способ сложения. Решение задач с помощью систем уравнений

Вариант А1

1. $8x=16;\ x=2;\ 6-2y=4;\ 2y=2;\ y=1.$

2. x — ширина.
y — длина.
$\begin{cases} 2x+2y=26 \\ y=x+3 \end{cases} \Rightarrow 2x+2x+6=26 \Rightarrow 4x=20 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=5;\ y=8.$

3. $\begin{cases} x+y=16 \\ x-y=16 \end{cases} \Rightarrow 2x=32 \Rightarrow x=16;\ y=0.$

Вариант А2

1. $8y=16;\ y=2;\ 2x+6=10;\ 2x=4;\ x=2.$

2. x — ширина.
y — длина.
$\begin{cases} 2x+2y=16 \\ y=x+4 \end{cases} \Rightarrow 2x+2x+8=16 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=$
$=2;\ y=6.$

3. $\begin{cases} x + y = 24 \\ x - y = 24 \end{cases} \Rightarrow 2x = 48 \Rightarrow x = 24;\ y = 0.$

Вариант Б1

1. $\begin{cases} x - 4y = 9 \\ 6x + 4y = 26 \end{cases} \Rightarrow 7x = 35 \Rightarrow x = 5;\ 5 - 4y = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4y = -4 \Rightarrow y = -1.$

2. x — двухместные номера.
y — трехместные номера.
$\begin{cases} x + y = 16 \\ 2x + 3y = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 3y = -32 \\ 2x + 3y = 42 \end{cases} \Rightarrow y = 10;$
$x = 6.$

3. $\begin{cases} 4x + 2 = 5y - 5 \\ 4x + 5y = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 5y = -7 \\ 4x + 5y = 23 \end{cases} \Rightarrow 8x =$
$= 16 \Rightarrow x = 2;\ 8 + 5y = 23 \Rightarrow 5y = 15 \Rightarrow y = 3.$

Вариант Б2

1. $\begin{cases} 4x + 2y = 12 \\ -4x + 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = 4;\ 4x + 8 = 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1.$

2. x — 5 копеечные.
y — 10 копеечные.
$\begin{cases} x + y = 9 \\ 5x + 10y = 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x - 5y = -45 \\ 5x + 10y = 65 \end{cases} \Rightarrow 5y =$
$= 20 \Rightarrow y = 4;\ x = 5.$

3. $\begin{cases} 4x - 20 = 9y + 6 \\ 4x + 9y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 9y = 26 \\ 4x + 9y = -10 \end{cases} \Rightarrow 8x =$
$= 16;\ x = 2;\ 8 - 9y = 26 \Rightarrow 9y = -18 \Rightarrow y = -2.$

Вариант В1

1. $\begin{cases} -6x + 21y = -9 \\ 6x + 8y = -20 \end{cases} \Rightarrow 29y = -29 \Rightarrow y = -1;\ 6x - 8 = -20 \Rightarrow 6x = -12 \Rightarrow x = -2.$

2. x — цифра десятков.

y — цифра едениц.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 10y + x - 10x - y = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ 9y - 9x = 45 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ y - x = 5 \end{cases} \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6;\ x = 1;\ 16.$$

3. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6;\ y = -3;\ 6 - z = 5;$ $z = 1.$

Вариант В2

1. $\begin{cases} 25x + 10y = -45 \\ 8x - 10y = 12 \end{cases} \Rightarrow 33x = -33 \Rightarrow x = -1;\ -25 + 10y = -45 \Rightarrow 10y = -20 \Rightarrow y = -2.$

2. x — цифра десятков.

y — цифра едениц.

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 10x + y - 10y - x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ 9x - 9y = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6;\ y = 5;\ 65.$$

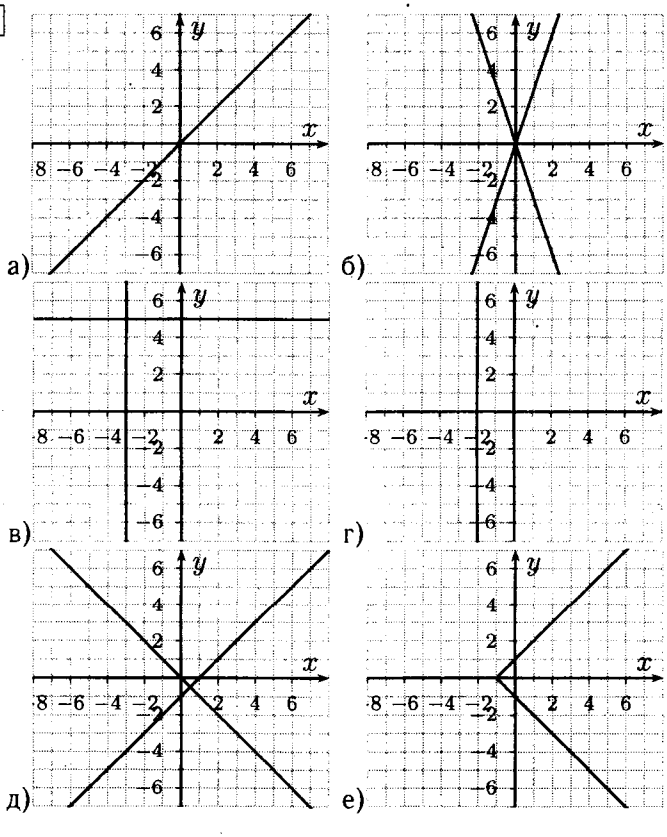
3. $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ -x - y + z = -7 \end{cases} \Rightarrow 2z = 2 \Rightarrow z = 1;$

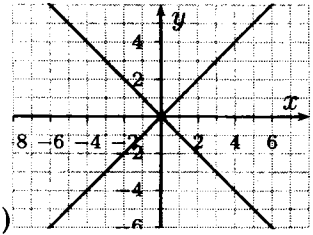
$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5;\ y = 3.$

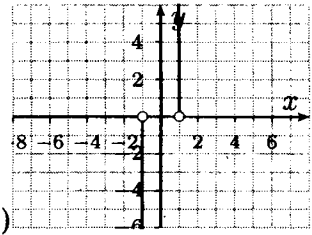
С-19. Уравнения и системы с несколькими переменными

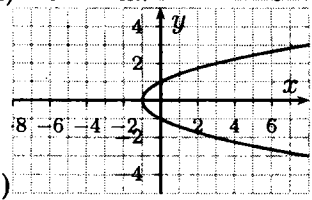
Вариант 1

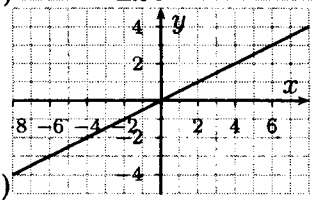
1.



ж) 

з) 

и) 

к) 

2. а) $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 15 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -5 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{x} = 10 \Rightarrow x = 0{,}5 \Rightarrow 6 + \frac{3}{y} =$
$= 15 \Rightarrow \frac{3}{y} = 9 \Rightarrow y = \frac{1}{3}.$

б) $2x = 6;\ x = 3;\ \begin{cases} y + z = 3 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2;$
$z = 1.$

3. а) $x = 2;\ y = 1;$

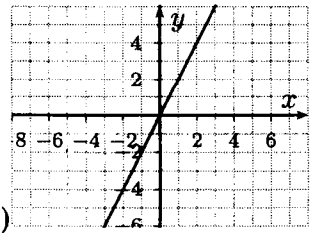
б) $(2x - y)(2x + y) = 11;\ x = 3;\ y = 5;$

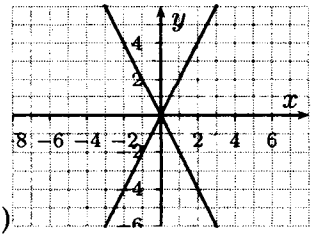
в) $x = 0,\ y = 1;\ x = -2,\ y = -5;\ x = 2,\ y = -1;$
$x = -4,\ y = -3;$

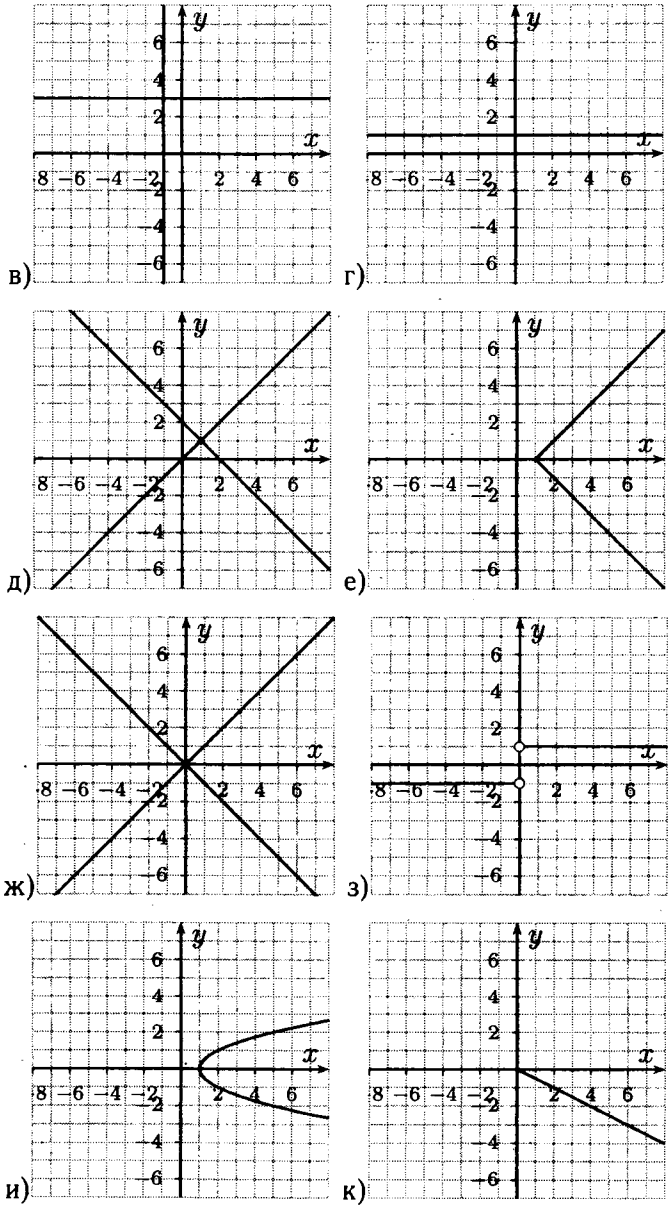
г) $xy \cdot (1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = 1;\ x = 0,\ y = 1;\ x = 1,\ y = 0.$

Вариант 2

1.

а) 

б) 


в)
г)
д)
е)
ж)
з)
и)
к)

2. а) $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 10 \\ \frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 11 \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{x} = 21 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow 6 + \frac{2}{y} = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{2}{y} = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

б) $2x = 8;\ x = 4;\ \begin{cases} y - z = 1 \\ y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3;$
$z = 2$.

3. а) $x = 1,\ y = 2$;

б) $(x - 2y)(x + 2y) = 5;\ x = 3,\ y = 1$;

в) $x = 3,\ y = 6;\ x = 1,\ y = -4;\ x = 7,\ y = 2;\ x = -3,$
$y = 2$;

г) $xy \cdot (1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}) = 0;\ x = 2,\ y = 2$.

К-7. Системы линейных уравнений с двумя переменными

Вариант А1

1. а) $\begin{cases} 2a + 2b = 12 \\ 5a - 2b = 9 \end{cases} \Rightarrow 7a = 21 \Rightarrow a = 3;\ 6 + 2b =$
$= 12 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$.

б) $\begin{cases} -x - 2y = -5 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow y = 2;\ x + 6 = 7 \Rightarrow x = 1$.

2. x — на плащ.
y — на куртку.
$\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 6y = -18 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases} \Rightarrow -y =$
$= -2;\ y = 2;\ x + 6 = 9;\ x = 3$.

3. $\begin{cases} 2 = b \\ -1 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow -1 = 3k + 2;\ 3k = -3;\ k = -1;$
$y = -x + 2$.

4. $\begin{cases} a+4=6 \\ b-3=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Вариант А2

1. а) $\begin{cases} 3a+3b=21 \\ 5a-3b=11 \end{cases} \Rightarrow 8a=32 \Rightarrow a=4;\ 12+3b=$
$=21 \Rightarrow 3b=9 \Rightarrow b=3.$

б) $\begin{cases} -2x+y=-3 \\ 3x-y=5 \end{cases} \Rightarrow x=2 \Rightarrow 6-y=5 \Rightarrow y=1.$

2. x — цена булки.
y — цена бублика.
$\begin{cases} x+4y=68 \\ 2x+3y=76 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-8y=-136 \\ 2x+3y=76 \end{cases} \Rightarrow -5y=$
$=-60;\ y=12;\ x+28=68;\ x=20.$

3. $\begin{cases} -5=2k+b \\ 1=b \end{cases} \Rightarrow -5=2k+1;\ 2k=6;\ k=3;$
$y=3x+1.$

4. $\begin{cases} 3+a=5 \\ 7-b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Вариант Б1

1. а) $\begin{cases} 2a+3b=10 \\ -2a+4b=18 \end{cases} \Rightarrow 7b=28;\ b=4;\ 2a+12=10;$
$2a=-2;\ a=-1.$

б) $\begin{cases} 4x-10y=18 \\ -4x-2y=-6 \end{cases} \Rightarrow -12y=12;\ y=-1;\ 4x+$
$+10=18;\ 4x=8;\ x=2.$

2. x — весит гиря.
y — весит гантеля.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 47 \\ 3x - 6y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 94 \\ 3x - 6y = 18 \end{cases} \Rightarrow 7x = 112;$$
$x = 16;\ 32 + 3y = 47;\ 3y = 15;\ y = 5.$

3. $$\begin{cases} 32 = -5k + b \\ -8 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow 40 = -8k; k = -5;\ 32 = 25 +$$
$+ b; b = 7;\ y = -5x + 7.$

4. $$\begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ x + y = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y) = 25 \\ x + y = 25 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 25 \end{cases} \Rightarrow 2x = 26;\ x = 12;\ y = 12.$$

Вариант Б2

1. а) $$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ 6a - 2b = 16 \end{cases} \Rightarrow 7a = 21;\ a = 3;\ 3 + 2b = 5;$$
$2b = 2;\ b = 1.$

б) $$\begin{cases} -6x + 4y = -16 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow 7y = 7;\ y = 1;\ 6x + 3 = 9;$$
$6x = 6;\ x = 1.$

2. x — стоит блокнот.

y — стоит ручка.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 90 \\ 3x - 2y = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 6y = 180 \\ 9x - 6y = 75 \end{cases} \Rightarrow 17x = 255;$$
$x = 15;\ 60 + 3y = 90;\ 4y = 30;\ y = 10.$

3. $$\begin{cases} -5 = 4k + b \\ 19 = -2k + b \end{cases} \Rightarrow -24 = 6k; k = -4;\ -5 = -16 +$$
$+ b; b = 11;\ y = -4x + 11.$

4. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 64 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) = 64 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 32 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x = 34;\ x = 17.$

Вариант В1

1. а) $\begin{cases} -2a + 6b - 4 = 0 \\ 2a - 4b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2b - 3 = 0;\ b = 1{,}5;\ -2a +$
$+ 9 - 4 = 0;\ 2a = 5;\ a = 2{,}5.$

б) $\begin{cases} 5x + 5y - 7x + 7y = 10 \\ 4x + 4y + 3x - 3y = 51 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 12y = 10 \\ 7x + y = 51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -14x + 84y = 70 \\ 14x + 2y = 102 \end{cases};$
$86y = 172;\ y = 2;\ 7x + 2 = 51;\ 7x = 49;\ x = 7.$

2. x — скорость катера.
y — скорость течения.

$\begin{cases} 3 \cdot (x + y) + 5 \cdot (x - y) = 76 \\ 6 \cdot (x + y) = 9 \cdot (x - y) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y + 5x - 5y = 76 \\ 6x + 6y = 9x - 9y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 2y = 76 \\ 3x = 15y \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 5y \\ 4x - y = 38 \end{cases} \Rightarrow 20y - y = 38 \Rightarrow 19y = 38 \Rightarrow y =$
$= 2;\ x = 10.$

3. $\begin{cases} 2 = 4k + b \\ 0 = -4k + b \end{cases} \Rightarrow 2 = 2b; b = 1;\ 4k = 2;\ k = 0{,}25;$
$y = 0{,}25x + 1.$

4. $|x+y-2|+(x-y)^2=0;\ \begin{cases} x=y \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow x=1;$ $y=1.$

Вариант В2

1. а) $\begin{cases} 3a+7b=8 \\ -3a-15b=-12 \end{cases} \Rightarrow -8b=-4;\ b=0{,}5;\ 3a+$ $+3{,}5=8;\ 3a=4{,}5;\ a=1{,}5.$

б) $\begin{cases} 4x-2y+6x+3y=32 \\ 10x-5y-4x-2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+y=32 \\ 6x-7y=4 \end{cases};$

$\begin{cases} 70x+7y=224 \\ 6x-7y=4 \end{cases};\ 76x=228;\ x=3;\ 18-7y=4;$ $7y=14;\ y=2.$

2. x — скорость катера.

y — скорость течения.

$\begin{cases} 3\cdot(x+y)+5\cdot(x-y)=92 \\ 5\cdot(x+y)=6\cdot(x-y)+10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x+3y+5x-5y=92 \\ 5x+5y=6x-6y+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-2y=92 \\ 11y-x=10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x=11y-10 \\ 4x-y=46 \end{cases} \Rightarrow 44y-40-y=46 \Rightarrow 43y=$ $=86 \Rightarrow y=2;\ x=12.$

3. $\begin{cases} -1=2k+b \\ -3=-2k+b \end{cases} \Rightarrow -4=2b; b=-2;\ -1=2k-2;$ $2k=1;\ k=0{,}5;\ y=0{,}5x-2.$

4. $|x-y-3|+(x-2y)^2=0;\ \begin{cases} x=2y \\ x-y-3=0 \end{cases} \Rightarrow x=2;$ $y=1.$

К-8. Годовая контрольная работа

Вариант А1

1. а) $4x^4 \cdot (-8x^6) = -32x^{10}$;

б) $9x^2 - 1 + 9x^2 + 1 + 6x = 18x^2 + 6x$.

2. а) $a \cdot (25 - b^2) - a \cdot (5 - b)(5 + b)$;

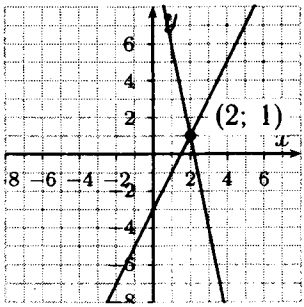
б) $3 \cdot (a^2 - 2 + 1) = 3(a - 1)^2$.

3. $x - 4 + 6x = 10$; $7x = 14$; $x = 2$.

4. x — длина первого полотна.

$\frac{x}{5} = \frac{x+10}{7}$; $2x = 50$; $x = 25$; $x + 10 = 35$.

5.



Вариант А2

1. а) $5x^2 \cdot 9x^6 = 45x^8$;

б) $4x^2 + 1 - 4x + 4x^2 - 1 = 8x^2 - 4x$.

2. а) $c \cdot (b^2 - 9) = c \cdot (b - 3)(b + 3)$;

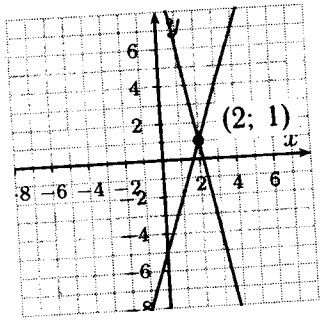
б) $2 \cdot (a^2 + 6a + 9) = 2(a + 3)^2$.

3. $x + 2 - 12x = 24$; $11x = -22$; $x = -2$.

4. x — весит мука.

$\frac{x}{8} = \frac{x-10}{6}$; $6x = 8x - 80$; $2x = 80$; $x = 40$; $x - 10 = 30$.

5.



Вариант Б1

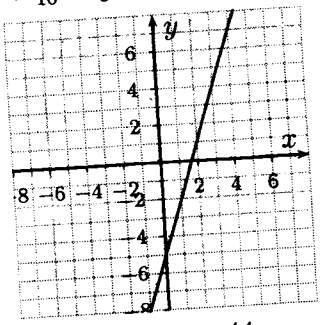
1. а) $5xy^3 \cdot 16x^8y^4 = 80x^9y^7$;
б) $4y^2 + 9x^2 - 12xy - 4y^2 + 9x^2 = 18x^2 - 12xy$.

2. а) $ab \cdot (4b^2 - a^2) = ab \cdot (2b - a)(2b + a)$;
б) $-b \cdot (b^2 + 6b + 9) = -b(b + 3)^2$.

3. $15 - 3x + 8x - 6 = 24$; $5x = 15$; $x = 3$.

4. x — расстояние.
$\frac{x}{8+2} + \frac{x}{8-2} = 8$; $\frac{x}{10} + \frac{x}{6} = 8$; $\frac{3x+5x}{30} = 8$; $\frac{x}{30} = 1$; $x = 30$.

5.



$3x - 5 = x + 83$; $2x = 88$; $x = 44$; $y = 127$; $(44; 127)$.

Вариант Б2

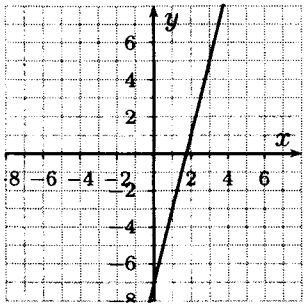
1. а) $10x^2y \cdot (-27x^3y^6) = -270x^5y^7$;
б) $x^2 + 16y^2 + 8xy - 16y^2 + x^2 = 2x^2 + 8xy$.

2. а) $ab \cdot (b^2 - 9a) - ab \cdot (b - 3a)(b + 3a)$;
б) $-a \cdot (a^2 - 10a + 25) = -a(a - 5)^2$.

3. $15x - 12 - 4x - 8 = 24$; $11x = 44$; $x = 4$.

4. x — количество деталей.
$\frac{x}{8} + \frac{x}{6} = 7$; $\frac{3x+4x}{24} = 7$; $\frac{x}{24} = 1$; $x = 24$.

5.



$4x - 7 = x + 83$; $3x = 90$; $x = 30$; $y = 113$; $(30; 113)$.

Вариант В1

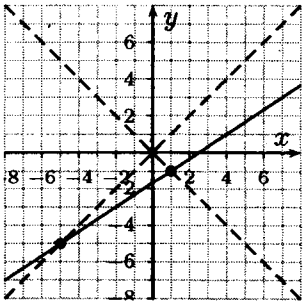
1. а) $8x^6y^3 \cdot x^2y^6 = 8x^8y^9$;
б) $x^2 + 49y^2 + 14xy - 49y^2 + x^2 = 2x^2 + 14xy$.

2. а) $a^2(27 - a^3) = a^2(3 - a)(9 + a^2 + 3a)$;
б) $(a + b)^2 - 9 = (a + b + 3)(a + b - 3)$.

3. $6x - 12 - 15x - 10 = 20 - 30x$; $21x = 42$; $x = 2$.

4. x — проехал в первый день.
$\frac{x}{20} + \frac{x-30}{15} = 5$; $3x + 4x - 120 = 300$; $7x = 420$; $x = 60$;
$60 + 60 - 30 = 90$.

5.



$2x - 3y = 5$, $|y| = |x| \Rightarrow$ $\Rightarrow y = x, y = -x \Rightarrow$ 1) $2x - 3x = 5 \Rightarrow x = -5, y = -5$; 2) $2x + 3x = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 1$, $y = -1$. $(-5; -5)$, $(1, -1)$.

Вариант В2

1. а) $x^{12}y^8 \cdot 27x^3y^6 = 27x^{15}y^{14}$;

б) $25y^2 - 9x^2 + 9x^2 + 25y^2 - 30xy = 50y^2 - 30xy$.

2. а) $x \cdot (x^3 - 125) = x \cdot (x - 5)(x^2 + 25 + 5x)$;

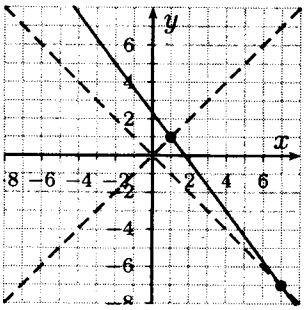
б) $(a + 2b)^2 - 9 = (a + 2b - 3)(a + 2b + 3)$.

3. $9x + 8x - 4 - 72 = 6x - 54$; $11x = 22$; $x = 2$.

4. x — прошла по озеру.

$\frac{x}{6} + \frac{x-9}{3} = 9$; $x + 2x - 18 = 54$; $3x = 72$; $x = 24$; $24 + 24 - 9 = 39$.

5.



$4x - 3y = 7$, $|y| = |x| \Rightarrow$ $\Rightarrow y = x, y = -x \Rightarrow$ 1) $4x + 3x = 7 \Rightarrow x = 1, y =$ $= 1$; 2) $4x - 3x = 7 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 7$, $y = -7$. $(1; 1)$, $(7, -7)$.

Геометрия (по учебнику Погорелова)

Основные свойства простеших геометрических фигур

СП-1. Измерение отрезков

Вариант А1

1. $CD = AB - AC - BD = 12 - 3 - 4 = 5$.
2. $AK = BK + 4$; $AB = AK + BK = BK + BK + 4 = 36$; $2BK = 32$; $BK = 16$; $AK = 16 + 4 = 20$.
3. $AB = AC + DC = 11 + 16 = 27$, точка C лежит между A и B.

Вариант А2

1. $BD = AB - CD - AC = 15 - 7 - 6 = 2$.
2. $AK = 3BK$; $AB = AK + BK = BK + 3BK = 36$; $4BK = 36$; $BK = 9$; $AK = 3 \cdot 9 = 27$.
3. $BC = AC + AB = 21 + 7 = 28$, точка A лежит между B и C.

Вариант Б1

1. $MN = AM + BN - AB = 10 + 8 - 12 = 6$.
2. $AK = 0{,}8BK$; $AB = AK + BK = 0{,}8BK + BK = 1{,}8BK = 36$; $BK = 20$; $AK = 0{,}8 \cdot 20 = 16$.
3. $AM = MB = AB : 2 = 16 : 2 = 8$; $BK = MB : 2 = 8 : 2 = 4$; $AK = AB - BK = 16 - 4 = 12$.

Вариант Б2

1. $BD = AB - AB + CD = 12 - 10 + 5 = 7$.
2. $MK = 1{,}4NK$; $MN = MK + NK = 1{,}4NK + NK = 36$; $2{,}4NK = 36$; $NK = 15$; $MK = 1{,}4 \cdot 15 = 21$.

3. $KB = MB : 2 = AB : 4$; $AB = 3 \cdot 4 = 12$; $AK = AB - KB = 12 - 3 = 9$.

Вариант В1

1. 1) $AC = AB + BC = 9 + 4 = 13$;
2) $AC = AB - DC = 9 - 4 = 5$.

2. $2AK = BK$; $AB = AK + BK = AK + 2AK = 3AK = 36$; $AK = 12$; $BK = 2AK = 2 \cdot 12 = 24$.

3. $AC = BD = AP : 2 = AB : 4 = 10$; $CD = AB - AC - BD = 40 - 10 - 10 = 20$.

Вариант В2

1. 1) $BC = AB + AB = 5 + 7 = 12$;
2) $BC = AC - AB = 7 - 5 = 2$.

2. $BK = 0{,}75AK$; $AB = AK + DK = AK + 0{,}75AK = 1{,}75AK = 21$; $AK = 12$; $BK = 0{,}75 \cdot 12 = 9$.

3. $AC = BD = AP : 2 = AB : 4 = 5$; $CD = AB - AC - BD = 20 - 5 - 5 = 10$.

СП-2. Измерение углов

Вариант А1

1. $\angle COD = \angle AOB - \angle AOD - \angle COB = 122° - 19° - 23° = 80°$.

2. $2\angle AOC = \angle COB$; $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB = \angle AOC + 2\angle AOC = 3\angle AOC = 120°$; $\angle AOC = 40°$; $\angle COB = 2 \cdot 40° = 80°$.

3. Да может, $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc) = 40° + 90° = 130°$.

Вариант А2

1. $\angle COB = \angle AOB - \angle DOC - \angle AOD = 132° - 47° - 22° = 63°$.

2. $\angle AOC = \angle COB + 30°$; $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB = \angle COB + 30° + \angle COB = 2\angle COB + 30° = 120°$;

$2\angle COB = 90°$; $\angle COB = 45°$; $\angle AOC = 45° + 30° = 75°$.

$\angle COB = 2 \cdot 40° = 80°$.

3. Не может, $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc) = 120° + 70° = 210°$.

Вариант Б1

1. $\angle COD = 180° - \angle AOB - \angle BOC = 180° - 53° - 91° = 36°$.

2. $\angle BOK = \angle KOC + 30°$; $\angle BOC = \angle BOK + \angle KOC = \angle KOC + \angle KOC + 30° = 2\angle KOC + 30° = 160°$; $2\angle KOC = 130°$; $\angle KOC = 65°$, $\angle BOK = 30° + 65° = 95°$.

3. C проходит между a и b, $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc) = 34° + 78° = 112°$.

Вариант Б2

1. $\angle BOC = 180° - \angle AOB - \angle DOC = 180° - 34° - 27° = 119°$.

2. $\angle BOK = \angle KOC - 12°$; $\angle BOC = \angle BOK + \angle KOC = \angle KOC + \angle KOC - 12° = 2\angle KOC - 12° = 160°$; $2\angle KOC = 172°$; $\angle KOC = 86°$, $\angle BOK = 86° - 12° = 74°$.

3. B проходит между a и C, $\angle(ac) = \angle(ab) + \angle(bc) = 65° + 26° = 91°$.

Вариант В1

1. $\angle BOC = \angle AOD - \angle AOC + \angle BOD = 140° - 94° + 76° = 122°$.

2. $\angle AOC + \angle COB = 6 \cdot (\angle AOC - \angle COB) = 120°$; $\angle AOC - \angle COB = 20°$; $\angle AOC = \angle COB + 20°$; $\angle COB + 20° + \angle COB = 120°$; $2\angle COB = 100°$; $\angle COB = 50°$; $\angle AOC = 50° + 20° = 70°$.

3. Три луча, так как если провести четыре луча то один из них будет не больше 90°, а это прямой угол.

Вариант В2

1. $\angle AOD = \angle AOC + \angle BOD - \angle BOC = 78° + 69° - 30° = 117°$.

2. $\angle AOC + \angle COB = 4 \cdot (\angle AOC - \angle COB) = 120°$; $\angle AOC - \angle COB = 30°$; $\angle AOC = \angle COB + 30°$; $\angle COB + 30° + \angle COB = 120°$; $2\angle COB = 90°$; $\angle COB = 45°$; $\angle AOC = 45° + 30° = 75°$.

3. Пять лучей, так как если провести четыре луча то один из них будет не меньше 90°, а это прямой угол.

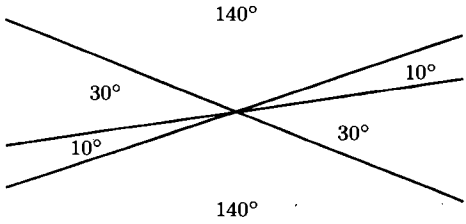
СП-3. Смежные и вертикальные углы

Вариант А1

1. $\angle 1 = 2\angle 2$; $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle 2 + \angle 2 = 3\angle 2 = 180°$; $\angle 2 = 60°$; $\angle 1 = 2 \cdot 60° = 120°$.

2. Смежный угол $180° - 21° = 159°$; накрест лежащий угол 21°.

3.

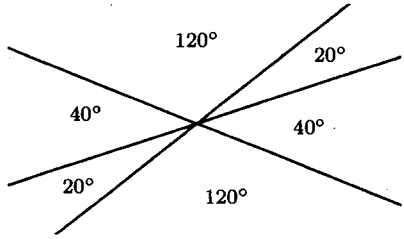


Вариант А2

1. $\angle 1 = \angle 2 + 20°$; $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + 20° + \angle 2 = 2\angle 2 + 20° = 180°$; $2\angle 2 = 160°$; $\angle 2 = 80°$; $\angle 1 = 80° + 20° = 100°$.

2. Смежный угол $180° - 102° = 78°$; накрест лежащий угол 78°.

3.



Вариант Б1

1. $\angle 1 = 0{,}2\angle 2$; $\angle 1 + \angle 2 = 0{,}2\angle 2 + \angle 2 = 1{,}2\angle 2 = 180°$; $\angle 2 = 150°$; $\angle 1 = 0{,}2 \cdot 150° = 30°$.

2. $\angle 1 = \angle 3$ — накрест лежащие; $\angle 2$ — смежный; $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2\angle 1 + \angle 2 = 325°$.

3. Смежный будет наибольшим когда рядом наименьший угол, это γ.

Вариант Б2

1. $\angle 1 = 0{,}9\angle 2$; $\angle 1 + \angle 2 = 0{,}9\angle 2 + \angle 2 = 1{,}9\angle 2 = 180°$; $\angle 2 = 100°$; $\angle 1 = 0{,}8 \cdot 100° = 80°$.

2. $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1 = 78°$; $\angle 1 = 39°$; $\angle 3 = \angle 4 = 180° - 39 = 141°$.

3. Смежный будет наименьшим когда рядом наибольший угол, это α.

Вариант В1

1. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$; $\angle 1 = 180° - \angle 2$; $\frac{4}{7}\angle 1 + 0{,}25\angle 2 = \frac{4}{7}\angle 1 + 0{,}25 \cdot (180° - \angle 1) = \frac{9}{28}\angle 1 + 45° = 90°$; $\frac{9}{28}\angle 1 = 45°$; $\angle 1 = 140°$; $\angle 2 = 180° - 140° = 40°$.

2. $\angle 1 = \angle 2$ — вертикальные; $\angle 3$ — смежный; $2 \cdot (\angle 1 + \angle 2) = \angle 3$; $4\angle 2 = \angle 3$; $\angle 2 + \angle 3 = 4\angle 2 + \angle 2 = 5\angle 2 = 180°$; $\angle 2 = 36°$; $\angle 3 = 180° - 36° = 144°$.

3. $\angle 1 = \angle 2$ — вертикальные; $\angle 3 = \angle 4$ — смежные; $11\angle 1 = (\angle 2 + \angle 3 + \angle 4)$; $10\angle 1 = 2\angle 3$; $5\angle 1 = \angle 3$; $\angle 1 + \angle 3 = 180°$; $5\angle 1 + \angle 1 = 180°$; $6\angle 1 = 180°$; $\angle 1 = 30°$; $\angle 3 = 180° - 30° = 150°$.

Вариант В2

1. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$; $4\angle 1 = (\angle 2 - \angle 1)$; $5\angle 1 = \angle 2$; $\angle 1 + \angle 2 = 5\angle 1 + \angle 1 = 6\angle 1 = 180°$; $\angle 1 = 30°$; $\angle 2 = 180° - 30° = 150°$.

2. $\angle 1 = \angle 2$ — вертикальные; $\angle 3$ — смежный; $\angle 1 + \angle 2 + 30° = \angle 3$; $2\angle 2 + 30° = \angle 3$; $\angle 2 + \angle 3 = 2\angle 2 + \angle 2 + 30° = 3\angle 2 + 30° = 180°$; $3\angle 2 = 150°$; $\angle 2 = 50°$; $\angle 3 = 180° - 50° = 130°$.

3. $\angle 1 = \angle 2$ — вертикальные; $\angle 3 = \angle 4$ — смежные; $\angle 1 + 280° = (\angle 2 + \angle 3 + \angle 4)$; $280° + = 2\angle 3$; $\angle 3 = 140°$; $\angle 2 = 180° - 140° = 40°$.

СП-4. Измерение отрезков и углов

Вариант 1

1. $AC = BD = AD - AB = AD - CD$.

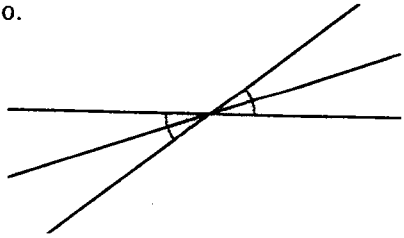
2. $AB : AC = AB : (AB + BC) = m : (m + n)$.

3. а) Ближе к B;
б) Между A и B;
в) Невозможно;
г) $AC = 6$, $BC = 4$.

4. $\angle DOC = (\angle AOD - \angle DOB) : 2 = (\angle AOC + \angle COD - \angle DOB) : 2 = (\angle COD + \angle DOB + \angle COD - \angle DOB) = \angle DOC$.

5. Четыре острых угла, так как прямых два угла, а всего их шесть.

6. Да, верно.



Вариант А2

1. $AB = CD = AD - AC = AD - BD$.

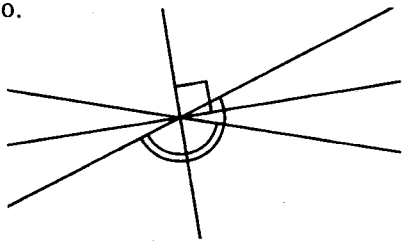
2. $BC : AC = BC : (AB + BC) = n : (m + n)$.

3. а) Ближе к B;
б) $C = B$;
в) Невозможно;
г) $CB > 7$.

4. $\angle DOC = (\angle AOD + DOB) : 2 = (\angle AOC + \angle BOC + \angle DOB + \angle DOB) = 2 \cdot (\angle BOC + \angle DOB) : 2 = \angle BOC + \angle DOB = \angle DOC$.

5. Четыре острых угла, так как прямых два угла, а всего их шесть, тупых углов нет.

6. Да. верно.



КП-1. Основные свойства простейших геометрических фигур. Смежные и вертикальные углы

Вариант А1

1. $BC = AB - AC = 9{,}2 - 2{,}4 = 6{,}8$; C лежит между точками.

2. $4\angle 1 = \angle 2$; $\angle 1 + \angle 2 = 180°$; $4\angle 1 + \angle 1 = 180°$; $5\angle 1 = 180°$; $\angle 1 = 36°$; $\angle 2 = 180° - 36° = 144°$.

3. $\angle(ac) = 2\angle(ad) = 2 \cdot 20° = 40°$; $\angle(ab) = 2\angle(ac) = 2 \times 40° = 80°$; $\angle(bd) = \angle(ac) - \angle(ad) = 80° - 20° = 60°$.

Вариант А2

1. $BC = AC - AB = 5{,}6 - 3{,}8 = 1{,}8$; B лежит между точками.

2. $\angle 1 + 70° = \angle 2$; $\angle 1 + \angle 2 = 180°$; $\angle 1 + \angle 1 + 70° = 180°$; $2\angle 1 + 70° = 180°$; $2\angle 1 = 110$; $\angle 1 = 55°$; $\angle 2 = 180° - 55° = 125°$.

3. $\angle(ac) = \angle(ab) : 2 = 80° : 2 = 40°$; $\angle(ad) = \angle(ac) : 2 = 40° : 2 = 20°$; $\angle(bd) = \angle(ac) - \angle(ad) = 80° - 20° = 60°$.

Вариант Б1

1. $AC = AB - BC = 10{,}3 - 2{,}4 = 7{,}9$; $AC = AB + BC = 10{,}3 + 2{,}4 = 12{,}7$.

2. $\angle 1 = \angle 2$ — вертикальные; $\angle 3 = \angle 4$ — смежные; $\angle 1 - \angle 3 = 42°$; $\angle 1 = \angle 3 + 42°$; $\angle 1 + \angle 3 = 180°$; $\angle 3 + 42° + \angle 3 = 180°$; $2\angle 3 + 42° = 180° = 2\angle 3 = 138°$; $\angle 3 = 69°$; $\angle 1 = 69° + 42° = 111°$.

3. $\angle 1 = \angle 2$ — вертикальные; $\angle 3 = \angle 4$ — смежные; $5\angle 1 = \angle 3$; $\angle 1 + \angle 3 = 5\angle 1 + \angle 1 = 6\angle 1 = 180°$; $\angle 1 = 30°$; $\angle 3 = 5 \cdot 30° = 150°$; $\angle 5 = \angle 1 + \angle 3 : 2 = 30° + 150° : 2 = 30° + 75° = 105°$.

Вариант Б2

1. $AB = AC + BC = 7{,}8 + 2{,}5 = 10{,}3$; $AB = AC - BC = 7{,}8 - 2{,}5 = 5{,}3$.

2. $\angle 1 = \angle 2$ — вертикальные; $\angle 3 = \angle 4$ — смежные; $\angle 1 - \angle 3 = 22°$; $\angle 1 = \angle 3 + 22°$; $\angle 1 + \angle 3 = 180°$; $\angle 3 + 22° + \angle 3 = 180°$; $2\angle 3 + 22° = 180° = 2\angle 3 = 158°$; $\angle 3 = 79°$; $\angle 1 = 79° + 22° = 101°$.

3. $\angle 1 = \angle 2$ — вертикальные; $\angle 3 = \angle 4$ — смежные; $4\angle 1 = \angle 3$; $\angle 1 + \angle 3 = 4\angle 1 + \angle 1 = 5\angle 1 = 180°$; $\angle 1 = 36°$; $\angle 3 = 4 \cdot 36° = 144°$; $\angle 5 = \angle 1 + \angle 3 : 2 = 36° + 144° : 2 = 36° + 72° = 108°$.

Вариант В1

1. $BD = BC + CD = 4{,}2 + 5{,}1 = 9{,}3$; $BD = CD - BC = 5{,}2 - 4{,}1 = 1{,}1$.

2. $\angle 1 = \angle 2$ — вертикальные; $\angle 3 = \angle 4$ — смежные; $3 \cdot (\angle 1 + \angle 2) = \angle 3 + \angle 4$; $6\angle 1 = 2\angle 3$; $3\angle 1 = \angle 3$; $\angle 1 + \angle 3 = \angle 1 + 3\angle 1 = 4\angle 1 = 180°$; $\angle 1 = 45°$; $\angle 3 = 180° - 45° = 135°$.

3. $90 - (\alpha : 2)$ и $90 + (\alpha : 2)$.

Вариант В2

1. $BD = BC + CD = 2{,}6 + 3{,}7 = 6{,}3$; $BD = CD - BC = 3{,}7 - 2{,}6 = 1{,}1$.

2. $\angle 1 = \angle 2$ — вертикальные; $\angle 3 = \angle 4$ — смежные; $5 \cdot (\angle 1 + \angle 2) = \angle 3 + \angle 4$; $10\angle 1 = 2\angle 3$; $5\angle 1 = \angle 3$; $\angle 1 + \angle 3 = \angle 1 + 5\angle 1 = 6\angle 1 = 180°$; $\angle 1 = 30°$; $\angle 3 = 180° - 30° = 150°$.

3. $180 - 2\beta$.

Признаки равенства треугольников

СП-5. Первый и второй признаки равенства треугольников

Вариант А1

1. $\angle 1 = \angle 2$; $AB = BC$; BD — общая сторона.

2. $CO = DO$; $\angle C = \angle D$; $\angle COA = \angle BOD \Rightarrow \triangle AOC = \triangle BOD \Rightarrow AO = BO$.

3. $AO = OB = OC = 0D$; $\angle AOC = \angle BOD \Rightarrow \triangle AOC = \triangle BOD \Rightarrow AD = BC$.

Вариант А2

1. $AO = CO$; $DO = DO$; $\angle AOB = \angle COD$ — вертикальные углы.

2. $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$; AC — общая сторона $\Rightarrow \triangle BAC = DAC \Rightarrow AB = AD$.

3. $OM = ON = OL = PO$; $\angle MOL = \angle PON \Rightarrow \triangle MOL = \triangle PON \Rightarrow ML = NP$.

Вариант Б1

1. $AE = EC$; $\angle BAE = \angle DCE = 180° - \angle 1 = 180° - \angle 2$; $AB = CD \Rightarrow \triangle BAE = \triangle DCE \Rightarrow BE = DE$.

2. $\angle 1 = \angle 2$; $\angle ABD = \angle DBC - BD$ — биссектриса; BD — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle DBC \Rightarrow AB = CB$.

3. $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$; AO — общая сторона $\Rightarrow \triangle BAO = \triangle DAO \Rightarrow BO = OD$; $\angle BOC = \angle DOC = 180° - \angle 1 = 180° - \angle 2$; OC — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DC$.

Вариант Б2

1. $\angle EAC = \angle EBD = 180° - \angle 1 = 180° - \angle 2$; $AE = BE$; $AC = BD \Rightarrow \triangle EAC = \triangle EBD \Rightarrow EC = ED$.

2. $\angle 1 = \angle 2$; $AO = OB - O$ — середина; $\angle COA = \angle BOD$ — вертикальные углы $\Rightarrow \triangle COA = \triangle BOD \Rightarrow \angle C = \angle D$.

3. $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$; AC — общая сторона $\Rightarrow \triangle BAC = \triangle DAC \Rightarrow BA = AD$; $\angle 3 = \angle 4$; AO — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABO = \triangle ADO$.

Вариант В1

1. $AB = CB$; $\angle A = \angle C$; $\angle B$ — общий угол $\Rightarrow \triangle NBC = \triangle AMB \Rightarrow AM = NC$.

2. 1) $\triangle BEC = \triangle DFA \Rightarrow BC = AD$; $\angle BCA = \angle DAC$; AC — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA$.

2) $\triangle ABC = \triangle CDA \Rightarrow BE = FD$; $\angle AEB = \angle CFD$ — накрестлежащие; $\angle CFD = \angle BEA = \angle B - \angle EBC = \angle D - \angle ADF \Rightarrow \triangle AEB = \triangle CFD$.

Вариант В2

1. $\angle 1 = \angle 2$; $\angle A = \angle D = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$; AD — общая сторона $\Rightarrow \triangle DAB = DAC \Rightarrow AB = DC$.

2. 1) $\triangle AEB = \triangle CFD \Rightarrow AB = CD$; $\angle ADC = \angle ABE$; AC — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA$.

2) $\triangle ABC = \triangle CDA \Rightarrow BC = AD$, $\angle BCE = \angle CAD$; $\triangle AEB = \triangle CFD \Rightarrow BE = FD \Rightarrow \triangle BEC = \triangle DFA$.

СП-6. Равнобедренный треугольник

Вариант А1

1. $\angle = 180° - 105° = 75°$, $\angle A = \angle 1$.

2. $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C$, $AB = BC$, $AO = OC \Rightarrow \triangle ABO = CBO$.

3. $(36 - 10) : 2 = 26 : 2 = 13$.

Вариант А2

1. $\angle A = \angle 1 = \angle C = \angle 2$ — вертикальные углы, $\angle A = \angle C$.

2. $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow BA = AC$, $\angle 1 = \angle 2$, OA — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABO = CBO$.

3. $48 - 15 \cdot 2 = 48 - 30 = 18$.

Вариант Б1

1. $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$, BD — общая сторона $\Rightarrow \triangle BAD = \triangle BDC \Rightarrow AD = DC \Rightarrow \triangle ADC$ — равнобедренный.

2. $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C \Rightarrow \angle OAC = \angle OCA$ так как AO, OC — биссектрисы $\Rightarrow \triangle AOC$ — равнобедренный.

3. a — основание, b — боковая; $b = a + 5$, $a + 2b = 37$; $a + 2a + 10 = 37$; $3a = 27$, $a = 9$, $b = 9 + 5 = 14$.

Вариант Б2

1. $\angle 1 = \angle 2$, $AB = BC$, BD — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BDC \Rightarrow AD = DC \Rightarrow \triangle ADC$ — равнобедренный.

2. $\triangle AOC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle A = \angle C$ так как AO, OC — биссектрисы $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный.

3. a — основание, b — боковая; $b = a - 3$, $a + 2b = 37$; $a + 2a - 6 = 45$; $3a = 51$, $a = 17$, $b = 17 - 3 = 14$.

Вариант В1

1. $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \triangle AOC$ — равнобедренный $\Rightarrow AO =$ $= OC$, $\angle 3 = \angle 4$, OB — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный.

2. $\triangle MBN$ — равнобедренный $\Rightarrow MB = ND$, $\angle BMN = \angle BNM$; $AN = CM \Rightarrow \triangle ABN =$ $= \triangle MBC \Rightarrow \angle A = \angle C \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный.

3. a — основание, b — боковая.
1) $2a = 26$, $a = 13$, $b = 36 - 26 = 10$.
2) $a + b = 26$, $a = 36 - 26 = 10$, $b = 26 - 10 = 16$.

Вариант В2

1. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4 \Rightarrow \triangle BAD = \triangle BCD \Rightarrow AD =$ $= DC \Rightarrow \triangle ADC$ — равнобедренный.

2. $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow AB = BC$, $\angle A =$ $= \angle C$; $AE = DC \Rightarrow \triangle ABE = \triangle DBC \Rightarrow \triangle BDE =$ $= \triangle BED \Rightarrow \triangle DBE$ — равнобедренный.

3. a — основание, b — боковая.
1) $a = 8{,}2b = 26 - 8 = 18$, $b = 9$.
2) $b = 8$, $a = 26 - 2 \cdot 8 = 26 - 16 = 10$.

КП-2. Первый и второй признаки равенства треугольников. Равнобедренный треугольник

Вариант А1

1. a — основание, b — боковая; $a = b + 5$; $a + 2b =$ $= b + 5 + b + b = 3b + 5 = 35$; $3b = 30$; $b = 10$, $a = 10 + 5 = 15$.

2. $AB = CD$, $\angle ADB = \angle CBD$, BD — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BCD \Rightarrow AB = CD$.

3. $\angle ABD = \angle DBC$ – BD — биссектриса; $\angle ADB = \angle CDB$, BD– общая сторона $\Rightarrow \triangle BAD = \triangle BDC \Rightarrow AD = BC \Rightarrow ADC$ — равнобедренный.

Вариант А2

1. a — основание, b — боковая; $3a = b$; $a + 2b = a + 6a = 7a = 42$, $a = 6$, $b = 3 \cdot 6 = 18$.

2. $AB = CD$, $\angle BAC = \angle DCA$, AC — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ACD \Rightarrow \angle B = \angle D$.

3. $\angle B = \angle C$, $BO = CO$, AD — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD \Rightarrow \angle CAD = \angle BDA \Rightarrow \triangle AOD$ — равнобедренный.

Вариант Б1

1. a — основание, b — боковая, $b = 1{,}25a$; $a + 2b = a + 2{,}5a = 3{,}5a = 70$, $a = 20$, $b = 1{,}25 \cdot 20 = 25$.

2. $\angle BOC = \angle BOA$ так как они смежные с $\angle AOM$ и $\angle COM$, $AO = OC$, BO — общая сторона $\Rightarrow \triangle BOC = \triangle BOA \Rightarrow AB = AB$.

3. $\triangle AOD$ — равнобедренный $\Rightarrow AO = OD$, $\angle BAO = \angle CDO$, $\angle BOA = \angle COD$ — вертикальные $\Rightarrow \triangle BAO = \triangle CDO \Rightarrow \angle B = \angle C$.

Вариант Б2

1. a — основание, b — боковая, $0{,}4b = a$; $a + 2b = 0{,}4b + 2b = 2{,}4b = 48$, $b = 20$, $a = 0{,}4 \cdot 20 = 8$.

2. $\angle BDC = \angle BDA$ так как они смежные с $\angle CDM$ и $\angle ADM$, $CD = AD$, BD — общая сторона $\Rightarrow \triangle BCD = \triangle BDA \Rightarrow \angle A = \angle C$.

3. $\triangle AOD$ — равнобедренный $\Rightarrow AO = OD$, $\angle BAD = \angle CDA$, $\angle BOA = \angle COD$ — вертикальные $\Rightarrow \triangle BAO = \triangle CDO \Rightarrow AB = DC$.

Вариант В1

1. a — основание, b — боковая.

1) $a = 0{,}75b$; $a + 2b = 2{,}75b = 110$, $b = 40$, $a = 0{,}75 \times \times 40 = 30$.

2) $b = 0{,}75a$; $a + 2b = a + 1{,}5a = 2{,}5a = 110$, $a = 44$, $b = 0{,}75 \cdot 44 = 33$.

2. $\triangle AOD$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle CAD = \angle BDA$; $AC = BD$, AD — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABD = = \triangle CAD \Rightarrow AB = DC$.

3. $\triangle ABO = \triangle CDO \Rightarrow AB = CD$, $\angle BAC = \angle ACD$, AD — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CDB$.

Вариант В2

1. a — основание, b — боковая.

1) $a = b - 3$; $a + 2b = b - 3 + 2b = 30{,}3b = 33$, $b = 11$, $a = 11 - 3 = 8$.

2) $b = a - 3$; $a + 2b = a + 2a - 6 = 30{,}3a = 36$, $a = 12$, $b = 12 - 3 = 9$.

2. $\triangle BOC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle ABD = \angle ACD$; $AC = BD$, AD — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABD = = \triangle CAD \Rightarrow AB = DC$.

3. $\triangle BOA = \triangle DOC \Rightarrow AB = CD$, $\angle BAC = \angle ACD$, AC — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA$.

СП-7. Третий признак равенства трейгольников. Свойство медианы равнобедренного треугольника

Вариант А1

1. $AB = CD$, $BC = DA$, BD — общая сторона $\Rightarrow \Rightarrow \triangle ABD = \triangle CDB \Rightarrow \angle A = \angle C = 40°$.

2. $AB = 2AK$, $BC = 2BM$, $AC = 2CN$ — свойство медианы; $P = AB + BC + AC = 2AK + 2BM + 2CN = = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 4 + 6 + 8 = 18$.

3. $AD = DC$ — свойство медианы, $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C$, $AB = BC$; $AM = NC = AB - BM = BC - BN \Rightarrow \triangle MAD = \triangle DNC \Rightarrow MD = ND$.

Вариант А2

1. $AD = AB$, $CD = CB$, AC — общая сторона $\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAC \Rightarrow \angle B = \angle C = 120°$.

2. $BC = 2CD$, $AC = 2AE$ — свойство медианы; $P = AB + BC + AC = AB + 2CD + 2AE = 8 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 8 + 4 + 8 = 20$.

3. $AD = DC$ — свойство медианы, $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C$, $AB = BC$; $AM = NC = AB - BM = BC - BN \Rightarrow \triangle MAD = \triangle DNC \Rightarrow MD = ND$.

Вариант Б1

1. $AB = CD$, $DC = AD$, BD — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BDC \Rightarrow \angle A = \angle C$.

2. $BC = AB + 2$; $P = AB + BC + AC = 2AB + 2 + AC = 12 + 2 + AC = 14 + AC = 18$, $AC = 4$, $AE = AC : 2 = 4 : 2 = 2$ — свойство медианы.

3. $\angle ABD = \angle DBC$ — свойство биссектрисы, $BM = BN = AB - AM = BC - CN$, BO — общая сторона $\Rightarrow \triangle MOB = \triangle BON \Rightarrow MO = ON \Rightarrow BO$ — медиана.

Вариант Б2

1. $AB = CD$, $BC = DC$, CA — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ACD \Rightarrow \angle B = \angle D$.

2. $AC = 2AB$; $BC = 2BM = 2 \cdot 4 = 8$ — свойство медианы, $P = AB + BC + AC = BC + 3AB = 8 + 3 \times 5 = 8 + 15 = 23$.

3. $\angle ABD = \angle DBC$ — свойство биссектрисы, $BM = BN = AB - AM = BC - CN$, BO — общая сторона $\Rightarrow \triangle MOB = \triangle BON \Rightarrow MO = ON \Rightarrow BO$ — медиана $\Rightarrow BO$ — высота.

Вариант В1

1. $AB = CD$, $AC = BD$, AD — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CAD \Rightarrow \angle CAD = \angle BDA$.

2. a, b, c — стороны; m — медиана.
$P_1 = a+0{,}5b+m$, $P_2 = c+0{,}5b+m$, $P_1+P_2 = a+b+c+2m$; $P_1 + P_2 - P = 2m = 28 + 24 - 40 = 12{,}2m = 12$.
$m = 6$.

3. BD — биссектриса, медиана, высота $\Rightarrow \angle MBD = \angle BDN$, $MB = BN$; BD — общая сторона $\Rightarrow \triangle BDM = \triangle BDN$.

Вариант В2

1. $AB = CD$, $AC = BD$, BC — общая сторона $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CBD \Rightarrow \angle ACD = \angle DBC$.

2. a, b, c — стороны; m — медиана.
$P_1 = a+0{,}5b+m$, $P_2 = c+0{,}5b+m$, $P_1+P_2 = a+b+c+2m$; $P = P_1+P_2-2m = 25+27-2\cdot 8 = 52-16 = 36$.

3. BD — биссектриса, медиана, высота $\Rightarrow \angle MBD = \angle BDN \angle BDM = \angle BDN$; BD — общая сторона $\Rightarrow \triangle BDM = \triangle BDN$.

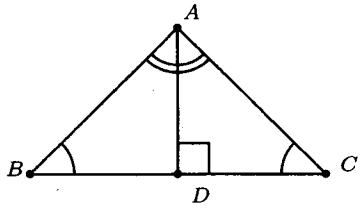
КП-3. Три признака равенства треугольников. Равнобедренный треугольник

Вариант А1

1. a — основание, b — боковая, $b = 2a$; $P = a + 2b = a + 4a = 5a = 40$, $a = 8$, $b = 2 \cdot 8 = 16$.

2. $KM = BM = AB : 2 = BC : 2$; $\angle ABD = \angle DBC$ — BD — биссектриса, BD — общая сторона $\Rightarrow \triangle BKD = \triangle BMD$.

3. $\triangle ABD = \triangle ACD$ равны, т. к. $AB = AC$, AD — общая сторона и $\angle BAD = \angle DAC$.

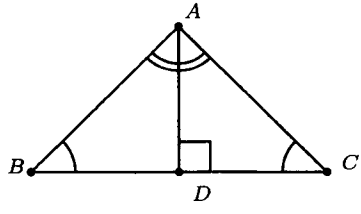


Вариант А2

1. a — основание, b — боковая, $b = 2a$; $P = a + 2b = a + 4a = 5a = 35$, $a = 7$, $b = 2 \cdot 8 = 14$.

2. $KA = CM = AB : 2 = BC : 2$; $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C$, AC — общая сторона $\Rightarrow \triangle AKD = \triangle CMD$.

3. $\triangle ABD = \triangle ACD$ равны, т. к. $AB = AC$, AD — общая сторона и $\angle BAD = \angle DAC$.



Вариант Б1

1. a — основание, b — боковая; $2{,}5a = b$; $P = a + 2b = a + 5a = 6a = 48$, $a = 8$, $b = 2{,}5 \cdot 8 = 20$.

2. $\angle ABD = \angle DBC - BD$ — биссектриса, $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow AB = BC$, BK — общая $\Rightarrow \triangle BAK = \triangle BKC \Rightarrow AK = KC \Rightarrow \triangle AKC$ — равнобедренный.

3. $AD = EC$ — свойство медианы, $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C$, AC — общая $\Rightarrow \triangle ADC = \triangle CEA$.

Вариант Б2

1. a — основание, b — боковая; $2{,}5a = b$; $P = a + 2b = a + 3a = 4a = 48$, $a = 12$, $b = 1{,}5 \cdot 12 = 18$.

2. $\angle ABD = \angle DBC$ – BD — биссектриса, $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow AB = BC$, BK — общая $\Rightarrow \triangle BAK = \triangle BKC \Rightarrow AK = KC \Rightarrow \triangle AKC$ — равнобедренный.

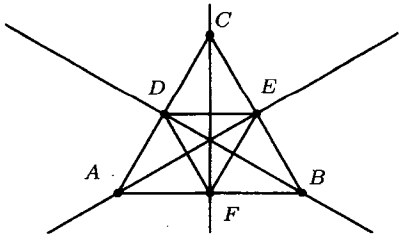
3. $AD = EC$ — свойство медианы, $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C$, AC — общая $\Rightarrow \triangle ADC = \triangle CEA$.

Вариант В1

1. a — основание, b — боковая, $P = 4a = b + 10$; $a = 0{,}25b + 2{,}5$; $a + b = 1{,}25b + 2{,}5 = 10$; $1{,}25b = 7{,}5$, $b = 6$, $a = 10 - 6 = 4$.

2. $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow AB = BC$; $\angle A = \angle C$, $\angle ACM = \angle CAN$, AC — общая сторона $\Rightarrow \triangle AMC = \triangle ANC \Rightarrow AM = NC \Rightarrow BM = BN = AB - AM = DC - CN \Rightarrow \triangle MBN$ — равнобедренный.

3. $\triangle ADF = \triangle DCE = \triangle EBF$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно $DE = EF = FD$.

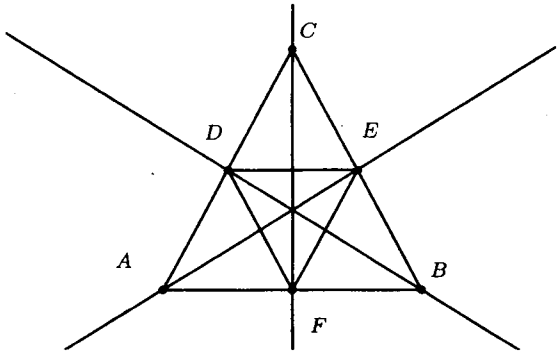


Вариант В2

1. a — основание, b — боковая, $b = 2a = P - 12$; $P = a + 2b = 0{,}5P - 6 + P - 12 + P - 12 = 2{,}5P - 30$; $1{,}5P = 30$, $P = 20$, $b = 20 - 12 = 8$; $a = b : 2 = 8 : 2 = 4$.

2. $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow AB = BC$; $\angle A = \angle C$, $AM = CN$, AC — общая сторона $\Rightarrow \triangle AMC = \triangle ANC \Rightarrow \angle MAC = \angle NAC \Rightarrow \triangle AOC$ — равнобедренный.

3. $\triangle ADF = \triangle BEF$, по двум сторонам ($AD = EF$, $AF = FB$) и углу между ними ($\angle DAF = \angle EBF$). Следовательно $DF = FE$.



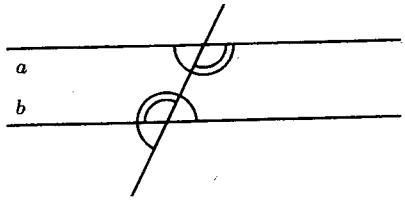
Сумма углов треугольника

СП-8. Параллельные прямые

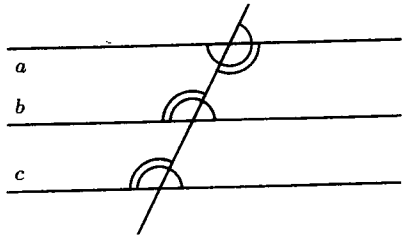
Вариант А1

1. $\angle 3 = \angle 2 = \angle 7 = \angle 6$ — вертикальные и накрест лежащие; $\angle 1 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 8$ — смежные к ним углы.

2. Прямые параллельны по признаку параллельности прямых.



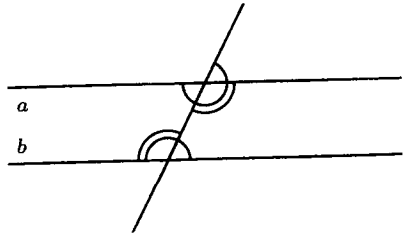
3. Прямые попарно параллельны по признаку параллельности прямых.



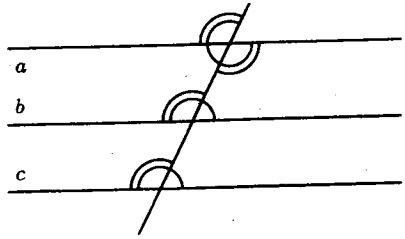
Вариант А2

1. $\angle 1 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 8$ — вертикальные и накрест лежащие; $\angle 3 = \angle 2 = \angle 7 = \angle 6$ — смежные к ним углы.

2. Прямые параллельны по признаку параллельности прямых.



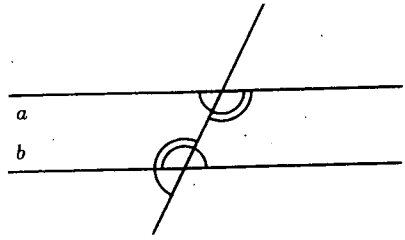
3. Прямые попарно параллельны по признаку параллельности прямых.



Вариант Б1

1. $\angle 3+30^\circ = \angle 4$, $\angle 3+\angle 4 = \angle 3+\angle 3+30^\circ = 2\angle 3+30^\circ = 180^\circ$, $2\angle 3 = 150^\circ$, $\angle 3 = 75^\circ$, $\angle 4 = 75^\circ + 30^\circ = 105^\circ$; $\angle 3 = \angle 2 = \angle 7 = \angle 6$ — вертикальные и накрест лежащие; $\angle 1 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 8$ — смежные к ним углы.

2. Прямые параллельны по признаку параллельности прямых.

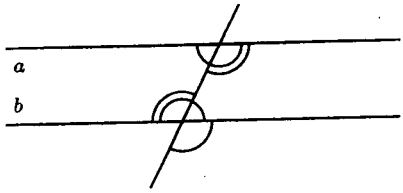


3. $\angle DAC = \angle ACB$ — накрестлежащие, $\angle BAC = \angle DAC = \angle ACB = 50^\circ \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$.

Вариант Б2

1. $\angle 6+12^\circ = \angle 5$, $\angle 5+\angle 6 = \angle 6+\angle 6+12^\circ = 2\angle 6+12^\circ = 180^\circ$, $2\angle 6 = 168^\circ$, $\angle 6 = 84^\circ$, $\angle 5 = 84^\circ + 12^\circ = 96^\circ$; $\angle 3 = \angle 2 = \angle 7 = \angle 6$ — вертикальные и накрест лежащие; $\angle 1 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 8$ — смежные к ним углы.

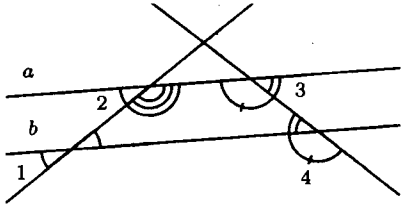
2. Прямые параллельны по признаку параллельности прямых.



3. $\angle ACB = \angle CBD$ — накрестлежащие, $\angle ABC = \angle CBD = \angle ACB = 25°$, $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 25° + 25° = 50°$.

Вариант В1

1. Так как $\angle 1 = \angle 2$, то прямые a и b — параллельны, а значит $\angle 4 = 180° - 42° = 138°$.

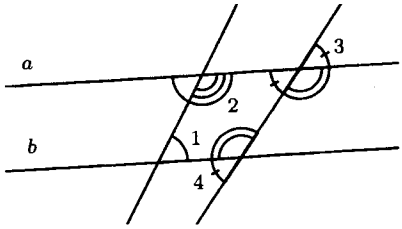


2. В треугольниках вертикальные углы равны, следовательно треугольники равны (по первому признаку равенства), а следовательно равны и соответствующие углы. Следовательно $a \| b$.

3. Так как $AB \| CE$, то $\angle ECD = \angle BAC = 20°$. $\angle BCE : \angle ECD = 4 : 1 \Rightarrow \angle BCE = 4\angle ECD = 4 \cdot 20° = 80°$. $\angle BCD = \angle ECD + \angle BCE = 20° + 80° = 100°$.

Вариант В2

1. Так как $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то прямые a и b — параллельны, а значит $\angle 4 = \angle 3 = 53°$.



2. Проведём отрезок из верхнего левого угла в правый нижний. Полученные треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников. Следовательно соответствующие углы равны, а значит $a \| b$.

3. Так как $DC \| DE$, то $\angle ABE = \angle CDB = 40°$. $\angle ABE : \angle EBC = 1 : 3 \Rightarrow \angle EBC = 3\angle ABE = 3 \cdot 40° = 120°$. $\angle ABC = \angle ABE + \angle EBC = 40° + 120° = 160°$.

СП-9. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника

Вариант А1

1. $\angle B = 40°$ — вертикальные, $\angle C = 180° - 120° = 60°$, $\angle = 180° - 40° - 60° = 80°$.

2. $2x + 5x + 8x = 180°$, $15x = 180°$, $x = 12°$, $2x = 24°$, $5x = 60°$, $8x = 96°$, внешние углы $180° - 24° = 156°$, $180° - 60° = 120°$, $180° - 96° = 84°$.

3. $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 50° - 60° = 70°$, $\angle DBC = \angle B : 2 = 35°$, $\angle BDC = 180° - 35° - 60° = 85°$.

Вариант А2

1. $\angle B = 180° - 70° = 110°$, $\angle C = 180° - 140° = 40°$, $\angle A = 180° - 110° - 40° = 30°$.

2. $3x + 5x + 7x = 180°$, $15x = 180°$, $x = 12°$, $3x = 36°$, $5x = 60°$, $7x = 84°$, внешние углы $180° - 36° = 144°$, $180° - 60° = 120°$, $180° - 84° = 96°$.

3. $\angle BDC = 180° - \angle ADB = 180° - 120° = 60°$, $\angle DBC = \angle B : 2 = 40°$, $\angle C = 180° - 60° - 40° = 100°$.

Вариант Б1

1. $\angle B = 180° - 80° = 100°$; $AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C$, $\angle A + \angle C = 2\angle A = 80°$, $\angle A = \angle C = 40°$.

2. $\angle 1 = 180° - 140° = 40°$, $\angle 2 = 0{,}75\angle 3$; $\angle 2 + \angle 3 = 0{,}75\angle 3 + \angle 3 = 1{,}75\angle 3 = 140°$, $\angle 3 = 80°$, $\angle 2 = 0{,}75 \cdot 80° = 60°$.

3. $\angle DAB = \angle DBA$($\angle A = \angle B$, AD, BD — биссектрисы), $\angle DAB + \angle DBA + 100° = 180°$, $\angle DAB = 40°$, $\angle B = \angle A = 2\angle DAB = 2 \cdot 40° = 80°$; $\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 80° - 80° = 20°$.

Вариант Б2

1. $\angle C = 180° - 140° = 40°$; $AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C = 40°$, $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 40° - 40° = 100°$.

2. $\angle 1 = 180° - 100° = 80°$, $\angle 2 = 3\angle 3$, $\angle 2 + \angle 3 = 3\angle 3 + \angle 3 = 4\angle 3 = 100°$, $\angle 3 = 25°$, $\angle 2 = 3 \cdot 25° = 75°$.

3. $\angle DAB = \angle DBA$($\angle A = \angle B$, AD, BD — биссектрисы), $\angle DAB + \angle DBA + 100° = 180°$, $\angle DAB + \angle DBA = 80°$, $\angle DAB = \angle DBA = 40°$.

Вариант В1

1. $AD = BD \Rightarrow \triangle ABD$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle EBC = \angle BCE$, $\angle ADB = 180° - \angle BDE = 180° - 40° = 140°$, $\angle ADB = 40° : 2 = 20°$; $BE = CE \Rightarrow \triangle BEC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle DAB = \angle DBA$, $\angle BEC = 180° - \angle BED = 180° - 60° = 120°$, $\angle BEC = 60° : 2 = 30°$; $\angle DBE = 180° - \angle BDE - \angle BED = 180° - 40° - 60° = 80°$; $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBE + \angle EBC = 20° + 80° + 30° = 130°$.

2. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$; $\angle 1 + 40° = \angle 2 + \angle 3$, $\angle 3 = 40°$, $\angle 1 = \angle 2 = (180° - 40°) : 2 = 70°$; $\angle 3 + 40° = \angle 1 + \angle 2$, $\angle 3 = 180° - \angle 1 - \angle 2 = 180° - 2\angle 1, 180° - 2\angle 1 + 40° = 2\angle 1, 4\angle 1 = 220°$, $\angle 1 = 55° = \angle 2$, $\angle 3 = 180° - 2 \cdot 55° = 70°$.

3. $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$, $\angle + 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 3 = 2\angle 3 = 180°$, $\angle 3 = 90°$.

Вариант В2

1. $AD = BD \Rightarrow \triangle ABD$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle DAB = \angle DBA = 30°$, $\angle ADB = 180° - 60° = 120°$; $\angle DBE = 180° - 120° = 60°$; $BE = CE \Rightarrow \triangle BEC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle EBC = \angle BCE = 20° \angle BEC = 180° - 40° = 140°$, $\angle BEC = 180° - 140° = 40°$; $\angle DBE = 180° - \angle BDE - \angle BED = 180° - 40° - 60° = 80°$.

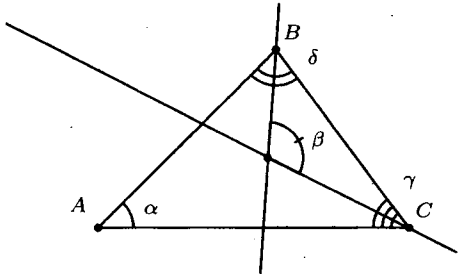
2. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$; $5\angle 1 = \angle 2 + \angle 3, 4\angle 1 = \angle 3$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 1 + 4\angle 1 = 6\angle 1 = 180°$, $\angle 1 = 30° = \angle 2$, $\angle 3 = 180° - 60° = 120°$; $5\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$, $\angle 1 = 2{,}5\angle 3$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2{,}5\angle 3 + 2{,}5\angle 3 + \angle 3 = 6\angle 3 = 180°$, $\angle 3 = 30°$, $\angle 1 = \angle 2 = (180° - 30°) : 2 = 75°$.

3. $\angle 1 - \angle 2 = \angle 3$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 1 = 2\angle 1 = 180°$, $\angle 1 = 90°$.

СП-10. Сумма углов треугольника

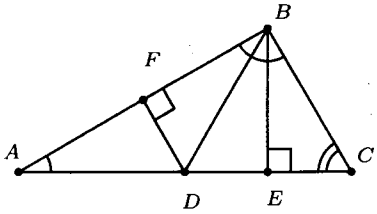
Вариант 1

1. $\beta = 180° - \frac{\gamma + \delta}{2} = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$. $90° - \beta = 180° - (90° + \frac{\alpha}{2}) = 90° - \frac{\alpha}{2}$.



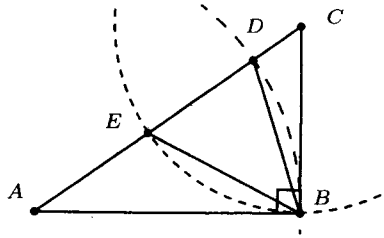
2. $\angle ABD = 60^\circ \Rightarrow \angle A = 30^\circ$, $AC = 2C$, $CD = 0{,}5BC$ (напротив угла 30°), $AC = 4CD = 4 \cdot 2 = 8$.

3. Опустим из точки D перпендикуляр на сторону AB. $\triangle BDF = \triangle BDE$ (по второму признаку). Так как $FD = DE = \frac{1}{4}AC$, а $AD = \frac{1}{2}AC$, то $\angle BAC = 30^\circ$. Значит $\angle ADF = \angle FDB = \angle BDE = 60^\circ \Rightarrow \angle ACB = 60^\circ$ (по условию $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$. Следовательно $\triangle DBE = \triangle CBE$ по второму признаку), а $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.



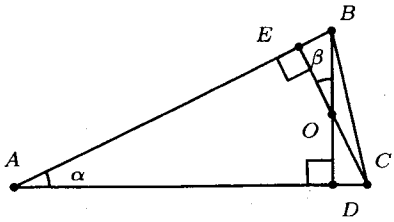
4. $\angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B = 130^\circ$, $\angle DAC = 0{,}5\angle A$, $\angle ACD = \angle BCA + \angle DCB = \angle C + 90 - 0{,}5\angle C = 90 + 0{,}5\angle C$, $\angle ADC = 180^\circ - \angle DAC - \angle ACD = 180^\circ - 0{,}5\angle A - 90^\circ - 0{,}5\angle C = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$.

5. $\angle ADB = \angle ABD$, $\angle CEB = \angle EBC$. $\angle ADB + \angle CEB - \angle EBD = 90^\circ$, $\angle EDB + \angle ADB + \angle CED = 180^\circ \Rightarrow 2\angle EBD = 90^\circ \Rightarrow \angle EBD = 45^\circ$.



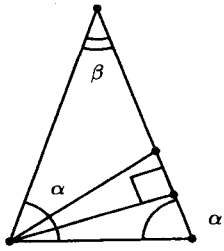
Вариант 2

1. $\angle ABD = 90° - \alpha = 60° - \beta \Rightarrow \beta = \alpha$. $180° - \beta = 180° - \alpha$.



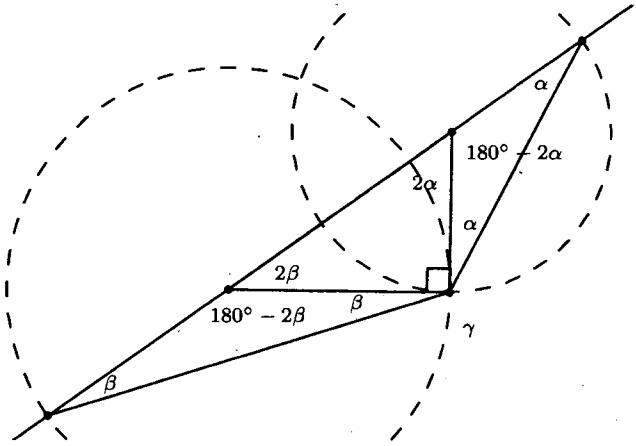
2. $AD > BC \Rightarrow \angle A = 30° \Rightarrow BC = 0{,}5AC$; $\angle DBC = 30° \Rightarrow DC = 0{,}5BC$, $DC = 0{,}25AC = 0{,}25 \cdot 16 = 4$, $AD = AC - DC = 16 - 4 = 12$.

3. Очевидно, что $\frac{1}{4}\alpha + \alpha = 90° \Rightarrow \alpha = \frac{4}{5} \cdot 90° = 72°$; $\beta = 180° - 2\alpha = 180 - 2 \cdot 72° = 180° - 144° = 36°$.



4. $\angle A + \angle C = 180° - \angle B$, $\angle DAC = 0{,}5\angle A$, $\angle ACD = \angle BCA + \angle DCB = \angle C + 90 - 0{,}5\angle C = 90 + 0{,}5\angle C$, $\angle ADC = 180° - \angle DAC - \angle ACD = 180° - 0{,}5\angle A - 90° - 0{,}5\angle C = 90° - 0{,}5 \cdot (\angle A + \angle C) = 20°$, $\angle A + \angle C = (90° - 20°) \cdot 2 = 140°$, $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 140° = 40°$.

5. Из рисунка видно, что $\gamma = 90° + \alpha + \beta$, $2\alpha + 2\beta = 90° \Rightarrow \alpha + \beta = 45° \Rightarrow \gamma = 90° + 45° = 135°$.



СП-11. Прямоугольный треугольник

Вариант А1

1. $\angle B = 180° - 150° = 30°$, $\angle A = 90° - \angle B = 90° - 30° = 60°$.

2. BD — высота, $\angle ABD = 18°$, $\angle ABD = \angle BDC = 90°$, $\angle DBC = 46°$, $\angle A = 90° - \angle ABD = 90° - 18° = 72°$, $\angle C = 90° - \angle DBC = 90° - 46° = 44°$.

3. Они равны по стороне и всем углам, так как оба имеют прямые углы, и равные острые углы.

Вариант А2

1. $\angle A = 60°$ (вертикальные), $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 60° = 30°$.

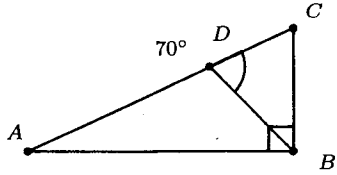
2. BD — высота, $\angle ABD = 24°$, $\angle ABD = \angle BDC = 90°$, $\angle DBC = 38°$, $\angle A = 90° - \angle ABD = 90° - 24° = 66°$, $\angle C = 90° - \angle DBC = 90° - 38° = 52°$.

3. Они равны по стороне и всем углам, так как оба имеют прямые углы, и равные острые углы.

Вариант Б1

1. $\angle B = 180° - 150° = 30°$, $\angle = 90° - \angle B = 90° - 30° = 60°$, $\angle CAD = \angle A : 2 = 60 : 2 = 30°$($AD$ — бисскектриса), $\angle CDA = 90° - \angle CAD = 90° - 30° = 60°$.

2. $\angle DBC = \angle DBA = 45° \Rightarrow \angle DCB = 180° - 70° - 45° = 65°$. $\angle CDB = 70° \Rightarrow \angle ADB = 180° - 70° = 110° \Rightarrow \angle CAB = 180° - 110° - 45° = 25°$.

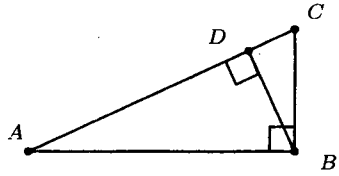


3. Высота делит треугольник на два треугольника. Рассмотрим треугольник, где находится известный нам катет. Данный треугольник равен соответствующему треугольнику второго треугольника (по третьему признаку). Из этого равенства получаем, что угол образованный в первом треугольнике гипотенузой и катетом соответственно равен углу образованному известным нам катетом и гипотенузой второго треугольника, следовательно треугольники равны (по третьему признаку).

Вариант Б2

1. $\angle CDA = 180° - 110° = 70°$, $\angle CAD = 90° - \angle CDA = 90° - 70° = 20°$, $\angle A = 2\angle CAD = 2 \cdot 20° = 40°$, $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 40° = 50°$.

2. $\angle ABD = 55° \Rightarrow \angle CAB = 90° - 55° = 35°$. $\angle DBC = 90° - 55° = 35° \Rightarrow \angle ACB = 90° - 35° = 55°$.

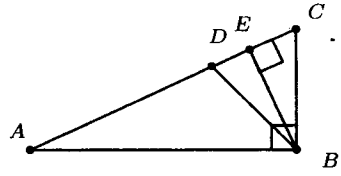


3. Высота делит треугольник на два треугольника. Рассмотрим треугольник, где находится известный нам угол. Данный треугольник равен соответствующему треугольнику второго треугольника (по второму признаку). Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что и углы, противоположные известным углам равны, а значит и вторые треугольники равны. Следовательно равны и соответствующие стороны треугольников. Следовательно треугольники равны.

Вариант В1

1. $\angle ACD + \angle DCB = 90°$, $\angle ACD = 90° - \angle DCB = 90° - 50° = 40°$, $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 40° = 50°$.

2. $\angle DBE = 14°$. $\angle EBC = 45° - 14° = 31° \Rightarrow \angle ACB = 90° - 31° = 59°$. $\angle ABE = 45° + 14° = 59° \Rightarrow \angle CAB = 90° - 59° = 31°$.

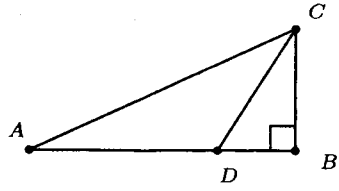


3. Высота делит треугольник на два треугольника. По теореме о сумме углов треугольника, противоположные известным углам — углы в двух остроугольных треугольниках равны, а значит два треугольника одного треугольника соответственно равны двум треугольникам другого треугольника (по второму признаку). Следовательно треугольники равны.

Вариант В2

1. $\angle A = 90° - \angle B = 90° - 40° = 50°$, $\angle ACD = 90° - \angle A = 90° - 50° = 40°$.

2. $\angle ACD = \angle DCB = 22° \Rightarrow \angle ACB = 22° + 22° = 44°$. $\angle CAB = 90° - 44° = 46°$.



3. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два остроугольных треугольника. Пусть $AB = A'B'$. Проведем высоты и медианы к этим сторонам CK и $C'K'$ — медианы, CM и $C'M'$ — высоты. По условию $CK = C'K'$, а $CM = C'M'$. Тогда $\triangle CKM = \triangle C'K'M'$ (по катету и гипотенузе). Значит и другие катеты равны: $KM = K'M'$. Так как $KB = AB/2 = K'B' = A'B'/2$: $MB = M'B'$. Значит прямоугольные треугольники CBM и $C'B'M'$ равны по двум катетам. Значит равны гипотенузы и углы: $BC = B'C'$, $\angle B = \angle B'$. Получаем, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\angle B = \angle B'$).

КП-4. Параллельные прямые. Сумма углов треугольника

Вариант А1

1. $\angle 1 + \angle 2 = 102°$, $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = 102°/2 = 51°$. $180° - 51° = 129°$.

2. $12\angle B = \angle C$, $\angle A + \angle B + \angle C = 50° + 12\angle B + \angle B = 50° + 13\angle B = 180°$, $13\angle B = 130°$, $\angle B = 10°$, $\angle C = 12\angle B = 12 \cdot 10° = 120°$.

3. $\angle ADC = 90°$ (AD — высота), $\angle A = 90° - \angle B = 90° - 35° = 55°$, $\angle CDA = 90° - \angle A = 90° - 55° = 35°$.

Вариант А2

1. $\angle 1 - \angle 2 = 102°$, $\angle 1 + \angle 2 = 180° \Rightarrow \angle 1 = (180° + 102°)/2 = 141°$; $\angle 2 = 180° - 141° = 39°$.

2. $\angle B + 40° = \angle C$, $\angle A + \angle B + \angle C = 80° + \angle B + \angle B + 40° = 2\angle B + 120° = 180°$, $2\angle B = 60°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 40° + \angle B = 40° + 30° = 70°$.

3. $\angle CDB = 90°$ (AD — высота), $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 70° = 20°$, $\angle CDB = 90° - \angle B = 90° - 20° = 70°$.

Вариант Б1

1. $\angle 1 : \angle 2 = 7 : 2$, $\angle 1 + \angle 2 = 180° \Rightarrow \angle 1 = 7 \cdot (180°/9) = 140°$, $\angle 2 = 2 \cdot (180°/9) = 40°$.

2. $\angle A + 60° = \angle B$, $2\angle A = \angle C$, $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle A + 60° + 2\angle A = 4\angle A + 60° = 180°$, $4\angle A = 120°$, $\angle A = 30°$, $\angle B = \angle A + 60° = 30° + 60°$, $\angle C = 2\angle A = 2 \cdot 30° = 60°$.

3. $\angle ACD = \angle C : 2 = 90° : 2 = 45°$ (CD — биссектриса), $\angle CAE = 180° - \angle ACD - \angle AOC = 180° - 105° - 45° = 30°$, $\angle A = 2\angle CAE = 2 \cdot 30° = 60°$ (AE — биссектриса), $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 60° = 30°$.

Вариант Б2

1. $\angle 1 : \angle 2 = 5 : 7$, $\angle 1 + \angle 2 = 180° \Rightarrow \angle 1 = 5 \cdot (180°/12) = 75°$, $\angle 2 = 7 \cdot (180°/12) = 105°$.

2. $\angle B = \angle A + 40^\circ$, $\angle C = 5\angle A$, $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + 40^\circ + \angle A + 5\angle A = 7\angle A + 40^\circ = 180^\circ$, $7\angle A = 140^\circ$, $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = \angle A + 40^\circ = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$, $\angle C = 5\angle A = 5 \cdot 20^\circ = 100^\circ$.

3. $\angle BCD = \angle C : 2 = 90^\circ : 2 = 45^\circ$ (CD — биссектриса), $\angle CBE = 180^\circ - \angle BCD - \angle BOC = 180^\circ - 95^\circ - 45^\circ = 40^\circ$, $\angle B = 2\angle CBE = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$ (BE — бисскектриса), $\angle A = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$.

Вариант В1

1. $\angle 3 = 4(\angle 1 + \angle 2)$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ \Rightarrow \angle 3 = 8\angle 1 \Rightarrow \angle 3 = 8 \cdot (180^\circ/9) = 160^\circ$, $\angle 1 = \angle 2 = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$.

2. $3\angle A = \angle B$, $180^\circ - \angle A = 180^\circ - \angle B + 40^\circ$, $\angle B = \angle A + 40 = 3\angle A$, $2\angle A = 40$, $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 3\angle A = 3 \times 20^\circ = 60^\circ$, $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 20^\circ - 60^\circ = 100^\circ$.

3. $CD = CB \Rightarrow \triangle CDB$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle CDB = \angle CBD = 90^\circ : 2 = 45^\circ$, $\angle ABD = \angle B - \angle DBC = 70^\circ - 45^\circ = 25^\circ$, $\angle ADB = 180^\circ - \angle CDB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, $\angle A = 180^\circ - 135^\circ - 25^\circ = 20^\circ$.

Вариант В2

1. $7\angle 2 = (\angle 3 - \angle 1)$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ \Rightarrow 8\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow \angle 3 = 8 \cdot (180^\circ/9) = 160^\circ$, $\angle 1 = \angle 2 = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$.

2. $\angle A + 80^\circ = \angle B$, $180^\circ - \angle A = 2 \cdot (180^\circ - \angle B)$, $180^\circ - \angle A = 2 \cdot (180^\circ - \angle A - 80^\circ) = 200^\circ - 2\angle A$, $\angle A = 20$, $\angle B = \angle A + 80^\circ = 20^\circ + 80^\circ = 100^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 20^\circ - 80^\circ = 80^\circ$.

3. $CD = CB \Rightarrow \triangle CDB$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle CAD = \angle ADC = 90^\circ : 2 = 45^\circ$, $\angle ADB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, $\angle DAB = 180^\circ - \angle b = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$, $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABD - \angle CDA = 180^\circ - 110^\circ - 45^\circ = 25^\circ$.

Геометрические построения

СП-12. Окружность

Вариант А1

1. $AO = OB = R$, $\angle OCB = \angle ACO = 90°$, AC — общая $\Rightarrow \triangle AOC = \triangle OCB \Rightarrow AC = BC$.

2. AB, AC — касательные $\Rightarrow \angle B = \angle C = 90°$, $OB = OB = R$, AO — общая $\Rightarrow \triangle ABO = \triangle AOC \Rightarrow \angle AOB = \angle AOC \Rightarrow OA$ — биссектриса.

3. Так как окружности касаются друг друга с внешней стороны, то расстояние между их центрами будет равно сумме их радиусов: 31 см + 52 см = 83 см.

Вариант А2

1. $AO = OB = R$, $AC = BC$, AC — общая $\Rightarrow \triangle AOC = \triangle OCB \Rightarrow \angle OCB = \angle ACO$, $\angle OCB + \angle ACO = 180° \Rightarrow \angle OCB = \angle ACO = 90°$.

2. AB, AC — касательные $\Rightarrow \angle B = \angle C = 90°$, $OB = OB = R$, AO — общая $\Rightarrow \triangle BAO = \triangle OAC \Rightarrow \angle BAO = \angle OAC \Rightarrow OA$ — биссектриса.

3. Так как окружности касаются друг друга внутренним образом, то расстояние между их центрами будет равно разности их радиусов: 52 см − 31 см = 21 см.

Вариант Б1

1. $\angle AOB = 180° - 100° = 80°$, $AO = OB \Rightarrow \triangle AOB$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle B = 100° : 2 = 50°$.

2. CB — касательная $\Rightarrow \angle OBC = 90°$, $\angle BOC = 180° - \angle OBC - \angle C = 180° - 90° - 20° = 70°$, $\angle AOB = 180° - \angle BOC = 180° - 70° = 110°$, $AO = OB \Rightarrow \triangle AOB$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle ABO = (180° - 110°) : 2 = 35°$.

3. $R_1 + R_2 = 18$ см, $R_2 = 2R_1 \Rightarrow 3R_1 = 18$ см $\Rightarrow R_1 = 6$ см; $R_2 = 2R_1 = 12$ см.

Вариант Б2

1. $\angle AOB = 30°$ (вертикальные), $AO = OB \Rightarrow \triangle AOB$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle B = (180° - 30°) : 2 = 75°$.

2. CB — касательная $\Rightarrow \angle OBC = 90°$, $AO = OB \Rightarrow \triangle AOB$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle ABO = 30°$, $\angle AOB = 180° - 60° = 120°$, $\angle BOC = 180° - \angle AOB = 180° - 120° = 60°$, $\angle C = 180° - \angle BOC - \angle C = 180° - 90° - 60° = 30°$.

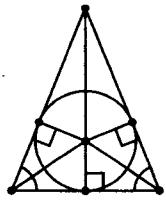
3. $R_2 - R_1 = 18$ см, $R_2 = 4R_1 \Rightarrow 5R_1 = 18$ см $\Rightarrow R_1 = 18/5 = 3{,}6$ см, $R_2 = 4R_1 = 14.4$ см.

Вариант В1

1. $OA = OB \Rightarrow \triangle OAB$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle B$; $OD = OB \Rightarrow \triangle DOB$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle OBC = \angle ODC = 20°$, OC — биссектриса $\Rightarrow \angle DOC = \angle COB = \angle DOB : 2 = (180° - 20° - 20°) : 2 = 70°$; $\angle OCB = 180° - 70° - 20° = 90° \Rightarrow OA \perp DB \Rightarrow \angle BCA = 90°$, $\angle CBA = \angle OBC = 20°$, $\angle CAB = \angle COB = 70°$.

2. AB, AC — касательные $\Rightarrow \angle B = \angle C = 90°$, $\angle BOC = 360° - \angle A - \angle B - \angle C = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$.

3. $P = 3 + 5 + 3 + 5 + 3 + 3 = 22$ см.

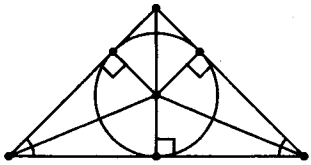


Вариант В2

1. $OA = OB \Rightarrow \triangle OAB$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle B$; $OD = OB \Rightarrow \triangle DOB$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle OBC = \angle ODC = 20°$, OC — биссектриса $\Rightarrow \angle DOC = \angle COB = \angle DOB : 2 = (180° - 20° - 20°) : 2 = 70°$; $\angle OCB = 180° - 70° - 20° = 90° \Rightarrow OA \perp DB \Rightarrow \angle BCA = 90°$, $\angle CBA = \angle OBC = 20°$, $\angle CAB = \angle COB = 70°$.

2. AB, AC — касательные $\Rightarrow \angle B = \angle C = 90°$, $\angle BAC = 360° - \angle BOC - \angle B - \angle C = 360° - 90° - 90° - 100° = 80°$.

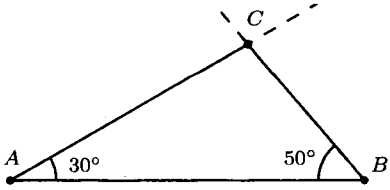
3. $P = 3 + 5 + 3 + 5 + 5 + 5 = 26$ см.



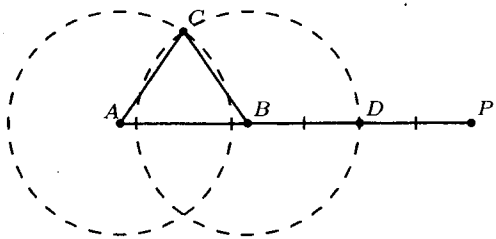
СП-13. Задачи на построение. ГМТ

Вариант А1

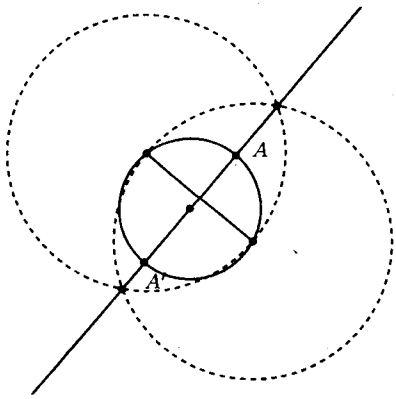
1. Проводим отрезок AB равный 4 см, а затем с помощью транспортира откладываем $\angle A = 30°$ и $\angle B = 50°$. Проводим соответствующие лучи, и в точке их пересечения будет искомая вершина треугольника C. Соединяем вершины.



2. Пусть задан отрезок AB — основание треугольника, и отрезок AP — его периметр. Совместим отрезок AB с отрезком AP, тогда отрезок BP — сумма сторон равнобедренного треугольника. Найдем середину D отрезка BP, тогда $BD = BP$ — стороны равнобедренного треугольника. Из центра в точке B проведем окружность радиуса BD, и из точки A окружность такого же радиуса. Данные окружности пересекаются в точке C. Соединим точки A, B, C отрезками. Искомый треугольник построен.

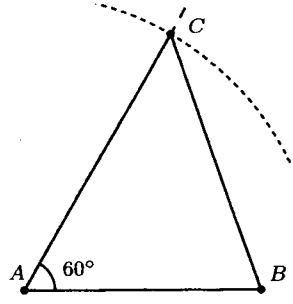


3. Очевидно, что равноудаленными от концов заданной хорды, будут точки расположенные на прямой, проходящей через середину хорды перпендикулярно к ней.

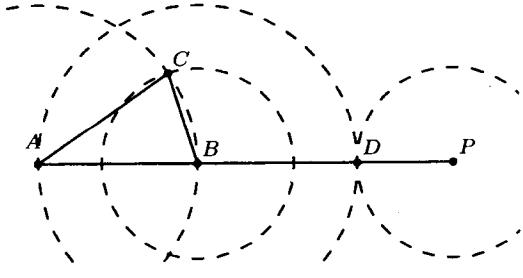


Вариант А2

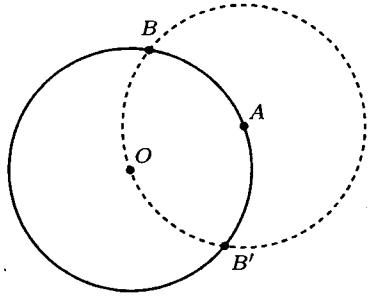
1. Проводим отрезок AB равный 4 см; затем с помощью транспортира откладываем $\angle A = 60°$; проводим луч. На луче с помощью линейки или циркуля откладываем отрезок $AC = 5$ см. Соединяем вершины. Искомый треугольник построен.



2. Пусть задан отрезок AB — сторона равнобедренного треугольника, и отрезок AP — его периметр. Из центра в точке A проводим окружность радиуса AB. Из точки B проводим окружность такого же радиуса и отмечаем точку D, в месте пересечения окружности и отрезка AP. Очевидно, что длина отрезка PD равна длине основания треугольника. Из центра в точке B проводим окружность радиуса PD. Окружности пересекаются в точке C. Попарно соединяем точки A, B, C отрезками. Искомый треугольник построен.

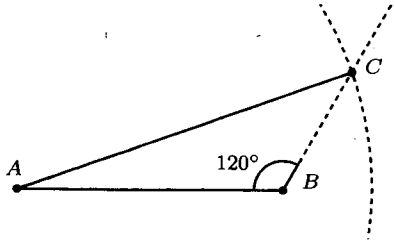


3. Построим из центра в точке A окружность радиуса OA. Точки пересечения заданной и построенной окружности будут равноудалены от точек O и A, и эти расстояния будут равны радиусу заданной окружности.



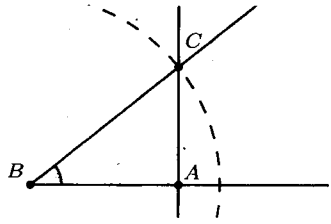
Вариант Б1

1. На построенном отрезке $AB = 3$ см строим угол B равный 120°, а из точки A проводим окружность радиуса 4 см. Их точка пересечения C. Попарно соединяем точки A, B, C отрезками. Искомый треугольник построен.



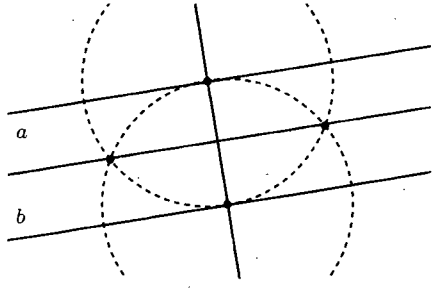
2. Строим острый угол B. Из вершины угла проводим окружность, радиусом равным длине гипотенузы. Так как треугольник — прямоугольный, то из точки пересечения окружности и угла C, опускаем перпендикуляр на противоположную сторону. В месте

пересечения перпендикуляра и стороны угла будет точка A. Попарно соединяем вершины треугольника. Искомый треугольник построен*.



3. Пусть заданы прямые $a \| b$, тогда геометрическим местом точек равноудалённых от данных параллельных прямых будет прямая, параллельная данным и находящаяся на одинаковом расстоянии от каждой из них (посередине).

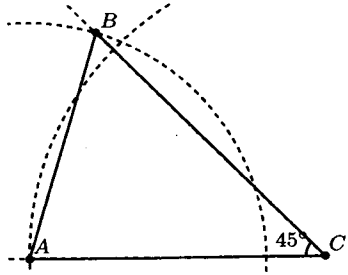
Построим прямую перпендикулярную данным, и из точек пересечения проведем окружности одинакового радиуса. Очевидно, что точки пересечения окружностей равноудалены от двух данных прямых, и совокупность таких точек образует прямую линию.



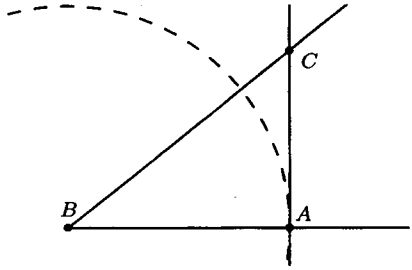
*Необходимо заметить, что угол можно отложить и в другую полуплоскость относительно AB. Тогда можно было бы построить и второй треугольник, отвечающий заданным условиям. Аналогичная ситуация, может встретится и в других задачах на построение.

Вариант Б2

1. Строим отрезок $AC = 5$ см, строим угол C равный $45°$, из точки A проводим окружность радиуса 4 см. Точка пересечения луча и окружности — B. Попарно соединяем точки A, B, C отрезками. Искомый треугольник построен.

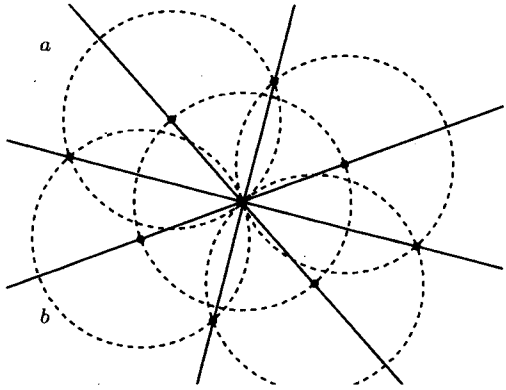


2. Строим острый угол B. Из вершины угла проводим окружность радиусом равным катету, и отмечаем точку пересечения A. Так как треугольник — прямоугольный, то восстанавливаем перпендикуляр из точки A. Полученная точка пересечения C. Соединяем попарно вершины треугольника. Искомый треугольник построен.



3. Пусть даны две пересекающиеся прямые. Из центра их пересечения проведем окружность произвольного радиуса, а из точек образованных пересечением окружности и пересекающихся прямых проведем новые окружности одинакового радиуса. Очевидно, что

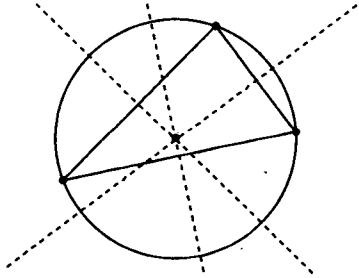
точки образованные пересечением вторых окружностей равноудалены от данных прямых, и их геометрическое место точек представляет из себя две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающихся в месте пересечения данных прямых.



Вариант В1

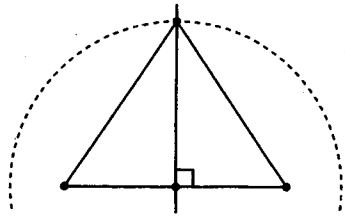
1. Построение осуществляется на основании теоремы о центре окружности, описанной около треугольника (теорема 5.1). Центр описанной окружности находится в точке пересечения срединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Проводим срединные перпендикуляры. Находим центр описанной окружности и строим ее.

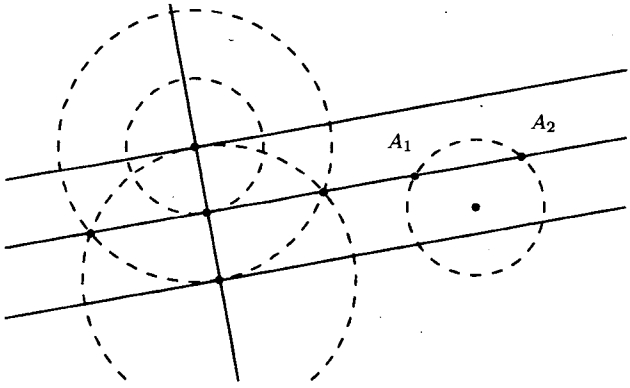


2. Через основание равнобедренного треугольника проводим срединный перпендикуляр, и циркулем отмечаем на нем высоту треугольника. Попарно соединяем вершины. Треугольник построен.

Данное построение основано на том, что высота перпендикулярна основанию, и в равнобедренном треугольнике она делит основание пополам.



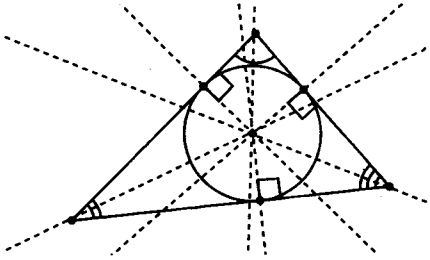
3. Очевидно, что данные точки будут лежать на прямой параллельной данным и проходящей на одинаковом расстоянии от них. Так как расстояние до данной прямой, в результате построения известно, то проведя из данной точки окружность радиусом равным этому расстоянию, найдем две точки (A_1, A_2), лежащих на этой прямой, которые и будут искомым геометрически местом точек.



Вариант В2

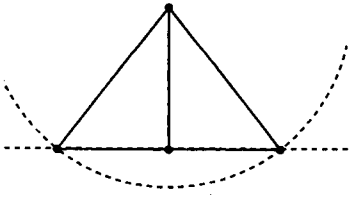
1. Построение осуществляется на основании теоремы о центре окружности, вписанной в треугольник (теорема 5.2). Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

Построив биссектрисы треугольника опускаем перпендикуляр из центра окружности на какую-либо сторону. Полученный отрезок будет радиусом окружности. Строим вписанную окружность.

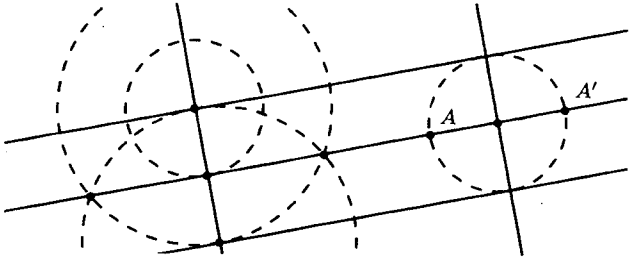


2. Проводим произвольную прямую и прямую перпендикулярную к ней. На перпендикулярной прямой отмечаем данную высоту и из данной точки проводим дугу, радиусом равным боковой стороне. Отмечаем на прямой точки пересечения и попарно их соединяем. Искомый треугольник построен.

Построение основано на том, что высота перпендикулярна основанию, а боковые стороны равнобедренного треугольника равны.



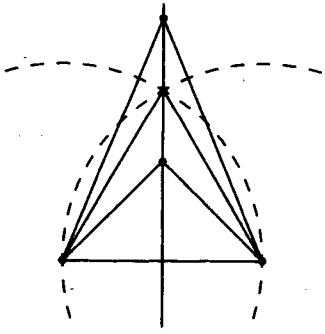
3. Очевидно, что данные точки будут лежать на прямой параллельной данным и проходящей на одинаковом расстоянии от них. Так как расстояние до данной прямой, в результате построения известно, то проведя из центра пересечения построенной и перпендикулярной прямой, окружность радиусом равным этому расстоянию, найдем две точки (A, A'), лежащих на этой прямой, которые и будут искомым геометрически местом точек.



СП-14. Геометрические места точек. Задачи на построение

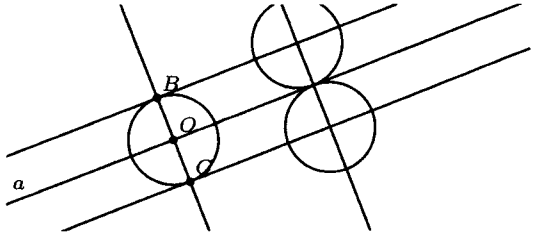
Вариант 1

1. а) Очевидно, что геометрическим местом точек будет срединный перпендикуляр к данному основанию, так как в равнобедренном треугольнике высота проведенная к основанию делит его пополам.



б) Пусть дана прямая a и окружность. Так как прямая касается окружности по касательной, то расстояние между центром окружности и прямой равно ее радиусу, соответственно, окружности могут быть расположены с разных сторон прямой, следовательно геометрическим местом точек центров окружности, касающихся прямой, будут две прямые параллельные данной, расположенные с разных ее сторон, на расстоянии данного радиуса.

Для построения проведем к данной прямой перпендикуляр, а из точки их пересечения O проведем окружность данного радиуса, затем в точках, отсечённых окружностью (B и C) на прямой, проведем перпендикуляры. Данные прямые и будет искомым геометрическим местом точек.

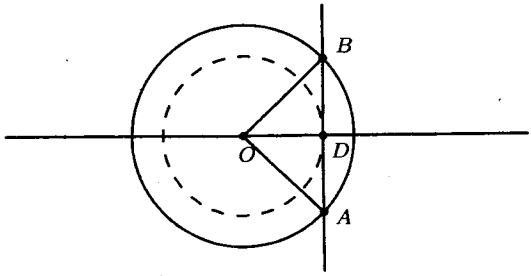


в) Геометрическое место точек, удаленных от середины окружности на заданное расстояние от центра, меньше ее радиуса, представляет из себя окружность (это следует из определения окружности).

Покажем возможность построения хорды, удовлетворяющей условиям задачи.

Построим некоторую окружность с центром в точке O, и окружность на заданном расстоянии, меньшим радиуса. Проведем произвольную прямую через центр окружности O. Пусть она пересекает внутреннюю окружность в точке D.

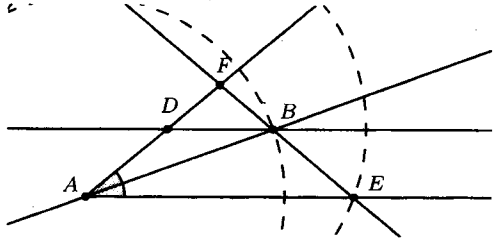
Восстановим в данной точке перпендикуляр. Отрезок AB, образованный точками, отмеченными на внешней окружности представляет собой хорду по определению. Так как $\triangle ODB = \triangle ODA$ ($OB = OA$, OD — общая сторона, $\angle ODB = \angle ODA = 90°$), то значит точка D — середина хорды AB.



2. Равнобедренный треугольник

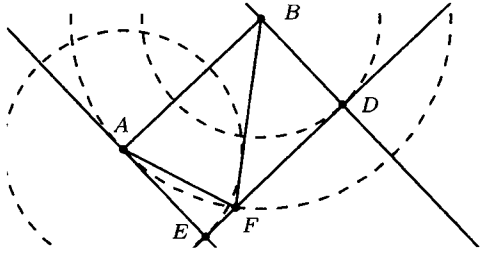
а) Так как треугольник равнобедренный, то следовательно, углы при основании равны, а значит и равны биссектрисы.

Строим заданный угол A; проводим его биссектрису; циркулем, с центром в точке A, проводим окружность радиусом равным заданной биссектрисой, отмечаем точку B. Так как биссектрисы углов при основании в равнобедренном треугольнике равны, то следовательно они оканчиваются на одинаковой высоте от основания. Поэтому, через точку B, проводим прямую параллельную основанию, отсекающую на угле A точку D. Из точки D, проводим окружность, радиусом равным заданной биссектрисой, и отмечаем на основании треугольник точку E — вторую вершину треугольника при основании. Проведя прямую EB получаем, на пересечении стороны угла и прямой точку F — вершину треугольника. Попарно соединяем точки A, E, F. Искомый треугольник построен.



б) В любом треугольнике высота перпендикулярна основанию, а так как треугольник равнобедренный, то его боковые стороны равны.

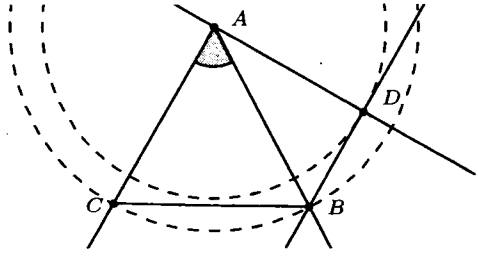
Пусть задана боковая сторона AB, следовательно проведя параллельную ей прямую ED, на расстоянии равном заданной высоте, мы получим геометрическое место точек, на котором может находится вершина треугольника. Учитывая, что боковые стороны равны, из центра в точке B с помощью циркуля отсечем на параллельной прямой точку F — третью вершину треугольника. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



в) В любом треугольнике высота перпендикулярна основанию, а так как треугольник равнобедренный, то его боковые стороны равны.

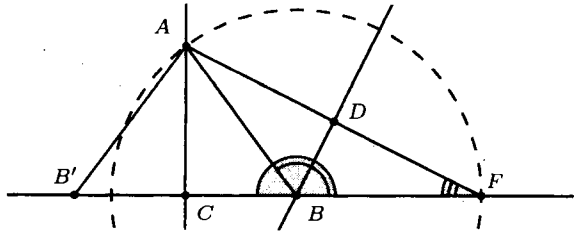
Построим заданный угол A. Построим прямую параллельную боковой стороне на расстоянии равным заданной высоте. Отрезок AD равен заданной высоте. Точка пересечения B, построенной

прямой и угла A, будет точкой вершины равностороннего треугольника при основании. Так как боковые стороны треугольника равны, то проведя окружность с центром в точке A, с радиусом AB мы получим при пересечении окружности и стороны угла точку C — третью вершину треугольника. Соединив попарно вершины, получим искомый треугольник.



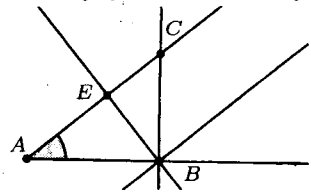
г) *Анализ.* Пусть дан равнобедренный треугольники ABB'. От вершины треугольника, на прямой проходящей через основание, отложим отрезок BF — равный боковой стороне. Тогда треугольник ABF — равнобедренный, а угол AFB равен половине угла при основании CBA (так как $\angle ABF = 180° - \angle ABC \Rightarrow \angle DBF = (180° - \angle ABC)/2$, $\angle BDF = 90° \Rightarrow \angle DFB = \frac{1}{2}\angle ABC$). А сторона CF равна половине периметра.

Построение. На прямой отмечаем точку C, откладываем отрезок CF равный половине данного периметра, и восстанавливаем из точки C перпендикуляр. В точке F строим угол равный половине заданного угла при основании и отмечаем точку A пересечении стороны построенного угла и перпендикулярной прямой. Строим срединный перпендикуляр отрезка AF. Отмечаем точку пересечения B. Третья точка треугольника B' расположена симметрично точки B относительно перпендикулярной прямой. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.

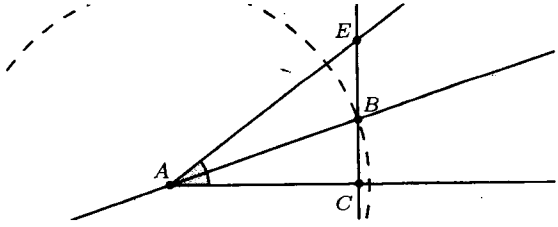


Прямоугольный треугольник

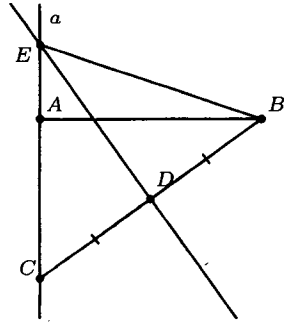
а) Построим заданный угол A и проведем прямую параллельную его стороне на расстоянии равной заданной высоте. Тогда точка B — вершина прямоугольного треугольника. Восстановим в этой точке перпендикуляр к прямой. Он пересекается в точке C с углом A. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



б) Построим заданный угол A и найдем его биссектрису. Проведем циркулем окружность радиусом равным длине заданной биссектрисы. Биссектриса и окружность пересекутся в точке B. Так как в прямоугольном треугольнике угол противоположный гипотенузе — прямой, то перпендикуляр опущенный из точки B отсечет на сторонах угла вершины искомого треугольника C и E.



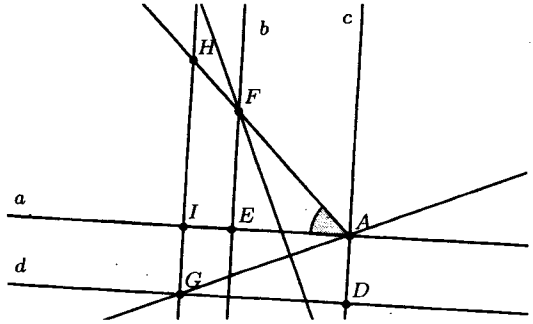
в) Построим заданный катет AB. Проведем к нему перпендикулярную прямую a в точке A, и на ней построим отрезок равный разности двух других сторон AC. Соединим точки C и B и найдем середину отрезка CB — точку D. Проведем перпендикуляр к отрезку CB в точке D. Эта прямая пересекается с прямой a в точке E. $\triangle CBE$ — равносторонний ($\triangle CDE = \triangle BDE$), а AC — разность гипотенузы и катета искомого треугольника. Следовательно отрезок AE — катет искомого треугольника, а BE — гипотенуза. Искомый треугольник построен.



г) В точке пересечения A взаимно перпендикулярных прямых a и c строим заданный угол A. А на прямой c откладываем отрезок AD равный разности гипотенузы и противолежащего заданному углу катету. Проводим прямую d перпендикулярную прямой в точке D. Отмечаем на прямой a точку E и проводи перпендикуляр b. Отмечаем точку пересечения стороны угла A и b — F. Проводим биссектрису угла EFA. Проводим перпендикулярную ей прямую проходящую через точку A, отсекающая на прямой точку G. Данная прямая отсекает на прямой a точку I, и пересекается с прямой AF в точке H. Соединяем

попарно вершины A, I, H. Искомый треугольник построен.

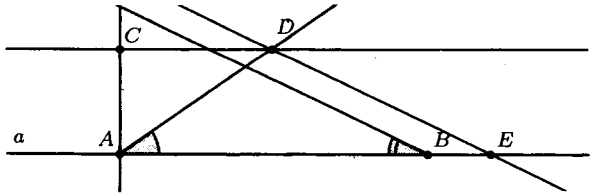
В данном построении были использованы рассуждения предыдущей задачи (был построен *вспомогательный* равносторонний треугольник). На его основе были определены необходимые углы и решена задача.



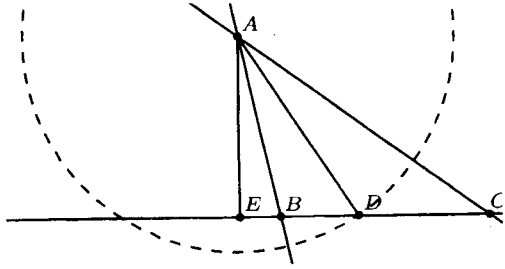
Произвольный треугольник

а) На прямой a отмечаем точки A и B, и на них строим заданные углы. В точке A проводим отрезок перпендикулярный прямой A и равный заданной высоте. Через него проводим прямую, параллельную прямой a. Она пересекает угол A в точке D — вершина искомого треугольника. Через точку D проводим прямую параллельную стороне угла B. Она пересекает прямую A в точке E. Соединяем попарно вершины A, D, E. Искомый треугольник построен.

Углы при основании и высота равны заданным величинам по построению.



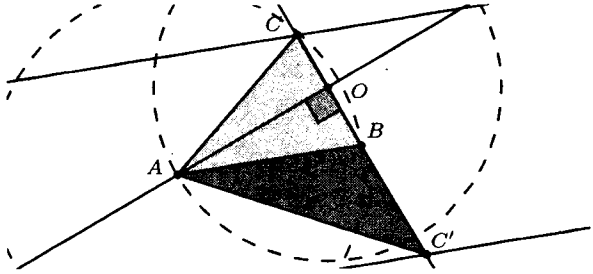
б) Проведем отрезок AE равный заданной высоте, и перпендикулярную ему прямую в точке E. На этой прямой будет лежать одна из сторон треугольника, та как высота перпендикулярна стороне. Из центра A проведем окружность, радиусом равным заданной биссектрисе. Она пересекает сторону треугольника в точке D. Поскольку нам задан угол α, мы всегда можем построить половину заданного угла. Поэтому относительно линии биссектрисы, с двух сторон построим углы равные $\alpha/2$, которые отсекут на прямой ED точки B и C — вершины искомого треугольника. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



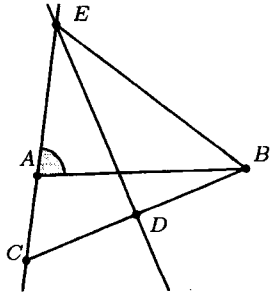
в) Так как высота в треугольнике перпендикулярна основанию, то воспользуемся этим. Построем прямой угол O. И из точки O проведем окружность радиусом равным данной высоты, не проведенной к данной стороне. Она отсекает на одной из сторон угла точку A — вершину треугольника. Из точки A проводим окружность равным данной стороной. Она пересекает сторону прямого угла в точке B — вторая вершина. Та как нам дана высота опущенная на сторону AB, то проводим две прямые параллельные стороне AB*.

*Две прямые проводятся, так как в этом случае получаются разные треугольники удовлетворяющие условиям задачи.

Соответственно прямая при прямом угле O, на которой лежит сторона треугольника пересекается с этими прямыми в вершинах C и C' двух разных треугольников. Следовательно мы построили треугольники ABC и ABC' удовлетворяющим условиям задачи.

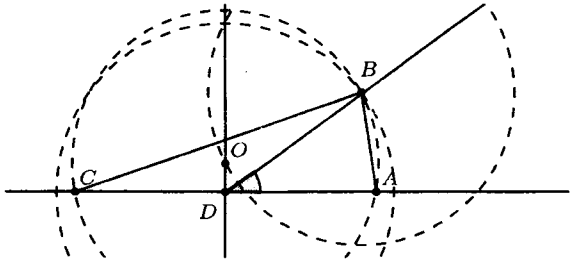


г) Строим отрезок AB равный заданной стороне. В точке A проведем прямую под заданным углом. Отложим отрезок AC равный заданной разности сторон. Проведем отрезок CB и его срединный перпендикуляр, который пересечётся с прямой AC в точке E. Проведем отрезок BE. Так как $\triangle CEB$ — равносторонний, то $\triangle AEB$ — искомый.

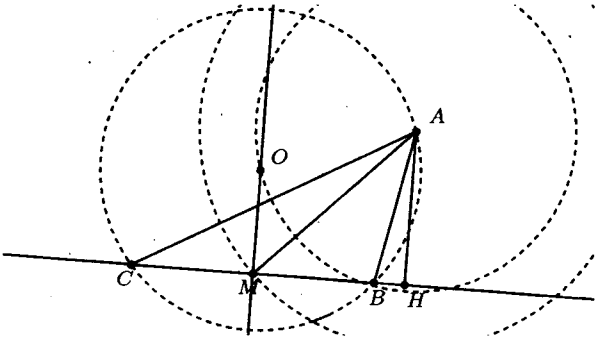


д) Отметим на прямой точку D — точку пересечения медианы и стороны. Построим в этой точке заданный угол. Из центра в точке D проведем

окружность радиусом равным заданной медиане, и отметим на стороне угла точку B — вершину треугольника. Восстановим из очки D перпендикуляр, а из центра в точке C проведем окружность радиусом равным радиусу заданной описанной окружности. Так как центр описанной окружности находится на срединном перпендикуляре, то этот радиус и перпендикулярная прямая пересекутся в точке O — центре описанной окружности. Проводим из центра в точке O окружность радиусом равным радиусу заданной описанной окружности. Находим точки пересечения с прямой A и C. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.

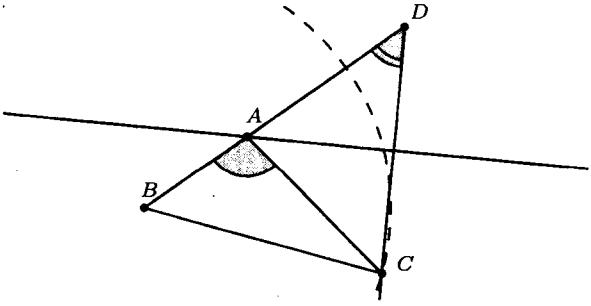


е) Строим высоту AH, в точку H проводим перпендикулярную прямую. Из центра в точке A проводим окружность радиусом равным данной медиане, которая пересекается с прямой в точке M, следовательно отрезок AM — медиана. Восстанавливаем из точки M перпендикуляр, а из центра в точке A проводим окружность радиусом равным описанной окружности. Они пересекаются в точке O — центре описанной окружности. Из центра O проводим окружность радиусом описанной окружности и находим точки пересечения C и B. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



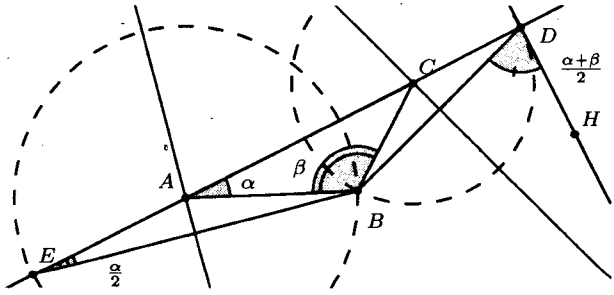
ж) *Анализ.* Допустим треугольник ABC построен. Пусть BC — данная сторона, $\angle A$ — данный угол, а $AB + AC$ — данная сумма двух других сторон. На продолжении стороны BA за точку A отложим отрезок AD, равный AC. Тогда $BD = BA + AD = BA + AC$ — сумма сторон, треугольник DAC — равнобедренный. Поэтому $\angle BDC = \angle BAC/2$.

Построение. Строим отрезок BD, равный данному. От луча DB не вершине D строим угол, равный половине данного. Из центра в точке B проводим окружность радиусом равным данной стороне. Точка пересечения этой окружности с проведенным ранее лучом есть искомая вершина треугольника — C. Пересечение срединного перпендикуляра к отрезку DC с прямой BD дает искомую вершину A. Попарно соединяем вершины. Искомый треугольник построен.



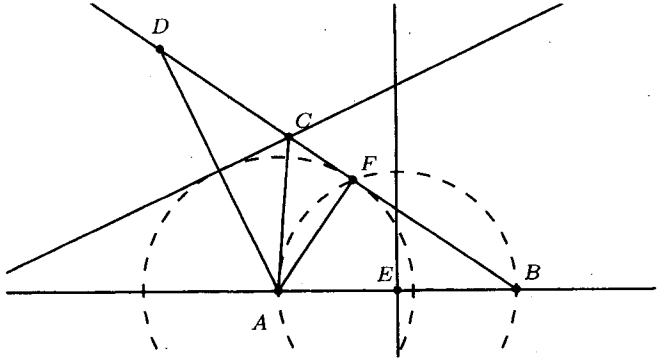
з) *Анализ.* Рассмотрим $\triangle ABC$ с заданными углами при основании α и β. Отложим на прямой AC отрезки EA и CB, равные сторонам треугольника AB и BC, тогда $EACD$ — периметр треугольника. Через точку D проведем прямую перпендикулярную прямой AC. Рассмотри треугольники EAB и CBD — они являются равнобедренными, со сторонами $AE = AB$ и $CD = CB$. Откуда следует, что $\angle AEB = \gamma = \alpha/2$, а $\angle ACH = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Откуда следует следующее построение.

Построение. Построим отрезок ED, равную периметру треугольника. В точке D проведем прямую перпендикулярную прямой ED. В точке E построим угол равный $\alpha/2$, а в точке D построим угол отстоящий от перпендикулярной прямой на $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Стороны построенных углов пересекутся в точке B — вершине треугольника. Построим срединные перпендикуляры к отрезкам EB и BD. Точки их пересечения с отрезком ED — A и C — вершины треугольника. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



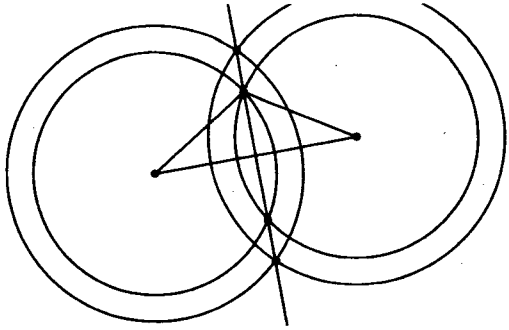
и) Строим заданную сторону AB. Из точки A проводим окружность радиусом равным заданной высоте. Так как высота перпендикулярна стороне, то находим середину стороны AB — точку E, проводим из нее окружность радиусом равным

AE, и находим точку касания F. Из точки A через точку F проводим луч и откладываем на нем отрезок BD, равный сумме двух других сторон. Соединяем точку D с точкой A. Строим срединный перпендикуляр к отрезку AD. На пересечении получаем точку C. Так как треугольник DCA равносторонний, то нами построен искомый треугольник ABC.

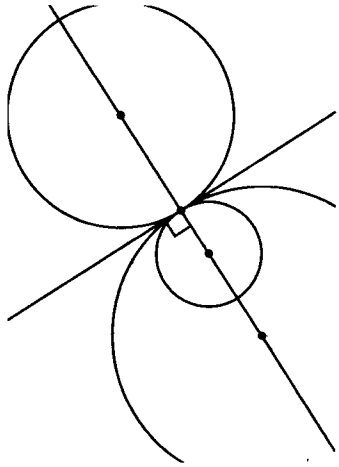


Вариант 2

1. а) Так как расстояние от центра окружности до точки расположенной на ней всегда равно радиусу окружности, то следовательно построив окружности равного радиуса, с центрами в данных точках, мы получим в местах их пересечения центры окружностей, проходящих через две данные точки, расположенные симметрично относительно данных точек. Аналогично, построив равные окружности, другого радиуса, получим другую пару симметрично расположенных точек. Очевидно, что геометрическим местом всех таких точек будет прямая, проходящая через середину отрезка образованного данными точками, перпендикулярно к нему (это следует из равенства треугольников (см. рисунок)).

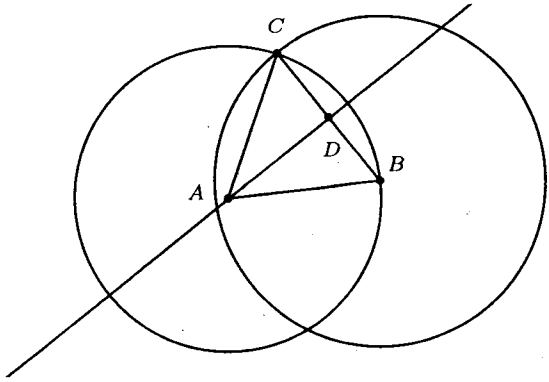


б) Так как касательная перпендикулярна радиусу окружности, то следовательно геометрическим местом точек будет прямая перпендикулярная данной прямой в данной точке.



в) Построим произвольную окружность, с центром в точке A. Отметим на окружности некоторую точку B, и с помощью циркуля проведем окружность радиусом равным длине хорды l. Очевидно, что отрезок образованны BC — хорда окружности заданной длины. Найдем середину хорды D. Проведем прямую через центр окружности и

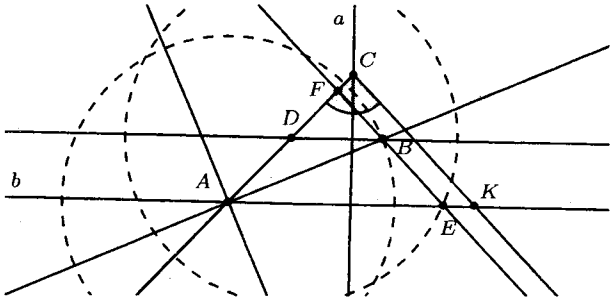
середину хорды. Так как $\triangle ABD = \triangle ACD$ (по третьему признаку) и $\angle CDB$ — развернутый, то $\angle ADB = \angle ADC$ — прямые углы. Следовательно, у любой хорды заданной длины, прямая соединяющая центр окружности с ее серединой, будет иметь постоянную длину, и следовательно геометрическим местом точек середин всех хор окружности, имеющих заданную длину будет окружность.



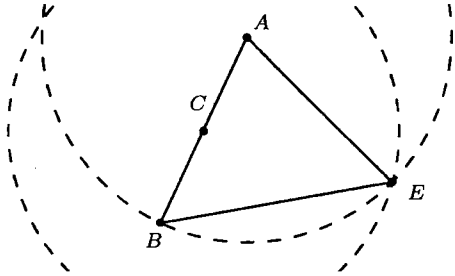
2. Равнобедренный треугольник

а) Строим заданный угол, противолежащий основанию C. Проводим биссектрису угла a. На стороне угла отмечаем произвольную точку A. Через эту точку проводим прямую b, перпендикулярную биссектрисе a. Таким образом нами найден угол при основании A. Проводим его биссектрису. Циркулем, с центром в точке A, проводим окружность радиусом равным заданной биссектрисе. В месте их пересечения отмечаем точку B. Так как биссектрисы углов при основании в равнобедренном треугольнике равны, то следовательно они оканчиваются на одинаковой высоте от основания.

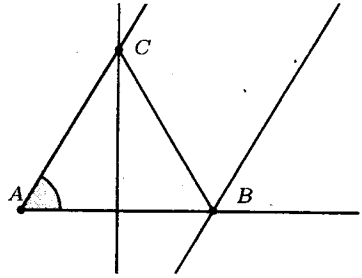
Поэтому, через точку B, проводим прямую параллельную основанию, отсекающую на угле A точку D. Из точки D, проводим окружность, радиусом равным биссектрисе, и отмечаем на основании треугольник точку E — вторую вершину треугольника при основании. Проведя прямую, через точку E, параллельную стороне угла C. Отметим на другой стороне угла C точку F — третью вершину треугольника. Так как прямая FE параллельна CK, то $\angle AFE = \angle C$. Следовательно *вспомогательный* треугольник AFE построен. Проведя прямую EB получаем, на пересечении стороны угла и прямой точку F — вершину треугольника. Попарно соединяем точки A, E, F. Искомый треугольник построен.



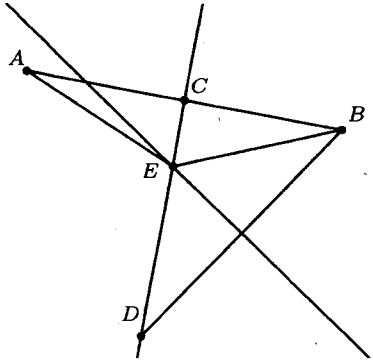
б) Строим боковую сторону AB. Так как медиана делит сторону треугольника пополам, то находим середину стороны AB и отмечаем ее точкой C. Из точки C проводим окружность радиусом равным длине заданной медианы. Так как у равнобедренного треугольника боковые стороны равны, то из точки A проводим окружность радиусом равным длине боковой стороны AB. Две окружности пересекутся в точке E — третьей вершины треугольника. Соединяем попарно вершины треугольника. Искомый треугольник построен.



в) Построим заданный угол A. Построим прямую параллельную боковой стороне на расстоянии равным заданной высоте. Точка пересечения B, построенной прямой и угла A, будет точкой вершины равностороннего треугольника при основании. Проводим срединный перпендикуляр отрезка AB, и точку его пересечения с прямой угла C — третьей вершиной треугольника. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.

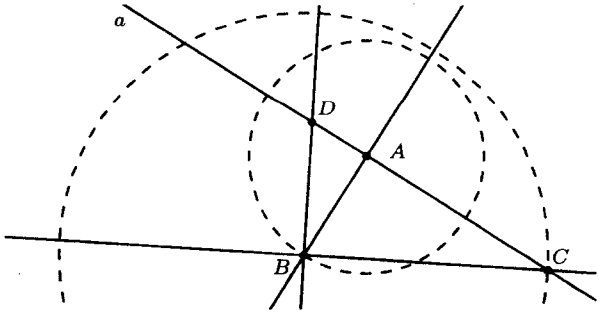


г) Построим заданное основание AD и проведем срединный перпендикуляр. От точки пересечения C на срединном перпендикуляре отложим отрезок CD, равный сумме боковой стороны и высоты. Соединим точки D и C отрезком. На данном отрезке проведем срединный перпендикуляр, который пересекается с первым срединным перпендикуляром в точке E. Так как $\triangle DEB$ равносторонний, то $\triangle ECB$ — половина искомого треугольника, а $\triangle AEB$ — искомый треугольник.

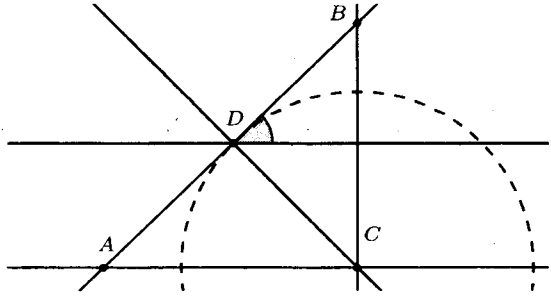


Прямоугольный треугольник

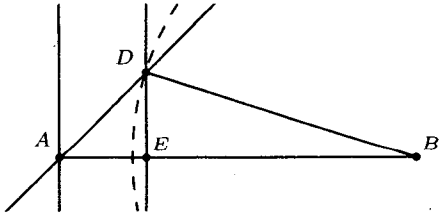
а) Проведем прямую a и отметим на ней некоторую точку A. Построим прямую перпендикулярную прямой a в точке A, и циркулем проведем окружность из центра в точке A, радиусом равным заданной высоте. Прямая и окружность пересекутся в точке B — вершина треугольника при прямом угле. Из точки B проведем окружность радиусом равным заданному катету. Окружность и прямая пересекутся в точке C — вторая вершина треугольника. Проведем к точке B перпендикулярную прямую, которая пересечет прямую a в точке D — третья вершина треугольника. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



б) Построим прямой угол C, проведем его биссектрису и циркулем отмерим его заданную величину. Проведем прямую параллельную основанию, пересекающую точку D, и построим заданный угол. Прямая на стороне которого отсечет на прямом угле точки A и C — вершины треугольника. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



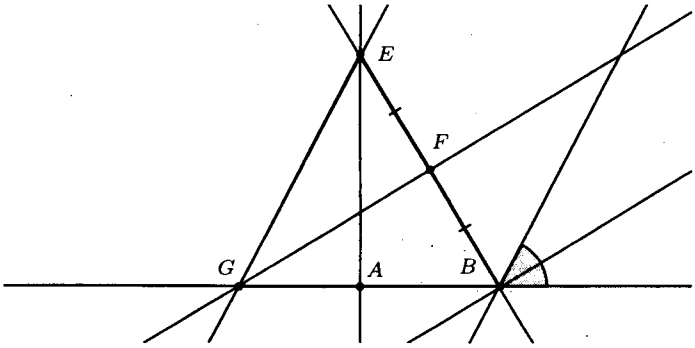
в) Построим отрезок AB — равный сумме катетов. В точке A построим прямой угол и его гипотенузу. Из центра в точке B проведем окружность радиусом равным заданной гипотенузе. Из точки пересечения биссектрисы и окружности D опустим перпендикуляр на отрезок AB и отметим точку пересечения D. Так как $AE = ED$ (по построению), то следовательно $\triangle DEB$ — искомый.



г) На прямой отмечаем заданный отрезок AB, равный разности гипотенузы и катета. Проводим

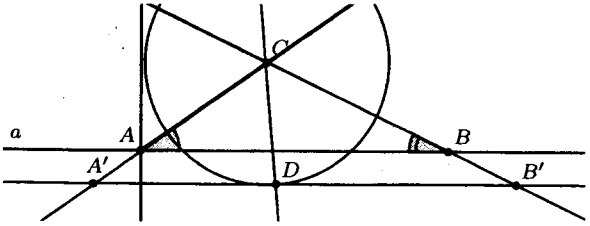
прямую перпендикулярную прямой AB в точке A. В точке B строим заданный угол B. Биссектрисой делим его пополам и проводим перпендикулярную к биссектрисе прямую в точке B, пересекающую другую прямую в точку E. Через точку E проводим прямую, параллельную прямой угла B. Она отсекает на прямой AB точку G. Точки A, E, G — вершины искомого треугольника.

Доказательство правильности построения следует из того, что треугольник GBE — равносторонний, так как равны $\angle GBE$ и BEG.

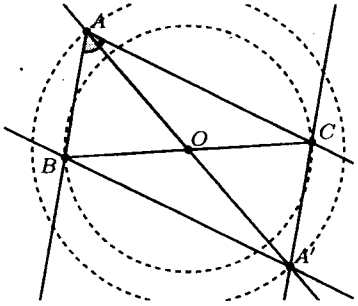


Произвольный треугольник

а) На прямой a произвольно отмечаем точки A и B, и на них строим заданные углы перекрещивающимися прямыми. Стороны углов пересекаются в точке C. Проводим биссектрису угла C и окружность радиусом равным длине заданной биссектрисы. Они пересекаются в точке D, которая лежит на стороне треугольника. Поэтому Проводим прямую параллельную прямой AB, проходящую через точку D. Она пересекает прямые углов в точках A' и B'. Искомый треугольник $A'CB'$ построен.



б) Построим прямую и отложим на ней отрезок AO равный заданной медиане. От точки A, используя AO как сторону углов построим заданные углы. Используя углы и точку O как центр построим параллелограмм $ACA'B$. Отложим от точки O, по прямой AO, отрезок OA' равный медиане. Проведем через точку A' прямые параллельные внешним сторонам углов и отметим на их пересечении точки B и C. Так как в параллелограмме диагонали делят друг друга пополам, то $BO = OC$, а следовательно $\triangle ABC$ — искомый треугольник.

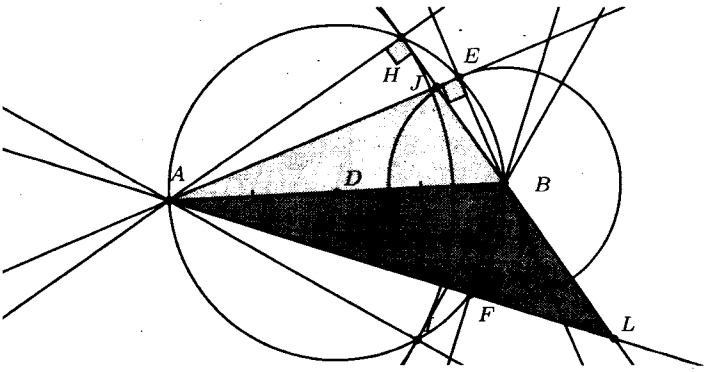


в) Строим данную сторону — отрезок AB. Проводим концов отрезка две окружности, радиусами равными данным высотам. Находим середину отрезка AD — точку D, и из нее проводим окружность радиусом равным половине отрезка AD*. Стороны

*Таким образом проводятся касательные к окружности из очки не лежащей на окружности.

треугольника будут лежать на прямых образованными точками касания с центрами окружностей A и B, так как высота перпендикулярна стороне. Внимательное рассмотрение полученного чертежа позволяет сделать вывод, что можно построить несколько треугольников (4 треугольника), из которых не равными будут треугольники AJB и ABL.

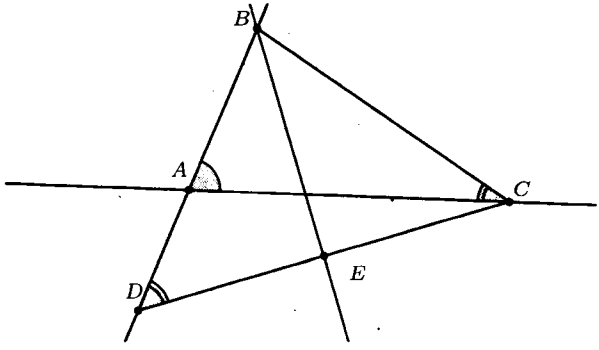
Доказательство правильности полученных треугольников следует из их построения.



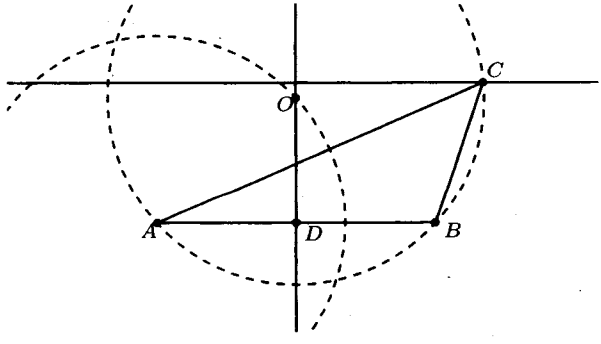
г) *Анализ.* Рассмотрим треугольник ABC с заданными углами A и C. В построенном на его основе равностороннем треугольнике DBC отрезок AD равен разности сторон противолежащих заданным углам, а $\angle D = (\angle A + \angle C)/2$ ($\angle BDE = (180° - (\angle A + \angle B))/2$, $\angle DEB = 90°$).

Построение. Перекрещивающимися прямыми строим первый заданный угол A, и на внешней стороне угла откладываем отрезок равный заданной разнице сторон AD. В точке D строим угол равный половине суммы заданных углов. Он пересекается со стороной угла A в точке C. Строим срединный перпендикуляр отрезка DC и

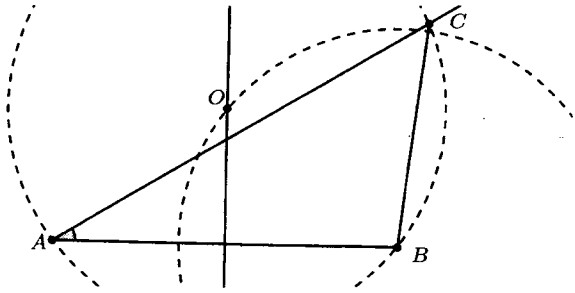
находим третью вершину треугольника B. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



д) Проводим заданную сторону AB, и прямую параллельную ей на заданной высоте. Строим срединный перпендикуляр к стороне AB, на нем находится центр описанной окружности. Из точки A проводи окружность радиусом равным радиусу описанной окружности. Она пересекается с срединным перпендикуляром в точке O — центром описанной окружности. Из центра описанной окружности строим окружность радиусом равным описанной окружности. Она пересекается с параллельной прямой в точке C. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



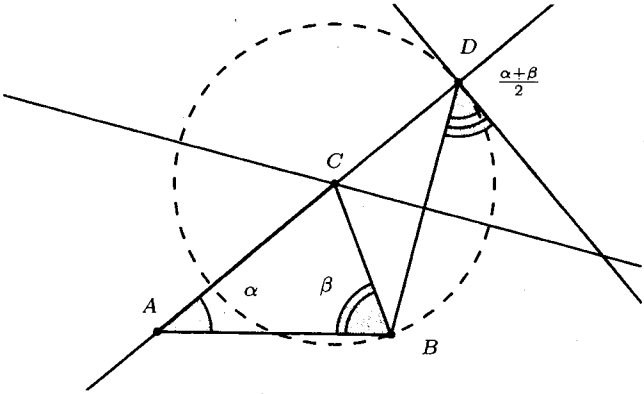
е) Строим заданную сторону сторону AB. Из точки A строим заданный угол, а из точки B проводим окружность радиусом равным описанной окружности. Восстанавливаем срединный перпендикуляр стороны AB и находим центр описанной окружности O. Из O строим описанную окружность и на пересечении ее со стороной угла отмечаем точку C — третью вершину треугольника. соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



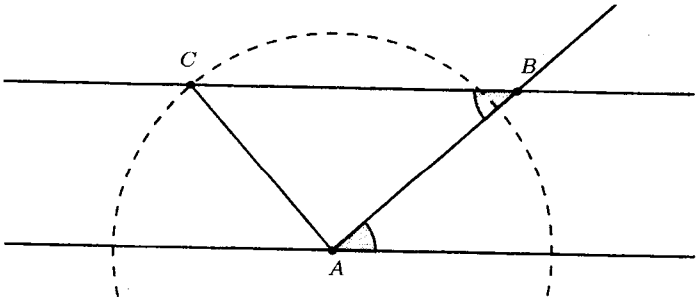
ж) Построение аналогично задаче ж) первого варианта, только первым шагом строится отрезок равный сумме двух других сторон, равный величине данного периметра без данной стороны.

з) *Анализ.* Рассмотрим $\triangle ABC$ с заданными углами α и β. На продолжении стороны AC отложим отрезок $CD = CB$; $\triangle BCD$ — равнобедренный, поэтому $\angle CBD = \angle CDB = 90° - \frac{\alpha+\beta}{2}$. Проведем перпендикулярную прямую в точке D. Угол D образованный данной прямой и DB равен $\frac{\alpha+\beta}{2}$.
Построение. Проводим отрезок AD равный сумме противолежащих сторон. В точке A строим заданный угол α, а в точке B проводим перпендикулярную прямую и строим на ней угол равный полусумме заданных углов $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Данные стороны углов пересекаются в точке B — вершине

треугольника. Затем строи срединный перпендикуляр к отрезку BD и получаем третью вершину треугольника C. Искомый треугольник построен.



и) Проводим произвольную прямую и на ней отмечаем точку A. Строим на ней угол A равный заданному. На расстоянии, равным заданной высоте, строим параллельную прямую. Полученный угол B будет равен углу A (как внутренние накрест лежащие), а точка B — второй вершиной треугольника. Из точки A проводим окружность, радиусом равным заданной стороны. Она пересекает параллельную прямую в точке C. Искомый треугольник ABC построен.



КП-5. Годовая контрольная работа

Вариант А1

1. $\angle COD = 180° - \angle AOC = 180° - 100° = 80°$, $\angle D = 180° - \angle BCD - \angle COD = 180° - 55° - 80° = 45°$. $BO = DO$, $\angle B = \angle D$, $\angle BOA = \angle DOC$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle ABO = \triangle CDO$.

2. $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C$, $\angle A + \angle C + \angle B = 2\angle A + 42° = 180°$, $2\angle A = 138°$, $\angle A = \angle C = 69°$.

3. $\triangle ABC$, ADC — равносторонние $\Rightarrow \angle BCA = \angle CAD$ (накрест лежащие) $\Rightarrow AB \| CD$.

Вариант А2

1. $\angle COD = 180° - \angle AOC = 180° - 110° = 70°$, $\angle C = 180° - \angle ADC - \angle COD = 180° - 45° - 70° = 65°$. $AB = CD$, $\angle B = \angle C$, $\angle BOA = \angle DOC$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle ABO = \triangle CDO$.

2. $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C$, $\angle A + \angle C + \angle B = 156° + \angle B = 180°$, $\angle B = 180° - 156° = 24°$, $2\angle A = 156°$, $\angle A = \angle C = 78°$.

3. $\triangle ABC$, ADC — равнобедренные прямоугольные $\Rightarrow \angle BCA = \angle CAD = 45°$ (накрест лежащие) $\Rightarrow AB \| CD$.

Вариант Б1

1. $\angle CAD = 90° - \angle ADC = 90° - 50° = 40°$, $\angle CAD = \angle ADB$, $\angle B = \angle C$, AD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle DCA$.

2. $\angle 1 = \angle 2, 3\angle 1 = \angle 3$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 1 + 3\angle 1 = 5\angle 1 = 180°$, $\angle 1 = \angle 2 = 36°$, $\angle 3 = 3 \cdot 36° = 108°$.

3. $\triangle ADB = \triangle ADC$ (по второму признаку), значит $AC = BD$.

Вариант Б2

1. $\angle CAD = 90° - \angle ADB - \angle CDA = 90° - 40° - 10° = 40°$, $\angle CAD = \angle DBA$, $\angle B = \angle C$, AD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle DCA$.

2. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = 4\angle 3$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 4\angle 3 + 4\angle 3 + \angle 3 = 9\angle 3 = 180°$, $\angle 3 = 20°$, $\angle 1 = \angle 2 = 4 \cdot 20° = 80°$.

3. $\triangle ACB = \triangle BCD$ (по второму признаку), значит $AB = CD$.

Вариант В1

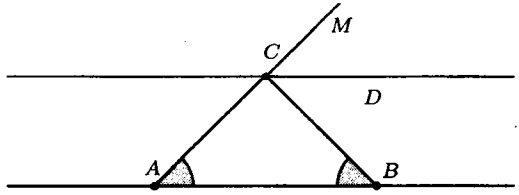
1. $AB = CD$, $\angle B = \angle C$, AD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD \Rightarrow AO = OD \Rightarrow \triangle AOD$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle OAD = \angle ODA$, $\angle AOD = 180° - \angle BOA = 180° - 40° = 140°$, $\angle OAD = \angle ODA = 40° : 2 = 20°$.

2. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 + \angle 2 = 140°$, $2\angle 1 = 140°$, $\angle 1 = \angle 2 = 70°$, $\angle 3 = 180° - 140° = 40°$.

$\angle 1 + \angle 3 = 140°$, $\angle 2 = \angle 1 = 180° - 140° = 40°$, $\angle 3 = 180° - \angle 1 - \angle 2 = 180° - 40° - 40° = 100°$.

3. Пусть в равностороннем треугольнике ABC задан луч CD — биссектриса внешнего угла BCM, смежного с углом при вершине C. Тогда $\angle BCM = \angle A + \angle B = 2\angle B$. Поэтому $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BCM = \angle B$.

Так как углы BCD и ABC — накрест лежащие при прямых AB и CD и секущей CB равны, то прямые AB и CD параллельны.

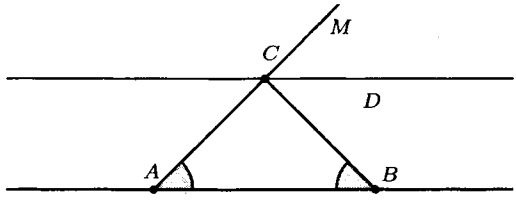


Вариант В2

1. $AB = CD$, $\angle B = \angle C$, AD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD \Rightarrow AO = OD \Rightarrow \triangle AOD$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle OAD = \angle ODA$, $\angle COD = 90° - \angle CDO = 90° - 20° = 70° \angle AOD = 180° - \angle COD = 180° - 70° = 110°$, $\angle OAD = \angle ODA = 70° : 2 = 35°$.

2. $\angle 1 = \angle 2, 180 - \angle 1 = 130°$, $\angle 1 = \angle 2 = 50°$, $\angle 3 = 180° - 100° = 80°$.
$180° - \angle 3 = 140°$, $\angle 3 = 180° - 140° = 40°$, $\angle 1 = \angle 2 = 140° : 2 = 70°$.

3. Пусть в треугольнике ABC задан луч CD — биссектриса внешнего угла BCM, смежного с углом при вершине C. Тогда $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BCM = \angle B$, $\angle A = \angle MCD = \angle BCB = \angle B$. Следовательно $\triangle ABC$ — равносторонний.



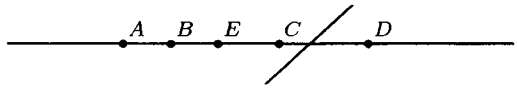
Геометрия (по учебнику Атанасяна)

Начальные геометрические сведения

СА-1. Прямая и отрезок. Луч и угол

Вариант А1

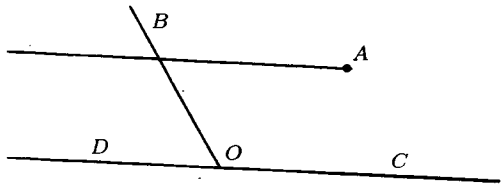
1. а) B, C, D;



б), в)

2. а) Луч AK параллелен OC.

б)

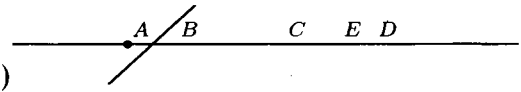


в) Точка A не лежит во внутренней области угла BOD.

3. Могут, если будут пересекаться в одной точке.

Вариант А2

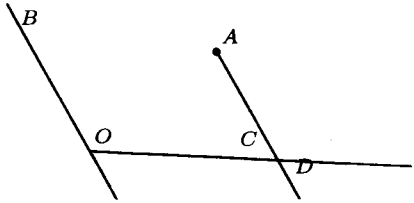
1. а) A, B, C;



б), в)

2. а) Луч AK параллелен OB.

б)

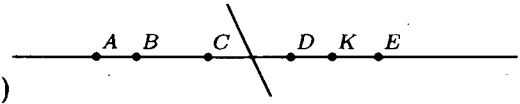


в) Точка A не лежит во внутренней области угла COD.

3. Могут, если будут пересекаться как стороны треугольника.

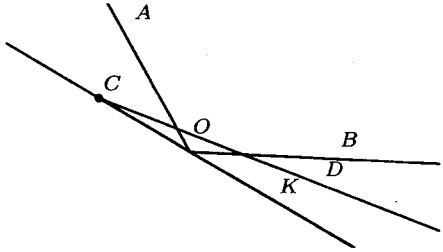
Вариант Б1

1. а) A, B;



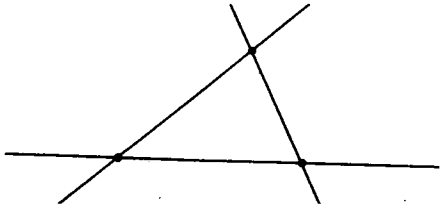
б), в)

2. а), б)



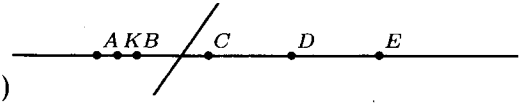
в) Точка B лежит во внутренней области COK.

3. Три прямые, нарисуйте треугольник.



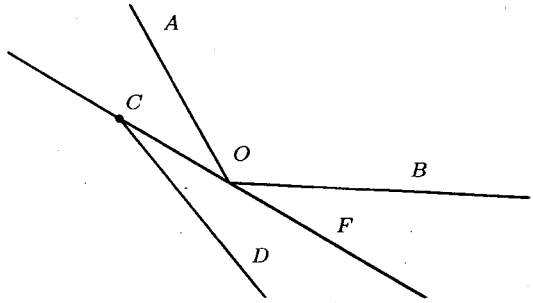
Вариант Б2

1. а) D, E;



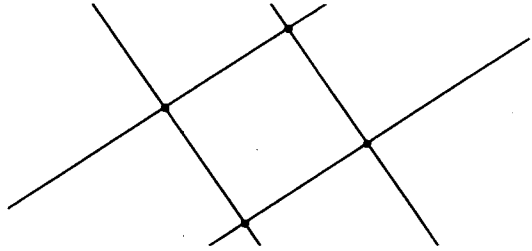
б), в)

2. а), б)



в) Точка B лежит во внутренней области AOF.

3. Четыре прямые, нарисуйте квадрат.

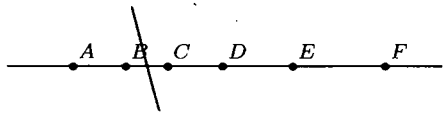


Вариант В1

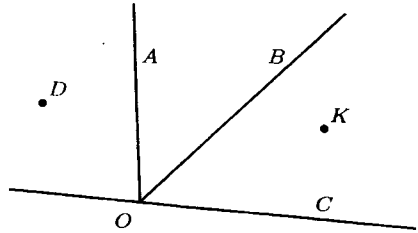
1. а) B, C, D;

б) E;

в) BD, BF, BF, AC.

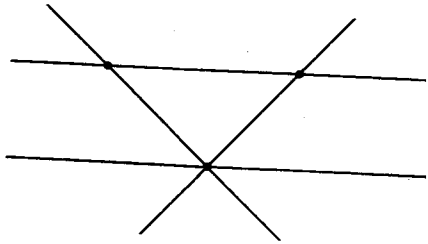


2. а), б)



в) $\angle AOC$ и $\angle BOC$.

3. Да.

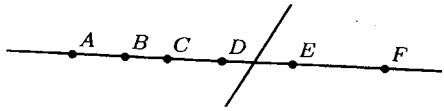


Вариант В2

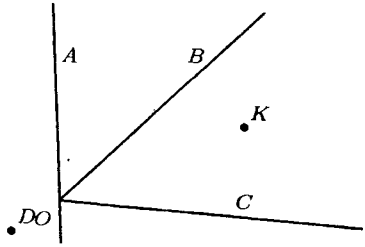
1. а) C, D, E;

б) B;

в) DF, AE, BE, CE.

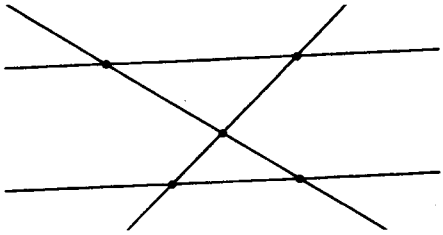


2. а), б)



в) $\angle AOC$ и $\angle BOC$.

3.



СА-2. Сравнение измерение отрезков

Вариант А1

1. а) $BC = AC - AB = 16 - 11 = 5$; $AB > BC$;
б) O — середина AC, $OC = AC : 2 = 16 : 2 = 8$; $BO = OC - BC = 8 - 5 = 3$.

2. $M : NK = MN + MK = 3 + 6 = 9$.

3. Пусть точка C — середина отрезка AB, тогда для выполнения условия $AS > BS$ точка S должна располагаться на отрезке CB.

Вариант А2

1. а) $AB = AC - BC = 20 - 13 = 7$; $AB < BC$;
б) O — середина AC, $OC = AC : 2 = 20 : 2 = 10$; $BO = BC - OC = 13 - 10 = 3$.

2. $K : MK + NK = 2 + 6 = 8$.

3. Пусть точка C — середина отрезка AB, тогда для выполнения условия $AS < BS$ точка S должна располагаться на отрезке AC.

Вариант Б1

1. а) $AB = BC + 5$; $AB + BC = BC + 5 + BC = 2BC + 5 = 21{,}2BC = 16$, $BC = 8$, $AB = 8 + 5 = 13$;
б) O — середина AC, $OC = AC : 2 = 10{,}5$; $OB = AB - OC = 13 - 10{,}5 = 2{,}5$.

2. $NK = MK + MB = 4 + 9 = 13$; $NK = MK - MN = 9 - 4 = 5$.

3. См. решение **3.** вариант А1.

Вариант Б2

1. а) $BC = 3AB$; $AB + BC = AB + 3AB = 4AB = 28$, $AB = 7$, $BC = 3 \cdot 7 = 21$;

б) O — середина AC, $OC = AC : 2 = 28 : 2 = 14$, $OB = OC - AB = 14 - 7 = 7$.

2. $MK = MN + NK = 7 + 5 = 12$; $MK = MN - NK = 7 - 5 = 2$.

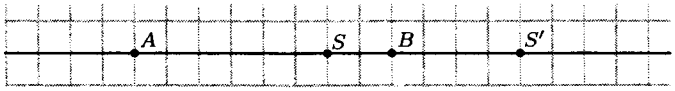
3. См. решение **3.** вариант А2.

Вариант В1

1. $AC = 3{,}5AB$; $AB + BC = AC$, $AB + 10 = 3{,}5AB$; $2{,}5AB = 10$; $AB = 4$, $AC = 3{,}5 \cdot 4 = 14$.

2. $MP = MN + NK + KP = 3 + 1 + 4 = 8$; $MP = MN - NK + KP = 3 - 1 + 4 = 6$; $MP = KP + NK - MN = 4 + 1 - 3 = 2$; $MP = MN + NK - KP = 3 + 1 - 4 = 0$.

3.

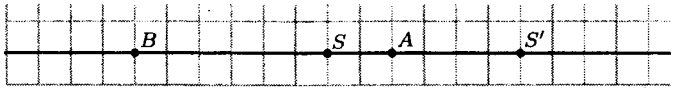


Вариант В2

1. $BC = 0{,}6AC$; $AB + BC = AC$; $4 + 0{,}6AC = AC$; $4 = 0{,}4AC$; $AC = 10$, $BC = AC - AB = 10 - 4 = 6$.

2. $MP = MN + NK + KP = 2 + 3 + 5 = 10$; $MP = MN - NK + KP = 2 - 3 + 5 = 4$; $MP = KP + NK - MN = 5 + 3 - 2 = 6$; $MP = MN + NK - KP = 2 + 3 - 5 = 0$.

3.



СА-3. Сравнение и измерение углов

Вариант А1

1. а) $\angle AOB = 3\angle BOC$, $\angle AOB + \angle BOC = 3\angle BOC + \angle BOC = 4\angle BOC = 120°$, $\angle BOC = 30°$; $\angle AOB = 3\angle BOC = 3 \cdot 30° = 90°$.

б) $\angle BOD = \angle AOB - \angle AOC : 2 = 90° - 120° : 2 = 90° - 60° = 30°$.

2. $\angle POM = \angle KOM - \angle POK = 90° - 70° = 20°$, $\angle MOL = 2 \cdot \angle POM = 2 \cdot 20° = 40°$.

3. 4 угла.

Вариант А2

1. а) $4\angle AOB = \angle BOC$, $\angle AOB + \angle BOC = 4\angle AOB + \angle BOC = 5\angle AOB = 150°$, $\angle AOB = 30°$; $\angle BOC = 3\angle AOB = 4 \cdot 30° = 120°$.

б) $\angle BOD = \angle BOC - \angle AOC : 2 = 120° - 150° : 2 = 120° - 75° = 45°$.

2. $\angle POM = \angle KOM - \angle KOP = 90° - 50° = 40°$, $\angle MOL = 2 \cdot \angle POM = 2 \cdot 40° = 80°$.

3. 4 угла.

Вариант Б1

1. а) $\angle AOC = 3\angle AOB$, $\angle BOC + \angle AOB = \angle AOC$, $80° + \angle AOB = 3\angle AOB$, $2\angle AOB = 80°$, $\angle AOB = 40°$; $\angle AOC = 3\angle AOB = 3 \cdot 40° = 120°$.

б) $\angle BOD = \angle BOC - \angle AOC : 2 = 80° - 120° : 2 = 80° - 60° = 20°$.

2. $\angle MOK = 2 \cdot \angle POM = 2 \cdot 15° = 30°$, $\angle MON = 2 \cdot \angle MOK = 2 \cdot 30° = 60°$, $\angle PON = \angle MON - \angle POM = 60° - 15° = 45°$.

3. 8 углов.

Вариант Б2

1. а) $\angle AOC = 4\angle AOB$, $\angle BOC + \angle AOB = \angle AOC$, $60° + \angle AOB = 4\angle AOB$, $3\angle AOB = 60°$, $\angle AOB = 20°$; $\angle AOC = 4\angle AOB = 4 \cdot 20° = 80°$.

б) $\angle BOD = \angle BOC - \angle AOC : 2 = 60° - 80° : 2 = 60° - 40° = 20°$.

2. $\angle MOK = \angle KON = 2\angle POK$, $\angle POM = \angle POK + \angle KON = \angle POK + 2\angle POK = 3\angle POK = 75°$, $\angle POK = 25° = \angle POM$.

3. 8 углов.

Вариант В1

1. $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3 + 10°$, $\angle 1 + \angle 3 = 60°$; $\angle 1 = 60° - \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 + 10°$, $2\angle 1 = 70° + \angle 2$, $\angle 2 = 70° - 2\angle 1$, $\angle 3 = 60° - \angle 1$; $\angle 1 = 70° - 2\angle 1 + 60° - \angle 1 = 130° - 3\angle 1$, $4\angle 1 = 130°$, $\angle 1 = 32{,}5°$, $\angle 3 = 60° - \angle 1 = 60° - 32{,}5° = 27{,}5°$, $\angle 2 = 70° - 2 \cdot 32{,}5° = 70° - 65° = 5°$.

2. $\angle KOM = \angle MON$, $\angle MOL = \angle LOP$, $\angle KOL = 2\angle KOM + \angle NOL = 80°$; $\angle POM = \angle KOM + 2\angle NOL = 70°$, $\angle KOL + \angle POM = 3\angle KOM + 3\angle NOL = 150°$, $\angle KOM + \angle KON = 50°$, $\angle KOP = 2 \cdot (\angle KOM + \angle KON) = 2 \cdot 50° = 100°$.

3. 4 угла.

Вариант В2

1. $\angle 2 = \angle 1 + \angle 3 + 10°$, $\angle 1 + \angle 2 = 60°$, $\angle 1 = \angle 2 - \angle 3 - 10° = 60° - \angle 2$, $2\angle 1 = 50° - \angle 3$, $\angle 3 = 2\angle 1 - 50°$, $\angle 2 = 60° - \angle 1$; $60° - \angle 1 = \angle 1 + 2\angle 1 - 50° + 10°$, $4\angle 1 = 100°$, $\angle 1 = 25°$, $\angle 2 = 60° - 25° = 35°$, $\angle 3 = 2 \times 25° - 50° = 0°$.

2. $\angle KOM = \angle MON$, $\angle MOL = \angle LOP$, $\angle LOK = 2\angle KOM + \angle NOL = 65°$; $\angle POM = \angle KOM + 2\angle NOL = 55°$, $\angle LOK + \angle POM = 3\angle KOM + 3\angle NOL = 120°$, $\angle KOM + \angle KON = 40°$, $\angle KOP = 2 \cdot (\angle KOM + \angle KON) = 2 \cdot 40° = 80°$.

3. 2 угла.

СА-4. Смежные и вертикальные углы. Перпендикулярные прямые

Вариант А1

1. $\angle 1 = 2\angle 2$, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle 2 + \angle 2 = 3\angle 2 = 180°$, $\angle 2 = 60°$, $\angle 1 = 2\angle 2 = 2 \cdot 60° = 120°$.

2. $\angle 1 = 29°$, $\angle 2 = 180° - 29° = 151°$, $\angle 3 = 29° + 151° + 29° = 209°$, $\angle 4 = 151° + 29° + 151° = 321°$.

3. $\angle COB = 180° - \angle AOC = 180° - 35° = 145°$, $\angle COD = \angle COB - \angle DOC = 145° - 180° : 2 = 145° - 90° = 55°$.

Вариант А2

1. $\angle 1 = 8\angle 2$, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 1 + \angle 2 = 8\angle 2 + \angle 2 = 9\angle 2 = 180°$, $\angle 2 = 20°$, $\angle 1 = 8\angle 2 = 8 \cdot 20° = 160°$.

2. $\angle 1 = 134°$, $\angle 2 = 180° - 134° = 46°$, $\angle 3 = 46° + 134° + 46° = 226°$, $\angle 4 = 134° + 46° + 134° = 314°$.

3. $\angle AOB = \angle AOD - \angle COD = 180° : 2 - 50° = 90° - 50° = 40°$.

Вариант Б1

1. $\angle 1 = \angle 2 + 30°$, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 2 + 30° + \angle 2 = 180°$, $2\angle 2 = 150°$, $\angle 2 = 75°$, $\angle 1 = \angle 2 + 75° = 75° + 30° = 105°$.

2. $\angle 1 = 360° - 307° = 53°$, $\angle 2 = 180° - 53° = 127°$, $\angle 3 = 180° + 53° = 233°$.

3. $\angle DOB = 90° - \angle AOB = 90° - 70° = 20°$, $\angle DOB = 90° + \angle AOB = 90° + 70° = 160°$.

Вариант Б2

1. $\angle 1 = \angle 2 + 50°$, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 2 + 50° + \angle 2 = 180°$, $2\angle 2 = 130°$, $\angle 2 = 65°$, $\angle 1 = \angle 2 + 65° = 65° + 50° = 115°$.

2. $\angle 1 = 212° : 2 = 106°$, $\angle 2 = 180° - 106° = 74°$, $\angle 3 = 180° + 74° = 254°$, $\angle 4 = 180° + 106° = 286°$.

3. $\angle DOB = \angle BOC - 90° = 100° - 90° = 10°$, $\angle DOB = 90° + \angle BOC = 90° + 100° = 190°$.

Вариант В1

1. $180° = 4{,}5 \cdot (\angle 1 - \angle 2)$, $\angle 1 - \angle 2 = 40°$, $\angle 1 = \angle 2 + 40°$, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + 40° + \angle 2 = 2\angle 2 + 40° = 180°$, $2\angle 2 = 140°$, $\angle 2 = 70°$, $\angle 1 = \angle 2 + 40° = 70° + 40° = 110°$.

2. $\angle = 60°$, $\angle 2 = 180° - 60° = 120°$, $\angle 3 = 180° + 60° = 240°$, $\angle 4 = 180° + 120° = 300°$.

3. $\angle 1 = 90° - 70° = 20°$ — наименьший острый угол; $\angle 2 = 180° - 20° = 160°$ — наибольший тупой угол.

Вариант В2

1. $180° = 3{,}6 \cdot (\angle 1 - \angle 2)$, $\angle 1 - \angle 2 = 50°$, $\angle 1 = \angle 2 + 50°$, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + 50° + \angle 2 = 2\angle 2 + 50° = 180°$, $2\angle 2 = 130°$, $\angle 2 = 65°$, $\angle 1 = \angle 2 + 50° = 65° + 50° = 115°$.

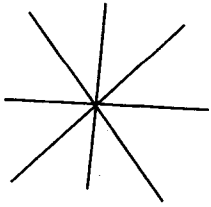
2. $\angle 1 = 360° - 240°$, $\angle 2 = 180° - 120° = 60°$, $\angle 3 = 180° + 60° = 240°$, $\angle 4 = 180° + 120° = 300°$.

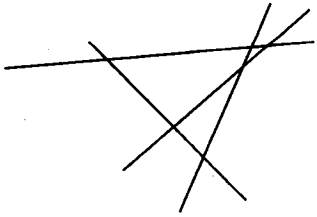
3. $\angle 1 = 180° - 115° = 65°$ — наибольший острый угол; $\angle 1 = 90° - 65° = 25°$ — наименьший острый угол.

СА-5. Дополнительные задачи об отрезках и углах

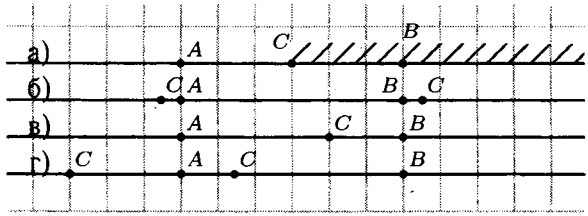
Вариант 1

1. Минимально — 1, максимально — 6 точек пересечения.





2.



3. Точки M, N, K должны находится на одной прямой, так как если третья точка лежит вне прямой соединяющие две другие точки, то расстояние между крайними точками ломанной MNK не длстигнет минимального или максимального значения. Поэтому минимально расстояние между точками M и K будет $MN - NK = 10 - 6 = 4$, а максимальное $MN + MK = 10 + 6 = 16$.

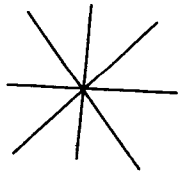
4. Обозначим меньший смежный угол α, а больший β, $\alpha + \beta = 180°$. Искомый угол равен $90° - \alpha = (180° - 2\alpha)/2 = (\beta + \alpha - 2\alpha)/2 = (\beta - \alpha)/2$.

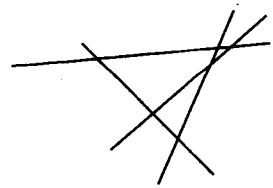
5. Кроме него еще три.

6. Накрест лежащие углы образованные биссектрисой и сторонами одного угла равны углам образованным биссектрисой и сторонами другого угла. Следовательно стороны углов лежат на продолжении сторон друг друга, а так как у этих углов общая вершина, значит они вертикальные.

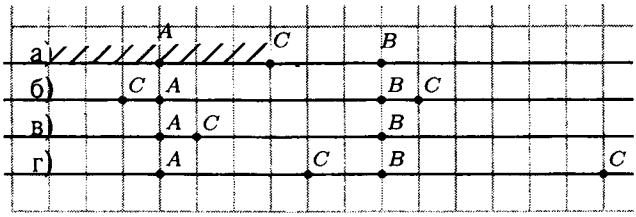
Вариант 2

1. Минимально — 1, максимально — 6 точек пересечения.





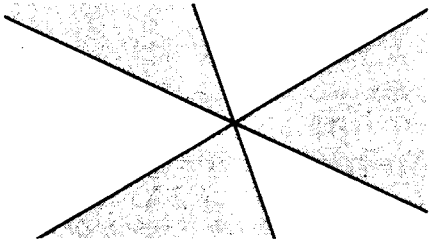
2.



3. Точки M, N, K должны находится на одной прямой, так как если третья точка лежит вне прямой соединяющие две другие точки, то расстояние между крайними точками ломанной MNK не длстигнет минимального или максимального значения. Поэтому минимально расстояние между точками M и K будет $MN - NK = 8 - 7 = 1$, а максимальное $MN + MK = 8 + 7 = 15$.

4. $|\alpha - \beta| = |\alpha - (180 - \alpha)| = |2\alpha - 180| = 2|\alpha - 90|$.

5. Две тройки.



6. Пусть один угол равен α, а другой β. Тогда прямой угол образованный биссектрисами равен полусумме углов: $(\alpha + \beta)/2 = 90° \Rightarrow \alpha + \beta = 180°$, а так как углы имеют общую сторону, то они смежные.

КА-1. Начальные геометрические сведения

Вариант А1

1. а) $CD = AB - AC - BD = 8{,}4 - 2{,}1 - 1{,}3 = 5$;
б) D.

2. а) $\angle ABM = 180° - \angle MBN - \angle NBC = 180° - 2\angle MBN = 180° - 2 \cdot 55° = 180° - 110° = 70°$;
б) $\angle ABK = \angle NBC = 55°$;
в) $\angle CBK = 180° + \angle ABK = 180° + 55° = 235°$.

3. 2 пары.

Вариант А2

1. а) $AC = AB - BD - CD = 9{,}2 - 1{,}9 - 6{,}3 = 1$;
б) D.

2. а) $\angle NBC = 180° - \angle ABM - \angle MBN = 180° - 2\angle MBN = 180° - 2 \cdot 65° = 180° - 130° = 50°$;
б) $\angle CBK = \angle ABM = 65°$;
в) $\angle ABK = 180° + \angle CBK = 180° + 65° = 245°$.

3. 2 пары.

Вариант Б1

1. а) $AD = AC + CB - BD = 1{,}2 + 5 - 3{,}8 = 2{,}4$;
б) D.

2. а) $\angle NBC + 15° = \angle MBN + 15° = \angle ABM$, $\angle NBC + \angle MBN + \angle ABM = 3\angle NBC + 30° = 180°$; $3\angle NBC = 150°$, $\angle NBC = 50°$.
б) $\angle ABK = \angle MBC = 2\angle NBC = 2 \cdot 50° = 100°$;
в) $\angle NBK = \angle NBC + \angle CBK$, $\angle CBK = \angle MAB$ — вертикальные, $\angle NBK = 2\angle NBC + 15° = 100° + 15° = 115°$.

3. $\angle(bc) = 110°$ — тупой, $\angle(bc) = 70°$ — острый, $\angle(ad) = \angle(bc) = 70°$.

Вариант Б2

1. а) $BD = AC + CB - AD = 2{,}4 + 7{,}6 - 6 = 4$;
б) D.

2. а) $\angle ABM + 15° = \angle MBN + 15° = \angle NBC$, $\angle NBC + \angle MBN + \angle ABM = 3\angle\angle ABM + 30° = 180°$; $3\angle ABM = 150°$, $\angle ABM = 50°$.

б) $\angle CBK = \angle ABN = 2\angle ABM = 2 \cdot 50° = 100°$;

в) $\angle MBK = \angle ABM + \angle ABK$, $\angle MBK = \angle NBC$ — вертикальные, $\angle NBK = 2\angle ABM + 15° = 100° + 15° = 115°$.

3. $\angle(bd) = 20°$ — острый, $\angle(bc) = 180° - 20° = 160°$.

Вариант В1

1. а) $CD = BC + AD - AB = 7{,}2 + 6{,}9 - 11 = 14{,}1 - 11 = 3{,}1$;

б) D.

2. а) $\angle NBC = \angle MBN = 0{,}625\angle ABM$, $\angle NBC + \angle MBN + \angle ABM = 0{,}625\angle ABM + 0{,}625\angle ABM + \angle ABM = 2{,}25\angle ABM = 180°$, $\angle ABM = 80°$, $\angle NBC = 0{,}625\angle ABM = 0{,}625 \cdot 80° = 50°$.

б) $\angle ABM = \angle CBK$, $\angle MBC = \angle ABK$;

в) $2\angle 1 = \angle NBK = \angle ABN + \angle ABK = \angle ABN + \angle MBC = \angle ABM + \angle NBC + 2\angle NBC = \angle ABM + 3\angle NBC = 80° + 3 \cdot 50° = 80° + 150° = 230°$, $\angle 1 = 115°$.

3. $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, $2\angle 1 + \angle 2 = 140°$, $\angle 1 = 50°$.

Вариант В2

1. а) $CD = AD + BC - AB = 6{,}1 + 7{,}7 - 10 = 3{,}8$;

б) D.

2. а) $\angle NBC = \angle MBN = 0{,}625\angle ABM$, $\angle NBC + \angle MBN + \angle ABM = 0{,}625\angle ABM + 0{,}625\angle ABM + \angle ABM = 2{,}25\angle ABM = 180°$, $\angle ABM = 80°$, $\angle NBC = 0{,}625\angle ABM = 0{,}625 \cdot 80° = 50°$.

б) $\angle ABM = \angle CBK$, $\angle MBC = \angle ABK$;

в) $2\angle 1 = \angle NBK = \angle ABN + \angle ABK = \angle ABN + \angle MBC = \angle ABM + \angle NBC + 2\angle NBC = \angle ABM + 3\angle NBC = 80° + 3 \cdot 50° = 80° + 150° = 230°$, $\angle 1 = 115°$.

3. $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, $2\angle 1 + \angle 2 = 110°$, $\angle 1 = 30°$.

Треугольники

СА-6. Треугольник. Первый признак равенства треугольников

Вариант А1

1. $AC = MK = 4$, $\angle C = \angle K = 75°$.

2. $AO = OB$, $CO = OC$, $\angle AOD = \angle COB$ — вертикальные $\Rightarrow \triangle AOD = \triangle BOC$.

3. $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow AM = A_1M_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1 \Rightarrow \triangle AMC = \triangle A_1M_1C_1 \Rightarrow CM = C_1M_1$.

Вариант А2

1. $NK = BC = 8$, $\angle K = \angle C = 32°$.

2. $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$, AC — общая $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ADC$.

3. $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow AD = A_1D_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1 \Rightarrow \triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1 \Rightarrow BD = B_1D_1$.

Вариант Б1

1. $\angle M < \angle K$.

2. $AC = DC$, $\angle 1 = \angle 2$. CB — общая $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DBC$.

3. $\triangle AOB = \triangle COD \Rightarrow BO = OD$, $AO = OC$, $\angle BOC = \angle AOD$ — вертикальные $\Rightarrow \triangle BOC = \triangle AOD \Rightarrow AD = BC$.

Вариант Б2

1. $AB = MK$, $AC = MN \Rightarrow MK > MN$.

2. $AD = BC$. $\angle 1 = \angle 2$, BD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CBD$.

3. $\triangle AOD = \triangle COB \Rightarrow AO = OC$, $BO = OD$, $\angle BOA = \angle COD \Rightarrow \triangle BOA = \triangle COD \Rightarrow AB = CD$.

Вариант В1

1. $BC = KM$, $AC = MN \Rightarrow \angle B = \angle K$.

2. $AC = BD$, $\angle CAD = \angle BDA$, AD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle DCA$.

3. $\triangle ABC = \triangle CDB \Rightarrow AB = CD$, $BC = AD$, BD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CDB$.

Вариант В2

1. $MN = AB$.

2. $AB = BC$, $AD = CE$, $\angle B$ — общий $\Rightarrow \triangle ABE = \triangle CBD$.

3. $\triangle ABD = \triangle CDB \Rightarrow AB = CD$, $BC = AD$, AC — общая $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDB$.

СА-7. Медиана, биссектриса и высота треугольника. Свойство равнобедренного треугольника

Вариант А1

1. a — основание, b — боковая, $a + 2 = b$, $a + 2b = a + 2a + 4 = 34, 3a = 30$, $a = 10$, $b = a + 2 = 10 + 2 = 12$.

2. $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow AB = BC$, BD — медиана, биссектриса, высота $\Rightarrow AB = BC$, $\angle ABM = \angle MBC$, MB — общая $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle CBM$.

3. $MN = NK \Rightarrow \triangle MNK$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle M = \angle K$, $MA = AK$ (K — середина), $MN = NK \Rightarrow \triangle MBA = \triangle CAK \Rightarrow \angle MAB = \angle KAC$.

Вариант А2

1. a — основание, b — боковая, $a = b + 4$, $a + 2b = b + 4 + 2b = 28, 3b = 24$, $b = 8$, $a = b + 4 = 8 + 4 = 12$.

2. $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow AB = BC$, BD — медиана, биссектриса, высота $\Rightarrow AB = BC$, $\angle ABM = \angle MBC$, MB — общая $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle CBM$.

3. $MN = NK \Rightarrow \triangle MNK$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle M = \angle K$, $MA = AK$(K — середина), $MN = NK \Rightarrow \triangle MBA = \triangle CAK \Rightarrow \angle MBA = \angle KCA$.

Вариант Б1

1. a — основание, b — боковая, BD — медиана, биссектриса, высота $\Rightarrow AD = DC = AC : 2$, $PABD = AB + AD + BD = AB + AD + 7 = 18$, $AB + AD = 13$, $PABC = AB + AC + BC = 2AB + 2AD = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot 13 = 26$.

2. $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow AB = BC$, BD — медиана, биссектриса, высота $\Rightarrow \angle ABM = \angle MBC$, $AB = CB$, BD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BCD \Rightarrow \angle ADB = \angle BDC$, $AM = MC$, MD — общая $\Rightarrow \triangle ADM = \triangle MDC \Rightarrow AD = DC \Rightarrow \triangle ADC$ — равнобедренный.

3. $MN = NK \Rightarrow \triangle MNK$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle M = \angle K$, $MA = KB$, MK — общая $\Rightarrow \triangle MAK = \triangle BMK \Rightarrow MB = KA = 3$.

Вариант Б2

1. a — основание, b — боковая, BD — медиана, биссектриса, высота $\Rightarrow AD = DC = AC : 2$, $PABC = 2AB + AC = 38$, $AB + AD = 19$, $PBDC = AB + AD + BD = 19 + 8 = 27$.

2. $\triangle ADC$ — равнобедренный $\Rightarrow AD = DC$, MD — медиана, биссектриса, высота $\Rightarrow \angle ADM = \angle MDC$, $AD = CD$, BD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BCD \Rightarrow \angle ADB = \angle BDC$, $AM = MC$, MB — общая $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle MBC \Rightarrow AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный.

3. $MN = NK$, $NA = NB$, $\angle N$ — общая $\Rightarrow \triangle NAK = \triangle BMN \Rightarrow NA = NB = 7$.

Вариант В1

1. $PADC = PDBC - 19$, $PADC = AD + AC + DC$, $PDBC = AD + BC + DC \Rightarrow AD + AC + DC = AD + BC + DC - 19$.

$AC = BC - 19$, $PABC = AC + BC + AB = BC - 19 + 2BC = 3BC - 19 = 53{,}3BC = 72$, $BC = AB = 24$, $AC = 24 - 19 = 5$.

2. $AB = BC$, AA_1 и CC_1 — медианы $\Rightarrow BA_1 = BC_1$, $AB = BC$, $\angle B$ — общий $\Rightarrow \triangle BAA_1 = \triangle BCC_1$.

3. $\triangle MBN$ — равнобедренный $\Rightarrow MB = NB$, $\angle M = \angle N \Rightarrow \angle AMB = \angle BNC$ — их смежные углы; $AN = MC \Rightarrow AM = AN - MN = MC - MN = NC$; $MB = NB$, $\angle M = \angle N \Rightarrow \angle AMB = \angle BNC$, $AM = NC \Rightarrow \triangle AMB = \triangle NBC \Rightarrow AB = BC = (PABC - AC) : 2 = (42 - 14) : 2 = 14$.

Вариант В2

1. $PABD = AB + BD + AD = 1{,}5AB + 13$, $PADC = AD + AC + AD = 0{,}5AB + AC + 13$; $1{,}5AB = 49 - 13 = 36$, $AB = BC = 24$, $AC = 30 - 13 - 0{,}5 \cdot 24 = 5$.

2. $AB = BC$, AA_1 и CC_1 — медианы $\Rightarrow AC_1 = A_1C$, $AB = BC$, $\angle B$ — общий $\Rightarrow \triangle ACC_1 = \triangle ACA_1$.

3. $\triangle MBN$ — равнобедренный $\Rightarrow MB = NB$, $\angle M = \angle N \Rightarrow \angle AMB = \angle BNC$ — их смежные углы; $AN = MC \Rightarrow AM = AN - MN = MC - MN = NC$; $MB = NB$, $\angle M = \angle N \Rightarrow \angle AMB = \angle BNC$, $AM = NC \Rightarrow \triangle AMB = \triangle NBC \Rightarrow MB = BN = (PMBN - MN) : 2 = (22 - 6) : 2 = 8$.

СА-8. Второй и третий признаки равенства треугольников

Вариант А1

1. $AO = OD$, $\angle A = \angle D$, $\angle BOA = \angle COD$ — вертикальные $\Rightarrow \triangle AOB = \triangle DOC$.

2. $AB = AD$, $CB = CD$, AC — общая $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ACD \Rightarrow \angle B = \angle D$.

3. Так как в равнобедренном треугольнике при основании два одинаковых угла, то равнобедренные треугольники будут равны по основанию и углам при них.

Вариант А2

1. $\angle ABD = \angle DBC$(BD — биссектриса), $\angle ADB = \angle CDB$, BD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CBD$.

2. $AB = AD$, $CB = CD$, AC — общая $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ACD \Rightarrow \angle B = \angle D$.

3. Так как в равнобедренном треугольнике две одинаковых боковых стороны, то равнобедренные треугольники будут равны по основанию и двум боковым сторонам.

Вариант Б1

1. $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \angle A = \angle D$ — смежные им; $\angle A = \angle D$, $AO = DO$, $\angle BOA = \angle COD$ — вертикальные $\Rightarrow \triangle AOB = \triangle DOC$.

2. $AD = BC$, $AB = CD$, BD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BCD \Rightarrow \angle A = \angle C$.

3. Высота разбивает треугольник на два маленьких, которые будут подобны двум маленьким треугольникам другого треугольника по высоте, углам при высоте и двум углам.

Вариант Б2

1. $AB \perp a$, $DC \perp a \Rightarrow \angle B = \angle C$, $BO = OC$, $\angle BOA = \angle COD$ — вертикальные $\Rightarrow \triangle AOB = \triangle DOC$.

2. $AD = BC$, $AB = CD$, AC — общая $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ACD \Rightarrow \angle B = \angle D$.

3. Медиана разбивает треугольник на два маленьких один из которых будет подобен другому по трем сторонам $\Rightarrow$углы между равными сторонами равные $\Rightarrow$треугольники будут подобны по двум сторонам и углу между ними.

Вариант В1

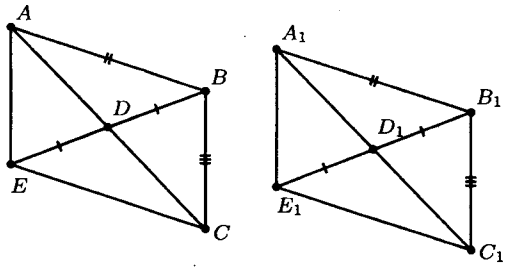
1. $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \angle A = \angle C$ — смежные им; $AB = BC$, $\angle A = \angle C$, $\angle B$ — общий $\Rightarrow \triangle ABE = \triangle DBC$.

2. $AC = BD$, $AB = CD$, AD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD \Rightarrow \angle B = \angle C$.

3. Пусть даны два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ с медианами BD и B_1D_1. По условию задачи: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $BD = B_1D_1$. Выполним дополнительное построение: на продолжении лучей BD и B_1D_1 отложим отрезки $DE = BD$ и $D_1E_1 = B_1D_1$. $\triangle ADE = \triangle BDC$ и $\triangle A_1D_1E_1 = \triangle B_1D_1C_1$ по первому признаку, следовательно $AE = BC$ и $A_1E_1 = B_1C_1$.

Рассмотрим $\triangle BAE$ и $\triangle B_1A_1E_1$ они равны по третьему признаку равенства треугольников, следовательно $\angle ABE = \angle A_1B_1E_1$. Аналогично $\triangle BCE = \triangle B_1C_1E_1 \Rightarrow \angle CBE = \angle C_1B_1E_1$.

Таким образом $\angle B = \angle B_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Следовательно $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников.



Вариант В2

1. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$; $\angle 1 + \angle 3 = \angle A = \angle D = \angle 2 + \angle 4$, $\angle 1 = \angle 2$, AD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD \Rightarrow \angle B = \angle C$.

2. $AC = BD$, $AB = CD$, BC — общая $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle BCD \Rightarrow \angle A = \angle D$.

3. Доказывается аналогично задаче **3.** первого варианта.

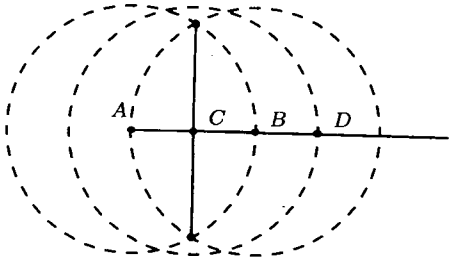
СА-9. Окружность. Простейшие задачи на построение

Приемы простейших построений подробно рассмотрены в учебнике.

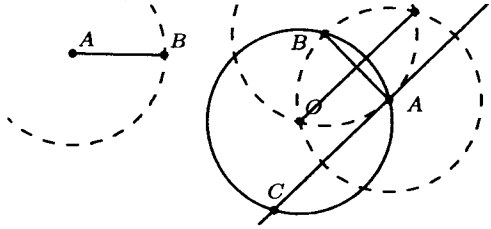
Вариант А1

1. $AO = BO = CO = DO = R$, $\angle AOB = \angle COD \Rightarrow \triangle ABO = \triangle CDO \Rightarrow AB = CD$.

2. Для нахождения середины отрезка проводим срединный перпендикуляр.



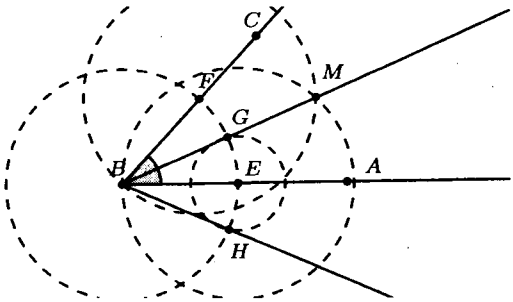
3. Центр окружности будет находится в точке O, равноудаленной от концов отрезка. А перпендикулярная к AB хорда параллельна срединному перпендикуляру AB.



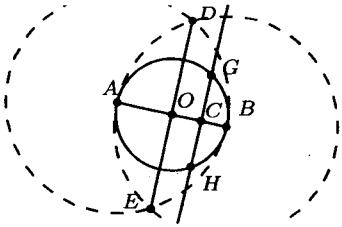
Вариант А2

1. $AO = BO = CO = DO = R$, $AB = CD \Rightarrow \triangle ABO = \triangle CDO \Rightarrow \angle AOB = \angle COD$.

2.



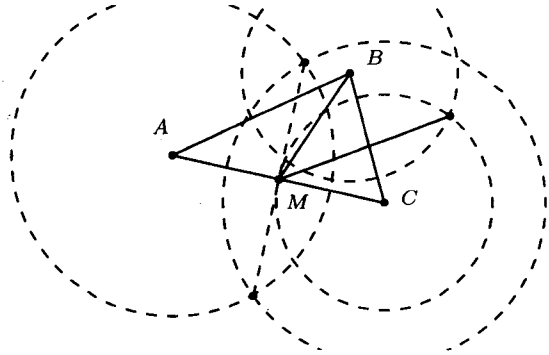
3. Проводится срединный перпендикуляр к отрезку AB, строится окружность. Хорда будет параллельна срединному перпендикуляру.



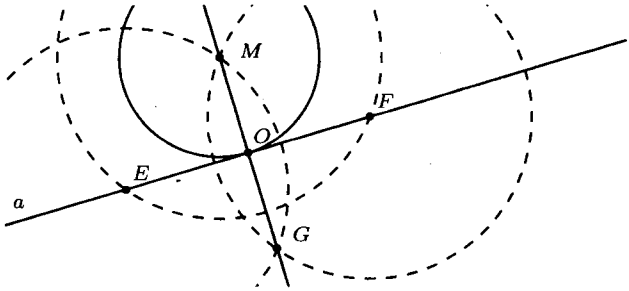
Вариант Б1

1. $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$ — опираются на одинаковые дуги; $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 180°$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 60°$, $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 60° + 60° = 120°$.

2.



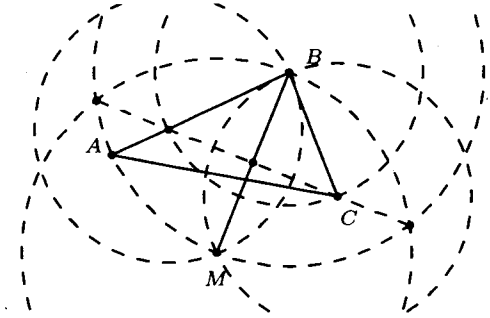
3.



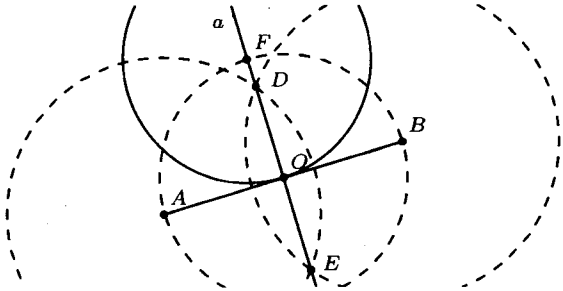
Вариант Б2

1. $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$ — опираются на одинаковые дуги; $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 180°$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 60°$, $\angle BOD = \angle BOC + \angle COD = 60° + 60° = 120°$.

2.



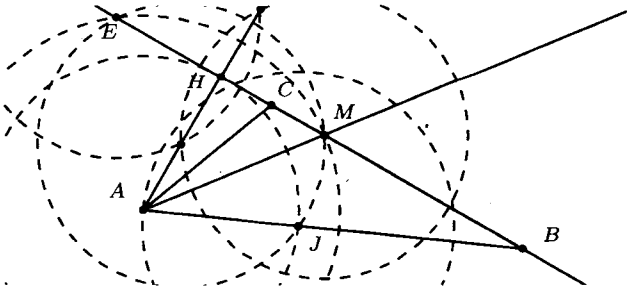
3.



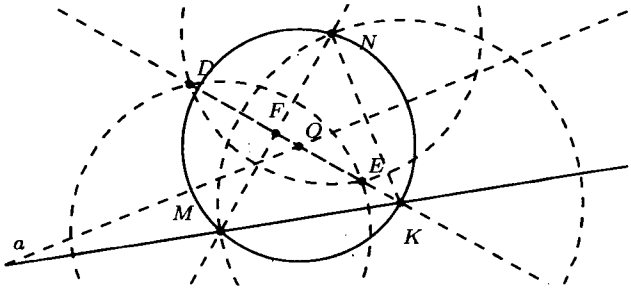
Вариант В1

1. $AB = AC$, $BO = CO = R$, AO — общая $\Rightarrow \triangle ABO = \triangle AOC \Rightarrow \angle BAO = \angle CAO$, $AB = BC$, AD — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD \Rightarrow \angle BDA = \angle ADC \Rightarrow$ $\Rightarrow AD$ — биссектриса.

2.



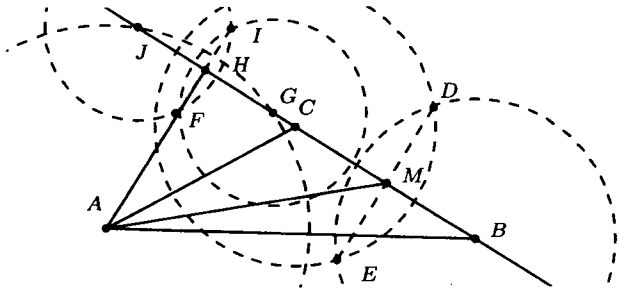
3.



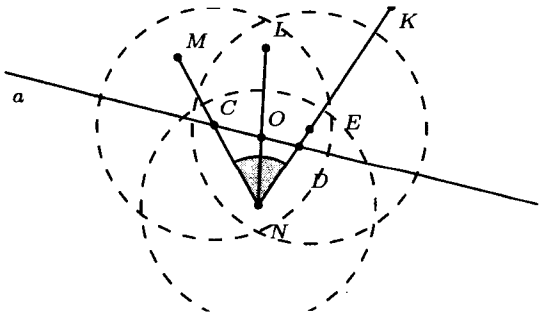
Вариант В2

1. $AB = AC$, $BO = CO = R$, AO — общая $\Rightarrow \triangle ABO = \triangle AOC \Rightarrow \angle BAO = \angle CAO \Rightarrow AD$ — биссектриса.

2.



3.



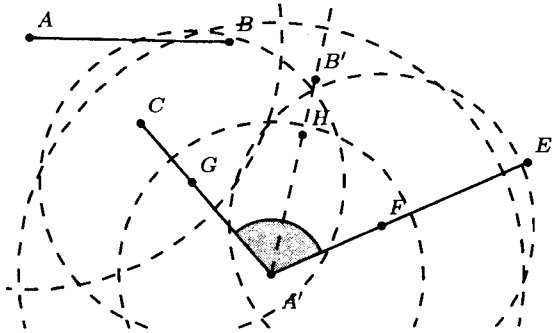
КА-2. Треугольники

Вариант А1

1. а) $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow AB = BC$, $\angle A = \angle C$, $\angle ABD = \angle CBE \Rightarrow \triangle ABD = \triangle BEC \Rightarrow BD = DE \Rightarrow$; $\triangle DBE$ — равнобедренный.

б) $\angle BED = \angle BDE$, $\angle ADB$ — смежный с $\angle BDE \Rightarrow \angle ADB = 180° - 70° = 110°$.

2.



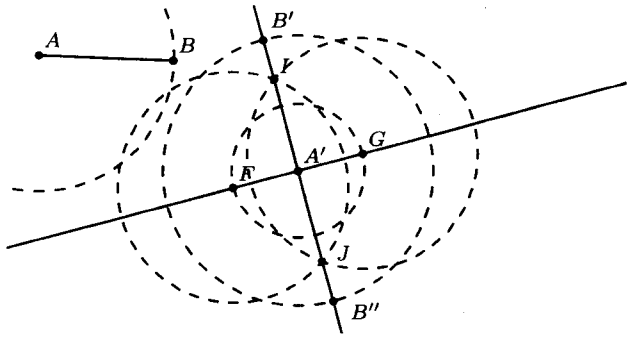
3. $AO = OB = OC = R \Rightarrow \triangle AOB$ — равнобедренный $\Rightarrow OC$ — биссектриса $\Rightarrow \angle AOC = \angle COB$, $AO = OB = OC \Rightarrow \triangle AOC = \triangle COB \Rightarrow AC = CB$.

Вариант А2

1. а) $\triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow AB = BC$, $\angle A = \angle C$, $AD = EC \Rightarrow \triangle ABD = \triangle BEC \Rightarrow BD = DE \Rightarrow$; $\triangle DBE$ — равнобедренный.

б) $\angle BED = \angle BDE$, $\angle BEC$ — смежный с $\angle BED \Rightarrow \angle BDE = 180° - 115° = 65°$.

2.



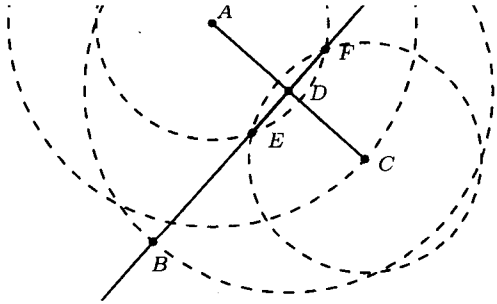
3. $AO = OB = OC = R \Rightarrow \triangle AOB$ — равнобедренный $\Rightarrow OC$ — биссектриса $\Rightarrow \angle AOC = \angle COB$, $AO = OB = OC \Rightarrow \triangle AOC = \triangle COB \Rightarrow \angle ACO = \angle OCB \Rightarrow OC$ — биссектриса.

Вариант Б1

1. а) $\triangle DBE$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle D = \angle E$, $BD = BE$, $\angle ABE = \angle DBC \Rightarrow \triangle ABE = \triangle DBC \Rightarrow AB = BC$; $\Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный.

б) $\angle BDA = \angle BEC$ — смежные к $\angle BDE = \angle BED \Rightarrow \angle BDA + \angle BEC = 230°$; $\angle BDA = \angle BEC = 115°$, $\angle BDE = \angle BED = 180° - 115° = 65°$.

2.



3. Пусть дан $\triangle ABC$, $\angle A = \angle B$, AF и BE – биссектрисы. $\triangle AEB = \triangle AFB$ по второму признаку

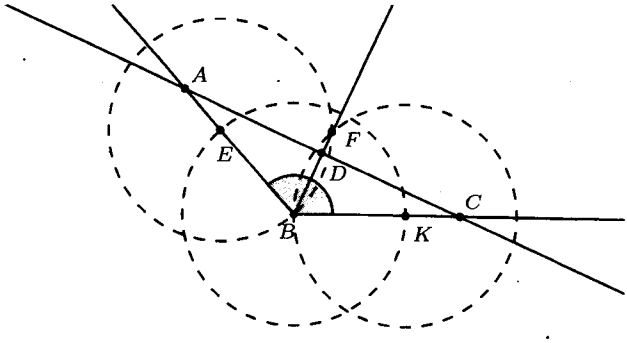
равенства треугольников (AB — общая сторона, $\angle FAB = \angle EBA$, $\angle A = \angle B$). Следовательно $AF = BE$.

Вариант Б2

1. а) $\triangle DBE$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle D = \angle E$, $BD = BE$, $AE = DC \Rightarrow \triangle ABE = \triangle DBC \Rightarrow AB = BC$; $\Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный.

б) $\angle BDE = \angle BED$ — смежные к $\angle BDA = \angle BEC \Rightarrow \angle BDE + \angle BED = 140°$; $\angle BDE = \angle BED = 70°$, $\angle BDA = \angle BEC = 180° - 70° = 110°$.

2.



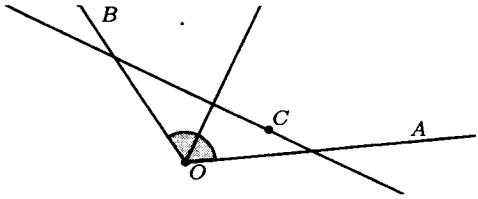
3. Пусть дан $\triangle ABC$, $AC = CB$, AF и BE – медианы. $\triangle ACF = \triangle BEC$ по первому признаку равенства треугольников ($\angle C$ — общий, $AC = CB$, $CF = CE$). Следовательно $AF = BE$.

Вариант В1

1. а) $\triangle DBE$ — равнобедренный(медиана и высота совпадают) $\Rightarrow BD = DE$; $\angle 2 = \angle 3 \Rightarrow \angle 1 = \angle 4$ (смежные к $\angle 2 = \angle 3$), $AD = CE$, $BD = DE \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный.

б) $\angle 2+\angle 3-\angle 4 = 2\angle 2-(180^\circ-\angle 2) = 3\angle 2-180^\circ = 30^\circ$, $3\angle 2 = 210^\circ$, $\angle 2 = 70^\circ$, $\angle 1 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

2.



3. Пусть O и O' — центры окружностей, а A и B — точки пересечения, AB — общая хорда, а AB — отрезок соединяющий центр окружностей, C — точка пересечения этих отрезков. $\triangle OAC = \triangle O'AC = \triangle OBC = \triangle O'BC$ (по третьему признаку), значит $AC = BC$, $OC = O'C$. Значит $\angle OAC = \angle O'AC \Rightarrow$ $\Rightarrow AC$ — биссектриса $\triangle OAO'$, а так как $\triangle OAO'$ — равнобедренный, то AO — высота $\triangle OAO'$, а значит $AB \perp OO'$.

Вариант В2

1. а) $\triangle DBE$ — равнобедренный(медиана и высота совпадают) $\Rightarrow BD = DE$, $\angle 2 = \angle 3 \Rightarrow$; $\angle 1 = \angle 4$ (смежные к $\angle 2 = \angle 3$), $\angle ABD = \angle CBE$, $BD = DE \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный.

б) $\angle 1 + \angle 4 - \angle 3 = 2\angle 1 - (180^\circ - \angle 1) = 3\angle 1 - 180^\circ = 165^\circ$, $3\angle 1 = 345^\circ$, $\angle 1 = 115^\circ$, $\angle 2 = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.

2. Задание аналогично варианту В1, так как надо построить равносторонний треугольник.

3. Пусть O и O' — центры окружностей, а A и B — точки пересечения, AB — общая хорда, а AB — отрезок соединяющий центр окружностей, C — точка пересечения этих отрезков. $\triangle OAC = \triangle O'AC = \triangle OBC = \triangle O'BC$ (по третьему признаку), значит $AC = BC$.

Параллельные прямые

СА-10. Признаки параллельности прямых. Аксиома параллельных прямых и ее следствие

Вариант А1

1. $44° + 136° = 180° \Rightarrow a \| b$.

2. $AO = CO$, $BO = DO$, $\angle BOC = \angle AOD$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle BOC = \triangle AOD \Rightarrow \angle A = \angle C$ (накрест лежащие) $\Rightarrow AD \| BC$.

3. $a \| BD$ и $c \| BD \Rightarrow a \| c$.

Вариант А2

1. $132° + 48° = 180° \Rightarrow a \| b$.

2. $AB = CD$, $DC = AD$, AC — общая $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ACD \Rightarrow \angle BCA = \angle CAD$ (накрест лежащие) $\Rightarrow AD \| BC$.

3. $c \| AB$ и $d \| AB \Rightarrow c \| d$.

Вариант Б1

1. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 1 - \angle 2 = 20°$, $2\angle 1 = 200°$, $\angle 1 = 100°$, $\angle 2 = 180° - 100° = 80° = \angle 3 \Rightarrow a \| b$.

2. $AD = BE$, $AB = AD + DB = BE + BD = DE$, $\angle A = \angle E$, $FE = AC \Rightarrow \triangle ABC = \triangle FDE \Rightarrow \angle FDE = \angle ABC$ (накрест лежащие) $\Rightarrow FD \| BC$.

3. $b \| AC$ и $d \| AC \Rightarrow b \| d$.

Вариант Б2

1. $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, $\angle 2 + 2\angle 2 = 3\angle 2 = 180°$, $\angle 2 = 60°$, $\angle 3 = 180° - 60° = 120° \Rightarrow a \| b$.

2. $AD = CF$, $AC = AD + DC = DC + CF = DF$, $\angle C = \angle F$, $FE = CB \Rightarrow \triangle ABC = \triangle EDF \Rightarrow \angle BAC = \angle EDF \Rightarrow AB \| DE$.

3. $c \| AB$ и $k \| AB \Rightarrow c \| k$.

Вариант В1

1. $AC = AB \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle 2 = \angle BAC = \angle 1 \Rightarrow \angle BAC = \angle 1$ — накрест лежащие $\Rightarrow a \| b$.

2. $AC = AE$, $CD = DE$, AD — общая $\Rightarrow \triangle ACD = \triangle ADE \Rightarrow \angle CAD = \angle DAE$, $AB = BD \Rightarrow \triangle ABD$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle CAD = \angle BDA$; $\angle CAD = \angle DAE = \angle BDA \Rightarrow \angle CAD = \angle DAE$ — накрест лежащие $\Rightarrow BD \| AE$.

3. $\triangle ABC$ — равнобедренный, то $AD \perp CB$, значит углы равны $90°$.

Вариант В2

1. $AC = AB \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle 2 = \angle ABC = \angle 1 \Rightarrow \angle ABC = \angle 1$ — накрест лежащие $\Rightarrow a \| b$.

2. $AB = BC$, $AD = DC$, DB — общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle DBC \Rightarrow \angle ABD = \angle CBD$; $BE = ED \Rightarrow \triangle EDB$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle ABD = \angle EDB \Rightarrow \angle ABD = \angle CBD = \angle EDB \Rightarrow \angle CBD = \angle EDB$ — накрест лежащие $\Rightarrow BC \| DE$.

3. $\triangle ABC$ — прямоугольный равносторонний треугольник, $\angle OAC = OAB = 45°$, поэтому углы равны $45°$.

СА-11. Свойства параллельных прямых

Вариант А1

1. $\angle 1 = \angle 3 = 132°$ (накрест лежащие), $\angle 2 = 180° - 132° = 48°$.

2. $\angle 1 = \angle A = 36°$ (накрест лежащие), $\angle C = 90° - 36° = 64°$.

3. $\angle C = 90° - 36° = 54°$, $\angle A = 90° - 54° = 36°$.

Вариант А2

1. $\angle 1 = \angle 2 = 47°$ (накрест лежащие), $\angle 2 = 180° - 47° = 133°$.

2. $\angle 1 = \angle A = 48°$ (накрест лежащие), $\angle C = 90° - 48° = 42°$.

3. $\angle A = 48°$ (как внутренний накрест лежащий). $\angle C = 90° - 48° = 42°$.

Вариант Б1

1. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1 = 250°$, $\angle 1 = \angle 2 = 125°$, $\angle 3 = 180° - 125° = 55°$.

2. $\angle EBD = \angle DBC = 82° : 2 = 41°$ (BD — биссектриса), $\angle DBC = \angle EDB = 41°$ (накрест лежащие), $\angle BED = 180° - 41° - 41° = 78°$.

3. $\angle EBD = 82°/2 = 41°$ так как BD — биссектриса. $\triangle BDE$ — равносторонний $\Rightarrow \angle D = \angle EBD = 41°$, $\triangle E = 180° - 41° - 41° = 98°$.

Вариант Б2

1. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1 = 86°$, $\angle 1 = \angle 2 = 43°$, $\angle 3 = 180° - 43° = 137°$.

2. $\angle BME = \angle MBA = 64°$ (накрест лежащие), $\angle EBM = \angle MBE = 64°$ (BD — биссектриса), $\angle MEB = 180° - 64° - 64° = 52°$.

3. $\angle EDB = \angle EDB = \angle MBE = 64°$, так как $\triangle BED$ — равнобедренный. $\angle BED = 180° - 64° - 64° = 52°$.

Вариант В1

1. $\angle 1 + \angle 3 = 180°$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180° + \angle 2 = 290°$, $\angle 2 = \angle 1 = 110°$ (вертикальные) $\Rightarrow \angle 3 = 180° - 110° = 70°$.

2. $ABCED$ — пятиугольник, сумма его углов равняется $540°$, $\angle D = \angle E = 90°$ ($AD \| CE$); $\angle B = 540° - \angle A - \angle D - \angle E - \angle C = 540° - \angle 132° - 90° - 118° - 90° = 110°$.

3. $x = 360° - (180° - 40°) - 30° - 50° = 40°$.

Вариант В2

1. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 1 + \angle 2 - \angle 3 = 145°$, $180° - \angle 3 = 145°$, $\angle 3 = 35°$, $\angle 3 = \angle 2 = 35°$ (вертикальные), $\angle 1 = 180° - 35° = 145°$.

2. $ABCED$ — пятиугольник, сумма его углов равняется $540°$, $\angle D = \angle E = 90°$ $(AD \| CE)$; $\angle B = 540° - \angle A - \angle D - \angle E - \angle C = 540° - \angle 68° - 90° - 42° - 90° = 250°$.

3. $x = 360° - 40° - 106° - 50° = 164°$.

КА-3. Параллельные прямые

Вариант А1

1. а) $\angle 4 = 360° - \angle 2 - \angle 3 - (180° - \angle 1) = 360° - 119° - 82° - (180° - 82°) = 60°$.

б) Еще три угла: вертикальный $\angle 4$ и смежные с $\angle 2$.

2. а) $AC \perp CD$, $BD \perp CD \Rightarrow AC \| BD$;

б) $ABCD$ — четырехугольник $\Rightarrow$сумма углов равна $360° \Rightarrow \angle B = 360° - \angle A - \angle C - \angle D = 360° - 125° - 90° - 90° = 55°$.

3. $\angle BDE = \angle BAC \Rightarrow AC \| DE \Rightarrow \angle BED = \angle BCA$.

Вариант А2

1. а) $\angle 4 = \angle 3 = 63°$, как накрест лежащие.

б) Еще три угла: $\angle 2$, вертикальный $\angle 2$, и вертикальный $\angle 4$.

2. а) $AC \perp AB$, $BD \perp AB \Rightarrow AC \| BD$;

б) $ABCD$ — четырехугольник $\Rightarrow$сумма углов равна $360° \Rightarrow \angle A = 360° - \angle B - \angle C - \angle D = 360° - 55° - 90° - 90° = 125°$.

3. $\angle BED = \angle BCA \Rightarrow AC \| DE \Rightarrow \angle BDE = \angle BAC$.

Вариант Б1

1. $\angle O = 180° - \angle 1 = 180° - 128° = 52°$, $\angle ACO = \angle BOC$ (накрест лежащие), $\angle AOC = \angle BOC$, $\angle ACO = \angle AOC \Rightarrow \triangle AOC$ — равнобедренный $\Rightarrow AO = AC$; $\angle ACO = \angle AOC = (180° - 52°) : 2 = 64°$.

2. $AD \perp BC \Rightarrow \angle D = 90°$, $\angle BAD = 90° - \angle ABD = 90° - 52° = 38°$, $KB \perp BD \Rightarrow \angle B = 90° \Rightarrow \angle KBA = 90° - \angle ABD = 90° - 52° = 38°$, $\angle BKA = 180° - \angle KAB - \angle KBA = 180° - 52° - 40° = 88°$.

3. $MO = NO$, $\angle MOP = \angle KON$ (вертикальные), $\angle OMP = \angle KNO$ (накрест лежащие) $\Rightarrow \triangle MOP = \triangle KON \Rightarrow \angle OKN = \angle OPM$ (накрест лежащие) $\Rightarrow KM \| NP$.

Вариант Б2

1. $\angle A = 180° - \angle 1 = 180° - 128° = 52°$, $\angle ACO = \angle BOC$ (накрест лежащие), $\angle AOC = \angle BOC$, $\angle ACO = \angle AOC \Rightarrow \triangle AOC$ — равнобедренный $\Rightarrow AO = AC$; $\angle ACO = \angle AOC = (180° - 52°) : 2 = 64°$.

2. $BK \perp BC \Rightarrow \angle CBK = 90°$, $\angle KBA = 115° - 90° = 25°$, $\angle KBA = \angle BAD = 25°$ (накрест лежащие), $\angle AKB = 180° - \angle BAK - \angle ABK = 180° - 36° - 25° = 119°$.

3. $KN = MP$, $\angle MOP = \angle KON$ (вертикальные), $\angle OMP = \angle KNO$ (накрест лежащие) $\Rightarrow \triangle MOP = \triangle KON \Rightarrow \angle KNO = \angle MPO$ (накрест лежащие) $\Rightarrow KP \| MN$.

Вариант В1

1. $\angle 4 = 180° - (180° - \angle 3 - (180° - \angle 2)) = 180° + \angle 3 - \angle 2 = 180° + 50° - 72° = 158°$.

2. а) $\angle ABD = 180° - \angle CAB = 180° - 130° = 50°$.

б) Проведем прямую параллельную OD и проходящую через точку A, они пересекаются в точке

K. Тогда $\triangle AKB$ — прямоугольный с $\angle K = 90°$, а $\angle ABD = 90° - \angle BAK = 90° - (\angle CAB - 90°) = 180° - \angle CAB = 180° - 130° = 50°$.

3. $AB = CD$, $AE = CF$, $\angle BAE = \angle FCD$ (накрест лежащие) $\Rightarrow \triangle ABE = \triangle FCD \Rightarrow \angle BEC = \angle AFD$, $BE = FD$, $EC = EF + FC = EF + AE = AF \Rightarrow \triangle BEC = \triangle AFD \Rightarrow \angle BCA = \angle DAC$ (накрест лежащие) $\Rightarrow AD \| BC$.

Вариант В2

1. $\angle 4 = 180° - (180° - \angle 1 - (180° - \angle 2)) = 180° + \angle 1 - \angle 2 = 180° + 25° - 155° = 50°$.

2. Задача повторяет задачу *2.* варианта В1.

3. $AD = BC$, $AF = CE$, $\angle CAD = \angle BCA$ (накрест лежащие) $\Rightarrow \triangle AFD = \triangle BEC \Rightarrow BE = FD$, $\angle AEB = \angle DFC$, $AE = AF - EF = CE - EF = FC \Rightarrow \triangle ABE = \triangle DFC \Rightarrow \angle BAE = \angle FCD$ (накрест лежащие) $\Rightarrow AB \| CD$. Соотношения между сторонами и углами треугольника.

Соотношения между сторонами и углами треугольника

СА-12. Сумма углов треугольника

Вариант А1

1. $\angle 1 = \angle 2 + 60°$, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + 60° + \angle 2 = 2\angle 2 + 60° = 90°$, $2\angle 2 = 30°$, $\angle 2 = 15°$.

2. $\angle 1 = \angle 2 = 180° - 140° = 40°$, $\angle 3 = 180° - \angle 1 - \angle 2 = 180° - 40° - 40° = 100°$.

3. $\angle 1 = 180° - 135° = 45°$, $\angle 2 = 180° - 160° = 20°$, $\angle 3 = 180° - \angle 1 - \angle 2 = 180° - 45° - 20° = 115°$.

Вариант А2

1. $\angle 1 = 8\angle 2$, $\angle 1 + \angle 2 = 8\angle 2 + \angle 2 = 9\angle 2 = 90°$, $\angle 2 = 10°$, $\angle 1 = 8 \cdot 10° = 80°$.

2. $\angle 3 = 180° - 100° = 80°$, $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1 = 180° - 100° = 80°$, $\angle 1 = \angle 2 = 40°$.

3. $\angle 1 = 180° - 125° = 55°$, $\angle 2 = 180° - 145° = 35°$, $\angle 3 = 180° - \angle 1 - \angle 2 = 180° - 55° - 35° = 90°$.

Вариант Б1

1. $\angle 1 + 90° = \angle 3$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2\angle 1 + \angle 1 + 90° = 3\angle 1 + 90° = 180°$, $3\angle 1 = 90°$, $\angle 1 = \angle 2 = 30°$, $\angle 3 = \angle 1 + 90° = 30° + 90° = 120°$.

2. $360° : (3 + 4 + 5) = 30°$, $\angle 1 = 180° - 5 \cdot 30° = 30°$, $\angle 2 = 180° - 4 \cdot 30° = 60°$, $\angle 3 = 180° - 3 \cdot 30° = 90°$.

3. $\angle OAB + \angle OBA = (180° - 140°) = 40°$, $\angle A + \angle B = 2(\angle OAB + \angle OBA) = 2 \cdot 40° = 80°$, $\angle C = 180° - 80° = 100°$.

Вариант Б2

1. $\angle 1 + 120° = \angle 3$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2\angle 1 + \angle 1 + 120° = 3\angle 1 + 90° = 180°$, $3\angle 1 = 60°$, $\angle 1 = \angle 2 = 20°$, $\angle 3 = \angle 1 + 120° = 20° + 120° = 140°$.

2. $\angle 1 = 180° - 90° : 5 \cdot 8 = 180° - 144° = 36°$, $\angle 2 = 90° - 36° = 54°$.

3. $\angle A + \angle B = 360° - 270° = 90°$, $\angle C = 180° - 90° = 90°$.

Вариант В1

1. $\angle 1 = \angle 2 = 2{,}5\angle 3$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2{,}5\angle 3 + 2{,}5\angle 3 + \angle 3 = 6\angle 3 = 180°$, $\angle 3 = 30°$, $\angle 1 = \angle 2 = 2{,}5\angle 3 = 2{,}5 \cdot 30 = 75°$; $\angle 1 = \angle 2 = 0{,}4\angle 3$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 0{,}4\angle 3 + 0{,}4\angle 3 + \angle 3 = 1{,}8\angle 3 = 180°$, $\angle 3 = 100°$, $\angle 1 = \angle 2 = (180° - 100°) : 2 = 40°$.

2. $\angle 1 = 180° - 200° + 90° = 70°$, $\angle 2 = 90° - 70° = 20°$.

3. Да является, $\angle 1 + \angle 2 + 180° - \angle 3 = 180°$, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 = 90°$.

Вариант В2

1. $\angle 1 = \angle 2 = 2\angle 3$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2\angle 3 + 2\angle 3 + \angle 3 = 5\angle 3 = 180°$, $\angle 3 = 36°$, $\angle 1 = \angle 2 = 2\angle 3 = 2 \cdot 36 = 72°$; $\angle 1 = \angle 2 = 0{,}5\angle 3$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 0{,}5\angle 3 + 0{,}5\angle 3 + \angle 3 = 2\angle 3 = 180°$, $\angle 3 = 90°$, $\angle 1 = \angle 2 = (180° - 90°) : 2 = 45°$.

2. $\angle 1 = 180° - 90° - 70° = 20°$, $\angle 2 = 90° - 20° = 70°$.

3. Да является, $180° - \angle 1 + 180° - \angle 2 + 90° = 360°$, $\angle 1 + \angle 2 = 90° = \angle 3$.

СА-13. Соотношение между сторонами и углами треугольника. Неравенство треугольника

Вариант А1

1. В треугольнике напротив большего угла лежит большая сторона, а тупой угол всегда больше острого. Биссектриса AD лежит напротив тупого $\angle ABD$, а сторона AB напротив острого $\angle ADB$, поэтому по неравенству треугольника $AD > AB$.

2. $\triangle KNM$ — равнобедренный, так как $\angle K = \angle N$, то $KM = MN$, $\angle KMD = \angle NMD$, MD — общая сторона $\Rightarrow \triangle KMD = \triangle MND \Rightarrow DK = DN \Rightarrow \Rightarrow \triangle KDN$ — равнобедренный.

3. В треугольнике сумма длин двух любых сторон должна быть больше длины третьей стороны, Поэтому если $3 + 3 = 6 < 8$ — условие не выполняется, а если $8 + 8 > 3$ — условие выполняется. Ответ: основанием является сторона с длиной 3 см.

Вариант А2

1. Так как $\angle B$ — тупой, то AC самая большая сторона, $AC > BC > \frac{1}{2}BC$, значит $\angle DAC < \angle ADC$.

2. $\triangle KDN$ — равнобедренный, так как $\angle K = \angle N$, то $KD = DN$, $\angle KDM = \angle NDM$ (как смежные

с $\angle KDH = \angle NDH$), DM — общая сторона $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle KMD = \triangle MND \Rightarrow KM = MN \Rightarrow \triangle KMN$ — равнобедренный.

3. В треугольнике сумма длин двух любых сторон должна быть больше длины третьей стороны, Поэтому если $4+4 = 7 < 10$ — условие не выполняется, а если $10 + 10 > 4$ — условие выполняется. Ответ: боковой стороной является сторона с длиной 10 см.

Вариант Б1

1. $\angle ABD \in (0°; 90°] \Rightarrow \angle DAB + \angle ADB \in (180°; 90°] \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle ADB > \angle ABD \Rightarrow AB > AD$.

2. $\triangle ABD = \triangle ACD$, так как $\angle BAD = \angle CDA$, $AB =$ $= CD$ — по условию, а AD — общая сторона. Значит $\angle ABD = \angle ACD$, $AB = CD$, $\angle OAB = \angle CDO$ (так как $\angle BOA = \angle COD$ — вертикальные углы). Следовательно $\triangle ABO = \triangle COD \Rightarrow AO = OD$, а значит $\triangle AOD$ — равносторонний.

3. Пусть x — неизвестная сторона, тогда: $P = x +$ $+ (x + 4) + (x + 9) = 28$ см $\Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$ см; $x + 4 = 9$ см; $x + 9 = 14$ см.

Ответ: такой треугольник существует, его стороны равны 5 см, 9 см, 14 см.

Вариант Б2

1. $\angle CBD \in (0°; 90°] \Rightarrow \angle DCB + \angle CDB \in (180°; 90°] \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle CDB > \angle CBD \Rightarrow CB > CD$.

2. $\triangle ABD = \triangle ACD$, так как $AC = BD$, $AB =$ $= CD$ — по условию, а AD — общая сторона. Значит $\angle ABD = \angle ACD$, $AB = CD$, $\angle OAB = \angle CDO$ (так как $\angle BOA = \angle COD$ — вертикальные углы). Следовательно $\triangle ABO = \triangle COD \Rightarrow AO = OD$, а значит $\triangle AOD$ — равносторонний.

3. Пусть x — неизвестная сторона, тогда: $P = x + (x+9) + (x+7) = 32$ см $\Rightarrow 3x = 16 \Rightarrow x = 5\frac{1}{3}$ см; $x + 9 = 14\frac{1}{3}$ см; $x + 7 = 12\frac{1}{3}$ см.
Ответ: такой треугольник существует, его стороны равны $5\frac{1}{3}$ см, $14\frac{1}{3}$ см, $12\frac{1}{3}$ см.

Вариант В1

1. По *следствию 1* теоремы о соотношении между сторонами и углами треугольника гипотенуза BD больше катета BC. Так как $\angle ADB$ — тупой, то $\angle ADB \triangle ADB > \angle DCB \triangle DCB$, а значит $BA > BD$ (см. выше теорему о соотношении...).

2. Проведем из точки D прямую параллельную AB. Она пересечет прямую AC в точке K. Так как $AC \| BD$, то $DK = DC$, следовательно $\triangle CDK$ — равнобедренный и $\angle DKC = \angle BAC = \angle DCA$. Следовательно $\triangle AOC$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника).

3. Пусть дан четырехугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD и периметром $P = AB + BC + CD + DA$. Так как $AC < AB + BC$, $AC < CD + DA$, $BD < BC + CD$ и $BD < AB + DA$ (из неравенства треугольников), то $2AC < AB + BC + CD + DA = P$ и $2BD < AB + BC + CD + DA$. Следовательно $AC < P/2$ и $BD < P/2$.

Вариант В2

1. Так как $\triangle ABC$ с основанием AC тупоугольный и равнобедренный, то $AB = BC < AC$, AC — самая большая сторона $\Rightarrow CD < AC$, $AD < AC$. $\angle ACD < \angle DAC$, так как медиана делит $\angle ACB = \angle CAB \Rightarrow AD < DC = BD$. $BD < DC < AC \Rightarrow \angle BCD < \angle ABC < \angle ADC$ (согласно теореме о соотношении между сторонами и углами треугольника).

2. Проведем из точки C прямую параллельную AB. Она пересечет прямую DB в точке K. Так как $AC \| BD$, то $CK = AB$, следовательно $\triangle CDK$ — равнобедренный и $\angle CDB = \angle CKD = \angle ABD$. Следовательно $\triangle BOD$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника).

3. Пусть дан четырехугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD и периметром $P = AB+BC+CD+DA$. Так как $AC < AB+BC$, $AC < CD+DA$, $BD < BC+CD$ и $BD < AB + DA$ (из неравенства треугольников), то $2AC + 2BD < 2(AB + BC + CD + DA) = 2P$. Следовательно $AC + BD < P$ и $BD < P/2$.

А-14. Прямоугольные треугольники

Вариант А1

1. Высота перпендикулярна основанию, поэтому высота опущенная из прямого угла треугольника образует два прямоугольных треугольника.
Пусть x — первый угол, на который высота делит прямой угол, тогда $4x$ — второй угол: $x + 4x = 5x = 90° \Rightarrow x = 18°$ — первый угол, и ему соответствует угол $90° - 18° = 72°$; $4x = 4 \cdot 18° = 72°$ — второй угол, и ему соответствует угол $90° - 72° = 18°$.
Ответ: $18°$ и $72°$.

2. $\angle MBA = 180° - \angle ABC = 180° - 120° = 60°$, $\angle MAB = 90° - \angle MBA = 90° - 60° = 30°$, $MB = 0{,}5AB = 0{,}5 \cdot 18 = 9$ (напротив угла $30°$).

3. $\angle CAB = \angle BAD$ (AB — биссектриса), $\angle C = \angle D$, AB — общая $\Rightarrow \triangle ACB = \triangle ABD \Rightarrow \angle CBA = \angle ABD \Rightarrow BA$ — биссектриса.

Вариант А2

1. Высота перпендикулярна основанию, поэтому высота опущенная из прямого угла треугольника образует два прямоугольных треугольника.

Пусть x — первый угол, на который высота делит прямой угол, тогда $x + 40°$ — второй угол: $x + (x + 40°) = 90° \Rightarrow x = 25°$ — первый угол, и ему соответствует угол $90° - 25° = 65°$; $(x + 40°) = 25° + 40° = 65°$ — второй угол, и ему соответствует угол $90° - 65° = 25°$.

Ответ: 65° и 25°.

2. $\angle MBA = 180° - \angle ABC = 180° - 150° = 30°$, $MA = 0{,}5AB = 0{,}5 \cdot 12 = 6$ (напротив угла 30°).

3. $\angle CBA = \angle ABD$ (BA — биссектриса), $\angle C = \angle D$, AB — общая $\Rightarrow \triangle ACB = \triangle ABD \Rightarrow \angle CAB = \angle BAD \Rightarrow AB$ — биссектриса.

Вариант Б1

1. В прямоугольном треугольнике наибольший угол — прямой и он равен 90°.

Биссектриса делит заданный треугольник на два треугольника. Пусть для определенности в первом треугольнике угол между стороной треугольника и биссектрисой равен 80°. Тогда второй угол равен 45° (так как биссектриса делит угол пополам), а третий угол равен $180° - 80° - 45° = 55°$.

Тогда третий угол прямоугольного треугольника равен $90° - 55° = 35°$.

Ответ: 55° и 35°

2. $AB = 0{,}5AC \Rightarrow \angle C = 30°$, $\angle A = 60° \Rightarrow \angle HBC = 90° - \angle C = 90° - 30° = 60°$, $\angle BHA = 90° - \angle A = 90° - 60° = 30°$.

3. $AC \| BD \Rightarrow \angle CAB = \angle ABD$ (накрест лежащие), AB — общая, $\angle C = \angle D \Rightarrow \triangle ACB = \triangle ABD \Rightarrow AD = BC$.

Вариант Б2

1. Биссектриса пересекает катет под углом 110° и образует два треугольника, один из которых прямоугольный, поэтому смежный с данным угол, в

прямоугольном треугольнике, равен $180° - 110° = 70°$, а второй угол, прямоугольного треугольника образованного биссектрисой, равен $90° - 70° = 20°$. Так как биссектриса делит угол пополам, то первый угол исходного треугольника равен $2 \cdot 20° = 40°$, а второй угол равен $90° - 40° = 50°$.

Ответ: $40°$ и $50°$.

2. $BC = 0{,}5AB \Rightarrow \angle A = 30°$, $\angle B = 60° \Rightarrow \angle HCA = 90° - \angle A = 90° - 30° = 60°$, $\angle HCB = 90° - \angle B = 90° - 60° = 30°$.

3. $AC = BD$, AB — общая, $\angle C = \angle D \Rightarrow \triangle ACB = \triangle ABD \Rightarrow \angle BAD = \angle ABC \Rightarrow AD \| BC$.

Вариант В1

1. Поскольку медиана в прямоугольном треугольнике, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то она образует два равнобедренных треугольника, в которых острые углы исходного треугольника являются углами при основаниях. Поэтому углы, на которые медиана делит прямой угол равны острым углам прямоугольного треугольника. Составим и решим уравнение: $x + 8x = 90° \Rightarrow x = 10°$, $8x = 8 \cdot 10 = 80°$.

Ответ: $10°$ и $80°$.

2. $\angle BAD = \angle DAC = \angle A : 2 = 30°$ (AD — биссектриса), $BD = 0{,}5AD = 0{,}5 \cdot 8 = 4$ (напротив угла $30°$); $\angle C = 90° - \angle A = 90° - 60° = 30°$, $\angle DAC = \angle C \Rightarrow \triangle DAC$ — равнобедренный $\Rightarrow AD = DC = 8$, $BC = BD + DC = 4 + 8 = 12$.

3. $\angle CBA = \angle DAB$, $\angle C = \angle D$, AB — общая $\Rightarrow \triangle CAB = \angle DAB \Rightarrow CA = DB$, $\angle C = \angle D$, $\angle COA = \angle DOB$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle ACO = \triangle BDO$.

Вариант В2

1. Поскольку медиана в прямоугольном треугольнике, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то она образует два равнобедренных треугольника, в которых острые углы исходного треугольника являются углами при основаниях. Поэтому углы, на которые медиана делит прямой угол равны острым углам прямоугольного треугольника.
Найдем углы образованные медианой с гипотенузой: $x + (x + 100) = 180° \Rightarrow 2x = 80° \Rightarrow x = 40°$ — первый угол, $x + 100° = 40° + 100° = 140°$ — второй угол.
Так как прямоугольники равнобедренные, а сумма углов в треугольнике равна 180°, то первый искомый угол будет равен $(180° - 40°)/2 = 70°$, а второй $90° - 70° = 20°$.
Ответ: 70° и 20°.

2. $\angle A = 90° - \angle C = 90° - 30° = 60° \angle BAD = \angle DAC = \angle A : 2 = 30°$ (AD — биссектриса), $BD = 0{,}5AD$ (напротив угла 30°); $\angle C = 90° - \angle A = 90° - 60° = 30°$, $\angle DAC = \angle C \Rightarrow \triangle DAC$ — равнобедренный $\Rightarrow AD = DC = 8$, $BC = BD + DC = 0{,}5AD + AD = 1{,}5D = 18$, $AD = 12$, $BD = 6$.

3. $AD = DC$, $\angle C = \angle D$, AB — общая $\Rightarrow \triangle CAB = \angle DAB \Rightarrow CA = DB$, $\angle C = \angle D$, $\angle COA = \angle DOB$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle ACO = \triangle BDO$.

СА-15. Дополнительные задачи о соотношениях в треугольнике

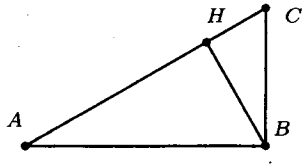
Вариант 1

1. Так как внешний угол треугольника равен сумме двух других углов треугольника не смежных с ним, то отношение внутренних углов равно $(7 + 8) : (3 + 8) : (7 + 3) = 15 : 11 : 10$.

2. Пусть даны углы треугольника $\angle 1$, $\angle 2$ и $\angle 3$, и внешние углы $x = \angle 1 + \angle 3$ — для $\angle 2$ и $y = \angle 1 + \angle 2$ — для $\angle 3$.

По условию задачи $\angle 1 = x - y = \angle 1 + \angle 3 - (\angle 1 + \angle 2) = \angle 3 - \angle 2$, а так как $\angle 1 = 180° - \angle 2 - \angle 3$, то $\angle 3 - \angle 2 = 180° - \angle 2 - \angle 3 \Rightarrow 2\angle 3 = 180° \Rightarrow \angle 3 = 90°$, то есть данный треугольник — прямоугольный.

3. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, с прямым $\angle ABC$ и высотой BH. Пусть $\angle ABH = 2\angle CBH$, так как $\angle ABC = 90°$, то $\angle ABH = 60°$, а $\angle CBH = 30°$. Значит в $\triangle ABC$ $\angle CAB = 60°$, а $\angle ACB = 30°$. Следовательно $CH = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{4}AC$ (так как в прямоугольном треугольнике катет лежащий напротив угла в 30° равен половине гипотенузы), а $AH = \frac{3}{4}AC$, то есть $AH : CH = 3 : 1$.



4. Пуст дан равнобедренный $\triangle ABC$, где AC — основание, $AB = BC$ и AD — биссектриса $\angle CAB$. Так как $AD = AC$, то $\triangle ADC$ — равнобедренный и $\angle ADC = \angle ACD = x$, а $\angle CAD = x/2$. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то $x + x + x/2 = 180° \Rightarrow x = 72°$. То есть $\angle CAB = \angle BCA = 72°$, а $\angle ABC = 180° - 72° - 72° = 36°$.

5. Пуст дан равнобедренный $\triangle ABC$, где AC — основание, $AB = BC$ и AF и CE — биссектрисы углов при основании, D — точка пересечения биссектрис, $\angle ADC = 150°$. $\triangle ADC$ — равнобедренный, значит $\angle DAC = \angle DCA = (180° - 150°) : 2 = 15°$.

Так как $\triangle AFC = \triangle CEA$ — прямоугольные, то $\angle BAC = ACB = 90° - 15° = 75°$, а $\angle ABC = 180° - 75° - 75° = 30°$.

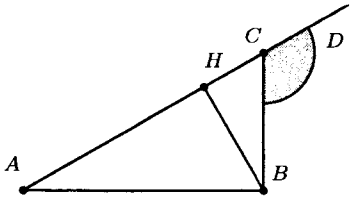
6. Из неравенства треугольника следует, что $AB < AD + DB$ и $BC < DC + DB$, а так как $AB - BC > 0$, то $(AD + DB) - (DC + DB) = AD - DB > 0$, то есть $AD > DC$.

Вариант 2

1. Пусть a, b, c — внутренние углы треугольника. Тогда $5 : 6 : 7 = (a + b) : (a + c) : (b + c)$. Пусть x — некоторая величина, равная отношению градусной меры угла к его части.
Тогда $(a+b) = 5x$, $(a+c) = 6x$, $(b+c) = 7x \Rightarrow (a+b) + (a+c) - (b+c) = 2a = 5x + 6x - 7x = 4x \Rightarrow a = 2x$, $-(a+b) + (a+c) + (b+c) = 2c = -5x + 6x + 7x = 8x \Rightarrow c = 4x$, $(a+b) - (a+c) + (b+c) = 2b = 5x - 6x + 7x = 6 \Rightarrow b = 3x$. Следовательно внутренние углы треугольника относятся друг к другу как $a : b : c = 2x : 3x : 4x = 2 : 3 : 4$.

2. Пусть даны углы треугольника a, b и c, и внешние углы $x = a + b$ — для c, $y = b + c$ — для a и $z = a + c$ — для b.
По условию задачи $x + y = 3z \Rightarrow a + b + b + c = 3a + 3c \Rightarrow 2b = 2a + 2c \Rightarrow b = a + c$, $a + c = 180° - b \Rightarrow b = 90°$, то есть данный треугольник — прямоугольный.

3. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, с прямым $\angle ABC$ и высотой BH. Пусть внешний $\angle ACB$ — $\angle BCD = 120°$, значит $\angle ACB = 180° - 120° = 60°$, а $\angle BAC = 30°$. Следовательно $\angle HBC = 30°$, и $CB = \frac{AC}{2}$, $CH = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{4}AC$ (так как в прямоугольном треугольнике катет лежащий напротив угла в 30° равен половине гипотенузы), а $AH = \frac{3}{4}AC$. Среднее арифметическое $\frac{CH+AH}{2} = \frac{\frac{1}{4}AC+\frac{3}{4}AC}{2} = \frac{AC}{2}$, следовательно $CB = \frac{CH+AH}{2}$.



4. Пуст дан равнобедренный $\triangle ABC$, где AC — основание, $AB = BC$ и AD — биссектриса $\angle CAB$. Так как в $\triangle ADC$ $\angle ADC = \angle ACD = x$, $\angle CAD = x/2$, и сумма углов треугольника равна 180°, то $x+x+x/2 = 180° \Rightarrow x = 72°$. То есть $\angle CAB = \angle BCA = 72°$, а $\angle ABC = 180° - 72° - 72° = 36°$.

5. Пуст дан равнобедренный $\triangle ABC$, где AC — основание, $AB = BC$ и AF и CE — биссектрисы углов при основании, D — точка пересечения биссектрис, $\angle ADC = 110°$. $\triangle ADC$ — равнобедренный, значит $\angle DAC = \angle DCA = (180° - 110°) : 2 = 35°$. Так как $\triangle AFC = \triangle CEA$ — прямоугольные, то $\angle BAC = ACB = 90° - 35° = 55°$, а $\angle ABC = 180° - 55° - 55° = 70°$.

6. Из неравенства треугольника следует, что $AD < AB + BD$ и $DC < BC + BD$, а так как $AD - DC > 0$, то $(AB+BD)-(BC+BD) = AB-BC > 0$, то есть $AB > BC$.

КА-4. Соотношение между сторонами и углами треугольника

Вариант А1

1. $\angle A = 0{,}25\angle B$, $\angle C = \angle B - 90°$, $\angle A + \angle B + \angle C = 0{,}25\angle B + \angle B + \angle B - 90° = 2{,}25\angle B - 90° = 180°$; $2{,}25\angle B = 270°$, $\angle B = 120°$, $\angle A = 0{,}25 \cdot 120° = 30°$, $\angle C = 120° - 90° = 30°$.

2. $\angle A = 180° - 120° = 60°$, $\angle C = 90° - \angle A = 90° - 60° = 30°$, $AC = 2AB = 2 \cdot 5 = 10$ (напротив угла 30°).

3. $\angle A = \angle B = 90°$ ($DA \perp MN$, $DB \perp NK$), $\angle MND = \angle DNK$ (ND — биссектриса), ND — общая $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle AND = \triangle DND \Rightarrow DA = DB$.

Вариант А2

1. $\angle C = 0{,}5\angle B$, $\angle A = \angle B - 45°$, $\angle A + \angle B + \angle C = 0{,}5\angle B + \angle B + \angle B - 45° = 2{,}5\angle B - 45° = 180°$; $2{,}5\angle B = 225°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 0{,}5 \cdot 90° = 45°$, $\angle A = 90° - 45° = 45°$.

2. $\angle B = 180° - 150° = 30°$, $AB = 0{,}5AC$ (напротив угла 30°), $AC + AB = 0{,}5AC + AC = 1{,}5AC = 12$, $AC = 8$, $AB = 4$.

3. $\angle A = \angle B = 90°$ ($DA \perp MN$, $DB \perp NK$), $\angle MND = \angle DNK$ (ND — биссектриса), ND — общая $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle AND = \triangle DND \Rightarrow \angle AND = \angle BDN$.

Вариант Б1

1. $\angle BDC = 90° - \angle DCB = 90° - 20° = 70°$, $\angle BCD = \angle DCA = 20°$, $\angle CDA = 180° - \angle BDC = 180° - 70° = 110°$, $\angle DAC = 180° - \angle CDA - \angle DCA = 180° - 110° - 20° = 50°$, $AD > CD$.

2. Так как внешние углы треугольника равны 142° и 82°, то смежные с ними внутренние углы треугольника равны $180° - 142° = 38°$ и $180° - 82° = 98°$, а третий угол треугольника равен $180° - 38° - 98° = 44°$. Таким образом максимальный угол в треугольнике равен 98°. Так как высота делит треугольник на два прямоугольных треугольника, то первый искомый угол равен $90° - 44° = 46°$, а второй $90° - 38° = 52°$.

3. $\angle A = \angle B = 90°$, $DA = DB$, ND — общая $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle AND = \triangle NDB \Rightarrow \angle MND = \angle DNK \Rightarrow ND$ — биссектриса, медиана $\Rightarrow \triangle MNK$ — равнобедренный.

Вариант Б2

1. $\angle ABD = \angle DBC = 90° - \angle BAD = 90° - 50° = 40°$, $\angle BDC = 180° - \angle ADB = 180° - 50° = 130°$, $\angle BCD = 180° - \angle DBC - \angle BDC = 180° - 40° - 130° = 10°$, $BD > CD$.

2. Так как внешние углы треугольника равны 150° и 78°, то смежные с ними внутренние углы треугольника равны $180° - 150° = 30°$ и $180° - 78° = 102°$, а третий угол треугольника равен $180° - 30° - 102° = 48°$. Таким образом максимальный угол в треугольнике равен 102°, а в треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Так как биссектриса делит угол треугольника пополам, то в первом образованном биссектрисой треугольнике угол образованный биссектрисой и наибольшей стороной равен $180° - 102°/2 - 30° = 99°$, а второй угол $180° - 99° = 81°$.

3. $\angle A = \angle B = 90°$, $\angle ADM = \angle BDK$, $MD = NK \Rightarrow \Rightarrow \triangle MAD = \triangle DBK \Rightarrow \angle NMD = \angle NKD \Rightarrow \Rightarrow \triangle MNK$ — равнобедренный.

Вариант В1

1. $\angle BAD = \angle DAC = \angle C : 2$, $\angle DAC + \angle C + 75° = 1{,}5\angle C + 75° = 180°$, $1{,}5\angle C = 105°$, $\angle C = \angle A = 70°$, $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 70° - 70° = 40°$.

2. $\angle BCA = 180° - 150° = 30°$, $\angle D = 90° \Rightarrow BD = 0{,}5BC = 0{,}5 \cdot 24 = 12$; $\angle BAD = 180° - 135° = 45°$, $\angle ABD = 90° - \angle BAD = 90° - 45° = 45°$, $\angle BAD = \angle ABD \Rightarrow \triangle ABD$ — равнобедренный $\Rightarrow AD = BD = 12$.

3. $\angle M = \angle E = 90°$, $\angle MKD = \angle DKE$, DK — общая $\Rightarrow \triangle DMK = \triangle DEK \Rightarrow DE = MD$; $ND = NM - MD = 3MD - MD = 2MD$, $\Rightarrow DE = 0{,}5ND \Rightarrow \angle N = 30°$; $\angle K = 90° - \angle N = 90° - 30° = 60°$,

$\angle EKD = 60° : 2 = 30°$, $\angle N = \angle EKD \Rightarrow \triangle NDK$ — равнобедренный $\Rightarrow NE = EK$.

Вариант В2

1. $\angle BAD = \angle DAC = \angle C : 2$, $\angle DAC + \angle C + 75° = 1{,}5\angle C + 75° = 180°$, $1{,}5\angle C = 105°$, $\angle C = \angle A = 70°$, $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 70° - 70° = 40°$.

2. $\angle BCA = 90° - 60° = 30°$, $\angle D = 90° \Rightarrow BD = 0{,}5BC$; $\angle BAD = 180° - 135° = 45°$, $\angle ABD = 90° - \angle BAD = 90° - 45° = 45°$, $\angle BAD = \angle ABD \Rightarrow \triangle ABD$ — равнобедренный $\Rightarrow AD = BD$; $BC = 2AD = 2 \cdot 8 = 16$.

3. $\angle M = \angle E = 90°$, $\angle MKD = \angle DKE$, DK — общая $\Rightarrow NE = EK \Rightarrow \triangle NDK$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle N = \angle EKD \angle DKM = 30° \Rightarrow DN = 2MD$, $MN = DN + MD = 2MD + MD = 3MD$.

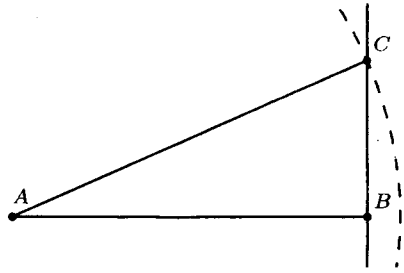
СА-16. Построение треугольника

Вариант А1

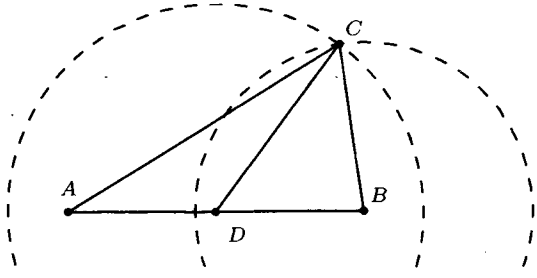
1. а) Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то расстояние от точки A до прямой BC — высота треугольника, опущенная из вершины A, и она равна длине стороны $AB = 5$ см.

б) Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то расстояние от прямой AB до прямой проходящей через точку C параллельно AB равно длине стороны $BC = 12$ см.

2. Строим катет AB прямоугольного треугольника. Через точку B проводим прямую перпендикулярную стороне AB, а из точки A циркулем проводим окружность радиусом равным длине гипотенузы. Точка пересечения окружности и прямой C — третья вершина треугольника. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



3. Строим заданную сторону AB треугольника, к которой проведена медиана. Находим ее середину D. Из центра в точке D проводим окружность радиусом равным длине заданной медианы, а из центра в точке B — окружность радиусом равным другой заданной стороне. Точка пересечения окружностей C — третья вершина треугольника. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.

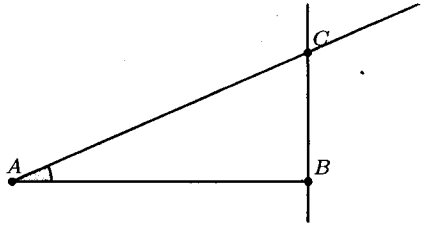


Вариант А2

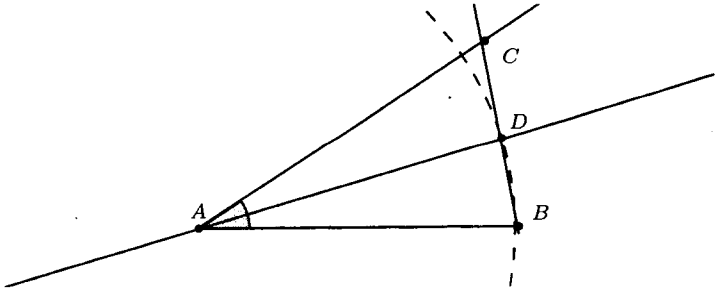
1. а) Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то расстояние от точки C до прямой AB — высота треугольника, опущенная из вершины C на сторону AB, и она равна длине стороны $BC = 12$ см.

б) Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то расстояние от прямой BC до прямой проходящей через точку A параллельно BC равно длине стороны $AB =$ $= 5$ см.

2. Строим катет AB прямоугольного треугольника. Через точку B проводим прямую перпендикулярную стороне AB, а из точки A проводим луч, образующий со стороной AB заданный угол. Точка пересечения луча и прямой C — третья вершина треугольника. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



3. Строим заданную сторону AB треугольника. В точке A проводим луч под заданным углом. Проводим прямую — биссектрису этого угла. Из центра в точке A проводим окружность, радиусом равным длине заданной биссектрисы. Точка пересечения биссектрисы и окружности — D лежит на стороне треугольника, поэтому проводим луч из точки B, проходящий через точку D, пересекающийся с лучом угла в точке C — третьей вершиной треугольника. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.

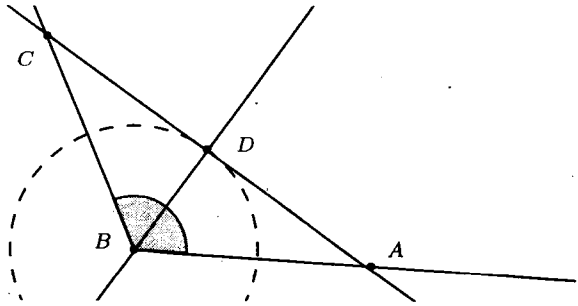


Вариант Б1

1. а) Медиана делит сторону треугольника пополам, а так как $\triangle ABC$ — равнобедренный (то есть $AC \perp BD$), то расстояние от точки до прямой равно $AC/2 = 16$ см$/2 = 8$ см.

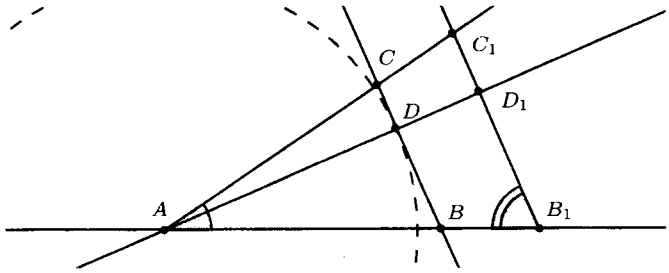
б) $AC \perp BD$, значит прямая проходящая через точку A параллельно BD тоже перпендикулярна AC. Следовательно искомое расстояние равно $AC = 16$ см.

2. Строим заданный тупой угол. Так как в равнобедренном треугольнике медиана исходящая из его вершины, противолежащей основанию, является биссектрисой и высотой этого угла, то находим биссектрису построенного угла. Из центра в точке B проводим окружность радиусом равным длине заданной медианы. Биссектриса и окружность пересекаются в точке D. Проводим прямую перпендикулярную биссектрисе в точке D, пересекающуюся со сторонами угла в точках A и C — вершины треугольника. Соединяем попарно вершины.



3. Проводим прямую и отмечаем на ней точки A и B_1. В данных точках строим заданные углы и получаем треугольник AB_1C_1. Проводим в данном треугольнике высоту AD_1. Так как искомый и данный треугольник подобны, то отмечая на высоте AD_1 заданную

высоту AD, и проведя через нее прямую параллельную стороне B_1C_1, получаем заданный треугольник ABC.

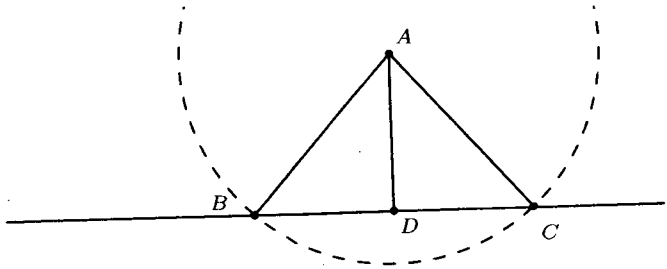


Вариант Б2

1. а) Медиана делит сторону треугольника пополам, а так как $\triangle ABC$ — равнобедренный (то есть $AC \perp BD$), то расстояние от точки до прямой равно $AC/2 = 16$ см$/2 = 8$ см.

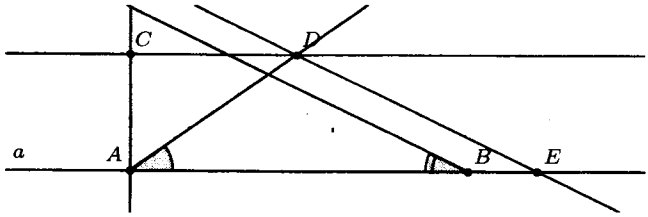
б) $AC \perp BD$, значит прямая проходящая через точку C параллельно BD тоже перпендикулярна AC. Следовательно искомое расстояние равно $AC = 16$ см.

2. В равнобедренном треугольнике биссектриса исходящая из его вершины, противолежащей основанию, является биссектрисой и высотой этого угла. Поэтому строим заданную биссектрису AD и проводим прямую перпендикулярную AD в точке D, а из центра в точке A проводим окружность радиусом равным длине заданной боковой стороны. Окружность и перпендикулярная прямая пересекаются в точках B и C — вершинах треугольника. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



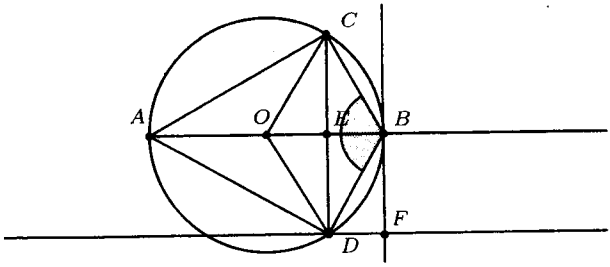
3. На прямой a отмечаем точки A и B, и на них строим заданные углы. В точке A проводим отрезок перпендикулярный прямой A и равный заданной высоте. Через него проводим прямую, параллельную прямой a. Она пересекает угол A в точке D — вершина искомого треугольника. Через точку D проводим прямую параллельную стороне угла B. Она пересекает прямую A в точке E. Соединяем попарно вершины A, D, E. Искомый треугольник построен.

Углы при основании и высота равны заданным величинам по построению.



Вариант В1

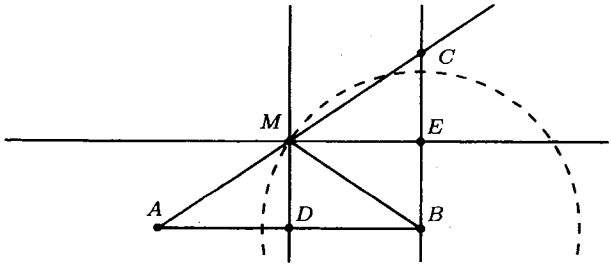
1. а) Диаметр перпендикулярный хорде делит ее пополам ($OC = OD$, OE — медиана и высота). Следовательно $\triangle ADC$ — равнобедренный, а так как $\angle CBD = 120°$, то и равносторонний. Значит расстояние от точки A до прямой $BC = CD = 8$ см, так как $\angle ACB = 90°$.



б) Искомое расстояние $BF = DE = CD/2 = 8$ см$/2 = 4$ см.

2. *Анализ.* Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABC$, с прямым $\angle B$. Проведем срединные перпендикуляры к сторонам AB и BC, $\triangle AMD = \triangle MDB = \triangle BME = \triangle CME$ по равенству катетов. Следовательно $AM = MC = MB$, где MB — медиана прямоугольного треугольника проведенная к гипотенузе.

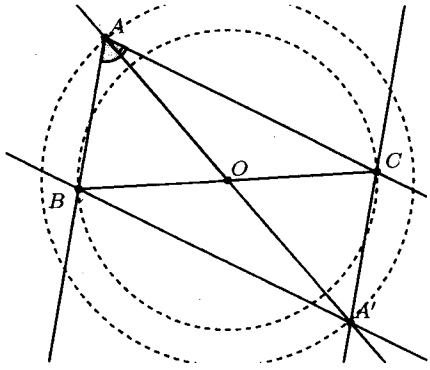
Построение 1. Строим заданный катет AB, проводим к нему срединный перпендикуляр, а в точке B строим прямой угол. Из центра в точке B проводим окружность радиусом равным длине заданной медианы, точка пересечения окружности и срединного перпендикуляра M лежит на гипотенузе. Проводим луч AM, пересекающейся с прямым углом в точке C третьей вершиной искомого треугольника. Искомый треугольник построен.



Построение 2. Как вариант, срединный перпендикуляр не проводится, а вместо этого строються две

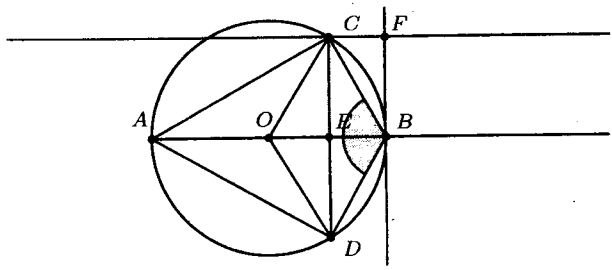
окружности, равные медиане из точек A и B и определяется точка M (так как $MB = AM$).

3. Построим прямую и отложим на ней отрезок AO равный заданной медиане. От точки A, используя AO как сторону углов построим заданные углы. Используя углы и точку O как центр построим параллелограмм $ACA'B$. Отложим от точки O, по прямой AO, отрезок OA' равный медиане. Проведем через точку A' прямые параллельные внешним сторонам углов и отметим на их пересечении точки B и C. Так как в параллелограмме диагонали делят друг друга пополам, то $BO = OC$, а следовательно $\triangle ABC$ — искомый треугольник.



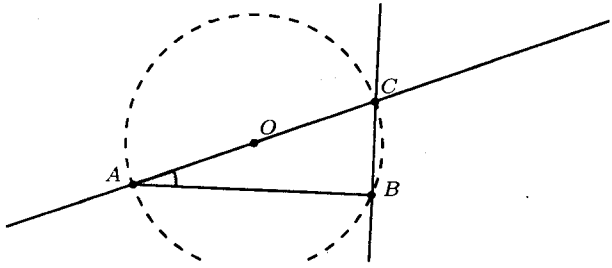
Вариант В2

1. а) Диаметр перпендикулярный хорде делит ее пополам ($OC = OD$, OE — медиана и высота). Следовательно $\triangle ADC$ — равнобедренный, а так как $\angle CBD = 120°$, то и равносторонний. Значит расстояние от точки A до прямой $BD = CD = 8$ см, так как $\angle ADB = 90°$.



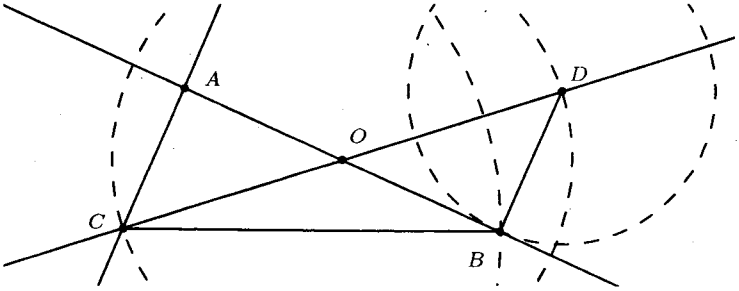
б) Искомое расстояние $BF = CE = CD/2 = 8$ см$/2 = 4$ см.

2. В прямоугольном треугольнике медиана проведенная к гипотенузе равна половине гипотенузы. Из этого вытекает следующее построение. Строим окружность с центром в точке O и радиусом равным заданной медианы. Проводим диаметр окружности AC, и строим заданный угол A, пересекающийся с окружностью в точке B. Попарно соединяем вершины. Искомый треугольник построен.



3. Отметим точку O и проведем окружность радиусом равным длине заданной медианы. Проведем диаметр окружности CD. Из точки C проведем окружность радиусом первой заданной стороны, а из точки D — второй. Окружности пересекаются в точке B. Построим отрезки CB и BD. Через точку C проведем прямую параллельную CB, и прямую через точки O и B; они пересекутся в точке A. Рассмотрим $\triangle ABC$,

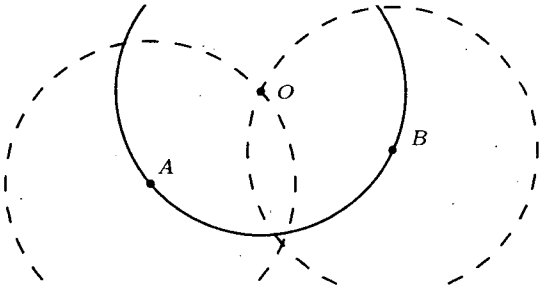
у него отрезок CO равен длине заданной медианы, а стороны BC и AC заданным сторонам. Искомый треугольник построен.



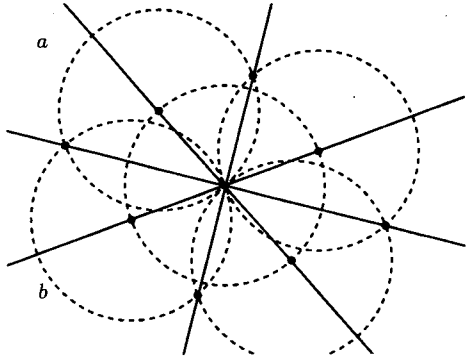
СА-17. Свойство биссектрисы и серединного перпендикуляра. Задачи на построение

Вариант 1

1. а) Очевидно, что центр искомой окружности O будет находится на одинаковом расстоянии от данных точек A и B. Из центров в точках A и B проводим окружности данного радиуса пересекающиеся в центре искомой окружности, и проводим из центра в точке O окружность данного радиуса. Очевидно, что диаметр окружности должен быть больше или равен расстоянию между окружностями, и что если он больше, то можно построить две такие окружности.



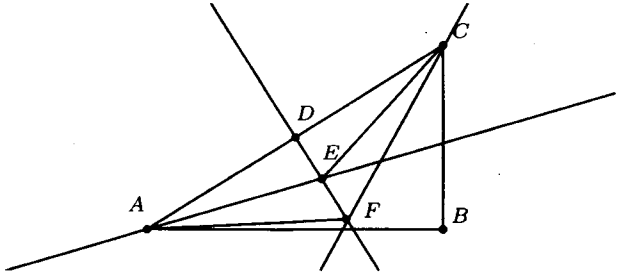
б) Пусть даны две пересекающиеся прямые. Из центра их пересечения проведем окружность произвольного радиуса, а из точек образованных пересечением окружности и пересекающихся прямых проведем новые окружности одинакового радиуса. Очевидно, что точки образованные пересечением вторых окружностей равноудалены от данных прямых, и их геометрическое место точек представляет из себя две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающихся в месте пересечения данных прямых.



в) Геометрическим местом точек, равноудаленных от гипотенузы и катета, будет биссектриса угла к которому они прилегают, а гелметрическим местом точек находящихся на равном расстоянии от внршин острых углов в прямоугольном треугольнике будет срединный перпендикуляр гипотенузы (так как в равнобедренном треугольнике стороны равны).

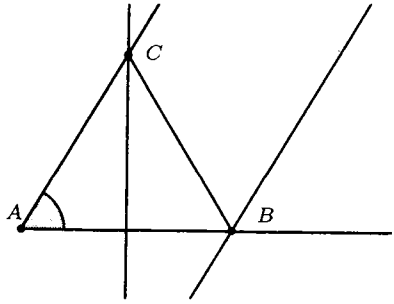
Пусть дан $\triangle ABC$, с прямым углом B. Проводим биссектрисы острых углов (две биссектрисы проводятся так как в условиях задачи не обговаривается какой катет имеется в виду), и строится срединный перпендикуляр к гипотенузе. Точки их

пересечения (E и F) и будут искомым геометрическим местом точек.



Из анализа рисунка следует, что если один из острых углов будет больше 60°, то такая точка будет только одна, так как вторая окажется за пределами треугольника.

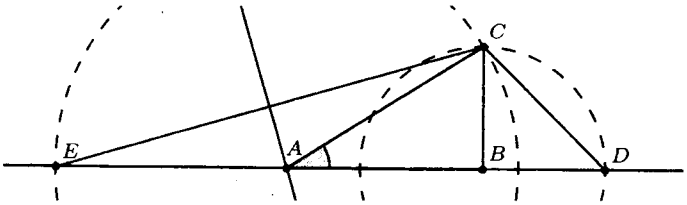
2. а) Построим заданный угол A. Построим прямую параллельную боковой стороне на расстоянии равным заданной высоте. Точка пересечения B, построенной прямой и угла A, будет точкой вершины равностороннего треугольника при основании. Проводим срединный перпендикуляр отрезка AB, и точку его пересечения с прямой угла C — третьей вершиной треугольника. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



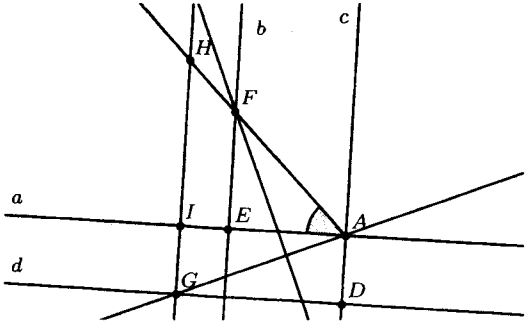
б) *Анализ.* Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. На прямой AB отложим

отрезки $AE = EC$ и $BD = BC$. Очевидно, что ED — периметр треугольника, $\angle BDC = 45°$, а $\angle BEC = \frac{1}{2}\angle BAC$.

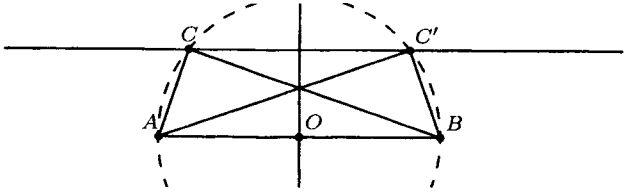
Построение. В точке E, заданного периметра ED прямоугольного треугольника, строим угол равный половине заданного угла, а в точке B угол равный 45°. Они пересекаются в точке C — вершине треугольника. Опускаем из вершины перпендикуляр на ED и находим точку B — вторую вершину треугольника. К отрезку EC строим срединный перпендикуляр, пересекающий ED в точке A — третьей вершине треугольника. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



в) В точке пересечения A взаимно перпендикулярных прямых a и c строим заданный угол A. А на прямой c откладываем отрезок AD равный разности гипотенузы и противолежащего заданному углу катету. Проводим прямую d перпендикулярную прямой в точке D. Отмечаем на прямой a точку E и проводи перпендикуляр b. Отмечаем точку пересечения стороны угла A и b — F. Проводим биссектрису угла EFA. Проводим перпендикулярную ей прямую проходящую через точку A, отсекающая на прямой точку G. Данная прямая отсекает на прямой a точку I, и пересекается с прямой AF в точке H. Соединяем попарно вершины A, I, H. Искомый треугольник построен.

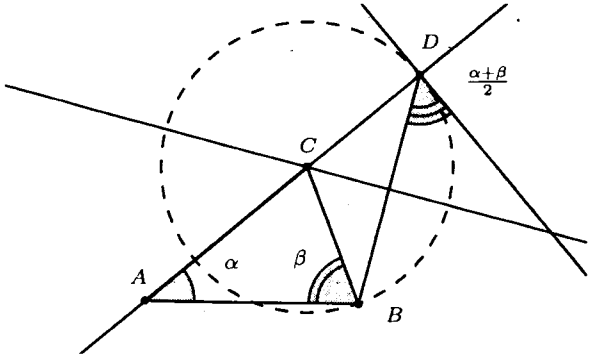


г) Для решения задачи воспользуемся тем, что в прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности лежит посередине гипотенузы.
Построим заданную гипотенузу AB, найдем ее середину — точку O. Проведем описанную окружность радиусом OA. Проведем прямую параллельную AB, на расстоянии заданной высоты. Она пересекает окружность в двух точках C и C'. Таким образом $\triangle ABC$ и $\triangle ABC'$ — искомые.



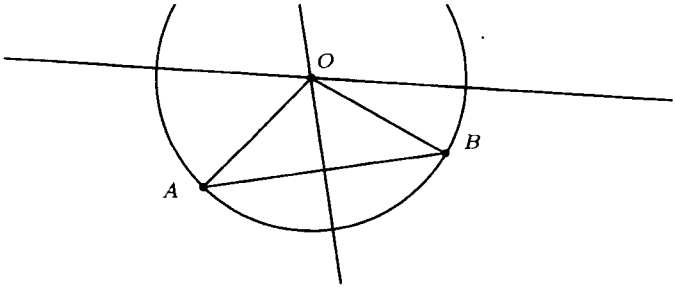
д) *Анализ.* Рассмотрим $\triangle ABC$ с заданными углами α и β. На продолжении стороны AC отложим отрезок $CD = CB$; $\triangle BCD$ — равнобедренный, поэтому $\angle CBD = \angle CDB = 90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$. Проведем перпендикулярную прямую в точке D. Угол D образованный данной прямой и DB равен $\frac{\alpha+\beta}{2}$.
Построение. Проводим отрезок AD равный сумме противолежащих сторон. В точке A строим заданный угол α, а в точке B проводим перпендикулярную прямую и строим на ней угол равный

полусумме заданных углов $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Данные стороны углов пересекаются в точке B — вершине треугольника. Затем строи срединный перпендикуляр к отрезку BD и получаем третью вершину треугольника C. Искомый треугольник построен.

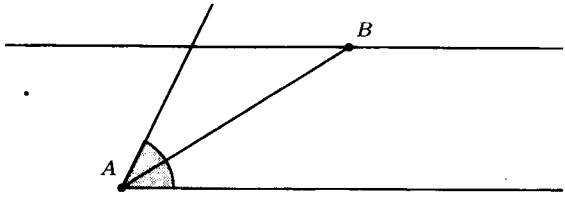


Вариант 2

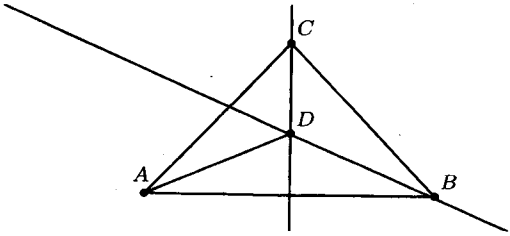
1. а) Так как центр O искомой окружности равноудален от двух данных точек A и B на одинаковое расстояние, то он будет находиться в вершине равностороннего треугольника. Поэтому, проводим отрезок AB; строим его срединный перпендикуляр, до пересечения с заданной прямой; находим точку пересечения O — центр окружности и строим окружность, радиусом равным OA или OB.



б) Геометрическим местом точек равноудаленных от сторон угла является его биссектриса. Пусть задан некоторый угол A; проведем его биссектрису и прямую, лежащую внутри угла, параллельную одной из сторон. Биссектриса и прямая пересекаются в точке B. Так как расстояние от точки B до сторон угла равно максимально заданному, то отрезок AB будет искомым геометрическим местом точек.

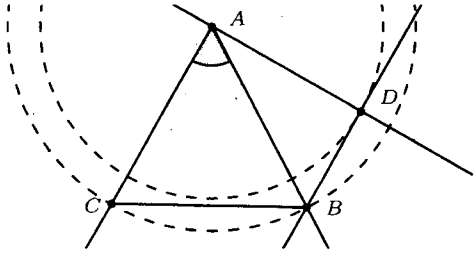


в) Геометрическим местом точек, равноудаленных от основания и боковой стороны будет биссектриса угла, а геометрическим местом точек равноудаленных от вершин при основании будет срединный перпендикуляр. Точка их пересечения будет искомой точкой.



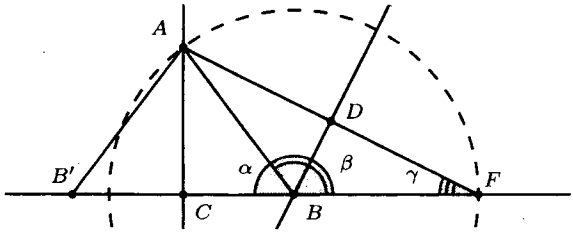
2. а) Построим заданный угол A. Построим прямую параллельную боковой стороне на расстоянии равным заданной высоте. Отрезок AD равен заданной высоте. Точка пересечения B, построенной прямой и угла A, будет точкой вершины равностороннего треугольника при основании. Так как

боковые стороны треугольника равны, то проведя окружность с центром в точке A, с радиусом AB мы получим при пересечении окружности и стороны угла точку C — третью вершину треугольника. Соединив попарно вершины, получим искомый треугольник.



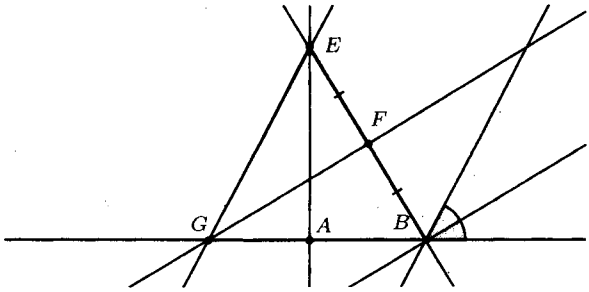
б) *Анализ.* Пусть дан равнобедренный треугольники ABB'. От вершины треугольника, на прямой проходящей через основание, отложим отрезок BF — равный боковой стороне. Тогда треугольник ABF — равнобедренный, а угол AFB равен половине угла при основании CBA (так как $\angle ABF = 180° - \angle ABC \Rightarrow \angle DBF = (180° - \angle ABC)/2$, $\angle BDF = 90° \Rightarrow \angle DFB = \frac{1}{2}\angle ABC$). А сторона CF равна половине периметра.

Построение. На прямой отмечаем точку C, откладываем отрезок CF равный половине данного периметра, и восстанавливаем из точки C перпендикуляр. В точке F строим угол равный половине заданного угла при основании и отмечаем точку A пересечении стороны построенного угла и перпендикулярной прямой. Строим срединный перпендикуляр отрезка AF. Отмечаем точку пересечения B. Третья точка треугольника B' расположена симметрично точки B относительно перпендикулярной прямой. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



в) На прямой отмечаем заданный отрезок AB, равный разности гипотенузы и катета. Проводим прямую перпендикулярную прямой AB в точке A. В точке B строим заданный угол B. Биссектрисой делим его пополам и проводим перпендикулярную к биссектрисе прямую в точке B, пересекающую другую прямую в точку E. Через точку E проводим прямую, параллельную прямой угла B. Она отсекает на прямой AB точку G. Точки A, E, G — вершины искомого треугольника.

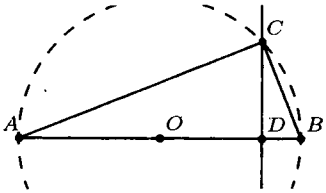
Доказательство правильности построения следует из того, что треугольник GBE — равносторонний, так как равны $\angle GBE$ и BEG.



г) Для решения задачи воспользуемся тем, что в прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности лежит посередине гипотенузы.

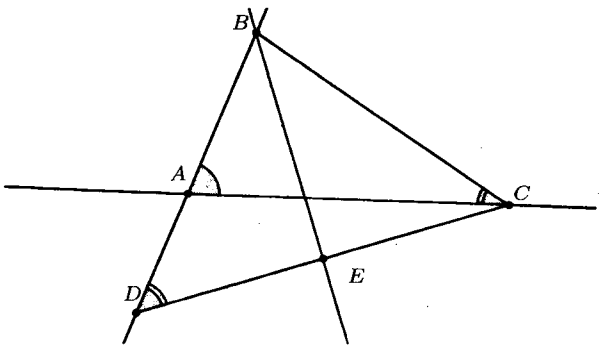
Построим заданную гипотенузу AB, найдем ее середину — точку O. Проведем описанную окружность радиусом OA. Отложим на прямой задан-

ный отрезок BD и в точке B проведем перпендикулярную прямую. Она пересекает окружность в двух точках C и C'. Таким образом $\triangle ABC$ и $\triangle ABC'$ — искомые.



д) *Анализ.* Рассмотрим треугольник ABC с заданными углами A и C. В построенном на его основе равностороннем треугольнике DBC отрезок AD равен разности сторон противолежащих заданным углам, а $\angle D = (\angle A + \angle C)/2$ ($\angle BDE = (180° - (\angle A + \angle B))/2$, $\angle DEB = 90°$).

Построение. Перекрещивающимися прямыми строим первый заданный угол A, и на продолжении стороны угла откладываем отрезок равный заданной разнице сторон AD. В точке D строим угол равный половине суммы заданных углов. Он пересекается со стороной угла A в точке C. Строим срединный перпендикуляр отрезка DC и находим третью вершину треугольника B. Соединяем попарно вершины. Искомый треугольник построен.



КА-5. Годовая контрольная работа

Вариант А1

1. а) $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 70° - 55° = 55° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle C = \angle B \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный с основанием BC;

б) $\angle ABC = 90° - \angle A = 90° - 70° = 20°$, $\angle DBC =$ $= 90° - \angle C = 90° - 55° = 35°$.

2. а) $AO = OB$, $DO = CO$. $\angle AOC = \angle DOB$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle AOC = \triangle DOB$;

б) $\angle ODB = \angle OCA = 20°$, $\angle OAC = 180° - \angle OCA -$ $- \angle AOC = 180° - 20° - 115° = 45°$.

3. Пусть боковая сторона равна 16 см, тогда основание равно 64 см − 16 см − 16 см = 32 см, что невозможно в силу неравенства треугольника. Значит 16 см — длина основания, тогда длина боковой стороны рана: $(64 - 16) : 2 = 24$ см.

Вариант А2

1. а) $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 100° - 40° = 40° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle C = \angle B \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный с основанием BC;

б) $\angle AKC = 180° - 100° - 20° = 60°$, $\angle CKB = 90° -$ $- \angle C = 180° - 40° - 20° = 120°$.

2. а) $AO = OB$, $DO = CO$. $\angle AOD = \angle COB$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle AOD = \triangle COB$;

б) $\angle ODA = \angle OCB = 40°$, $\angle OBC = 180° - \angle OCB -$ $- \angle BOC = 180° - 40° - 95° = 45°$.

3. Пусть длина боковой стороны равна 20 см, тогда длина основания равно 80 см − 20 см − 20 см = 40 см, что невозможно в силу неравенства треугольника. Значит 20 см — длина основания, а длина боковой стороны равна: (80 см − 20 см)/2 = 30 см.

Вариант Б1

1. а) $\angle B = \angle ABD + \angle CBD = 40° + 10° = 50°$, $\angle A = 90° - \angle ABD = 90° - 40° = 50°$, $\angle B = \angle A \Rightarrow \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный с основанием AB;

б) $\angle OCB = \angle C - \angle OCD = 100° - 40° = 60°$, $\angle BOC = 180° - \angle OBC - \angle OCB = 180° - 10° - 60° = 110°$.

2. а) $AO = OB$, $OC = OD$, $\angle AOD = \angle COB$, $\angle COA = \angle BOD$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle COB = \triangle AOD$, $\triangle CAO = \triangle BOD \Rightarrow AC = BD$, $CB = AD$, AB — общая $\Rightarrow \triangle ACB = \triangle ABD$;

б) $\angle ACB = 180° - \angle CBD = 180° - 68° = 112°$.

3. В силу неравенства треугольников одна сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, поэтому искомая сторона треугольника меньше 0,9 см + +4,9 см = 5,8 см, и равна 5 см, но не 4 см и меньше, так как в этом случае не выполняется другие неравенства треугольника.

Вариант Б2

1. а) $\angle C = \angle ACD + \angle BCD = 25° + 40° = 65°$, $\angle A = 90° - \angle ACD = 90° - 25° = 65°$, $\angle C = \angle A \Rightarrow \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный с основанием AC;

б) $\angle OBC = 90° - \angle C = 90° - 65° = 25°$, $\angle BOC = 180° - \angle OBC - \angle OCB = 180° - 25° - 40° = 115°$.

2. а) $AO = OB$, $OC = OD$, $\angle AOD = \angle COB$, $\angle COA = \angle BOD$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle COB = \triangle AOD$, $\triangle CAO = \triangle BOD \Rightarrow AC = BD$, $CB = AD$, CD — общая $\Rightarrow \triangle ACD = \triangle BDC$;

б) $\angle CBD = 180° - \angle ACB = 180° - 118° = 62°$.

3. В силу неравенства треугольников одна сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, поэтому искомая сторона треугольника меньше 0,8 см + + 1,9 см = 2,7 см, и равна 2 см.

Вариант В1

1. а) $\angle AOB = \angle BOC$, $\angle ABO = \angle OBC$, BO — общая $\Rightarrow \triangle AOB = \triangle BOC \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный с основанием BC;

б) $\angle AOC = 140° \Rightarrow \angle A = \angle C = 180° - 140° = 40°$, $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 18 - ° - 40° - 40° = 100°$.

2. а) $AO = CO$, $OB = OD$, $\angle AOD = \angle COB$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle AOD = \triangle COB \Rightarrow AD = CB$, $CD = AB$, $\angle ADC = \angle DCB \Rightarrow \triangle ACD = \triangle CAB$;

б) $\angle OAD = \angle OCB = 50°$.

3. В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен половине гипотенузы. Поэтому в данном случае радиус описанной окружности равен 10 см, а высота не может быть больше радиуса этой окружности. Ответ: нет.

Вариант В2

1. а) $\angle AOB = \angle BOC$, $\angle ABO = \angle OBC$, BO — общая $\Rightarrow \triangle AOB = \triangle BOC \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный с основанием BC;

б) $\angle AOC = 140° \Rightarrow \angle A = \angle C = 180° - 140° = 40°$, $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 18 - ° - 40° - 40° = 100°$.

2. а) $AO = CO$, $OB = OD$, $\angle AOD = \angle COB$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle AOD = \triangle COB \Rightarrow AD = CB$, $CD = AB$, $\angle ADO = \angle DCB \Rightarrow \triangle BAD = \triangle DCB$;

б) $\angle ODA = \angle OBC = 40°$.

3. В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен половине гипотенузы. Поэтому в данном случае радиус описанной окружности равен 13 см, а высота не может быть больше радиуса этой окружности. Ответ: нет.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Издательство ООО «СТАНДАРТ»
stan5714@mail.ru

В. К. Ерин

Все домашние работы к самостоятельным и контрольным работам А. П. Ершовой по АЛГЕБРЕ и ГЕОМЕТРИИ 7 КЛАСС

Формат 84x108 1/32
Бумага типографская. Печать офсетная. 224 с.
Усл.печ.л. 7,0. Тираж 7000 экз. Заказ № ВЗК-06588-13.
Издательство ООО «СТАНДАРТ», Москва 2014 г.

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Дом печати - ВЯТКА» в полном соответствии
с качеством предоставленных материалов.
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36
http://www.gipp.kirov.ru, e-mail: order@gipp.kirov.ru