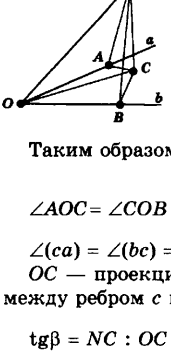
§ 5. Многоугольники

1. Решение задачи в учебнике Погорелова.
2. Решение задачи в учебнике Погорелова.
3. Обозначим через (abc) заданный трехгранный угол, где $\angle(ab) = \gamma$. Тогда из произвольной точки N ребра c опустим перпендикуляры NA, NC, NB на ребра a, b и плоскость угла (ab). Поскольку NC — перпендикуляр к плоскости угла (ab), то BC и AC — проекции наклонных NB и NA на плоскость $\angle(ab)$. По теореме о трех перпендикулярах $AC \perp a$, $BC \perp b$, $\angle NAC = \angle NBC = \varphi$, $\triangle NCA = \triangle NCB$ по общему катету NC и равным острым углам NAC и NBC.



Таким образом, $\triangle OAC = \triangle OBC$ по катету и общей гипотенузе.

$$\angle AOC = \angle COB = \frac{\gamma}{2},\ \angle(bc) = \alpha.\ \mathrm{tg}\alpha = NB : OB = \frac{BC}{\cos\gamma} : \frac{BC}{\mathrm{tg}\gamma} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}.$$

$\angle(ca) = \angle(bc) = \alpha$.

OC — проекция наклонной ON на плоскость $P(ab)$, $PNOC$ — угол между ребром c и плоскостью $P(ab)$, $PNOC = \beta$,

$$\mathrm{tg}\beta = NC : OC = BC\mathrm{tg}\varphi:\ \frac{BC}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \mathrm{tg}\varphi\sin\frac{\gamma}{2}.$$

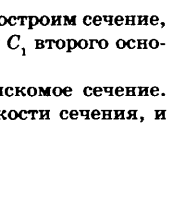
4*. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. По тем же соображениям $\angle(ac) = \angle(cb) = \alpha$, $\angle(ab) = \gamma$.

Пусть точка N — произвольная точка на ребре c.

Имеем: $\cos\varphi = BC : NB = OB\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} : OB\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{\mathrm{tg}\alpha}$ $\cos\beta = OC : ON =$

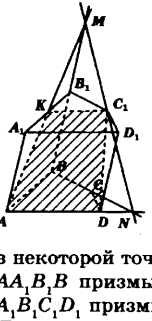
$$= OB\cos\alpha : OB \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

5. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — призма, $A''B''C''D''$ — пересечение призмы плоскостью, параллельной основаниям. Плоскости ABC и $A''B''C''$ совмещаются параллельным пересечением. При этом точка A'' совмещается с A, B'' с B, C'' с C и D'' с D. Таким образом, четырехугольники $A''B''C''D''$ и $ABCD$ равны.



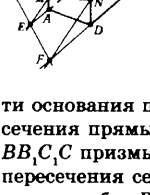
6. Из каждой вершины призмы можно провести $(n-3)$ диагоналей. Поскольку вершин $2n$, и из них каждая диагональ соединяет две вершины, то имеем $n(n-3)$ диагоналей.
7. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — четырехугольная призма. Построим сечение, проходящее через сторону AD основания и вершину C_1 второго основания.

Если $AD \parallel BC$, то есть $AD \parallel B_1C_1$, то ADC_1B_1 — искомое сечение. В общем случае точки C_1 и D принадлежат и плоскости сечения, и



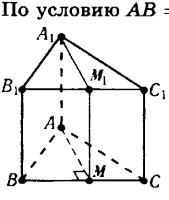
плоскости грани CC_1D_1D, C_1D — прямая пересечения плоскости искомого сечения и грани призмы. Найдем точку N пересечения прямых AD и BC. Эта точка принадлежит и плоскости сечения, и плоскости грани BB_1C_1C призмы. В плоскости BB_1C_1 можно построить прямую C_1N, которая также принадлежит плоскости сечения. Найдем точку M пересечения прямых BB_1 и C_1N. Точка M принадлежит и плоскости сечения, и грани AA_1B_1B призмы. В плоскости AA_1B_1 можно построить прямую AM, принадлежащую и плоскости пересечения. Эта прямая пересечет ребро A_1B_1 призмы в некоторой точке K. AK — пересечение плоскости сечения с гранью AA_1B_1B призмы, KC_1 — пересечение плоскости сечения с гранью $A_1B_1C_1D_1$ призмы. Таким образом, AKC_1D — искомое сечение.

8. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — четырехугольная призма. Точки M, N, K принадлежат ребрам призмы AA_1, DD_1 и C_1C. Найдем сечение призмы плоскостью MNK. Точки M и N принадлежат плоскости сечения и плоскости грани AA_1D_1D, MN — пересечение грани AA_1D_1D с секущей плоскостью, KN — пересечение грани CC_1D_1D с секущей плоскостью. Найдем точки F и E пересечения прямых KN и CD и MN и AD соответственно. Эти точки принадлежат и секущей плоскости, и плоскости основания призмы. В плоскости основания найдем точку O пересечения прямых BC и FE. Эта точка принадлежит плоскости грани BB_1C_1C призмы и секущей плоскости. Прямая OK является прямой пересечения секущей плоскости и плоскости грани BB_1C_1C. Она пересечет ребро BB_1 призмы в некоторой точке P. PK — сечение секущей плоскости и грани BB_1C_1C; MP — сечение секущей плоскости и плоскости грани AA_1B_1B. Таким образом, $MPKN$ — искомое сечение.



9. Плоскость, перпендикулярная одной из параллельных прямых, перпендикулярна и другой. Поскольку боковые ребра призмы параллельны и одно из них перпендикулярно основанию призмы, то и остальные боковые ребра также перпендикулярны основанию.

10. По условию $AB = 10$ см, $AC = 17$ см, $BC = 21$ см. В треугольнике наименьшая высота опущена на наибольшую сторону, то есть это AM. Проведем плоскость через точки A, A_1 и M. Эта плоскость пересечет грань BB_1C_1C призмы по прямой MM_1. Прямые AA_1 и MM_1 лежат в одной плоскости и не пересекаются, поэтому $AA_1 \parallel MM_1$.



По формуле Герона найдем S_{ABC}:

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}\text{, где } p = \frac{AB+AC+BC}{2},$$

$$p = \frac{10+17+21}{2} = 24 \text{ (см)}.\ S = \sqrt{24\cdot 14\cdot 7\cdot 3} = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

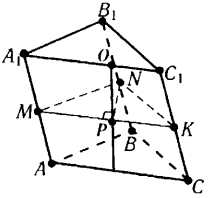
Но $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM$, $AM = \frac{2S_{ABC}}{BC}$, $AM = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8$ (см),

Площадь сечения $S_{AMM_1A_1} = AA_1 \cdot AM = 18 \cdot 8 = 144$ (см²).

11. Из вершины A_1 призмы опустим перпендикуляр A_1M на основание $ABCD$ призмы. A_1M — высота призмы, A_1A — наклонная, AM — ее проекция, $\angle A_1AM$ — угол между ребром A_1A призмы и плоскостью основания $ABCD$. По условию $AA_1 = 15$ см, $\angle A_1AM = 30°$.

Для $\triangle AA_1M$ $\angle A_1MA = 90°$, $A_1M = A_1A \cdot \sin\angle A_1AM = 15 \cdot \frac{1}{2} = 7{,}5$ (см).

12*. Из произвольной точки M на ребре AA_1 опустим перпендикуляры MN и MK на ребра BB_1 и CC_1 соответственно. Поскольку $AA_1 \parallel BB_1$ и $AA_1 \parallel CC_1$, то $MN \perp AA_1$ и $MK \perp AA_1$. Плоскость MNK перпендикулярна ребру AA_1, а следовательно, перпендикулярна и параллельным ему ребрам BB_1 и CC_1.



Тогда $NK \perp BB_1$ и $NK \perp CC_1$. Пусть $MK = 40$ см, $MN = 37$ см, $NK = 13$ см. Ясно, что наибольшая боковая грань призмы — AA_1C_1C.

Из произвольной точки N на ребре BB_1 опустим перпендикуляр NP на сторону MK $\triangle MNK$. Через прямые BB_1 и NP проведем плоскость. Она пересечет грань AA_1C_1C по некоторой прямой OP, параллельной BB_1, следовательно, и CC_1. Так как ребро CC_1 перпендикулярно плоскости MNK, то прямая $OP \perp (MNK)$, откуда $OP \perp MK$, кроме того, MK — прямая пересечения плоскостей MNK и AA_1C_1C, плоскость NPO перпендикулярна MK. Поскольку $NP \perp OP$, то плоскости MNK и AA_1C_1C перпендикулярны, NP — расстояние от ребра BB_1 до плоскости AA_1C_1C.

По формуле Герона найдем площадь $\triangle MNK$:

$$S = \sqrt{p(p - MN)(p - NK)(p - MK)}, \; p = \frac{40 + 13 + 37}{2} = 45 \text{ (см)}.$$

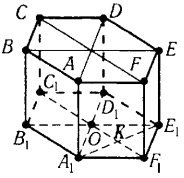
$S = \sqrt{45 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 32} = 240$ (см²). Но $S = \frac{1}{2} NP \cdot MK$, $NP = \frac{2S}{MK}$, $NP = \frac{2 \cdot 240}{40} = 12$ (см).

13. Пусть $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — призма, в основании которой лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной a. Боковые грани — квадраты. Обозначим через O точку пересечения больших диагоналей правильного шестиугольника. O является центром описанной вокруг шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ окружности.

Имеем: $OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 = OE_1 = OF_1 = R$, где R — радиус окружности, $R = a$. Тогда $F_1C_1 = 2a = FC$. Так как призма прямая, то FF_1C_1C — прямоугольник.

* Решения и ответы приводятся к учебникам указанных годов.

$S_{FF_1C_1C} = 2a \cdot a = 2a^2$. FC_1 — гипотенуза прямоугольного $\triangle FF_1C_1$,



$\angle F_1 = 90°, FC_1 = \sqrt{FF_1^2 + F_1C_1^2}, FC_1 = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

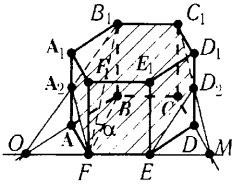
Рассмотрим $\triangle E_1F_1A_1$, $E_1F_1 = F_1A_1$. F_1K — биссектриса, медиана и высота треугольника. $\angle A_1F_1E_1 = 120°$, $\angle A_1F_1K = \angle E_1F_1K = 60°$. В $\triangle E_1KF_1$ $\angle K = 90°$, $E_1K = E_1F_1 \cdot \sin \angle F_1$.

$E_1K = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $E_1A_1 = 2E_1K = a\sqrt{3}$, EE_1C_1C — прямоугольник.

$S_{EE_1C_1C} = a \cdot a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$. EC_1 — гипотенуза прямоугольного треугольника EE_1C_1,

$EC_1 = \sqrt{EE_1^2 + E_1C_1^2}$, $EC_1 = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

14*. Пусть $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — призма, в основании которой лежит правильный шестиугольник со стороной a, а боковые грани — квадраты. $FA_2B_1C_1D_2E$ — сечение, площадь которого нужно найти.



Основание призмы можно разбить на шесть равных правильных треугольников со стороной a.

Площадь правильного треугольника:

$S_{\triangle} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, откуда $S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{\triangle} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$.

Диагональ призмы B_1F принадлежит плоскости сечения. Поскольку призма прямая, то B_1B — перпендикуляр, BF — проекция наклонной B_1F на плоскость основания. $\angle B_1FB$ — угол между плоскостями сечения и основания, обозначим его $\angle\alpha$.

$\cos\alpha = \frac{BF}{B_1F}$, $BF = a\sqrt{3}$, $B_1F = 2a$ (смотри предыдущую задачу).

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поскольку призма прямая, то $ABCDEF$ — ортогональная проекция сечения $FA_2B_1C_1D_2E$ на плоскость основания.

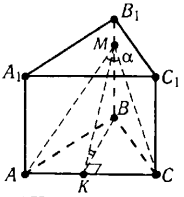
$S_{ABCDEF} = S_{FA_2B_1C_1D_1E} \cdot \cos\alpha$, $S_{FA_2B_1C_1D_2E} = \frac{S_{ABCDEF}}{\cos\alpha} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 3a^2$.

15. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, сторона основания которой равна a. Плоскость AMC пересекает боковые грани призмы AA_1B_1B и BB_1C_1C по отрезкам AM и MC. $\angle AMC = \alpha$.

В $\triangle ABC$ BK — медиана, высота и биссектриса.

Из $\triangle ABK$, $\angle AKB = 90°$, $\angle ABK = 30°$ найдем BK:

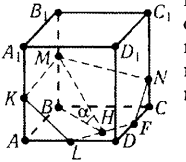
$BK = AB\cos\angle ABK = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. MB — перпендикуляр, MK — на



клонная, BK — ее проекция. По теореме о трех перпендикулярах $MK \perp AC$, то есть MK — высота $\triangle AMC$, а также его медиана, поскольку K — середина AC. Таким образом, в $\triangle AMC$ $AM = MC$, MK — биссектриса $\angle AMC$, $\perp \angle AMK = \frac{\alpha}{2}$. Из $\triangle AMK$, $\angle K = 90°$, $AK = \frac{a}{2}$ найдем MK: $MK = \frac{AK}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Из треугольника MBK имеем: $\angle B = 90°$, $\cos\angle K = \frac{BK}{MK}$

$$= a\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{a} = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

16. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, в основании которой лежит квадрат со стороной a. L и F — середины сторон основания AD и DC. Плоскость сечения $LKMNF$ наклонена к основанию под углом α. Поскольку призма прямая, то $ABCFL$ — ортогональная проекция сечения на плоскость основания.

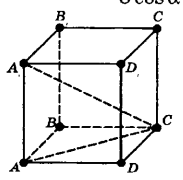


$S_{ABCFL} = S_{LKMNF}\cdot\cos\alpha$, $S_{LKMNF} = \frac{S_{ABCFL}}{\cos\alpha}$. Рассмотрим $\triangle LFD$: $\angle D = 90°$, $LD = DF = \frac{a}{2}$, $S_{LFD} = \frac{1}{2}(LD)^2$, $S_{LFD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8}$.

$S_{ABCD} = a^2$, $S_{ABCFL} = S_{ABCD} - S_{LFD}$. $S_{ABCFL} = a^2 - \frac{a^2}{8} = \frac{7a^2}{8}$.

$$S_{LKMNF} = \frac{7a^2}{8\cos\alpha}.$$

17.

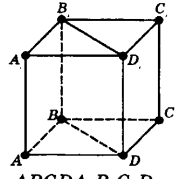


Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма; AA_1 — высота, $AA_1 = 14$ см, $S_{ABCD} = 144$ см^2, $AB = BC = CD = AD = 12$ см. Тогда $AC = \sqrt{2}\cdot AB$, $AC = 12\sqrt{2}$ см.

Из треугольника AA_1C: $\angle A = 90°$ по теореме Пифагора:

$A_1C = \sqrt{AC^2 + AA_1^2}$, $A_1C = \sqrt{288 + 196} = 22$ (см).

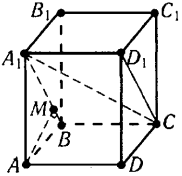
18.



Имеем: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма. Пусть сторона основания призмы a, высота призмы H. Площадь боковой грани $a\cdot H = Q$. Диагональ основания призмы равна $a\sqrt{2}$. BB_1D_1D — диагональное пересечение призмы. Ее площадь $a\sqrt{2}\cdot H = Q\sqrt{2}$.

19*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма. Сторона основания равна 15, а высота призмы 20.

Расстояние от стороны AD основания до диагонали A_1C — это расстояние от стороны AD до плоскости A_1BCD_1, в которой лежит диагональ A_1C. Плоскость A_1BCD_1 проходит через прямую A_1D_1, которая перпендикулярна к грани AA_1B_1B призмы. Таким образом, плоскости A_1BCD_1 и AA_1B_1B перпендикулярны. В плоскости AA_1B_1B опустим перпендикуляр AM на прямую A_1B пересечения плоскостей A_1BC и AA_1B_1. AM — искомое расстояние.



Из $\triangle AA_1B$, ($\angle A = 90°$): $A_1B = \sqrt{AA_1^2 + AB^2}$, $A_1B = \sqrt{225 + 400} = 25$. Прямоугольные треугольники AA_1B и AA_1M подобны, так как $\angle AA_1M$ общий.

$$\frac{A_1B}{AA_1} = \frac{AB}{AM},\ AM = \frac{AA_1 \cdot AB}{A_1B},\ AM = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12.$$

20. Имеем прямую треугольную призму, в которой все ребра равны, боковые грани — равные квадраты. Площадь одной грани $S_{гр} = \frac{1}{3}S_б$, где $S_б = 12$ м², $S_{гр} = 4$ м². Высота призмы $H = \sqrt{S_{гр}} = 2$ м.

21. В правильной четырехугольной призме боковые грани — равные прямоугольники, основания – равные квадраты. Площадь боковой грани $S_{гр} = aH$, где a — сторона основания, H — высота призмы.

Площадь основания $S_{осн} = a^2$. Полная поверхность $S_{полн} = 2S_{осн} + 4S_{гр} = 40$ м², боковая поверхность $S_б = 4S_{гр} = 32$ м². Таким образом, $S_{осн} = \frac{S_{повн} - S_б}{2} = \frac{40 - 32}{2} = 4$ (м²), $a = \sqrt{S_{осн}} = \sqrt{4} = 2$ (м), площадь боковой грани $S_{гр} = \frac{1}{4}S_б = \frac{1}{4} \cdot 32 = 8$ (м²), $H = \frac{S_{гр}}{a}$, $H = \frac{8}{2} = 4$ (м).

22*. Задача решена в учебнике Погорелова.

23. Боковые грани призмы — параллелограмы. Расстояния между параллельными прямыми, частью которых являются боковые ребра призмы, это высоты боковых граней $h_1 = 2$ см, $h_2 = 3$ см, $h_3 = 4$ см, боковое ребро призмы равно 5 см. Соответственно площади боковых граней $S_1 = 2 \cdot 5 = 10$ (см²); $S_2 = 3 \cdot 5 = 15$ (см²), $S_3 = 4 \cdot 5 = 20$ (см²). Боковая поверхность призмы $S_б = S_1 + S_2 + S_3 = 10 + 15 + 20 = 45$ (см²).

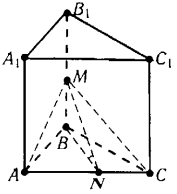
24. 1) Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, а боковое ребро равно b. Так как основание призмы — правильный треугольник, то $S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Боковые грани призмы являются равными прямоугольниками со сторонами a и b. Боковая поверхность призмы $S_б = 3S_{гр} = 3 \cdot a \cdot b$. Полная поверхность призмы $S_{полн} = 2S_{осн} + S_б = 3ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

2) Для правильной четырехугольной призмы $S_{осн} = a^2$, $S_б = 4S_{гр} = 4ab$, $S_{полн} = 2S_{осн} + S_б = 4ab + 2a^2$.

3) Для правильной шестиугольной призмы $S_{осн} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$ (смотри задачу 14).

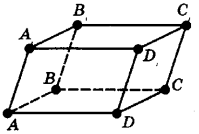
$S_б = 6S_{гр} = 6ab$, $S_{полн} = 2S_{осн} + S_б = 3\sqrt{3}a^2 + 6ab$.

25. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, сторона основания которой l. M — середина ребра B_1B. Плоскость AMC пересекает грани AA_1B_1B и BB_1C_1C по отрезкам AM и MC. В $\triangle ABC$ проведем медиану BN, она же является и высотой, $BN = AB$; $\sin\angle A = l\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\angle A = 60°$, так как $\triangle ABC$ — правильный).



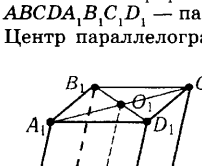
MB — перпендикуляр к плоскости ABC, MN — наклонная, BN — ее проекция. Поскольку $BN \perp AC$, то по теореме о трех перпендикулярах $MN \perp AC$. $\angle MNB$ — угол между плоскостями AMC и ABC, $\angle MNB = 45°$. Прямоугольный треугольник MBN равнобедренный. $MB = BN = l\frac{\sqrt{3}}{2}$. $BB_1 = 2MB = l\sqrt{3}$. BB_1 — высота призмы. Боковая поверхность $S_б = BB_1 \cdot P$, где P — периметр основания, $P = 3l$. $S_б = 3ll\sqrt{3} = 3l^2\sqrt{3}$.

26. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. $S_{AA_1D_1D} = 1$ м², $S_{DD_1C_1C} = 2$ м², $S_{ABCD} = 3$ м². Противоположные грани параллелепипеда равны. $S_{BB_1C_1C} = S_{AA_1D_1D} = 1$ м², $S_{AA_1B_1B} = S_{DD_1C_1C} = 2$ м², $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} = 3$ м². $S_{полн} = 2S_{AA_1D_1D} + 2S_{DD_1C_1C} + 2S_{ABCD} = 2 + 4 + 6 = 12$ (м²).



27. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. Пусть $\angle A_1AD = \alpha$, $\angle A_1AB = \beta$, $\angle BAD = \gamma$. Найдем углы, сходящиеся в точке D_1. Из параллелограмма AA_1D_1D $\angle A_1D_1D = \angle A_1AD = \alpha$. Поскольку противоположные грани параллелепипеда равны, то $\angle A_1D_1C_1 = \angle ADC = 180° - \perp \angle BAD = 180° - \gamma$, $\angle C_1D_1D = \angle B_1A_1A = 180° - \angle A_1AB = 180° - \beta$.

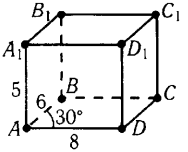
28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Все его грани — параллелограммы. Центр параллелограмма — точка пересечения его диагоналей. O и O_1 — центры оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Противоположные грани параллелепипеда совмещаются параллельным переносом. Таким образом, $BD \parallel B_1D_1$ и $BD = B_1D_1$, так как диагонали параллелепипеда в точке пересечения делятся пополам, то $O_1D_1 = OD$ и $B_1D_1 \parallel OD$. Таким образом, четырехугольник OO_1D_1D — параллелограмм, то есть $OO_1 \parallel DD_1$.



29. Имеем $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, в основании которого лежит параллелограмм $ABCD$, $AB = 6$ м, $AD = 8$ м, $\angle BAD = 30°$, боковое ребро $AA_1 = 5$ м.

$S_{осн} = AB \cdot AD \sin\angle BAD$,

$S_{осн} = 6 \cdot 8 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24$ (м²).



$S_б = P \cdot H$, где H — высота параллепипеда, $H = 5$ м,

P — периметр основания $P = (AB + AD) = 2(6 + 8) = 28$ (м).

$S_б = 5 \cdot 28 = 140$ (м²).

$S_{полн} = S_б + 2S_{осн} = 140 + 2 \cdot 24 = 188$ (м²).

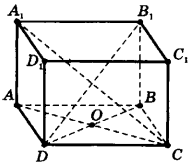
30. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче.

$AB = 3$ см, $AD = 8$ см, $\angle BAD = 60°$, $S_б = 220$ см².

$S_{осн} = AB \cdot AD \cdot \sin\angle BAD$; $S_{осн} = 3 \cdot 8 \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 12\sqrt{3}$ (см²).

$S_{полн} = 2S_{осн} + S_б = 2 \cdot 12\sqrt{3} + 220 = 24\sqrt{3} + 220 \approx 262$ (см²).

31. Имеем $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед.



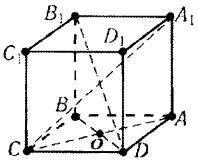
$AB = 3$ см, $AD = 5$ см. Одна из диагоналей основания равна 4 см. Пусть $\angle BAD$ — острый, тогда $\angle ABC$ — тупой. В $\triangle ABC$ сторона AC, лежащая напротив тупого угла, должна быть наибольшей. Так как $BC = AD = 5$ см, то AC не может быть равна 4 см, поскольку $BD = 4$ см. BB_1 и AA_1 — перпендикуляры, $BB_1 = AA_1$, B_1D и A_1C — наклонные, BD и AC — их проекции. Так как $AC > BD$, то $A_1C > B_1D$, $\angle B_1DB$ — угол между диагональю B_1D и плоскостью основания. $\angle B_1DB = 60°$. Из $\triangle BB_1D$, $\angle B_1BD = 90°$, $BB_1 = BD \cdot \operatorname{tg}\angle B_1DB$, $AA_1 = BB_1 = 4 \cdot \operatorname{tg}60° = 4\sqrt{3}$ (см). Согласно следствию из теоремы косинусов имеем:

$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, $AC = \sqrt{2(AB^2 + AD^2) - BD^2}$,

$AC = \sqrt{2(9 + 25) - 16} = 2\sqrt{13}$ (см). Из $\triangle AA_1C$, $\angle A_1AC = 90°$.

$A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2}$; откуда $A_1C = \sqrt{48 + 52} = 10$ (м).

32. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед. $AB = AD = AA_1 = a$, $\angle BAD = 60°$.



В $\triangle ABC$ $AB = AD$ и угол при вершине 60°, поэтому $\triangle ABC$ — правильный, $BD = AB = a$.

Из $\triangle BB_1D$, $\angle B_1BD = 90°$, $BB_1 = AA_1 = a$. $B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Рассмотрим $\triangle ABO$, $\angle AOB = 90°$, так как $ABCD$ — ромб.

$AO = \sqrt{AB^2 - OB^2}$; $OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}a$.

$AO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AC = 2 \cdot AO = a\sqrt{3}$.

Рассмотрим $\triangle AA_1C$, $\angle A_1AC = 90°$, $A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2}$, $A_1C = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

33. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. $AA_1 = 5$ м, $AB = 6$ м, $AD = 8$ м.

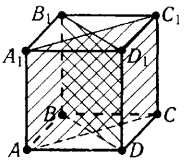
Одна из диагоналей основания $d_1 = 12$ м. По следствию из теоремы косинусов найдем вторую диагональ:

$d_1^2 + d_2^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, $d_2 = \sqrt{2(AB^2 + AD^2) - d_1^2}$, $d_2 = \sqrt{2(36 + 64) - 144} = \sqrt{56}$ (м).

Пусть $AC = 12$ м, $BD = \sqrt{56}$ м. Из $\triangle A_1AC$, $\angle A_1AC = 90°$:

$A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2}$, $A_1C = \sqrt{25 + 144} = 13$ (м). Из $\triangle BB_1D$, $\angle B_1BD = 90°$, найдем B_1D: $B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2}$, $B_1D = \sqrt{25 + 56} = \sqrt{81} = 9$ (м).

34. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед. $AA_1 = 1$ м, $AB = 23$ дм $= 2{,}3$ м, $AD = 11$ дм $= 1{,}1$ м. $BD : AC = 2 : 3$.



Пусть $BD = 2x$ м, тогда $AC = 3x$ м, $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

$9x^2 + 4x^2 = 2(5{,}29 + 1{,}21)$; $x^2 = 1$, $x = 1$.

Таким образом, $BD = 2$ м, $AC = 3$ м.

AA_1C_1C и BB_1D_1D — диагональные сечения прямого параллелепипеда, которые являются прямоугольниками.

$S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC = 1 \cdot 3 = 3$ (м²). $S_{BB_1D_1D} = B_1B \cdot BD = 1 \cdot 2 = 2$ (м²).

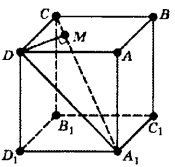
35. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений a, b и c.

1) $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $d = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.

2) $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$, $d = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$.

3) $a = 6$, $b = 6$, $c = 7$, $d = \sqrt{36 + 36 + 49} = 11$.

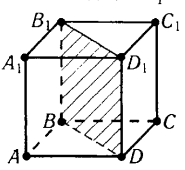
36*. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром a. Диагональ куба $A_1C = \sqrt{3}a$. Через диагональ A_1C и вершину D проведем плоскость. Она пересечет грань AA_1D_1D куба по отрезку A_1D. В $\triangle A_1CD$ $\angle A_1DC = 90°$, опустим перпендикуляр DM.



$\triangle A_1CD \sim \triangle DMC$, поскольку $\angle DMC = \angle A_1DC = 90°$, $\angle A_1CD$ — общий.

$\frac{A_1C}{DC} = \frac{A_1D}{MD}$, $MD = \frac{DC \cdot A_1D}{A_1C}$. A_1D — диагональ квадрата со стороной a, $A_1D = a\sqrt{2}$; $MD = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

37. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. $AB = 7$ дм, $AD = 24$ дм, $AA_1 = 8$ дм.



BB_1D_1D — диагональное сечение. Оно является прямоугольником. $S_{BB_1D_1D} = B_1B \cdot BD$. $B_1B = AA_1 = 8$ дм, BD найдем из $\triangle ABD$, $\angle BAD = 90°$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$.

$BD = \sqrt{49 + 576} = 25$ (дм). $S_{BB_1D_1D} = 8 \cdot 25 = 200$ (дм²).

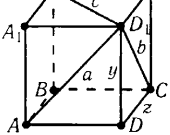
38. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед.
Пусть $AB = 10$ см, $AD = 22$ см, $AA_1 = 16$ см.
$S_{осн} = AB \cdot AD$; $S_{осн} = 10 \cdot 22 = 220$ (см^2).
$S_б = AA_1 \cdot P$, где $P = 2(AB + AD)$. $P = 2(10 + 22) = 64$ (см).
$S_б = 16 \cdot 64 = 1024$ (см^2). $S_{полн} = S_б + 2S_{осн}$
$S_{полн} = 1024 + 2 \cdot 220 = 1464$ (см^2).

39. Воспользуемся рисунком к задаче 37. $AA_1 = h$, $S_{BB_1D_1D} = M$, $S_{ABCD} = Q$.

Пусть $AB = a$, $AD = b$, тогда $\begin{cases} ab = Q, \\ \sqrt{a^2 + b^2} \cdot h = M; \end{cases}$; $\begin{cases} 2ab = 2Q; \\ a^2 + b^2 = \dfrac{M^2}{h^2}; \end{cases}$ $(a+b)^2 = 2Q + \dfrac{M^2}{h^2}$; боковая поверхность параллелепипеда $S_б = 2h(a + b)$;

$S_б^2 = 4h^2(a + b)^2 = 4h^2\left(2Q + \dfrac{M^2}{h^2}\right) = 8Qh^2 + 4M^2$, $S_б = 2\sqrt{M^2 + 2Qh^2}$.

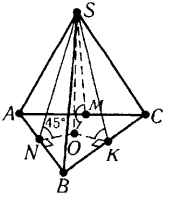
40. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. AD_1, B_1D и D_1C — диагонали боковых граней AA_1D_1D, $A_1B_1C_1D_1$ и DD_1C_1C соответственно. $AD_1 = a$, $B_1D_1 = c$, $D_1C = b$.



Обозначим $AD = x$, $D_1D = y$, $DC = z$. Тогда $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + z^2 = c^2$.
$2x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + c^2$, $2x^2 = a^2 + c^2 - b^2$, $x = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}$,
$2y^2 + x^2 + x^2 = a^2 + b^2$, $2y^2 = a^2 + b^2 - c^2$, $y = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$,

$2z^2 + x^2 + y^2 = b^2 + c^2$, $2z^2 = b^2 + c^2 - a^2$, $z = \sqrt{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$.

41. Пусть $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$, $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. SO — высота пирамиды. Опустим перпендикуляры SN, SK и SM на ребра AB, BC и AC пирамиды. ON, OK и OM — их проекции на основание пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах $ON \perp AB$, $OK \perp BC$, $OM \perp AC$, $\angle SNO$, $\angle SKO$ и $\angle SMO$ — углы между гранями SAB, SBC и SAC и основанием. По условию задачи $\angle SNO = \angle SKO = \angle SMO = 45°$. $\triangle SNO = \triangle SKO = \triangle SMO$, так как $\angle SON = \angle SOK = \angle SOM = 90°$, SO — общий катет. Таким образом, $ON = OK = OM$, точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. По формуле Герона:

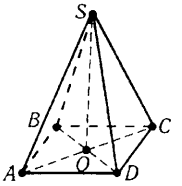


$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)}$, где $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2}$,

$p = \dfrac{10 + 10 + 12}{2} = 16$ (см).

$S_{ABC} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48$ (см²). Но $S_{ABC} = pr$, где r — радиус вписанной окружности. Отсюда $r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{48}{16} = 3$ (см). $OM = 3$ см. Прямоугольный $\triangle SOM$ является равнобедренным, поскольку $\angle SMO = \angle MSO = 45°$. Таким образом, $SO = OM = 3$ см.

42. $SABCD$ — пирамида, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см. $SA = SB = SC = SD = 13$ см. SO — высота пирамиды. OB, OC, OD и OA — проекции соответствующих боковых ребер на плоскость основания. Поскольку боковые ребра пирамиды равны, то $OB = OC = OD = OA$. Так как диагонали прямоугольника равны и в точке пересечения делятся пополам, точка O является точкой пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$.

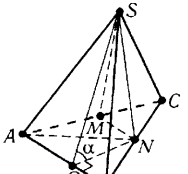


Из $\triangle ABD$, $\angle BAD = 90°$: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$,

$BD = \sqrt{36 + 64} = 10$ (см). $BO = OD = 5$ см. Из $\triangle SBO$, $\angle SOB = 90°$:

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$; $SO = \sqrt{169 - 25} = 12$ (см).

43. Пусть $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит правильный $\triangle ABC$.



Грань SAB пирамиды перпендикулярна основанию. SO — высота пирамиды и она принадлежит грани SAB. Опустим перпендикуляры SM и SN на ребра AC и BC пирамиды. OM и ON — их проекции. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AC$ и $ON \perp BC$. $\angle SMO$ и $\angle SNO$ — углы между гранями SAC и SBC пирамиды и ее основанием. По условию задачи $\angle SMO = \angle SNO = \alpha$.

$\triangle SOM = \triangle SON$, поскольку $\angle SOM = \angle SON = 90°$, SO — общий катет. Таким образом, $SM = SN$. Треугольники SAC и SBC имеют одинаковую площадь ($AC = BC$ по условию задачи). SC — общая сторона. Таким образом, $\angle SCA = \angle SCB$, так как площадь треугольника равна полупроизведению двух сторон на синус угла между ними.

$\triangle SAC = \triangle SCB$ по двум сторонам и углу между ними. Имеем $SA = SB$, AO и OB — их проекции, таким образом: $AO = OB$. CO — медиана, высота и биссектриса $\triangle ABC$. Пусть сторона треугольника равна a. Тогда $OC = BC \cdot \sin 60° = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из $\triangle CON$, $\angle CNO = 90°$, $\angle OCN = 30°$, найдем ON: $ON = OC \sin 30° = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

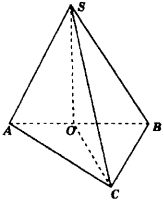
$\triangle SON$, $\angle SON = 90°$, $SO = ON \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg}\alpha$.

$\triangle SCO$, $\angle SOC = 90°$, $\text{tg}\angle SCO = \dfrac{SO}{OC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{4}tg\alpha}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2}\text{tg}\alpha$.

$\triangle SBO$, $\angle SOB = 90°$, $\text{tg}\angle SBO = \dfrac{SO}{OB}$, где $OB = \dfrac{1}{2}a$.

$\text{tg}\angle SBO = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\text{tg}\alpha \cdot \dfrac{2}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{tg}\alpha$. $\angle SAO = \angle SBO$.

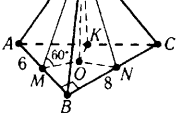
44. Имеем $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AB = a$. SO — высота пирамиды. OA, OB и OC — проекции боковых ребер пирамиды. $\angle SAO$, $\angle SBO$ и $\angle SCO$ – углы между ребрами SA, SB и SC и основанием призмы.



По условию задачи $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \beta$. $\triangle SOA = \triangle SOB = \triangle SOC$, так как $\angle SOA = \angle SOB = \angle SOC = 90°$, SO — общий катет. Поэтому $AO = OB = OC$. Точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности. В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности является серединой гипотенузы. Таким образом, $AO = OB = OC = \dfrac{a}{2}$.

Рассмотрим $\triangle SAO$ $SO = AO\text{tg}\beta = \dfrac{a}{2}\text{tg}\beta$.

45. Пусть $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90°$, $AC = 8$ см, $BC = 6$ см. SO — высота пирамиды. Опустим перпендикуляры SM, SN и SK на ребра AB, BC и AC пирамиды. OM, ON и OK — их соответствующие проекции. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AB$, $ON \perp BC$ и $OK \perp AC$.



$\angle SMO$, $\angle SNO$ и $\angle SKO$ — углы между боковыми гранями призмы и ее основанием. По условию задачи $\angle SMO = \angle SNO = \angle SKO = 60°$. $\angle SOM = \angle SON = \angle SOK = 90°$. SO — общий катет. $\triangle SOM = \triangle SON = \triangle SOK$.

Итак, $OM = ON = OK$. Точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, OM, ON и OK – ее радиусы. $S_{ABC} = p \cdot r$, где $r = OM = ON = OK$, $p = \dfrac{AB + BC + AB}{2}$.

$AB = \sqrt{AB^2 + BC^2}$, $AB = \sqrt{36 + 64} = 10$ (см); $p = \dfrac{10 + 6 + 8}{2} = 12$ (см).

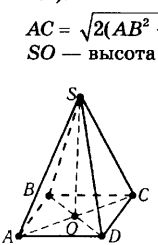
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (см^2).

$r = \dfrac{S_{ABC}}{p}$, $r = \dfrac{24}{12} = 2$ (см). Рассмотрим $\triangle SOK$: $\angle SOK = 90°$, $\angle SKO = 60°$, найдем SO: $SO = OK\text{tg}60° = 2\sqrt{3}$ (см).

46. Пусть $SABCD$ — пирамида, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, пусть $BD = 6$ см. В соответствии со следствием из теоремы косинусов имеем: $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.

$AC = \sqrt{2(AB^2 + BC^2) - BD^2}$. $AC = \sqrt{2(9+49) - 36} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ (см).

SO — высота пирамиды, точка O — точка пересечения диагоналей.

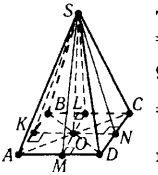


$SO = 4$ см. $AO = OC = 2\sqrt{5}$ см, $BO = OD = 3$ см, так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

Рассмотрим $\triangle SBO$, $\angle SOB = 90°$, $SB = \sqrt{OB^2 + SO^2}$, $SB = \sqrt{9+16} = 5$ (см).

Из $\triangle SAO$ $\angle SOA = 90°$, найдем SA: $SA = \sqrt{SO^2 + AO^2}$, $SA = \sqrt{16+20} = 6$ (см).

47*. $SABCD$ — пирамида, в основании которой лежит ромб $ABCD$. Его диагонали $BD = 6$ м, $AC = 8$ м. SO — высота пирамиды, точка O — точка пересечения диагоналей ромба. $SO = 1$ м, $AO = OC = 4$ м, $BO = OD = 3$ м. Из $\triangle AOD$, $\angle AOD = 90°$, найдем AD: $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2}$, $AD = \sqrt{9+16} = 5$ (м). $AB = BC = DC = AD$.



ON — высота $\triangle OCD$, она является проекцией наклонной SN. По теореме о трех перпендикулярах $SN \perp DC$, то есть SN — высота $\triangle SDC$.

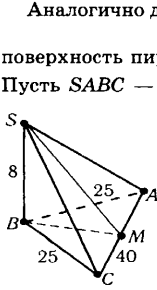
$\triangle OCD \sim \triangle ONC$, так как $\angle ONC = \angle DOC = 90°$, $\angle OCN$ — общий.

$\frac{DC}{OC} = \frac{OD}{ON}$, $ON = \frac{OC \cdot OD}{DC}$, $ON = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}$ (м). Рассмотрим $\triangle SON$: $\angle SON = 90°$, найдем SN: $SN = \sqrt{OS^2 + ON^2}$, $SN = \sqrt{1 + \frac{144}{25}} = \frac{13}{5}$ см. $S_{SCD} = \frac{1}{2} SN \cdot DC$, $S_{SCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{5} \cdot 5 = \frac{13}{2}$ (м^2).

$\triangle SOA = \triangle SOC$ по двум катетам (SO — общий, $AO = OC$). Поэтому $SA = SC$. $\triangle SAD = \triangle SDC$ по трем сторонам. То есть $S_{SAD} = S_{SDC}$.

Аналогично доказываем, что $S_{ABS} = S_{ASC} = S_{SAD} = S_{SDC}$, то есть боковая поверхность пирамиды $S_б = 4S_{SDC} = 4 \cdot \frac{13}{2} = 26$ (м^2).

48. Пусть $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$, $AB = BC = 25$ см, $AC = 40$ см. SB — высота пирамиды, $SB = 8$ см.



$S_{SBA} = \frac{1}{2} SB \cdot AB$, $S_{SBA} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 8 = 100$ (см^2).

$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot BC$, $S_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 8 = 100$ (см^2).

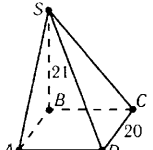
В $\triangle ABC$ проведем медиану BM, она является высотой. BM — проекция наклонной SM на основание

пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах $SM \perp AC$. Из $\triangle MBC$, $\angle BMC = 90°$, $MC = \frac{1}{2}AC = 20$ см, найдем BM: $BM = \sqrt{BC^2 - MC^2}$, $BM = \sqrt{625 - 400} = 15$ (см). Из $\triangle SBM$ $\angle SBM = 90°$, найдем SM: $SM = \sqrt{SB^2 + MB^2}$, $SM = \sqrt{64 + 225} = 17$ (см).

$$S_{ASC} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot AC,\ S_{ASC} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 17 = 340\ (\text{см}^2).$$

Боковая поверхность пирамиды: $S_б = S_{ASC} + S_{SBA} + S_{SBC} = 340 + 200 = 540$ (см^2).

49. $SABCD$ — пирамида, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной 20 дм. SB — высота пирамиды. $SB = 21$ дм. В $\triangle SAB$ $\angle SBA = 90°$.



$$S_{SAB} = \frac{1}{2} SB \cdot AB,\ S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 20 = 200\,(\text{дм}^2).$$ $\triangle SBA = \triangle SBC$ по двум катетам. $S_{SCB} = S_{SAB}$, $SA = SC$.

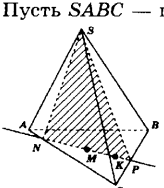
$SA = \sqrt{SB^2 + AB^2}$, $SA = \sqrt{400 + 441} = 29$ (см).

AB и BC — проекции наклонных SA и SC соответственно. $AB \perp AD$ и $BC \perp DC$, так как $ABCD$ — квадрат. По теореме о трех перпендикулярах $SA \perp AD$ и $SC \perp DC$, то есть SA и SC — высоты $\triangle SAD$ и $\triangle SDC$ соответственно.

$$S_{SAD} = S_{SCD} = \frac{1}{2} SA \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 20 = 290\ (\text{дм}^2).$$

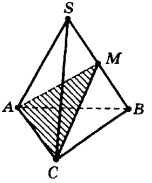
Боковая поверхность пирамиды: $S_б = 2(S_{SCB} + S_{SAD}) = 2(210 + 290) = 1\,000$ (дм^2) $= 10$ (м^2).

50. Пусть $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$. Точки M и K принадлежат основанию пирамиды. В плоскости основания проведем прямую MK. Она пересечет ребра AC и BC пирамиды в точках N и P. Точки S и N принадлежат и плоскости сечения, и грани SAC, SN — прямая пересечения секущей плоскости и грани SAC. Аналогично SP — прямая пересечения секущей плоскости и грани SBC.



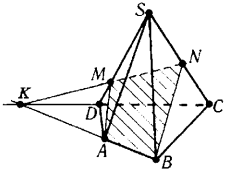
SNP — искомое сечение.

51. Пусть $SABC$ — треугольная пирамида, ABC — основание. Точка M принадлежит ребру SB. Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро AC и точку M. MA и MC — прямые пересечения секущей плоскости и граней SAB и SBC пирамиды.



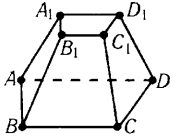
MAC — искомое сечение.

52. $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — основание. Точка N принадлежит ребру SC. Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро AB и точку N. BN — прямая пересечения секущей плоскости и грани SBC. Найдем точку K пересечения прямых AB и CD. Точки



N и K принадлежат одновременно секущей плоскости и плоскости грани SCD. KN — прямая пересечения этих плоскостей. Она пересечет ребро SD в некоторой точке M. Отрезок MN прямой NK является пересечением грани SCD с секущей плоскостью. AM — пересечение грани SAD с секущей плоскостью. $AMNB$ — искомое пересечение.

53. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — усеченная пирамида. Пусть $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $CD = 8$ см, $AD = 9$ см. Основания усеченной пирамиды подобны, откуда:



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AD}{A_1D_1}. \; A_1B_1 = 5 \text{ см}.$$

$$B_1C_1 = \frac{A_1B_1 \cdot BC}{AB}, \; B_1C_1 = \frac{5 \cdot 7}{6} = \frac{35}{6} \text{ (см)}.$$

$$C_1D_1 = \frac{A_1B_1 \cdot CD}{AB}, \; C_1D_1 = \frac{5 \cdot 8}{6} = \frac{20}{3} \text{ (см)}.$$

$$A_1D_1 = \frac{A_1B_1 \cdot AD}{AB}, \; A_1D_1 = \frac{5 \cdot 9}{6} = \frac{15}{2} \text{ (см)}.$$

54. Задача решена в учебнике Погорелова.

55. Основания усеченной пирамиды подобны. Площади подобных фигур относятся как квадраты линейных размеров, то есть $\frac{S_1}{S_2} = \frac{h^2}{x^2}$, где $S_1 = 512$ м², $S_2 = 50$ м², h — высота пирамиды, $h = 16$ м, x — расстояние от меньшего основания до вершины пирамиды.

Имеем: $\frac{516}{50} = \frac{256}{x^2}$, $x = 5$ м, расстояние между основаниями $16 - 5 = 11$ (м).

56. $SABC$ — правильная треугольная пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$ со стороной a. SO — высота пирамиды. $SO = h$. В $\triangle SAC$ опустим высоту CM. Из того, что $\triangle SAC = \triangle SAB$ (по определению правильной пирамиды), BM — высота $\triangle SAB$. $SA \perp MC$ и $SA \perp MB$, таким образом, SA — перпендикуляр к плоскости сечения CMB. Точка O — центр $\triangle ABC$, точка пересечения медиан, высот, центр описанной окружности. $OA = OB = OC = R$, где R — радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности. Для правильного треугольника $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Из $\triangle SAO$ $\angle SOA = 90°$, найдем SA:

$$SA = \sqrt{SO^2 + AO^2}, \; SA = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + 3h^2}.$$

$$\sin\angle SAO = \frac{SO}{AS}, \; \sin\angle SAO = \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3h^2}}.$$

Проведем медиану MK в $\triangle CMB$. AK — медиана $\triangle ABC$, AK проходит через точку O. Таким образом, $\triangle SAO$ и $\triangle AMK$ лежат в одной плоскости. $\angle MAK$ — общий. AK — высота $\triangle ABC$, MK — ее проекция на плоскость MBK.

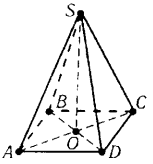
По теореме о трех перпендикулярах $MK \perp BC$, то есть MK — высота $\triangle MBC$.

Из $\triangle AMK$ $\angle AMK = 90°$,

$MK = AK \sin\angle MAK$. $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $MK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{h\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3h^2}}$,

$$S_{MBC} = \frac{1}{2} MK \cdot BC,\ S_{MBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3h^2}} \cdot a = \frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}.$$

57. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной 8 см. SO — высота пирамиды. $SO = 7$ см.



Точка O — точка пересечения диагоналей квадрата. Из $\triangle ABC$

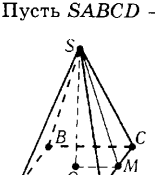
$\angle BAD = 90°$, найдем BD: $BD = \sqrt{2AB^2}$,

$BD = \sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2}$ (см).

$OB = OD = \dfrac{BD}{2} = 4\sqrt{2}$ см. Из $\triangle SOB$, $\angle SOB = 90°$,

найдем SB: $SB = \sqrt{OB^2 + SO^2}$; $SB = \sqrt{32+49} = 9$ (см).

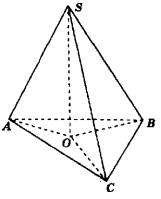
58. Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. $\angle DSC = \alpha$. В $\triangle SCD$ проведем медиану SM. Так как по определению правильной пирамиды $SC = SD$, то SM — биссектриса $\angle DSC$ и SM — апофема. OM — проекция наклонной SM на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp CD$. В $\triangle OCM$ $\angle OMC = 90°$, $\angle OCM = 45°$, так как диагональ AC является биссектрисой $\angle BCD$. Таким образом, $\triangle OMC$ — равнобедренный, то есть $OM = MC$. Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна a. Тогда $OM = MC = \dfrac{1}{2}DC = \dfrac{a}{2}$. Из $\triangle SCM$, $\angle SMC = 90°$,



$$\angle MSC = \frac{\alpha}{2},\ SM = \frac{CM}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

$\angle SMO$ — угол между гранью DSC и плоскостью основания. $\cos\angle SMO = \dfrac{OM}{CM} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{a} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

59.



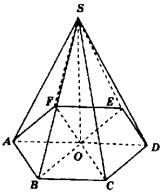
1) Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида. $AC = a$, $SA = b$. SO — высота. Точка O является центром описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности. $AO = OB = OC = R$, где R — радиус описанной окружности. Для правильного треугольника $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\triangle SAO$: $\angle SOA = 90°$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$.

$SO = \sqrt{b^2 - \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$.

2) Воспользуемся рисунком к задаче 57. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. $AB = a$, $SA = b$. SO — высота. Точка O — центр описанной вокруг квадрата $ABCD$ окружности.

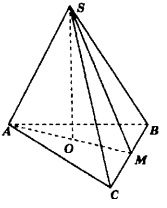
$AO = BO = CO = DO = R$, для квадрата $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. В $\triangle SAO$: $\angle SOA = 90°$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$, $SO = \sqrt{b^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$.



3) $SABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида, в основании которой лежит шестиугольник со стороной a. Боковое ребро пирамиды равно b. SO — высота. Точка O — центр описанной вокруг шестиугольника $ABCDEF$ окружности. $AO = BO = CO = DO = EO = FO = R$. Для правильного шестиугольника $R = a$.

Из $\triangle SAO$, $\angle SOA = 90°$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$, $SO = \sqrt{b^2 - a^2}$.

60. 1) $SABC$ — правильная пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$ со стороной a.



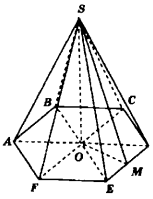
SO — высота, $SO = b$. Точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, является точкой пересечения медиан, биссектрис и высот.

AM — медиана $\triangle ABC$, она является высотой. $OM \perp BC$, $OM = r$, где r — радиус вписанной окружности. Для правильного треугольника $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

OM — проекция наклонной SM на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $SM \perp BC$, SM — апофема. SM найдем как гипотенузу прямоугольного $\triangle SMO$.

$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}$, $SM = \sqrt{b^2 + \frac{a^2 \cdot 3}{36}} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{12}}$.

2) Воспользуемся рисунком к задаче 58. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной a. SO — высота. O — центр описанной вокруг квадрата $ABCD$ окружности. В равнобедренном $\triangle SDC$ проведем медиану SM, она является апофемой пирамиды. OM — ее проекция. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp CD$, $OM = r$. Для квадрата $r = \frac{a}{2}$. Рассмотрим $\triangle SMO$, $\angle SOM = 90°$ $SM = \sqrt{OS^2 + OM^2}$, $SM = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$.



3) $SABCDEF$ — правильная пирамида, в основании которой лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной a. SO — высота, $SO = b$. Точка O — центр вписанной вокруг шестиугольника $ABCDEF$ окружности. В $\triangle SED$, $SE = SD$, проведем медиану SM, SM — апофема, OM — ее проекция. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp ED$. $OM = r$. Для правильного шестиугольника $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle SMO$ $\angle SOM = 90°$, $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}$, $SM = \sqrt{b^2 + \dfrac{3a^2}{4}}$.

61. Полная поверхность правильной пирамиды $S_{полн} = S_б + S_{осн}$,

где $S_б = \dfrac{1}{2}lP$ (l — апофема, P — периметр основания).

1) Воспользуемся рисунком к задаче 60(1). Для правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

$$l = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}},\ P = 3a,\ S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\ S_{полн} = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}} \cdot 3a + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + 12h^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}\left(a + \sqrt{a^2 + 12h^2}\right).$$

2) Воспользуемся рисунком к задаче 58. Для правильной четырехугольной пирамиды со стороной a и высотой h $l = \sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}$, $P = 4a$, $S_{осн} = a^2$.

$$S_{полн} = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot 4a + a^2 = a\sqrt{a^2 + 4h^2} + a^2 = a\left(a + \sqrt{a^2 + 4h^2}\right).$$

3) Воспользуемся рисунком к задаче 60(2). Для правильной шестиугольной пирамиды со стороной a и высотой h $l = \sqrt{h^2 + \dfrac{3a^2}{4}}$, $P = 6a$, $S_{осн} = \dfrac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$ (см. задачу 14).

$$S_{полн} = \frac{1}{2} \cdot 6a\sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}} + \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}\left(a\sqrt{3} + \sqrt{3a^2 + 4h^2}\right).$$

62. Воспользуемся рисунком к задаче 60(3). $SABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида с боковым ребром a. SO — высота. Точка O — центр вписанной в шестиугольник $ABCDEF$ окружности. В $\triangle SED$, $SE = SD$, проведем медиану SM, SM — апофема. Радиус вписанной в шестиугольник окружности равен r. Для правильного шестиугольника $r = \dfrac{b\sqrt{3}}{6}$, где b — сторона шестиугольника. Отсюда $b = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$, то есть $BD = b = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$.

$EM = \frac{1}{2}ED = \frac{\sqrt{3}}{3}r$. Из $\triangle SEM$: $\angle SME = 90°$;

$SM = \sqrt{SE^2 - EM^2}$, $SM = \sqrt{a^2 - \frac{3r^2}{9}} = \sqrt{a^2 - \frac{r^2}{3}}$.

Полная поверхность пирамиды $S_{полн} = S_б + S_{осн}$.

$S_б = \frac{1}{2}lP$, где $l = SM$, $P = 6 \cdot DE$. $S_{осн} = \frac{b^2 3\sqrt{3}}{2}$ (из задачи 14).

$S_{полн} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - \frac{r^2}{3}} \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}r + \frac{12}{9}r^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}r^2 + 2\sqrt{3}r\sqrt{a^2 - \frac{r^2}{3}} =$

$2r\left(\sqrt{3}r + \sqrt{3a^2 - r^2}\right)$.

63. Воспользуемся рисунком к задаче 58.

$SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. $S_б = 14{,}76$ м², $S_{полн} = 18$ м²,

$S_{полн} = S_б + S_{осн}$, $S_{осн} = S_{полн} - S_б = 18 - 14{,}76 = 3{,}24$ (м²).

Так как $S_{осн} = AB^2$, то $AB = \sqrt{S_{осн}}$, $AB = 1{,}8$ м. SO — высота пирамиды. Точка O — центр вписанной в квадрат окружности. В $\triangle SDC$ $SD = SC$ проведем медиану SM, SM — апофема, OM — ее проекция. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp DC$. OM — радиус вписанной в квадрат окружности. $OM = \frac{AB}{2} = 0{,}9$.

Для правильной пирамиды $S_б = \frac{1}{2}l \cdot P$, где $l = SM$, $P = 4AB$, $S_б = 2 \cdot AB \cdot SM$,

$SM = \frac{S_б}{2 \cdot AB}$, $SM = \frac{14{,}76}{2 \cdot 1{,}8} = 4{,}1$ (м). Из $\triangle SMO$, $\angle SOM = 90°$, найдем SO: $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2}$, $SO = \sqrt{16{,}81 - 0{,}81} = 4$ (м).

64. Воспользуемся рисунком к задаче 58. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной a. ASC — диагональное сечение. $S_{ASC} = S_{ABCD}$, $S_{ABCD} = a^2$, OS — высота, точка O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, центр вписанной окружности.

$S_{ASC} = \frac{1}{2}SO \cdot AC$, $AC = a\sqrt{2}$, $S_{ASC} = a^2$; $SO = \frac{2S_{ASC}}{2}$, $SO = \frac{2 \cdot a^2}{a\sqrt{2}} =$

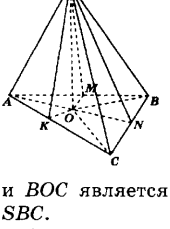
$= a\sqrt{2}$.

SM — апофема, OM — радиус вписанной окружности. $OM = \frac{a}{2}$.

Из $\triangle SMO$ $SM = \sqrt{OS^2 + OM^2}$, $SM = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3}{2}a$. $S_б = \frac{1}{2}l \cdot P$,

где $l = SM$, $P = 4a$. $S_б = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}a \cdot 4a = 3a^2$.

65. Для случая треугольной пирамиды $SABC$ (для четырех-, пятиугольной и т.д. пирамид решение будет аналогичным) имеем: SO — высота пирамиды. Опустим перпендикуляры SM, SN и SK на ребра AB, BC и AC. OM, ON и OK — их соответствующие проекции. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OK \perp AC$, то есть $\angle SMO$, $\angle SNO$ и $\angle SKO$ — углы между соответствующими гранями и основанием пирамиды. По условию задачи $\angle SMO = \angle SNO = \angle SKO = \varphi$. $S_{ABC} = Q$. $S_{ABC} = S_{AOC} + S_{AOB} + S_{COB}$. Треугольники AOC, AOB и BOC является ортогональными проекциями граней SAC, SAB и SBC.



Поэтому $S_{AOC} = S_{ASC} \cdot \cos\varphi$, $S_{AOB} = S_{ASB} \cdot \cos\varphi$, $S_{BOC} = S_{BSC} \cdot \cos\varphi$. Отсюда $S_{ASC} = \dfrac{S_{AOB}}{\cos\varphi}$, $S_{ASB} = \dfrac{S_{AOB}}{\cos\varphi}$, $S_{BSC} = \dfrac{S_{BOC}}{\cos\varphi}$. $S_б = S_{ASC} + S_{ASB} + S_{BSC} =$

$$= \frac{1}{\cos\varphi}\left(S_{AOC} + S_{AOB} + S_{BOC}\right) = \frac{1}{\cos\varphi} \cdot S_{ABC} = \frac{Q}{\cos\varphi}.$$

66. Решение этой задачи аналогично решению предыдущей. Но поскольку $S_б = S$, то $\cos\varphi = \dfrac{Q}{S}$ (равенство двугранных углов при основании следует из правильности пирамиды).

67. Воспользуемся рисунком к задаче 60(1). $SABC$ — правильная треугольная пирамида. $S_б = 144$ см^2, $SA = 10$ см. В $\triangle SBC$, $SC = SB$, проведем медиану SM, SM — апофема.

$S_б = \dfrac{1}{2} l \cdot P$, где $P = 3a$ (a — сторона $\triangle ABC$), $l = SM$. $\triangle SMC$ — прямоугольный,

$SC^2 = SM^2 + CM^2$. $CM = \dfrac{a}{2}$, откуда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{3a}{2} l = 144, \\ l^2 + \dfrac{a^2}{4} = 100; \end{cases} \begin{cases} l = \dfrac{96}{a}, \\ \dfrac{(96)^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{4} = 100; \end{cases} \frac{9216}{a^2} + \frac{a^2}{4} = 100, \frac{36864 + a^4}{4a^2} = 100,$$

$a^4 - 400a^2 + 36\,864 = 0$. Отсюда $a_1 = 12$ см, $a_2 = 16$ см. Таким образом, $l_1 = 8$ см, $l_2 = 6$ см.

68. Воспользуемся рисунком к задаче 58. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. $SA = 5$ см, $S_{полн} = 16$ см^2. Пусть сторона основания равна a. В $\triangle SDC$ проведем медиану SM, SM — апофема. $DM = MC = \dfrac{a}{2}$. Из $\triangle SMD$: $\angle SMD = 90$. $SM = \sqrt{SD^2 - MD^2}$, $SM = \sqrt{25 - \dfrac{a^2}{4}}$. $S_{полн} =$

$= S_б + S_{осн}$, $S_{осн} = a^2$, $S_б = \dfrac{1}{2} l \cdot P$, где $l = SM$, $P = 4a$. $S_{полн} = \dfrac{1}{2}\sqrt{25 - \dfrac{a^2}{4}} \cdot 4a +$

$+ a^2 = 16$;

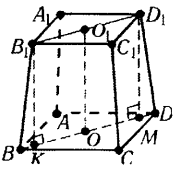
$\sqrt{100 - a^2} \cdot a = 16 - a^2$, $(100 - a^2)a^2 = 256 - 32a^2 + a^4$,

$100a^2 - a^4 = 256 - 32a^2 + a^4$, $2a^4 - 132a^2 + 256 = 0$, $a^4 - 66a^2 + 128 = 0$.

Отсюда $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 8$, но если $a = 8$ см, то $S_{полн} > 16$ см^2. Поэтому $a = \sqrt{2}$ см.

69. Задача решена в учебнике Погорелова.

70. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида.



$AB = 10$ см, $A_1B_1 = 2$ см. OO_1 — высота, $OO_1 = 7$ см.

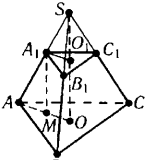
Диагональ BD нижнего основания найдем из $\triangle ABD$,

$\angle BAD = 90°$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$, $BD = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2}$ (см).

$B_1D_1 = 2\sqrt{2}$ см. $BO = OD = 5\sqrt{2}$ см, $B_1O_1 = O_1D_1 = \sqrt{2}$ см.

Диагональное сечение BB_1D_1D — трапеция, OO_1 — ее высота. D_1M — высота трапеции. $D_1M = OO_1 = 7$ см, $D_1M \parallel OO_1$, OO_1D_1M — прямоугольник (так как $OO_1 \perp BD$), $O_1D_1 = OM = \sqrt{2}$ см, $MD = OD - OM = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (см). Из $\triangle D_1MD$: $\angle D_1MD = 90°$; $D_1D = \sqrt{D_1M^2 + MD^2}$, $D_1D = \sqrt{49 + 32} = 9$ (см).

71. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная усеченная пирамида.



OO_1 — высота. Сторона большего основания 4 дм, сторона меньшего основания — 1 дм, боковое ребро — 2 дм. Точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности, $OA = OB = OC = R$, где $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ дм. Точка O_1 — центр описанной вокруг $\triangle A_1B_1C_1$ окружности, $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1 = R$, где $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$ дм.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$, $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1C_1 \parallel AC$, A_1O_1 и AO — биссектрисы углов $B_1A_1C_1$ и BAC соответственно.

$A_1O_1 \parallel AO$, таким образом, AA_1O_1O — трапеция, OO_1 — высота. Из точки A_1 опустим высоту трапеции A_1M. A_1O_1OM — прямоугольник, $MO = A_1O_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ дм, $AM = AO - MO = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ (дм). Из $\triangle AA_1M$, $\angle A_1MA = 90°$, найдем A_1M:

$A_1M = \sqrt{AA_1^2 - AM^2}$, $A_1M = \sqrt{4 - 3} = 1$ (дм). $OO_1 = A_1M = 1$ дм.

72. Воспользуемся рисунком к задаче 70. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида.

OO_1 — высота, $OO_1 = 2$ см, $AB = 5$ см, $A_1B_1 = 3$ см. Диагональ нижнего основания $BD = 5\sqrt{2}$ см, диагональ верхнего основания $B_1D_1 = 3\sqrt{2}$ см. BB_1D_1D — трапеция, BD_1 — ее диагональ, а BD_1 — диа-

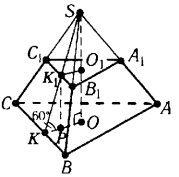
гональ пирамиды. OO_1 — высота трапеции. D_1M — высота трапеции. $D_1M = O_1O$. OO_1D_1M — прямоугольник. $OM = O_1D_1 = \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ см.

$BO = OD = \frac{1}{2}BD = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ см. $BM = BO + OM = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ (см).

Из $\triangle BD_1M$, $\angle BMD_1 = 90°$ найдем BD_1: $BD_1 = \sqrt{BM^2 + D_1M^2}$,

$BD_1 = \sqrt{32+4} = 6$ (см).

73. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная треугольная пирамида. $AB = 6$ см, $A_1B_1 = 2$ см. OO_1 — высота. Точки O и O_1 являются соответственно центрами правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, точками пересечения их медиан, высот и биссектрис, центры вписанных в треугольники окружностей. $OL = OK = OM = r$, где r — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности. $r = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ (см). $O_1L_1 = O_1M_1 = O_1K_1 = r_1$, где



r_1 — радиус вписанной в $\triangle A_1B_1C_1$ окружности. $r_1 = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (см).

AA_1K_1K — трапеция. OO_1 — высота. Опустим высоту K_1P, $K_1P \parallel OO_1$, $K_1P = OO_1$, OO_1K_1P — прямоугольник.

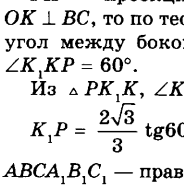
$OP = O_1K_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ см. $PK = OK - OP = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (см).

PK — проекция наклонной K_1K на плоскость ABC. Поскольку $OK \perp BC$, то по теореме о трех перпендикулярах $K_1K \perp BC$. $\angle K_1KP$ — угол между боковой гранью и большим основанием. По условию $\angle K_1KP = 60°$.

Из $\triangle PK_1K$, $\angle K_1PK = 90°$. $K_1P = PK\operatorname{tg}\angle K_1KP$;

$K_1P = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3} = 2$ (см). $OO_1 = K_1P = 2$ см.

74. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная треугольная пирамида. OO_1 — высота. $AB = a$, $A_1B_1 = b$. Точки O и O_1 являются центрами правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, точки пересечения их медиан, биссектрис, высот, центры описанных вокруг этих треугольников окружностей. $AO = BO = CO = R$, где R — радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности, $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



$A_1O_1 = B_1O_1 = C_1O_1 = R_1$, где $R_1 = \frac{b\sqrt{3}}{3}$.

CM и C_1M_1 — медианы $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно, они являются и высотами. $CM \parallel C_1M_1$. MM_1C_1C — сечение, проходящее через боковое ребро C_1C и высоту пирамиды MM_1C_1C — трапеция.

Ее основания $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $C_1M_1 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. В трапеции опустим высоту C_1N, $C_1N = OO_1$.

CN — проекция бокового ребра C_1C на плоскость большего основания. $\angle C_1CN$ — угол между ребром CC_1 и плоскостью основания. По условию $\angle C_1CN = 45°$. В $\triangle NC_1C$ $\angle C_1NC = 90°$, равнобедренный. $NC = C_1N$.

OO_1C_1N — прямоугольник. $ON = O_1C_1$, $NC = OC - ON = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{b\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(a-b)$.

$C_1N = NC = \frac{\sqrt{3}}{3}(a-b)$. Площадь трапеции MM_1C_1C

$S = \frac{1}{2}(MC + M_1C_1)\cdot C_1N$;

$S = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{3}(a-b) = \frac{a^2-b^2}{4}$.

75. Воспользуемся рисунком к задаче 70. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида. $AB = 8$ см, $A_1B_1 = 2$ см. OO_1 — высота, $OO_1 = 4$ см.

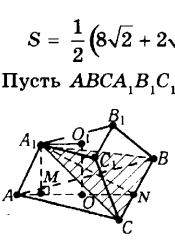
BB_1D_1D — диагональное сечение. BB_1D_1D — трапеция, OO_1 — ее высота, BD и B_1D_1 — основания. BD и B_1D_1 — диагонали квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно.

$BD = 8\sqrt{2}$ см, $B_1D_1 = 2\sqrt{2}$ см.

Площадь трапеции $S = \frac{1}{2}(BD + B_1D_1)\cdot OO_1$.

$S = \frac{1}{2}\left(8\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right)\cdot 4 = 20\sqrt{2}$ (см²).

76. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная усеченная пирамида. $AB = 8$ м, $A_1B_1 = 5$ м. OO_1 — высота. $OO_1 = 3$ м. Точки O и O_1 являются радиусами описанных вокруг треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ окружностей. OA и O_1A_1 — их радиусы. $OA = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ м, $O_1A_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ м.



AN и A_1N_1 — медианы и высоты $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно. $AN \parallel A_1N_1$.

AA_1N_1N — трапеция. OO_1 — ее высота. Проведем высоту A_1M трапеции:

$A_1M = OO_1$, A_1O_1OM — прямоугольник. $MO = A_1O_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

$AM = AO - MO = \frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ (м).

$AN = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (м). $MN = AN - AM = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ (м).

MN — проекция наклонной A_1N на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $A_1N \perp BC$.

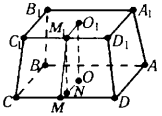
A_1BC — сечение, проведенное через ребро BC и вершину A_1. A_1N — высота $\triangle CA_1B$. $S_{CA_1B} = \frac{1}{2} A_1N \cdot BC$. A_1N найдем из $\triangle A_1NM$, $\angle A_1MN = 90°$:

$A_1N = \sqrt{A_1M^2 + MN^2} = \sqrt{9+27} = 6$ (м). $S_{CA_1B} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (м^2).

$\angle A_1NM$ — угол между секущей плоскостью и плоскостью основания.

$\sin\angle A_1NM = \frac{A_1M}{A_1N}$, $\sin\angle A_1NM = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\angle A_1NM = 30°$.

77. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида. $AB = 8$ м, $A_1B_1 = 2$ м, OO_1 — высота, $OO_1 = 4$ м. Точки O и O_1 являются центрами квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, точками пересечения их диагоналей и центрами вписанных окружностей. $OM \perp CD$, $O_1M_1 \perp C_1D_1$. OM и O_1M_1 — радиусы окружностей, вписанных в квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно.



$OM = \frac{1}{2} AB = 4$ м, $O_1M_1 = \frac{1}{2} A_1B_1 = 1$ м. $O_1M_1 \parallel OM$,

OO_1M_1M — трапеция, OO_1 — ее высота. M_1N — высота трапеции, $OO_1 = M_1N$. OO_1M_1N — прямоугольник.

$ON = O_1M_1 = 1$ м, $NM = OM - ON = 4 - 1 = 3$ (см).

NM — проекция наклонной M_1M на основание пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах $M_1M \perp DC$. M_1M — апофема. Полная поверхность пирамиды:

$S_п = S_{осн_1} + S_{осн_2} + S_б$, где $S_{осн_1} = 64$ м^2, $S_{осн_2} = 4$ м^2, $S_б = \frac{1}{2}(P + P_1) \cdot l$,

где $P = 4AB = 32$ м, $P_1 = 4 \cdot A_1B_1 = 8$ м, $l = M_1M$.

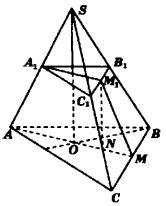
$MM_1 = \sqrt{NM^2 + M_1N^2}$, $MM_1 = \sqrt{9+16} = 5$ (м).

$S_п = 64 + 4 + \frac{1}{2}(32+8) = 168$ (м^2).

78. 1) $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная усеченная пирамида. $AB = a$, $A_1B_1 = b$.

OO_1 — высота, $OO_1 = h$. Точки O и O_1 являются точками пересечения медиан и высот $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно, они также являются центрами вписанных в эти треугольники окружностей. AM и A_1M_1 — медианы и высоты $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно.

OM и O_1M_1 — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей. $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $O_1M_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$. Из точки M_1 опустим высоту M_1N; $M_1N \parallel OO_1$, $M_1N = OO_1$.



OO_1M_1N — прямоугольник. $ON = O_1M_1$.

$NM = OM - ON = \frac{\sqrt{3}}{6}(a-b)$.

NM — проекция наклонной M_1M на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $M_1M \perp BC$. M_1M — апофема.

$\triangle M_1MN$: $\angle M_1NM = 90°$;

$M_1M = \sqrt{NM^2 + M_1N^2}$,

$$M_1M = \sqrt{\frac{3}{36}(a-b)^2 + h^2} = \sqrt{(a-b)^2 + 12h^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Площадь поверхности пирамиды:

$S_{полн} = S_{осн_1} + S_{осн_2} + S_б$, где $S_{осн_1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S_{осн_2} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$,

$S_б = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot M_1M$.

$P_1 = 3a$, $P_2 = 3b$.

$$S_{полн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}(3a+3b) \cdot \sqrt{(a-b)^2 + 12h^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2 + b^2 + (a+b)\sqrt{(a-b)^2 + 12h^2}\right).$$

2) Воспользуемся рисунком к задаче 77.

Решение задачи аналогично предыдущему.

Для квадрата радиус вписанной окружности равен половине стороны. Поэтому $OM = \frac{a}{2}$, $O_1M_1 = \frac{b}{2}$, $ON = O_1M_1 = \frac{b}{2}$; $MN = OM - ON = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a-b)$. $\triangle M_1MN$: $\angle M_1NM = 90°$; $M_1M = \sqrt{NM^2 + M_1N^2}$;

$M_1M = \sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2 + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}$. M_1M — апофема.

$S_{полн} = S_{осн_1} + S_{осн_2} + S_б$, $S_{осн_1} = a^2$, $S_{осн_2} = b^2$, $S_б = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)M_1M$, $P_1 = 4a$, $P_2 = 4b$.

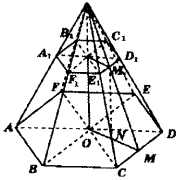
$S_{полн} = a^2 + b^2 + \frac{1}{2}(4a+4b) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2} =$

$a^2 + b^2 (a+b) \sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}$.

3) Решение задачи аналогично двум предыдущим. Для правильного шестиугольника $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $O_1M_1 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, $ON = O_1M_1 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$,

$NM = OM - ON = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b)$. M_1M — апофема. $MM_1 = \sqrt{NM^2 + M_1N^2}$;

$$MM_1 = \sqrt{\frac{3}{4}(a-b)^2 + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3(a-b)^2 + 4h^2}.$$



$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2} + S_б.$$

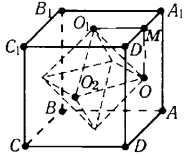
$$S_{\text{осн}_1} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}, \quad S_{\text{осн}_2} = \frac{b^2 3\sqrt{3}}{2} \text{ (см. задачу 14).}$$

$$S_б = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)M_1M \ . \ P_1 = 6a, \ P_2 = 6b.$$

$$S_{\text{полн}} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} + \frac{b^2 3\sqrt{3}}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}(6a + 6b) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3(a-b)^2 + 4h^2} = \frac{3}{2}(\sqrt{3}(a^2 + b^2) + (a + b)\sqrt{3(a-b)^2 + 4h^2}).$$

79. Имеем: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. O, O_1 и O_2 — центры граней AA_1D_1D, $A_1B_1C_1D_1$ и DD_1C_1C, точки пересечения их диагоналей.



$\triangle A_1OD_1$ и $\triangle A_1O_1D_1$ — равные равнобедренные треугольники. M — середина A_1D_1. O_1M и OM — медианы и высоты треугольников.

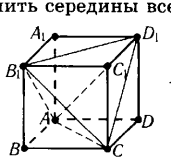
$OM = MO_1$, $\triangle OMO_1$ — прямоугольный, $\angle OMO_1 = 90°$.

$OO_1 = \sqrt{OM^2 + O_1M^2}$. Аналогично $OO_2 = \sqrt{OK^2 + O_2K^2}$, где K — середина D_1D. $OM = OK = MO_1 = KO_2$.

$OO_1 = OO_2$. Аналогично $O_1O_2 = OO_2 = OO_1$.

OO_1O_2 — правильный треугольник. Если таким же образом соединить середины всех граней куба, то получим октаэдр.

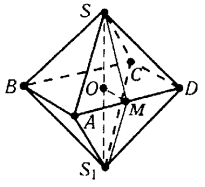
80.



Имеем: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Его грани — равные квадраты, у них равные диагонали. Таким образом, $AC = B_1D_1 = AB_1 = AD_1 = CD_1 = B_1C$. D_1AB_1C — тетраэдр.

81. Задача решена в учебнике Погорелова.

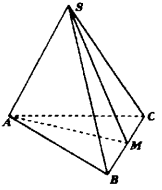
82*. $SABCDS_1$ — октаэдр. Из вершины S октаэдра опустим высоту SO на плоскость $ABCD$. OA, OB, OC и OD — проекции ребер SA, SB, SC и SD на плоскость $ABCD$. Поскольку $SA = SB = SC = SD$, то $OA = OB = OC = OD$, точка O — центр описанной вокруг четырехугольника $ABCD$ окружности. Поскольку $AB = BC = CD = AD$, то $ABCD$ — квадрат, точка O — точка пересечения его диагоналей. Рассмотрим трехгранный угол, образованный плоскостями граней SAD, SCD и ADC. Плоские углы



$SDA = SDC = 60°$, $ADC = 90°$. В $\triangle SAD$ SM — медиана и высота, OM — ее проекция, по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AD$, $\angle SMO$ — двугранный угол между плоскостью SAD и $ABCD$.

$\cos\angle SMO = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\angle ADC}{2}}{\operatorname{tg}\angle SDC}$ (см. задачу 4). $\cos\angle SMO = \dfrac{\operatorname{tg}45°}{\operatorname{tg}60°} = 0{,}5774$, $\angle SMO = 54°44'$. PS_1MO — двугранный угол между гранью S_1AO и плоскостью $ABCD$, $\angle S_1MO = \angle SMO$, $\angle SMS_1$ — двугранный угол при ребре AD октаэдра, $\angle SMS_1 = 2 \cdot \angle SMO$, $PSMS_1 = 109°28'$.

83. $SABC$ — правильный тетраэдр. AM и SM — медианы, высоты и биссектрисы $\triangle ABC$ и $\triangle SBC$. AM — геометрическое место точек, равноудаленных от ребер AB и AC, SM — геометрическое место точек, равноудаленных от ребер SB и SC. Плоскость SMA является плоскостью симметрии тетраэдра. Таким образом, плоскостями симметрии правильного тетраэдра являются плоскости, проходящие через его ребро и медиану противоположной грани.

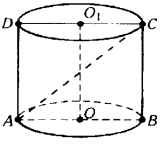


84*. Воспользуемся рисунком к задаче 82. Плоскостями симметрии октаэдра являются плоскости $SBDS_1$, $ABCD$ и SAS_1C, а также плоскости, которые проходят через противоположные вершины октаэдра и середины двух параллельных ребер (например плоскость SMS_1). У октаэдра три пары противоположных вершин, через каждую пару можно провести две плоскости симметрии. Таким образом, всего $3 + 3 \cdot 2 = 9$ плоскостей симметрии.

В додекаэдре плоскости симметрии проходят через пары противоположных паралельных ребер. Всего в додекаэдре 30 ребер, то есть 15 пар, через каждую пару можно провести одну плоскость симметрии, всего таких плоскостей 15. В икосаэндре плоскостями симметрии также являются плоскости, проведенные через пару паралельных ребер. Их 15.

§ 6. Тела вращения

1. Пусть дан цилиндр, OO_1 — его ось, $OO_1 = 3$ м, O_1D — радиус основания, $O_1D = 2$ м. $ABCD$ — осевое сечение. AD и BC — образующие.

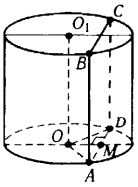


$AD = OO_1 = 3$ м, DC — диаметр основания, $DC = 2 \cdot O_1D$, $DC = 2 \cdot 2 = 4$ (м).

AC — диагональ осевого сечения. Из $\triangle ACD$, $\angle ADC = 90°$, $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$, $AC = \sqrt{9+16} = 5$ (м).

2. Задача решена в учебнике Погорелова.

3. Пусть дан цилиндр, OO_1 — его ось, высота цилиндра $AB = 6$ см, $OA = 5$ см. В плоскости нижнего основания проведем хорду AD и параллельную ей хорду BC в плоскости верхнего основания, $ABCD$ — сечение.



$\triangle AOD$ — равнобедренный, так как $OA = OD = r$, OM — медиана и высота. $OM = 4$ см.

Рассмотрим $\triangle AMO$: $\angle AMO = 90°$; $AM = \sqrt{OA^2 - OM^2}$;

$AM = \sqrt{25 - 16} = 3$ (см). $AD = 6$ см.

$S_{ABCD} = AB \cdot AD$, $S_{ABCD} = 6 \cdot 6 = 36$ (см^2).

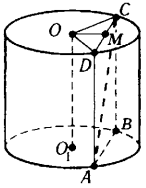
4. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче.

Высота цилиндра $AB = 8$ дм, $ABCD$ — квадрат ($AB = BC = CD = AD = 8$ дм). Радиус основания $OA = 5$ дм. В $\triangle AOD$ $AO = OD = 5$ дм, OM — медиана и высота;

$AM = MD = 4$ дм. Из $\triangle AOM$ ($\angle AOM = 90°$) имеем:

$OM = \sqrt{AO^2 - AM^2}$, $OM = \sqrt{25 - 16} = 3$ (дм).

5. В цилиндре с осью OO_1 $AD = 6$ дм, $AB = 10$ дм, $OC = 5$ дм проведем плоскость через прямые AC и AB. Она пересечет плоскость нижнего основания по хорде BC.



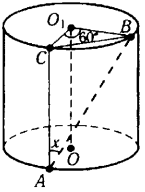
$\triangle COB$ — равнобедренный. OM — медиана и высота.

OO_1 параллельна плоскости ABC. OM — расстояние от OO_1 до плоскости ABC, OM — расстояние от OO_1 до AB.

Из $\triangle ABC$ $\angle ACB = 90°$, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$,

$BC = \sqrt{100 - 36} = 8$ (дм). $CM = MB = 4$ дм. Из $\triangle COM$ имеем: $\angle CMO = 90°$, $OM = \sqrt{OC^2 - CM^2}$, $OM = \sqrt{25 - 16} = 3$ (дм).

6.



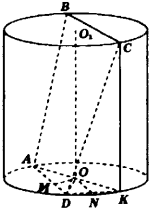
В цилиндре с осью OO_1 $O_1B = \frac{1}{2}AB$. $\angle BO_1C = 60°$.

В $\triangle BO_1C$ $O_1B = O_1C$, таким образом, $\angle O_1BC = \angle O_1CB = 60°$,

$BC = O_1B = \frac{1}{2}AB$. Пусть $\angle BAC = x$. $\operatorname{tg} x = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$.

7. Задача решена в учебнике Погорелова.

8. В цилиндр с осью OO_1 вписан квадрат $ABCD$. Высота цилиндра $CK = 2$ м. DK — проекция наклонной CD на плоскость нижнего основания. Так как $CD \perp AD$, то по теореме о трех перпендикулярах $DK \perp AD$.



$\triangle AOD$ — равнобедренный, $AO = OD = 7$ м.

OM — медиана и высота.

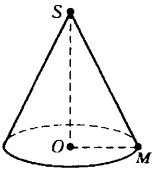
ON — медиана и высота равнобедренного $\triangle DOK$.

$MOND$ — прямоугольник.

Если $OM = y$, то $DK = 2y$, $MD = x$, тогда $AD = CD = 2x$.

Из $\triangle MOD$, $\angle OMD = 90°$, имеем $OD^2 = OM^2 + MD^2$,

$49 = y^2 + x^2$. Из $\triangle CDK$, $\angle CKD = 90°$, $CK^2 = CD^2 - DK^2$,
$4 = 4x^2 - 4y^2$, $x^2 - y^2 = 1$.
$2x^2 = 50$; $x^2 = 25$, $x = 5$. $AD = 2x = 2 \cdot 5 = 10$ (м).



9. Высота конуса $SO = 4$ м, радиус основания $OM = 3$ м.
SM — образующая. Из $\triangle SMO$,

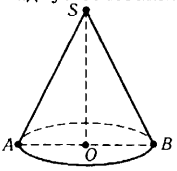
$\angle SOM = 90°$, $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}$,

$SM = \sqrt{16 + 9} = 5$ (м).

10. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче.
SO — высота конуса. Образующая конуса $SM = l$. OM — проекция образующей SM на основание конуса. $\angle SMO = 30°$.

$SO = SM \sin 30°$, $SO = \dfrac{l}{2}$.

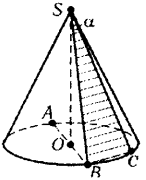
11. Радиус основания конуса $OB = R$. SO — ось конуса. ASB — осевое сечение. $\angle ASB = 90°$, $SA = SB$, таким образом, $\triangle ASB$ равнобедренный, $\angle SAB = \angle SBA = 45°$.



$SO = OB\text{tg}45°$, $SO = R$. $S_{ASB} = \dfrac{1}{2} AB \cdot SO$, $AB = 2R$.

$S_{ASB} = \dfrac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2$.

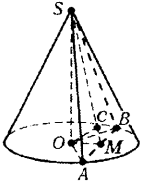
12.



Пусть SAB — осевое сечение, $SA = AB = SB$.
$OB = R$, SO — высота и медиана $\triangle SAB$, $SB = AB = 2R$.
В $\triangle SBC$ ($\angle BSC = \alpha$), $SC = SB = 2R$.

$S_{SBC} = \dfrac{1}{2} SB \cdot SC \cdot \sin\alpha$. $S_{SBC} = \dfrac{1}{2} \cdot 4R^2 \sin\alpha = 2R^2 \sin\alpha$.

13. Высота конуса $SO = 20$, радиус основания $OA = 25$. SAB — сечение. $\triangle AOB$ равнобедренный, так как $AO = OB$, OM — медиана и высота. SM — медиана и высота $\triangle SAB$. $AB \perp OM$, $AB \perp SM$.



AB — перпендикуляр к плоскости SOM. Так как плоскость сечения SAB проходит через AB, то плоскости SOM и SAB перпендикулярны. SM — прямая пересечения. Из точки O опустим перпендикуляр OC на прямую сечения SM, OC — расстояние от точки O до плоскости сечения. $OC = 12$.

Обозначим $\angle OSM$ через α. Из $\triangle SOC$, $\angle SCO = 90°$, $\sin\alpha = \dfrac{OC}{SO}$,
$\sin\alpha = \dfrac{12}{20} = 0{,}6$;

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$. Из $\triangle OSM$,

$\angle SOM = 90°$, $SM = \dfrac{OS}{\cos\alpha}$,

$SM = \dfrac{20}{0,8} = 25$, $OM = \sqrt{SM^2 - SO^2}$, $OM = \sqrt{625 - 400} = 15$.

Из $\triangle OAM$, $\angle OMA = 90°$, $AM = \sqrt{OA^2 - OM^2}$, $AM = \sqrt{625 - 225} = 20$.

$AB = 2 \cdot AM$, $AB = 40$. $S_{ASB} = \dfrac{1}{2} SM \cdot AB$, $S_{ASB} = \dfrac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 500$.

14. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. Радиус основания $OA = R$. SO — высота конуса, SA — образующая. AO — ее проекция на плоскость основания. $\angle SAO = \alpha$.

Из $\triangle SAO$ ($\angle SOA = 90°$) $SO = AO \operatorname{tg}\alpha$, $SO = R \operatorname{tg}\alpha$. SAB — сечение. SM — медиана и высота равнобедренного $\triangle SAB$. OM — ее проекция на плоскость основания.

$AB \perp OM$, $AB \perp SM$, AB — перпендикуляр к плоскости SOM. Плоскости SOM и SAB перпендикулярны, SM — прямая их пересечения. В плоскости SOM опустим перпендикуляр OC на прямую SM, OC — перпендикуляр к плоскости SAB.

SC — проекция наклонной SO на плоскость SAB. $\angle OSC = \varphi$. Из $\triangle SMO$ ($\angle SOM = 90°$) $SM = \dfrac{SO}{\cos\varphi}$, $SM = \dfrac{R\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}$, $OM = SO \operatorname{tg}\varphi$, $OM = R \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi$. Из $\triangle AOM$ ($\angle AMO = 90°$) $AM = \sqrt{AO^2 - OM^2}$, $AM = \sqrt{R^2 - R^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi} = R\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}$.

$AB = 2AM$, $AB = 2R\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}$.

$S_{ASB} = \dfrac{1}{2} AB \cdot SM$, $S_{ASB} = \dfrac{1}{2} \cdot 2R\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi} \cdot \dfrac{R\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi} = \dfrac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}$.

15. Задача решена в учебнике Погорелова.

16. Высота конуса H, площадь основания S, тогда площадь сечения $\dfrac{S}{2}$.

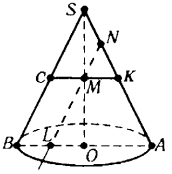
Если обозначим через x расстояние от вершины до плоскости сечения, то $\dfrac{x^2}{H^2} = \dfrac{S}{2S}$, $x^2 = \dfrac{H^2}{2}$, $x = \dfrac{H}{\sqrt{2}}$.

17. Образующая конуса $SB = l$, SO — высота конуса, M — ее середина, SAB — осевое сечение. В плоскости сечения через точку M проведем прямую параллельную SB. Она пересечет основание конуса в некоторой точке L, а образующую SA — в точке N. Рассмотрим $\triangle SOB$ и $\triangle MOL$.

$\angle SOB$ общий, поскольку $ML \parallel SB$, то $\angle SBO = \angle MLO$,

$\triangle SOB \sim \triangle MOL$, $\dfrac{ML}{SB} = \dfrac{OM}{SO}$, но $MO = \dfrac{1}{2} SO$, поэтому $ML = \dfrac{1}{2} SB$,

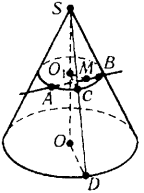
$ML = \frac{1}{2}l$. $\angle SMN = \angle OML = \angle OSB = \angle ASO$, таким образом, $\triangle SNM$ равнобедренный, $SN = NM$. Через точку M проведем прямую KC, параллельную AB. $\angle CBO = \angle MLO = \angle CML = \angle NMK = \angle NKM$, Таким образом, $NM = NK = NS$,



$NM = \frac{1}{2}KS$, $\triangle KSM \sim \triangle ASO$, $\frac{SM}{MO} = \frac{SK}{KA} = 1$,

$SK = KA = \frac{l}{2}$. $NM = \frac{l}{4}$. $NL = \frac{l}{2} + \frac{l}{4} = \frac{3l}{4}$.

18*. Прямая a, параллельная основанию конуса, пересекает его в точках A и B. Через эти точки проведем сечение конуса, параллельное основанию. Расстояние OO_1 от плоскости сечения до плоскости основания равно 6 см. Высота конуса $SO = 12$ см. Образующая $SD = 13$ см. В $\triangle AO_1B$ $AO_1 = BO_1$, тогда он равнобедренный. O_1M — его медиана и высота, $O_1M = 2$ см. $SO_1 = SO - O_1O$, $SO_1 = 12 - 6 = 6$ (см).



Из $\triangle SO_1M$ ($\angle SO_1M = 90°$) по теореме Пифагора найдем SM:

$SM = \sqrt{SO_1^2 + O_1M^2}$, $SM = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$ (см).

O_1M — проекция наклонной SM на плоскость сечения.

По теореме о трех перпендикулярах $SM \perp AB$. $\triangle SO_1C \sim \triangle SOD$, так как $\angle SO_1C = \angle SOD = 90°$, $\angle OSD$ общий.

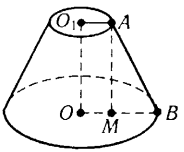
$\frac{SO_1}{SO} = \frac{SC}{SD}$, $SC = \frac{SO_1 \cdot SD}{SO}$, $SC = \frac{6 \cdot 13}{12} = 6{,}5$ (см).

Так как сечение, параллельное основанию, пересекает конус, то $SA = SB = SC = 6{,}5$ см. В $\triangle SAB$ SM — медиана и высота.

Из $\triangle SMA$ ($\angle SMA = 90°$) по теореме Пифагора имеем: $AM = \sqrt{SA^2 - SM^2}$,

$AM = \sqrt{42{,}25 - 40} = 1{,}5$ (см). $AB = 2AM$, $AB = 3$ см.

19. Радиусы оснований усеченного конуса с осью OO_1 $O_1A = 3$ м, $OB = 6$ м.



Пусть $O_1A \parallel OB$, OO_1AB — трапеция, OO_1 — ее высота, а OO_1 — высота конуса, $OO_1 = 4$ м. AB — образующая. Опустим высоту AM трапеции, $AM = OO_1$, $AM \parallel OO_1$, $OM = O_1A = 3$ м, $MB = OB - OM$, $MB = 6 - 3 = 3$ (м). Из $\triangle ABM$, $\angle AMB = 90°$, $AB = \sqrt{AM^2 + MB^2}$, $AB = \sqrt{16+9} = 5$ (м).

20. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. $OB = R$, $O_1A = r$, $MB = R - r$. MB — проекция образующей AB на плоскость большего основания, $\angle ABM = 45°$, $\triangle AMB$ — равнобедренный, $AM = MB = R - r$. Высота конуса $OO_1 = AM = R - r$.

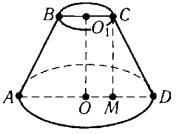
21. Воспользуемся рисунком к задаче 19. Образующая конуса $AB = 2a$, $\angle ABM = 60°$.

Из $\triangle ABM$: $\angle AMB = 90°$; $MB = AB\cos 60°$, $MB = 2a \cdot \frac{1}{2} = a$.

По условию $O_1A = \frac{1}{2}OB$, $OM = O_1A = \frac{1}{2}OB$,

$OM = MB = a$, $OB = 2a$, $O_1A = a$.

22. Пусть дан усеченный конус с осью OO_1. Радиусы его оснований $O_1C = 3$ дм, $OD = 7$ дм, $ABCD$ — осевое сечение, CD — образующая конуса, $CD = 5$ дм. $ABCD$ — равносторонняя трапеция, OO_1 — ее высота. Опустим высоту CM трапеции.



$CM = OO_1$, $CM \parallel OO_1$, $OM = O_1C = 3$ дм, $MD = OD - OM$, $MD = 7 - 3 = 4$ (дм).

Из $\triangle CMD$: $\angle CMD = 90°$: $CM = \sqrt{CD^2 - MD^2}$,

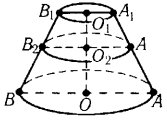
$CM = \sqrt{25 - 16} = 3$ (дм).

Площадь трапеции $ABCD$:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CM$, $AD = 2OD = 14$ дм, $BC = 2O_1C = 6$ дм,

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(14 + 6) \cdot 3 = 30$ (дм^2).

23.



В усеченном конусе с высотой OO_1 площадь оснований $S = 16$ дм^2 и $S_1 = 4$ дм^2, O_2 — середина OO_1. Через точку O_2 проведем сечение, параллельное плоскости основания. OA и O_1A_1 — радиусы оснований конуса. Пусть $OA \parallel O_1A_1$, OO_1A_1A — трапеция, O_2A_2 — средняя линия.

$O_2A_2 = \frac{1}{2}(OA + O_1A_1)$, но O_2A_2 — радиус сечения, площадь сечения $S_2 = \pi \cdot O_2A_2^2$. $O_2A_2^2 = \frac{1}{4}(OA + O_1A_1)^2$, $O_2A_2^2 = \frac{1}{4}(OA + O_1A_1)^2$; $OA = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$;

$O_1A_1 = \sqrt{\frac{S_1}{\pi}}$; $O_2A_2^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{S}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sqrt{S_1S} + \frac{S_1}{\pi}\right)$; $S_2 = \pi O_2A_2^2 = \pi \cdot \frac{1}{4\pi}\left(S + 2\sqrt{S_1S} + S_1\right) =$

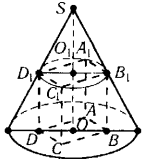
$= \frac{1}{4}\left(16 + 2 \cdot \sqrt{16 \cdot 4} + 4\right) = \frac{36}{4} = 9$ (дм^2)

24. Решение задачи аналогично предыдущей. $S = M$, $S_1 = m$.

Площадь сечения $S_{\text{пер}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{M} + \sqrt{m}\right)^2$.

25. Задача решена в учебнике Погорелова.

26*.



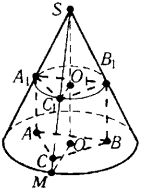
Высота конуса $SO = H$, радиус основания $OM = R$. В конус вписан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основание $ABCD$ куба лежит в плоскости основания конуса, а основание $A_1B_1C_1D_1$ куба лежит в плоскости сечения конуса, параллельной к основанию конуса, и проходит через точку O_1. Пусть сторона куба x, тогда $OO_1 = x$. Диагональ B_1D_1 основания $A_1B_1C_1D_1$ куба равна $x\sqrt{2}$,

$O_1D_1 = \frac{1}{2}B_1D_1 = x\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\triangle CD_1O_1 \sim \triangle SMO$, так как $\angle SO_1D_1 = \angle SOM = 90°$, $\angle MSO$ — общий.

$SO_1 = SO - OO_1$, $SO_1 = H - x$. $\frac{SO_1}{SO} = \frac{D_1O_1}{OM}$, $\frac{H-x}{H} = \frac{x\sqrt{2}}{2R}$,

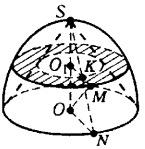
$2RH - 2Rx = x\sqrt{2}H$, $x = \frac{2RH}{2R+\sqrt{2}H} = \frac{\sqrt{2}RH}{H+\sqrt{2}R}$.

27*. 

В конус, высота которого $SO = H$, а радиус основания $OM = R$, вписана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, боковые грани которой квадраты. Основание ABC призмы лежит в плоскости основания конуса, основание $A_1B_1C_1$ лежит в плоскости сечения, паралельного основанию конуса. Это сечение является кругом с центром в точке O_1. Пусть ребро призмы x. $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1 = r$, где r — радиус сечения и радиус описанной вокруг правильного $\triangle A_1B_1C_1$ окружности, $r = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. $OO_1 = C_1C = x$, $SO_1 = SO - OO_1$, $SO_1 = H - x$. $\triangle SO_1C_1 \sim \triangle SOM$, так как $= \angle SO_1C_1 = \angle SOM = 90°$, $\angle OSM$ — общий.

$\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1C_1}{OM}$, $\frac{H-x}{H} = \frac{x\sqrt{3}}{3R}$, $3RH - 3Rx = x\sqrt{3}H$, $x = \frac{3RH}{\sqrt{3}H+3R} = \frac{\sqrt{3}RH}{H+3R}$.

28. Конус и полушар имеют общее основание, SO — общая высота. ON — радиус основания. O_1 — середина SO. O_1K — радиус сечения конуса плоскостью, параллельной основанию, O_1M — радиус сечения полушара той же плоскостью. Пусть радиус полушара $ON = OS = R$. $OO_1 = \frac{R}{2}$. Из $\triangle OMO_1$: $\angle OO_1M = 90°$, $OM = ON = R$, $O_1M = \sqrt{OM^2 - OO_1^2}$, $O_1M = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$.

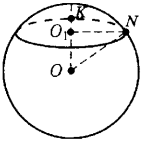


Площадь сечения полушара $S_{пол} = \pi \cdot O_1M^2 = \frac{3}{4}\pi R^2$.

$\triangle SO_1K \sim \triangle SON$, бо $\angle SO_1K = \angle SON = 90°$, $\angle OSN$ — общий. $\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1K}{ON} = \frac{1}{2}$, $O_1K = \frac{1}{2}ON = \frac{R}{2}$, площадь сечения конуса $S_{кон} = \pi \cdot O_1K^2 = \pi\frac{R^2}{4}$. Площадь сечения, которая расположена между боковой

поверхностью конуса и поверхностью полушара $S = S_{пол.} - S_{кон}$, $S = \frac{3}{4}\pi R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi R^2$, где πR^2 — площадь основания.

29. Точка O — центр шара с радиусом $OK = 41$ дм. Через точку O_1 ($OO_1 = 9$ дм) проведем плоскость, перпендикулярную OK. Получим пересечение радиуса O_1N, $ON = OK = 41$ дм.



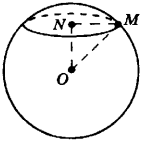
Из $\triangle ONO_1$ $\angle OO_1N = 90°$, $O_1N = \sqrt{ON^2 - OO_1^2}$,

$O_1N = \sqrt{1681 - 81} = 40$ (дм).

Площадь сечения $S = \pi \cdot O_1N^2$, $S = \pi \cdot 1600$ дм^2 $= 16\pi$ м^2.

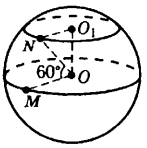
30. Задача решена в учебнике Погорелова.

31. Радиус шара с центром в точке O $OM = R$. Через точку M проведем плоскость. N — центр сечения, ON — перпендикуляр к плоскости сечения, NM — проекция радиуса OM на плоскость сечения, $\angle NMO$ — угол между радиусом OM и плоскостью сечения, $\angle NMO = 60°$. $NM = MO\cos 60°$.



$NM = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$. Площадь сечения $S = \pi \cdot NM^2 = \frac{1}{4}\pi R^2$.

32. Радиус земного шара $OM = R$. O_1N — радиус параллели. Пусть $NO_1 \parallel MO$, $\angle NOM = 60°$, OO_1 перпендикуляр к плоскости параллели, $\angle O_1ON = 90° - 60° = 30°$. $ON = OM = R$,

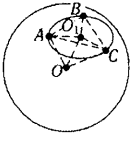


$O_1N = ON\sin 30° = \frac{R}{2}$. Длина параллели $L = 2\pi \cdot O_1N = 2\pi \cdot \frac{R}{2} = \pi R$.

33. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. За сутки город N преодолевает расстояние $L = \pi R$, $R = 6000$ км, $L \approx 188\,450$ км.

За час город N преодолевает расстояние $l = \frac{1}{24}L$, $l \approx 785$ км.

34. Точки A, B и C лежат на поверхности шара с центром в точке O. Радиус шара $OA = OB = OC = 13$ см, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см. Через точки A, B и C проведем плоскость, получим круг с центром в точке O_1. OO_1 — перпендикуляр к плоскости ABC. $O_1A = O_1B = O_1C = R$, где R — радиус сечения, то есть радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности.

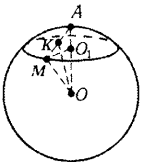


$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}}$, где площадь $\triangle ABC$ найдем по формуле Герона:

$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}$, где $p = \frac{6 + 8 + 10}{2} = 12$ (см).

$S_{ABC} = \sqrt{12(12-6)(12-10)(12-8)} = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4} = 24$ (см^2). $R = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = 5$(см). Из $\triangle OAO_1$, $\angle OO_1A = 90°$; $OO_1 = \sqrt{AO^2 - AO_1^2}$, $OO_1 = \sqrt{169-25} = 12$ (см).

35. Диаметр шара с центром в точке O равен 25 см. Точка A лежит на поверхности шара, AO — радиус шара, $AO = 12{,}5$ см. Точка A является вершиной конуса, образующая которого $AM = 15$ см. $OM = OA = 12{,}5$ см. OK — медиана и высота $\triangle AOM$.

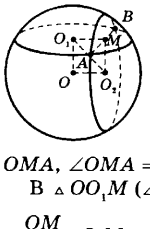


$AK = \frac{1}{2}AM = 7{,}5$ см. Из $\triangle AOK$: $\angle AKO = 90°$, $\cos\angle OAK = \frac{AK}{OA} = \frac{7{,}5}{12{,}5} = 0{,}6$. AO_1 — высота конуса. Из $\triangle AO_1M$, $\angle AO_1M = 90°$,

$O_1M = AM\sin\angle OAK$. Пусть $\angle OAK = \alpha$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$,

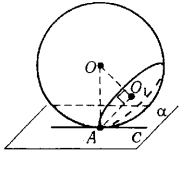
$\sin\alpha = \sqrt{1-0{,}36} = 0{,}8$. $O_1M = 15 \cdot 0{,}8 = 12$ (см).

36*. Радиус шара с центром в точке O $OA = 7$ см. На поверхности шара есть две равных окружности с центрами в точках O_1 и O_2, плоскости этих окружностей перпендикулярны. AB — общая хорда, $AB = 2$ см. Рассмотрим $\triangle OO_1A$ и $\triangle OO_2A$. Они равны по общей гипотенузе OA и катетам O_1A и O_2A равны как радиусы равных окружностей. Таким образом, $OO_1 = OO_2$. M — середина AB. OO_1MO_2 — квадрат. Найдем его диагональ OM из OMA, $\angle OMA = 90°$; $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2}$, $OM = \sqrt{49-1} = 4\sqrt{3}$ (см).



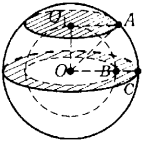
В $\triangle OO_1M$ ($\angle OO_1M = 90°$) $OO_1^2 + O_1M^2 = OM^2$, $2O_1M^2 = OM^2$, $O_1M = \frac{OM}{\sqrt{2}}$, $O_1M = 4\sqrt{\frac{3}{2}}$ (см). В $\triangle AO_1M$: $\angle AMO_1 = 90°$, $O_1A = \sqrt{O_1M^2 + AM^2}$, $O_1A = \sqrt{24+1} = 5$ (см).

37. Через точку A на поверхности шара с центром в точке O проведена касательная к шару плоскость α и некоторая плоскость β, пересекающая шар по кругу с центром O_1. c — прямая пересечения плоскостей α и β. OA — радиус шара, $OA = R$, OA — перпендикуляр к плоскости α, $OA \perp c$, O_1A — радиус сечения, OO_1 — перпендикуляр к плоскости сечения, O_1A — проекция OA на плоскость сечения. По теореме о трех перпендикулярах $O_1A \perp c$. Плоскость OAO_1 перпендикулярна прямой c и пересекает плоскость α по прямой AB, а плоскость β — по прямой AO_1, $\angle O_1AB$ — угол между плоскостями α и β, $\angle O_1AB = 30°$, $\angle OAB = 90°$, $\angle OAO_1 = 90° - 30° = 60°$. Из $\triangle OAO_1$, $\angle OO_1A = 90°$, $AO_1 = OA \cdot \cos 60°$, $AO_1 = \frac{R}{2}$.



Площадь сечения: $S = \pi \cdot O_1A^2$, $S = \pi\frac{R^2}{4}$.

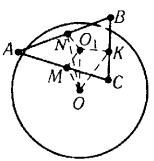
38. Пусть радиусы двух концентрических шаровых поверхностей с центром в точке O $OB = r$, $OC = R$, O_1 — центр сечения, касающегося внутренней шаровой поверхности, O_1A — его радиус. OO_1 — перпендикуляр к плоскости сечения, $OO_1 = OB = r$, $OA = OC = R$. Из $\triangle OAO_1$, $\angle OO_1A = 90°$, $O_1A = \sqrt{OA^2 - OO_1^2}$, $O_1A = \sqrt{R^2 - r^2}$.



Площадь этого сечения $S_1 = \pi \cdot O_1A^2$, $S_1 = \pi\left(R^2 - r^2\right)$. Площадь большого круга большего шара $S_б = \pi \cdot OC^2$, $S_б = \pi R^2$, площадь большого круга меньшего шара $S_м = \pi \cdot OB^2$, $S_м = \pi r^2$. Площадь сечения тела, ограниченного шаровыми поверхностями и плоскостью, проходящей через центр $S_п = S_б - S_м$; $S_п = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = S_1$.

39. Задача решена в учебнике Погорелова.

40. M, N и K — точки касания шара с центром в точке O к сторонам треугольника ABC, $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см. Опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость треугольника ABC. O_1M, O_1N и O_1K — проекции наклонных OM, ON и OK на плоскость треугольника. Поскольку $OM \perp AC$, $ON \perp AB$ и $OK \perp BC$, то по теореме о трех перпендикулярах $O_1M \perp AC$, $O_1N \perp AB$, $O_1K \perp BC$. $\triangle OMO_1 = \triangle ONO_1 = \triangle OKO_1$ по гипотенузе ($OM = ON = OK = 5$ см) и общему катету OO_1.



$O_1M = O_1N = O_1K = r$, точка O_1 — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, r — его радиус.

$r = \dfrac{S_{ABC}}{p}$, где $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2}$, $p = \dfrac{13 + 14 + 15}{2} = 21$ (см). Площадь $\triangle ABC$ найдем по формуле Герона:

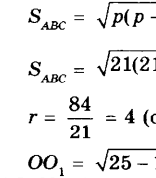
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)},$$

$$S_{ABC} = \sqrt{21(21 - 13)(21 - 14)(21 - 15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$r = \dfrac{84}{21} = 4$ (см). Из $\triangle OMO_1$, $\angle OO_1M = 90°$, $OO_1 = \sqrt{OM^2 - MO_1^2}$,

$OO_1 = \sqrt{25 - 16} = 3$ (см).

41. M, N, K и L — точки касания шара с центром в точке O к сторонам ромба $ABCD$. Диагонали ромба $AC = 20$ см, $BD = 15$ см.



$OM = ON = OK = OL = R$, где R — радиус шара, $R = 10$ см. Опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость ромба. O_1M, O_1N, O_1K и O_1L — проекции наклонных OM, ON, OK и OL на плоскость ромба. Так как $OM \perp AD$, $ON \perp AB$, $OK \perp BC$ и $OL \perp DC$, то по теореме о трех перпендикулярах $O_1M \perp AD$, $O_1N \perp AB$, $O_1K \perp BC$, $O_1L \perp DC$. Кроме того, $O_1M = O_1N = O_1K = O_1L = r$, где r — радиус вписанной в ромб $ABCD$ окружности. В $\triangle AO_1D$, $\angle AO_1D =$

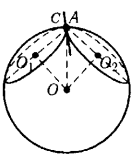
$= 90°$, O_1M — высота, $AO_1 = \frac{1}{2}AC = 10$ см, $O_1D = \frac{1}{2}BD = 7{,}5$ см, $AD = \sqrt{AO_1^2 + O_1D^2}$,

$AD = \sqrt{100 + 56{,}25} = 12{,}5$ (см). $S_{AO_1D} = \frac{1}{2}AO_1 \cdot O_1D = \frac{1}{2}AD \cdot MO_1$, $MO_1 = \frac{AO_1 \cdot O_1D}{AD}$; $MO_1 = \frac{10 \cdot 7{,}5}{12{,}5} = 6$ (см).

Из $\triangle OMO_1$, $\angle OO_1M = 90°$, $OO_1 = \sqrt{OM^2 - MO_1^2}$,

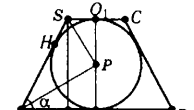
$OO_1 = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см).

42. Через касательную c к поверхности шара проведем две взаимно перпендикулярные плоскости, пересекающие шар по кругам с центрами O_1 и O_2. $O_1A = r_1$, $O_2A = r_2$. OO_1 и OO_2 — перпендикуляры к плоскостям сечений. O_1A — проекция OA на плоскость первого сечения, O_2A — проекция OA на плоскость второго сечения. Так как $AO \perp c$, то по теореме о трех перпендикулярах $O_1A \perp c$ и $O_2A \perp c$. Плоскость O_1AO_2 перпендикулярна к прямой c. $\angle O_1AO_2 = 90°$. OO_1AO_2 — прямоугольник, $O_1O = AO_2 = r_2$. $OA = \sqrt{OO_1^2 + O_1A^2}$,



$OA = \sqrt{r_2^2 + r_1^2}$.

43. В усеченный конус с осью OO_1 вписан шар радиусом R. O_1S и OM — радиусы оснований конуса. SM — образующая, OO_1SM — трапеция, OO_1 — ее высота. Опустим высоту SK трапеции, $SK = OO_1 = 2R$, $SK \parallel OO_1$, SK — перпендикуляр к плоскости основания. KM — проекция образующей SM, $\angle SMK = \alpha$.



$SM = SK$: $\sin\alpha$; $SM = \frac{2R}{\sin\alpha}$. Плоскость OO_1SM пересекает шар по некоторому кругу с центром в точке P, причем точка P принадлежит биссектрисе $\angle OMS$. В $\triangle OPM$, $\angle POM = 90°$, $OP = R$, $\angle OMP = \frac{\alpha}{2}$, $OM = OP : \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $OM = \frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Из $\triangle SMK$,

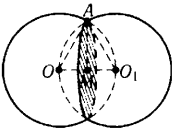
$\angle SMK = 90°$, $KM = \frac{2R}{\operatorname{tg}\alpha}$, $OK = O_1S = OM - KM$.

$$O_1S = \frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} - \frac{2R}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} - \frac{2R\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

44. Задача решена в учебнике Погорелова.

45. Радиусы шаров $OA = 29$ дм, $O_1A = 25$ дм, расстояние между их центрами $OO_1 = 36$ дм. Шары пересекаются по кругу с центром в точке

M и радиусом AM. Так как OO_1 — перпендикуляр к плоскости сечения, то AM — высота $\triangle OAO_1$. $S_{OAO_1} = \frac{1}{2} AM \cdot OO_1$. Площадь $\triangle OAO_1$ найдем по формуле Герона:



$$S_{OAO_1} = \sqrt{p(p - OA)(p - AO_1)(p - OO_1)},$$

где $p = \frac{OA + O_1A + OO_1}{2}$,

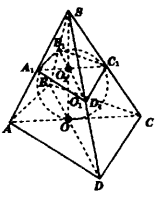
$p = \frac{29 + 25 + 36}{2} = 45$ (дм). $S_{OAO_1} = \sqrt{45(45 - 29)(45 - 25)(45 - 36)} =$

$= \sqrt{45 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 9} = 360$ (дм²). $AM = \frac{2S_{OAO_1}}{OO_1}$, $AM = \frac{2 \cdot 360}{36} = 20$ (дм). Длина линии пересечения поверхностей шаров $L = 2\pi \cdot AM$. $L = 2\pi \cdot 20 =$ $= 40\pi$ (дм) $= 4\pi$ (м).

46. Шар описан вокруг куба, если все его вершины касаются его поверхности, то есть диагональ куба является диаметром шара. Диагональ куба со стороной a: $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$, радиус шара $R = \frac{1}{2}d$, $R =$ $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

47. Задача решена в учебнике Погорелова.

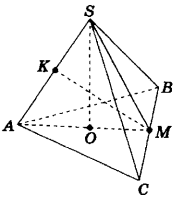
48. Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, в которую вписан шар с центром в точке O_1. Точки касания шара к боковым граням пирамиды лежат в плоскости, параллельной основанию. Эта плоскость пересекает шар по кругу с центром в точке O_2, а пирамиду — по квадрату $A_1B_1C_1D_1$. O_2 — центр вписанной в квадрат $A_1B_1C_1D_1$ окружности, точка пересечения его диагоналей.



SO — высота пирамиды $SABCD$, SO_1 — высота пирамиды $SA_1B_1C_1D_1$.

O_1O_2 — перпендикуляр к плоскости сечения. SO_1 и O_1O_2 лежат на одной прямой SO.

49. Имеем: $SABC$ — правильный тетраэдр с ребром a. Точка O — центр описанной вокруг тетраэдра окружности $OA = OB =$ $= OC = OS = R$, где R — радиус окружности. SM и AM — высоты треугольников SCB и ABC. $SM = AM$ $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $\triangle ASM$ — равнобедренный.



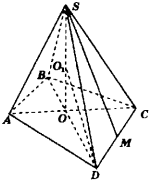
MK — медиана и высота, $AK = KS = \frac{a}{2}$.

Из $\triangle KMS$ $\angle SKM = 90°$,

$KM = \sqrt{SM^2 - KS^2}$, $KM = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\triangle ASO = \triangle COB$ по трем сторонам. Таким образом, $KO = OM = \frac{1}{2}KM = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Из $\triangle KOS$ $\angle SKO = 90°$, $SO = \sqrt{KS^2 + KO^2}$, $SO = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

50. 1) Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида со стороной основания a. $\angle DSC = \alpha$. SM — медиана, высота и биссектриса $\triangle SCD$. $DM = MC = \frac{a}{2}$.



Из $\triangle SDM$ $\angle SMD = 90°$, $SD = \frac{DM}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $SD = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Диагональ квадрата $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$, $BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

SO — высота пирамиды, точка O_1 — точка пересечения диагоналей квадрата, центр окружности, описанной вокруг пирамиды $SABCD$. O_1 лежит на высоте пирамиды. $O_1S = O_1D = R$, где R — радиус окружности. Из $\triangle SDO$, $\angle SOD = 90°$, $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2}$, $OD = \frac{1}{2}BD$, $OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$$SO = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 - 2a^2\sin\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha}.$$

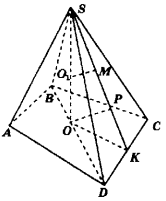
$OO_1 = SO - SO_1 = SO - R$. В $\triangle O_1OD$, $\angle O_1OD = 90°$, $O_1D^2 = OO_1^2 + OD^2$.

$$R^2 = \left(\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha} - R\right)^2 + \frac{2a^2}{4},\ R^2 = \frac{a^2\cos\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{aR\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + R^2 + \frac{2a^2}{4}.$$

$$\frac{aR\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2\cos\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2\cos\alpha + 2a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}};\ R = \frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}.$$

2) Точка O_1 — центр вписанной в пирамиду $SABCD$ окружности. SK — апофема, OK — проекция апофемы SK на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $OK \perp DC$. DC — перпендикуляр к плоскости SOK. Плоскость SDC, проходящая через него, перпендикулярна плоскости SOK. SK — прямая пересечения. Из точки O_1 опустим перпендикуляр O_1M на прямую SK. O_1M — перпендикуляр к плоскости SDC. O_1M — радиус вписанной окружности. $OO_1 = O_1M = r$.



Из $\triangle SDK$, $\angle SKD = 90°$, $SK = \dfrac{DK}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, $SK = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Из $\triangle SKO$, $\angle SOK = 90°$, $SO = \sqrt{SK^2 - OK^2}$, $OK = \dfrac{a}{2}$.

$$SO = \sqrt{\frac{a^2}{4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 - a^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$\sin\angle OSK = \dfrac{OK}{SK}$, $\sin\angle OSK = \dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{a} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. OP — перпендикуляр к SK,

$OP \parallel O_1M$. $OP = SO\sin\angle OSK$, $OP = \dfrac{a}{2}\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

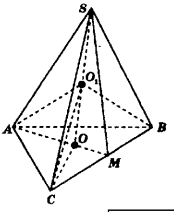
$\triangle SO_1M \sim \triangle SOP$.

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1M}{OP} = \frac{SO - OO_1}{SO}, \quad \frac{r}{OP} = \frac{SO - r}{SO}, \quad r\cdot SO = OP\cdot SO - OP\cdot r,$$

$$r = \frac{OP\cdot SO}{SO + OP}, \quad r = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{a}{2}\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2}\frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}.$$

51*. Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида, SO — высота. Точка O_1 — центр описанной вокруг пирамиды $SABC$ сферы. $O_1S = O_1A = O_1B = O_1C = R$. $\angle CSB = \alpha$, SM — апофема, SM является биссектрисой $\angle CSB$, $\angle CSM = \dfrac{\alpha}{2}$.



Если сторона $\triangle ABC$ равна a, тогда, поскольку SM — медиана, то $CM = \frac{a}{2}$. Из $\triangle SCM$: $\angle SMC = 90°$, $SC = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Из $\triangle O_1CO$: $\angle O_1OC = 90°$, $O_1O = \sqrt{O_1C^2 - OC^2}$, OC — радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности, $OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$O_1O = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}$, $SO = SO_1 + O_1O = H$. $H = R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}$ (1).

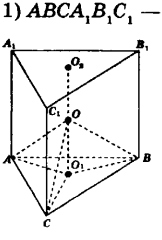
В $\triangle SCO$: $\angle SOC = 90°$, $SO^2 + OC^2 = SC^2$, $H^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$;

$$H^2 = \frac{a^2}{3}\left(\frac{3}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 1\right),\ H^2 = \frac{a^2}{3}\left(\frac{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right),\ \frac{a^2}{3} = \frac{H^2 \cdot 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

Из (1): $H^2 - 2HR + R^2 = R^2 - \frac{H^2 \cdot 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, $H\left(1 + \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) = 2R$,

$$H\left(\frac{3 \cdot 3}{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) = 2R,\ H = 2R\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

52. 1) $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма со стороной основания a. O_1O_2 — высота. O — середина высоты, центр описанной окружности. $OA = OC = OB = R$, $O_1A = O_1B = O_1C = R_1$, где R_1 — радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности.



$R_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Из $\triangle COO_1$, $\angle O_1OC = 90°$, $OO_1 = \sqrt{OC^2 - O_1C^2}$,

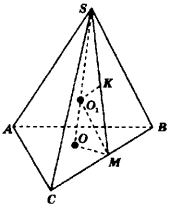
$$OO_1 = \sqrt{R^2 - \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}.\ O_1O_2 = 2\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

2) Для правильной четырехугольной призмы решение аналогично, но $R_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}H = \sqrt{R^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}}$. $H = 2\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}}$.

3) Для правильной шестиугольной призмы $R_1 = a$, $\frac{1}{2}H = \sqrt{R^2 - a^2}$,

$H = 2\sqrt{R^2 - a^2}$.

53. $SABC$ — правильная треугольная пирамида со стороной основания a.



SO — высота, точка O_1 — центр вписанной в пирамиду окружности. SM — апофема, OM — ее проекция. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp BC$. OM — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Радиус окружности, вписанной в правильный n-угольник, определяется по формуле $r_1 = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}$.

$\angle SMO = \varphi$.

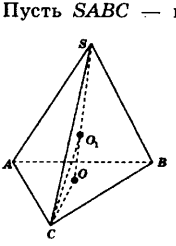
Плоскости SBC и SOM перпендикулярны. SM — прямая пересечения. Из точки O_1 опустим перпендикуляр O_1K на прямую SM, O_1K — перпендикуляр к плоскости SCB, O_1K — радиус вписанной окружности. $OO_1 = O_1K = r_1$.

$\triangle OO_1M = \triangle O_1KM$, т.к. $\angle O_1OM = \angle O_1KM = 90°$, гипотенуза O_1M общая.

$$\angle OMO_1 = \angle O_1MK = \frac{1}{2}\angle OMK = \frac{\varphi}{2}.$$

Из $\triangle OO_1M$: $OO_1 = OM \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$, $r_1 = OO_1 = \dfrac{a\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}$.

54. Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида со стороной a.



SO — ее высота, O_1 — центр описанной вокруг пирамиды окружности. $O_1S = O_1C = R$. OC — проекция бокового ребра SC на плоскость основания. $\angle SCO = \alpha$. Для правильной пирамиды основание высоты — центр описанной вокруг основания пирамиды окружности. Радиус этой окружности для n-угольной пирамиды $R_1 = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$. $OC = R_1$. $\angle CSO = 90° - \alpha$, $\triangle CO_1S$ — равнобедренный.

$\angle SCO_1 = \angle CSO_1 = 90° - \alpha$. $\angle O_1CO = \angle SCO - \angle SCO_1$,
$\angle O_1CO = \alpha - 90° + \alpha = 2\alpha - 90°$.

Из $\triangle CO_1O$: $\angle COO_1 = 90°$, $CO_1 = \dfrac{CO}{\cos\angle O_1CO}$,

$$CO_1 = \frac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}\cos(2\alpha - 90°)} = \frac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}\cos(90° - 2\alpha)} =$$

$$= \frac{a}{2\sin 2\alpha \sin\dfrac{180°}{n}}.$$

§ 7. Объемы многогранников

1. $V_1 = 3^3 = 27$ (см^3), $V_2 = 4^3 = 64$ (см^3), $V_3 = 5^3 = 125$ (см^3). После переплавки объем большого куба $V = V_1 + V_2 + V_3 = 27 + 64 + 125 = 216$ (см^3). Ребро этого куба $x = \sqrt[3]{V} = 6$ см.
2. Объем куба с ребром 10,2 см $V_{внешн} = (10{,}2)^3 = 1\,061{,}208$ (см^3). Внутреннее ребро куба $10{,}2 - 2 \cdot 0{,}1 = 10$ см. Объем внутреннего куба $V_{внутр} = 10^3 = 1\,000$ см^3. Объем стенок $V_{ст} = V_{внешн} - V_{внутр} = 1\,061{,}208 - 1\,000 = 61{,}208$ (см^3). Масса стенок $m_{ст} = 514{,}15$ г. Плотность металла $\rho = \frac{m_{ст}}{V_{ст}}$, $\rho = \frac{514{,}15}{61{,}208} = 8{,}4$ (г/см^3).
3. Задача решена в учебнике Погорелова.
4. Пусть a — начальная длина ребра, тогда $(a + 1)^3 = 125\,a^3$, $(a + 1)^3 = (5a)^3$, $a + 1 = 5a$, $4a = 1$, $a = 0{,}25$ (м).
5. Объем кирпича $V = 25 \cdot 12 \cdot 6{,}5 = 1950$ (см^3). Его масса $m = 3{,}51$ кг, откуда плотность $\rho = \frac{m}{V} = \frac{3{,}51\text{ кг}}{1950\text{ см}^3} = \frac{3510\text{ г}}{1950\text{ см}^3} = 1{,}8$ г/см^3.
6. Обозначим высоту резервуара x, тогда $2{,}5 \cdot 1{,}75 \cdot x = 10$, $x = \frac{10}{4{,}375} \approx 2{,}29$ (м).
7. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = 15 \cdot 50 \cdot 36 = 27\,000$ м^3.

   Ребро равновеликого ему куба $x = \sqrt[3]{V}$, $x = 30$ м.
8. Объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями 3 см, 4 см, 5 см:

   $V_1 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ (см^3). Его полная поверхность $S_{полн} = 2(3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5) = 94$ (см^2). Если каждое ребро увеличить на x см, то:

   $S_{полн} = 2((3 + x)(4 + x) + (4 + x)(5 + x) + (3 + x)(5 + x)) = 94 + 54 = 148$.

   $12 + 7x + x^2 + 20 + 9x + x^2 + 15 + 8x + x^2 = 74$.

   $3x^2 + 24x + 47 = 74$, $3x^2 + 24x - 27 = 0$, $x^2 + 8x - 9 = 0$.

   По теореме Виета $x_1 = 1$, $x_2 = -9$ — не удовлетворяет условию задачи.

   После увеличения объема параллелепипеда $V_2 = (3 + 1)(4 + 1)(5 + 1) = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ (см^3).

   $\frac{V_2}{V_1} = 2$, то есть объем параллелепипеда увеличился вдвое.
9. Внешний объем погонного метра трубы $V_{внешн} = 25 \cdot 25 \cdot 100 = 62\,500$ (см^3).

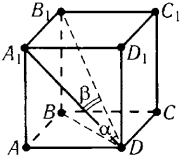
   Внутренняя ширина трубы $25 - 2 \cdot 3 = 19$ (см). Внутренний объем одного погонного метра трубы $V_{вн} = 19 \cdot 19 \cdot 100 = 36100$ (см^3).

   Объем чугуна, из которого изготовлена труба, $V_ч = V_{внешн} - V_{вн}$, $V_ч = 62\,500 - 36\,100 = 26\,400$ (см^3).

   Масса одного погонного метра трубы $m = \rho \cdot V_ч$;

   $m = 7{,}3 \cdot 26\,400 = 192\,720$ г $= 192{,}72$ кг.

10. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, диагональ которого a. A_1D — проекция диагонали B_1D на боковую грань AA_1D_1D. $\angle B_1DA_1$ — угол между диагональю B_1D и боковою гранью. $\angle B_1DA_1 = \beta$. Из $\triangle A_1B_1D$, $\angle B_1A_1D = 90°$, $A_1D = B_1D\cos\beta = a\cos\beta$. BD — проекция диагонали B_1D на плоскость основания $ABCD$. $\angle B_1DB$ — угол между диагональю B_1D и плоскостью основания. $\angle B_1DB = \alpha$. Из $\triangle BB_1D$, $\angle B_1BD = 90°$, $BD = a\cos\alpha$. Пусть $AA_1 = x$, $AB = y$, $AD = z$, тогда



$$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2\cos^2\beta, \\ y^2 + z^2 = a^2\cos^2\alpha, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$$

$y^2 = a^2 - a^2\cos^2\beta = a^2(1 - \cos^2\beta) = a^2\sin^2\beta$, $y = a\sin\beta$.

$x^2 = a^2 - a^2\cos^2\alpha = a^2(1 - \cos^2\alpha) = a^2\sin^2\alpha$, $x = a\sin\alpha$.

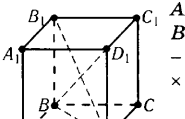
$z^2 = a^2 - a^2\sin\beta - a^2\sin^2\alpha = a^2(1 - \sin^2\beta - \sin^2\alpha) = a^2(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)$,

$z = a\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = x \cdot y \cdot z =$

$= a\sin\alpha \cdot a\sin\beta \cdot a\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} = a^3\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

11. Задача решена в учебнике Погорелова.

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. $AB = 2\sqrt{2}$ см, $AD = 5$ см, $\angle BAD = 45°$. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, $BC = AD$. По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$. $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \times AD \cdot \cos\angle BAD$.



Но $\angle ABC$ — тупой, $AC^2 > BD^2$, $AC > BD$. BD — меньшая диагональ основания.

$$BD = \sqrt{8 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{2}\cos 45°} = \sqrt{33 - 20\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{13} \text{ (см)}.$$

AC и BD — проекции диагоналей параллелепипеда A_1C и B_1D соответственно. Так как $BB_1 = AA_1$, то меньшей наклонной соответствует меньшая проекция. B_1D — меньшая диагональ параллелепипеда. $B_1D = 7$ см. З $\triangle B_1BD$ $\angle B_1BD = 90°$, найдем B_1B:

$B_1B = \sqrt{B_1D^2 - BD^2}$, $B_1B = \sqrt{49 - 13} = 6$ (см). Объем параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot H$,

где $H = B_1B$, $S_{осн} = AB \cdot AD \sin\angle BAD$.

$$S_{осн} = 2\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \sin 45° = 2\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \text{ (см}^2\text{)}. \; V = 10 \cdot 6 = 60 \text{ (см}^3\text{)}.$$

13. Пусть диагонали ромба x и y, тогда $S_{ромба} = \frac{1}{2}xy = 1$ м², $xy = 2$. Обозначим через h высоту параллелепипеда. Тогда площади диагональных сечений $xh = 3$, $yh = 6$, $y = \frac{2}{x}$,

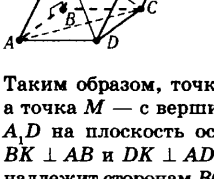
$\frac{2}{x}h = 6$, $h = 3x$, $3x^2 = 3$, $x^2 = 1$, $x = 1$. Тогда $h = 3 \cdot 1 = 3$ (м).

Объем параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot h$, $V = 1 \cdot 3 = 3$ (м^3).

14. Пусть диагонали ромба x и y, тогда $S_{ромба} = \frac{1}{2}xy = Q$, $xy = 2Q$. Высота ромба h. Площади диагональных сечений $xh = M$, $yh = N$. $y = \frac{2Q}{x}$, $\frac{2Q}{x} \cdot h = N$, $h = \frac{Nx}{2Q}$, $x\frac{Nx}{2Q} = M$, $x^2 = \frac{2QM}{N}$, $x = \sqrt{\frac{2QM}{N}}$, $h = \frac{N}{2Q}\sqrt{\frac{2QM}{N}} = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{NMQ}{2}}$.

Объем параллелепипеда $V = S_{ромба} \cdot h$, $V = Q \cdot \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{NQM}{2}} = \sqrt{\frac{NQM}{2}}$.

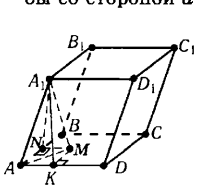
15. Имеем $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонный параллелепипед, в основании которого лежит квадрат $ABCD$ со стороною 1 м. AA_1 — боковое ребро, $AA_1 = 2$ м, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60°$. Из точки A_1 опустим перпендикуляры A_1N, A_1M на стороны AB и AD и перпендикуляр A_1K на плоскость основания. Рассмотрим $\triangle AA_1N$ и $\triangle AA_1M$. Они равны по общей гипотенузе и прилегающим к ней углам. $AN = AM = AA_1\cos60° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ (м).



Таким образом, точка N совпадает с вершиной B параллелепипеда, а точка M — с вершиной D. BK и DK — проекции наклонных A_1B и A_1D на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $BK \perp AB$ и $DK \perp AD$. Но $AB \perp BC$ и $AD \perp DC$, то есть точка K принадлежит сторонам BC и DC одновременно, следовательно, точка K совпадает с точкой C. Из $\triangle AA_1D$ $A_1D = AA_1\sin60°$, $A_1D = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см).

Из $\triangle A_1DC$: $\angle A_1CD = 90°$, $A_1C = \sqrt{A_1D^2 - DC^2}$, $A_1C = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$ (м). Объем наклонного параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн} = 1$ м^2, $H = A_1C = \sqrt{2}$ м. $V = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$ (м^3).

16*. Имеем $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, у которого все грани — ромбы со стороной a и острым углом 60°. A_1N и A_1K — высоты боковых граней AA_1B_1B и AA_1D_1D. Так как грани равны, то $A_1N = A_1K$. $\triangle A_1AN = \triangle A_1AK$ по катету и общей гипотенузе A_1A. $AN = AK = AA_1\cos60° = \frac{a}{2}$.



Из точек N и K в плоскости $ABCD$ проведем перпендикуляры, которые пересекутся в некоторой точке M. A_1M — высота параллелепипеда. $\triangle A_1NM = \triangle A_1KM$ по общей гипотенузе и равному катету.

$NM = KM$, точка M принадлежит биссектрисе $\angle BAD$, то есть диагонали AC ромба $ABCD$.

Из $\triangle AMK$: $\angle AKM = 90°$, $\angle MAK = 30°$;

$AM = AK : \cos 30°$, $AM = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Из $\triangle A_1AM$: $\angle A_1MA = 90°$, найдем A_1M: $A_1M = \sqrt{AA_1^2 - AM^2}$, $A_1M = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Объем параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot H$,

где $S_{осн} = a^2 \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. $H = A_1M$, $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

17*. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. Каждое ребро параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1 см. $\angle A_1AD = \angle A_1AB = \angle BAD = 2\alpha$.

A_1K и A_1N— высоты боковых граней AA_1D_1D и AA_1B_1B. Так как грани равны, то $A_1K = A_1N$. $\triangle A_1AK = \triangle A_1AN$ по катету и общей гипотенузе. $AK = AN = A_1A \cdot \cos 2\alpha = \cos 2\alpha$. Через точки N и K в плоскости основания построим перпендикуляры. Они пересекутся в некоторой точке M. A_1M — высота параллелепипеда. $\triangle A_1MN = \triangle A_1KM$ по гипотенузе и общему катету. Таким образом, $NM = KM$, точка M принадлежит биссектрисе $\angle BAD$, то есть диагонали AC ромба $ABCD$.

Из $\triangle AMK$: $\angle AKM = 90°$, $\angle MAK = \alpha$, $AM = \frac{AK}{\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$.

Объем параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн} = AB \cdot AD \sin 2\alpha = \sin 2\alpha$, $H = A_1M$. A_1M найдем из $\triangle A_1AM$, $\angle A_1MA = 90°$,

$$A_1M = \sqrt{AA_1^2 - AM^2},\ A_1M = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha - \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2\alpha(1 - \cos^2\alpha) + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha - \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{3\cos^2\alpha\sin^2\alpha - \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}} =$$

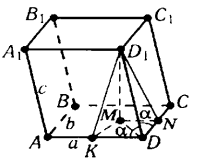
$$= \sqrt{\frac{\sin^2\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha(2\cos^2\alpha + \cos 2\alpha)}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\alpha(\cos^2\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha)}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\sin\alpha(\cos\alpha \cdot \sin 2\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha)}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\alpha\sin 3\alpha}{\cos^2\alpha}}.\ V = 2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \sqrt{\frac{\sin\alpha\sin 3\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2\sqrt{\sin^3\alpha\sin 3\alpha}.$$

18*. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник $ABCD$. $AD = a$, $DC = b$, $D_1D = c$, $\angle D_1DA = \angle D_1DC = \alpha$. Из точки D_1 опустим высоты граней AA_1D_1D и DD_1C_1C D_1K и D_1N.

$\triangle KD_1D = \triangle DD_1N$ по общей гипотенузе и острому углу. $KD = DN = D_1D \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos\alpha$. Через точки K и N в плоскости основания построим перпендикуляры к сторонам AD и DC. Они пересекутся в точке M. D_1M — высота параллелепипеда. $\triangle D_1KM = \triangle D_1NM$ по гипотенузе и общему катету. $MN = KN$, следовательно, точка M лежит на биссектрисе $\angle ADC$, $\angle NDM = \angle KDM = 45°$. Из $\triangle MDN$ найдем MD:



$MD = \dfrac{DN}{\cos 45°}$, $MD = c\cos\alpha \cdot \sqrt{2}$. Из $\triangle D_1DM$, $\angle D_1MD = 90°$, найдем D_1M:

$D_1M = \sqrt{D_1D^2 - MD^2}$, $D_1M = \sqrt{c^2 - 2c^2\cos^2\alpha} = c\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha} = c\sqrt{-\cos^2 2\alpha}$.

Объем параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн} = ab$, $H = D_1M$.

$V = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

19. $V_{призмы} = S_{осн} \cdot h$. Для правильной призмы h — боковое ребро, $h = b$.

1) Площадь правильного треугольника $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot b$.

2) Площадь квадрата $S = a^2$. $V = a^2b$.

3) Площадь правильного шестиугольника $S = \dfrac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$ (задача 14, § 5).

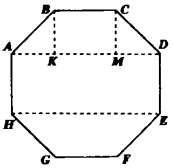
$V = \dfrac{a^2 3\sqrt{3}}{2} \cdot b$.

20. Объем призмы $V = S_{осн} \cdot h$, $h = 0{,}7$ см. В основании призмы лежит правильный восьмиугольник со стороной 3,2 см. Сумма углов восьмиугольника $180°(8 - 2) = 1\,080°$, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = \angle G = \angle H = \dfrac{1}{8} \cdot 1\,080° = 135°$.

Разобьем восьмиугольник на две равные трапеции $ABCD$ и $EFGH$ и прямоугольник $ADEH$. CM и BK — высоты трапеции $ABCD$. $\angle BAK = \angle CDM = 135° - 90° = 45°$. В $\triangle CMD$, $\angle CMD = 90°$, $CM = MD = CD\cos 45° = 3{,}2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ CM.

$AK = MD = 3{,}2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}CM$. $AD = 2AK + KM$, где $KM = BC = 3{,}2$ см.

$AD = 3{,}2 \cdot \sqrt{2} + 3{,}2 = 3{,}2\left(\sqrt{2} + 1\right)$ (см). $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(BC + AD) \cdot CM$,



$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}\left(3{,}2 + 3{,}2\left(\sqrt{2} + 1\right)\right) \cdot 3{,}2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \left(3{,}2\left(\sqrt{2} + 2\right) \cdot 3{,}2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot (3{,}2)^2 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) \approx$

$\approx 12{,}36$ (см^2). $S_{EFGH} = S_{ABCD} \approx 12{,}36$ см^2.

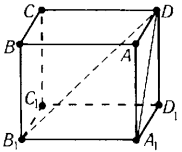
$S_{ADEH} = AD \cdot DE = 3{,}2\left(\sqrt{2}+1\right) \cdot 3{,}2 \approx 24{,}72$ (см^2).

$S_{ABCDEFGH} = 2 \cdot S_{ABCD} + S_{ADEH} \approx 2 \cdot 12{,}36 + 24{,}72 = 49{,}44$ (см^2).

$V = 49.44 \cdot 0{,}7 = 34{,}6$ (см^3).

$\rho = \dfrac{m}{V}$, $m = 17{,}3$ г, $\rho = \dfrac{17{,}3}{34{,}6} \approx 0{,}5$ г/см^3.

21. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма. $A_1D = 2{,}5$ см, $B_1D = 3{,}5$ см. Пусть сторона основания равна a, а боковое ребро — b. Тогда



$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 6{,}25, \\ 2a^2 + b^2 = 12{,}25; \end{cases}$$

$a^2 = 6$, $a = \sqrt{6}$, $6 + b^2 = 6{,}25$; $b^2 = 0{,}25$; $b = 0{,}5$.
$V = S_{осн} \cdot h$, $h = b = 0{,}5$ см; $S_{осн} = a^2 = 6$ см^2.
$V = 6 \cdot 0{,}5 = 3$ (см^3).

22. Для правильного треугольника со стороной a $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, боковая поверхность правильной призмы $S_б = P \cdot h$, где h — боковое ребро, $P = 3a$, $S_б = 2S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$:

$3a \cdot h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$, $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Объем призмы $V = S_{осн} \cdot h$, $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3}{8}$.

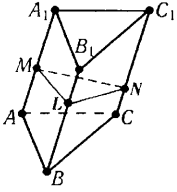
23. Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы $S_п = h \cdot d$, где d — диаметр описанной вокруг правильного шестиугольника окружности, $d = 2a$, где a — сторона шестиугольника, h — высота призмы. $S_п = 4$ м^2. Расстояние l между двумя противоположными боковыми гранями $l = a\sqrt{3}$ (задача 14, § 5).

$a = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$, $l = 2$ м, $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ см, $S_{осн} = \dfrac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$ (задача 14, § 5).

$h = \dfrac{S_п}{2a}$, $h = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ (см). $V = S_{осн} \cdot h$, $V = \dfrac{4 \cdot 3}{9} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 6$ (см^3).

24. Задача решена в учебнике Погорелова.

25.



$ABCA_1B_1C_1$ — наклонная треугольная призма, боковые ребра которой равны 15 м. MN — расстояние между ребрами AA_1 и CC_1. $MN = 26$ м, ML — расстояние между ребрами AA_1 и BB_1, $ML = 25$ м. $ML \perp AA_1$, $MN \perp AA_1$, следовательно, плоскость MLN перпендикулярна ребру AA_1, а значит, и ребрам BB_1 и CC_1, так как все они параллельны.

$NL \perp BB_1$, $NL \perp CC_1$. NL — расстояние между ребрами BB_1 и CC_1, $NL = 17$ м.

Объем призмы $V = S_{MNL} \cdot l$, где l — боковое ребро призмы (см. задачу 24). Площадь $\triangle MNL$ найдем по формуле Герона:

$S_{MNL} = \sqrt{p(p-MN)(p-ML)(p-NL)}$, где $p = \dfrac{MN+ML+NL}{2}$,

$p = \dfrac{25+26+17}{2} = 34$ (м). $S_{MNL} = \sqrt{34(34-25)(34-26)(34-17)} =$

$= \sqrt{34 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 17} = 204$ (м^2). $V = 204 \cdot 15 = 3060$ (м^3)

26. За одну секунду через трубу проходит объем воды $V = S_{осн} \cdot H$, где $H = 2$ м.

$S_{осн} = \dfrac{1}{2} a \cdot h$, где a — основание треугольника, $a = 1{,}4$ м, h — его высота, $h = 1{,}2$ м.

$V = \dfrac{1}{2} \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 2 = 1{,}68$ (м^3/с). 1 час = 3600 сек. Таким образом, пропускная способность трубы $V_{час} = 1{,}68 \cdot 3600 = 6048$ (м^3/час).

27. Площадь сечения $S = \dfrac{1}{2}(a+b) \cdot h$, где a и b — основания трапеции, $a =$ $= 14$ м, $b = 8$ м, h — ее высота, $h = 3{,}2$ м. $S = \dfrac{1}{2}(14+8) \cdot 3{,}2 = 35{,}2$ (м^2).

Объем земли, приходящейся на 1 км насыпи, $V = S \cdot H$, где $H = 1$ км $=$ $= 1000$ м.

$V = 35{,}2 \cdot 1000 = 35200$ (м^3).

28. Объем правильной треугольной призмы $V = S_{осн} \cdot h$, где h — боковое ребро. Площадь основания найдем по формуле Герона: $S_{осн} =$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 7$ см, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$,

$p = \dfrac{5+7+4}{2} = 8$ (см). $S_{осн} = \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{96} =$

$= 4\sqrt{6}$ (см^2). Но $S_{осн} = \dfrac{1}{2} a \cdot h_a = \dfrac{1}{2} b \cdot h_b = \dfrac{1}{2} c \cdot h_c$, где h_a, h_b и h_c — высоты, опущенные на стороны a, b и c соответственно. Из этого соотношения следует, что большее основание треугольника опущено на меньшую сторону, то есть h_a. $h_a = \dfrac{2S_{осн}}{a}$, $h_a = \dfrac{2 \cdot 4\sqrt{6}}{4} = 2\sqrt{6}$ (см). $h = h_a =$ $= 2\sqrt{6}$ см. $V = 4\sqrt{6} \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = 48$ (см^3).

29. Площадь основания прямой треугольной призмы $S_{осн} = 4$ см^2. Площади боковых граней $S_a = ah = 9$ см^2, $S_b = bh = 10$ см^2, $S_c = ch = 17$ см^2, где h — высота призмы;

a, b и c — стороны основания.

$a = \dfrac{9}{h}$, $b = \dfrac{10}{h}$, $c = \dfrac{17}{h}$. По формуле Герона $S_{осн} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

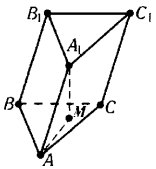
$$p = \frac{a+b+c}{2},\ p = \frac{\frac{9}{h}+\frac{10}{h}+\frac{17}{h}}{2} = \frac{36}{2h} = \frac{18}{h}.$$

$$S_{осн} = \sqrt{\frac{18}{h}\left(\frac{18}{h}-\frac{9}{h}\right)\left(\frac{18}{h}-\frac{10}{h}\right)\left(\frac{18}{h}-\frac{17}{h}\right)} = \sqrt{\frac{18}{h}\cdot\frac{9}{h}\cdot\frac{8}{h}\cdot\frac{1}{h}} = \frac{36}{h^2},\ h^2 = \frac{36}{4} =$$

$= 9$, $h = 3$ см.

Объем прямой призмы $V = S_{осн} \cdot h$, $V = 4 \cdot 3 = 12$ (см^3).

30. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — призма, в основании которой лежит $\triangle ABC$, $AB = AC = 3$ см, $BC = 2$ см, $AA_1 = 4$ см. Из точки A_1 опустим перпендикуляр A_1M на плоскость основания. A_1M — высота призмы. AM — проекция ребра A_1A на плоскость основания. $\angle A_1AM = 45°$. $A_1M = AA_1\sin 45° = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ (см). Объем призмы $V = S_{осн} \cdot H$, где $H = A_1M$. $S_{осн}$ найдем по формуле Герона:



$$S_{осн} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)},\ \text{где}$$

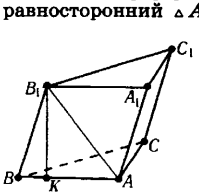
$$p = \frac{AB+AC+BC}{2},\ p = \frac{3+3+2}{2} = 4\ (\text{см}).$$

$$S_{осн} = \sqrt{4(4-3)(4-3)(4-2)} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\sqrt{2}\ (\text{см}^2).$$

$V = 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 8$ (см^3).

Ребро равновеликого куба $a = \sqrt[3]{V}$, $a = \sqrt[3]{8} = 2$ (см).

31. Имеем $ABCA_1B_1C_1$ — наклонную призму, в основании которой лежит равносторонний $\triangle ABC$ со стороной a. Боковая грань AA_1B_1B — ромб, то есть боковые ребра призмы тоже равны a. Плоскость грани AA_1B_1B перпендикулярна к плоскости основания. B_1K — высота ромба AA_1B_1B, B_1K — высота призмы. AB_1 — диагональ ромба AA_1B_1B, $AB_1 = c$.



$$S_{AB_1B} = \sqrt{p(p-AB_1)(p-B_1B)(p-AB)}.$$

$$p = \frac{c+2a}{2},$$

$$S_{AB_1B} = \sqrt{\frac{c+2a}{2}\left(\frac{c+2a}{2}-a\right)^2\left(\frac{c+2a}{2}-c\right)} = \sqrt{\frac{c+2a}{2}\cdot\frac{c^2}{4}\cdot\frac{2a-c}{2}} =$$

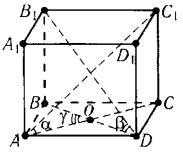
$$= \sqrt{\frac{c^2(4a^2-c^2)}{16}} = \frac{1}{4}c\sqrt{4a^2-c^2}.\ \text{Но}\ S_{AB_1B} = \frac{1}{2}AB\cdot B_1K,\ B_1K = \frac{2S_{AB_1B}}{AB},$$

$$B_1K = \frac{c}{2a}\sqrt{4a^2-c^2}.$$

Объем призмы $V = S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $H = B_1K$.

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{c}{2a}\sqrt{4a^2 - c^2} = \frac{1}{8}ac\sqrt{12a^2 - 3c^2}.$$

32. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма. $BB_1 = h$, $\angle AOB = \gamma$. BD и AC — проекции диагоналей призмы B_1D и AC_1 на плоскость основания. $\angle B_1DB$ и $\angle C_1AC$ — углы между этими диагоналями и плоскостью основания. $\angle B_1DB = \alpha$, $\angle C_1AC = \beta$.



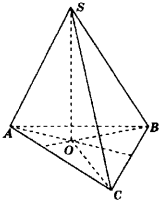
Из $\triangle B_1BD$, $\angle B_1BD = 90°$, $BD = h\,\mathrm{ctg}\alpha$,
из $\triangle C_1AC$, $\angle C_1CA = 90°$, $AC = h\,\mathrm{ctg}\beta$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC\,BD\,\sin\gamma,\ S_{ABCD} = \frac{1}{2}h^2\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta\sin\gamma.$$

Объем призмы $V = S_{осн} \cdot h$, где $S_{осн} = S_{ABCD}$.

$$V = \frac{1}{2}h^3\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta\sin\gamma.$$

33. 1) $SABC$ — правильная треугольная пирамида со стороной основания a и боковым ребром b. SO — высота. $\triangle SAO = \triangle SBO = \triangle SCO$ по гипотенузе и общему катету. $AO = BO = CO$, точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности.



$AO = BO = CO = R$, где $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

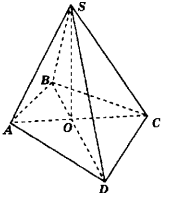
Из $\triangle SAO$, $\angle SOA = 90°$, по теореме Пифагора найдем SO:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2},\ SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2 \cdot 3}{9}} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

Объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2 - a^2} = \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

2) $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. $AB = a$, $SA = b$. SO — высота. Точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности,



$AO = BO = CO = DO = R$, для квадрата $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Из $\triangle SAO$, $\angle SOA = 90°$, по теореме Пифагора найдем SO:

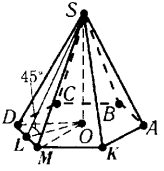
$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2},\ SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

Объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{осн} = a^2$.

$$V = \frac{1}{3}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}a^2\sqrt{2b^2 - a^2} = \frac{1}{6}a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}.$$

3) Для случая правильной шестиугольной пирамиды решение аналогично. Но $R = a$, $S_{осн} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$ (задача 14, § 5). $H = \sqrt{b^2 - R^2}$, $H = \sqrt{b^2 - a^2}$. $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}\sqrt{b^2 - a^2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{3b^2 - 3a^2}$.

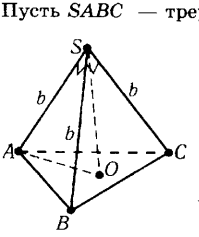
34. Пусть $SABCDMK$ — правильная шестиугольная пирамида со стороной основания a. Боковые грани — равные равнобедренные треугольники. В $\triangle MSD$ проведем медиану SL, SL — апофема. SO — высота пирамиды. Точка O — центр вписаного в шестиугольник $ABCDMK$ окружности. OL — проекция наклонной SL на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $OL \perp MD$. $\angle SLO$ — двугранный угол при основании.



$\angle SLO = 45°$. $SO = OL$. OL — радиус вписанной в шестиугольник $ABCDMK$ окружности. $OL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $SO = OL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{осн} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$ (задача 14, § 5). $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}a^3$.

35. Пусть $SABC$ — треугольная пирамида. $\angle ASC = \angle CSB = \angle ASB = 90°$, $SA = SC = SB = b$. $\triangle ASC = \triangle CSB = \triangle ASB$ по двум катетам.

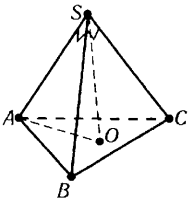


$AC = AB = BC = \sqrt{AS^2 + SC^2} = b\sqrt{2}$.

Пирамида $SABC$ — правильная, SO — высота. Точка O — центр описанной вокруг треугольника ABC окружности. $AO = BO = CO = R$, где $R = \frac{b\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{b\sqrt{6}}{3}$. Из $\triangle SAO$ $\angle SOA = 90°$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$, $SO = \sqrt{b^2 - \frac{6b^2}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}b$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{осн} = \frac{2b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2\sqrt{3}}{2}$. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}b \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6}b^3$.

36. Пусть $SABC$ — правильная пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$ со стороной a. $\angle ASC = \angle CSB = \angle ASB = 90°$. Боковые грани — равнобедренные треугольники.

$SA = AC \cdot \sin\angle ACS = AC \cdot \sin 45°$.



$SA = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. SO — высота пирамиды. Точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности. $AO = BO = CO = R$, где $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Из $\triangle SAO$, $\angle SOA = 90°$ по теореме Пифагора:

$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$, $SO = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

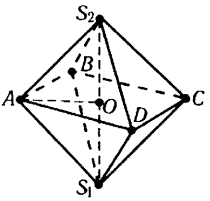
37. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. $SABC$ — тетраэдр с ребром a. SO — высота. Точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности. $AO = BO = CO = R$, где $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Из $\triangle SAO$, $\angle SOA = 90°$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$, $SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Объем тетраэдра $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

38. $SABCDS_1$ — октаэдр с ребром a. $V_{SABCDS_1} = V_{SABCD} + V_{S_1ABCD}$, где $SABCD$ и S_1ABCD — равновеликие правильные пирамиды с ребром a, то есть $V_{SABCDS_1} = 2V_{SABCD}$. SO — высота пирамиды $SABCD$. Точка O — центр описанной вокруг квадрата $ABCD$ окружности. $AO = BO = CO = DO = R$, где $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



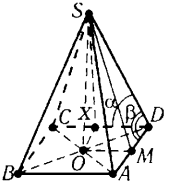
Из $\triangle SAO$, $\angle SOA = 90°$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$, $SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Объем пирамиды $SABCD$:

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{осн} = S_{ABCD} = a^2$.

$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Объем октаэдра $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

39. $SABCD$ — пирамида, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$. $AB = 9$ м, $BC = 12$ м. SO — высота. AO, BO, CO и DO — проекции боковых ребер SA, SB, SC и SD на плоскость основания. Так

как $SA = SB = SC = SD = 12{,}5$ м, то $AO = BO = CO = DO$, точка O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$.



Из $\triangle ABD$ $\angle BAD = 90°$ по теореме Пифагора $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$,

$BD = \sqrt{81 + 144} = 15$ (м).

$BO = DO = 7{,}5$ м. Из $\triangle SBO$, $\angle SOB = 90°$, по теореме Пифагора найдем SO: $SO = \sqrt{SB^2 - BO^2}$,

$SO = \sqrt{156{,}25 - 56{,}25} = 10$ (м).

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{осн} = AB \cdot BC$.

$V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 12 \cdot 10 = 360$ (м^3).

40. Воспользуемся рисунком к задаче 36. $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$, $AB = AC = 6$ см, $BC = 8$ см. $SA = SB = SC = 9$ см. По формуле Герона найдем S_{ABC}:

$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}$; где $p = \frac{AB + AC + BC}{2}$,

$p = \frac{6 + 6 + 8}{2} = 10$ (см), $S_{ABC} = \sqrt{10(10 - 6)(10 - 6)(10 - 8)} = \sqrt{10 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2} =$

$= 8\sqrt{5}$ (см^2). SO — высота пирамиды. OA, OB и OC — проекции боковых ребер SA, SB, SC на плоскость основания. Так как $SA = SB = SC$, то $OA = OB = OC = R$, точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности. Радиус окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$:

$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot S_{ABC}}$, $R = \frac{6 \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot 8\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$ (см). Из $\triangle SAO$, $\angle SOA = 90°$,

$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$, $SO = \sqrt{81 - \frac{81}{5}} = \sqrt{\frac{324}{5}} = \frac{18}{\sqrt{5}}$ (см). Объем пирамиды

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{осн} = S_{ABC}$, $V = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{5} \cdot \frac{18}{\sqrt{5}} = 48$ (см^3).

41. Воспользуемся рисунком к задаче 36. $SABC$ — треугольная пирамида. Пусть $BC = 4$ см, тогда $AC = AB = SA = SB = SC = 3$ см. Найдем площадь $\triangle ABC$ по формуле Герона: $S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}$, где

$p = \frac{AB + AC + BC}{2}$, $p = \frac{3 + 3 + 4}{2} = 5$ (см), $S_{ABC} = \sqrt{5(5 - 3)(5 - 3)(5 - 4)} =$

$= 2\sqrt{5}$ (см^2).

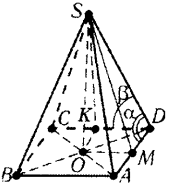
SO — высота пирамиды. AO, BO и CO — проекции боковых ребер SA, SB и SC на плоскость ABC. Так как $SA = SB = SC$, то $AO = BO = CO = R$, где R — радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности, точка O — центр. $R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot S_{ABC}}$,

$R = \frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{9}{2\sqrt{5}}$ (см). Из $\triangle SAO$, $\angle SOA = 90°$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$,

$SO = \sqrt{9 - \frac{81}{20}} = \sqrt{\frac{99}{20}} = \frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$ (см). Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$,

где $H = SO$, $S_{осн} = S_{ABC}$. $V = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{5}} = \sqrt{11}$ (см³).

42. Пусть $SABCD$ — пирамида, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$. $SA = SB = SC = SD = l$, пусть $\angle SDA = \alpha$, $\angle SDC = \beta$. Но $\triangle SAD$ и $\triangle SDC$ равнобедренные, $SA = SD$ и $SD = SC$, поэтому $\angle SAD = \angle SDA = \alpha$, $\angle SCD = \angle SDC = \beta$.



Рассмотрим $\triangle SAD$. Проведем медиану SM, SM — высота. Из $\triangle SOM$ $\angle SDM = 90°$, $MD = SD \cdot \cos\alpha$, $MD = l\cos\alpha$, $AD = 2 \cdot MD = 2l\cos\alpha$. SK — медиана и высота $\triangle SDC$. Из $\triangle SCK$ $\angle SKC = 90°$, $KC = SC\cos\beta$, $KC = l\cos\beta$, $DC = 2KC = 2l\cos\beta$. SO — высота пирамиды. OA, OB, OC и OD — проекции боковых ребер SA, SB, SC и SD на плоскость основания.

Так как $SA = SB = SC = SD$, то $OA = OB = OC = OD$, точка O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Из $\triangle ACD$ $\angle ADC = 90°$, найдем AC:

$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$, $AC = \sqrt{4l^2\cos^2\alpha + 4l^2\cos^2\beta} = 2l\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}$.

$AO = OC = \frac{1}{2}AC = l\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}$. Из $\triangle SAO$, $\angle SOA = 90°$,

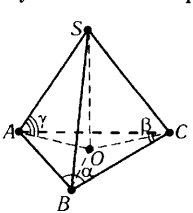
$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$, $SO = \sqrt{l^2 - l^2\cos^2\alpha - l^2\cos^2\beta} = l\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, где $H = SO$,

$S_{осн} = AD \cdot DC$. $V = \frac{1}{3} \cdot 2l\cos\alpha \cdot 2l\cos\beta \cdot l\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta} =$

$= \frac{4}{3} l^3 \cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}$.

43. Пусть $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$. Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, тогда $\angle ACB = 180° - (\alpha + \beta)$. SO — высота пирамиды. OA, OB и OC — проекции боковых ребер пирамиды на плоскость основания.



$\angle SAO$, $\angle SBO$, $\angle SCO$ — углы между боковыми ребрами и плоскостью основания.

$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \gamma$. $\triangle SAO = \triangle SBO = \triangle SCO$ по общему катету SO и острому углу. Таким образом, $AO = BO = CO = R$, где R — радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности. Из $\triangle SCO$ $\angle SOC = 90°$, $SO = OC \cdot \mathrm{tg}\gamma$, $SO = R\mathrm{tg}\gamma$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin(180° - (\alpha + \beta)) =$

$= \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$, откуда

$AB = 2R \sin(\alpha + \beta)$, $AC = 2R \sin\beta$, $BC = 2R \sin\alpha$.

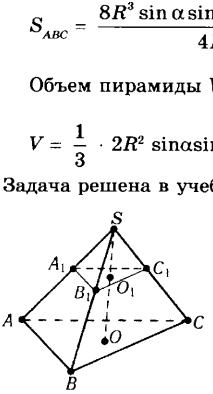
$$S_{ABC} = \frac{8R^3 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha + \beta)}{4R} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha + \beta).$$

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{осн} = S_{ABC}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha + \beta)\, R \operatorname{tg}\gamma = \frac{2}{3} R^3 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha + \beta) \operatorname{tg}\gamma.$$

44. Задача решена в учебнике Погорелова.

45.



$SABC$ — пирамида. $S_{ABC} = Q_1$. $A_1B_1C_1$ — сечение, параллельное основанию.

$S_{A_1B_1C_1} = Q_2$. SO — высота пирамиды $SABC$. Пирамида $SA_1B_1C_1$ подобна пирамиде $SABC$. SO_1 — ее высота. $OO_1 = h$.

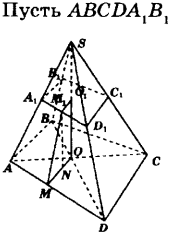
Обозначим $SO_1 = x$, тогда $SO = x + h$.

$$\frac{x^2}{(x+h)^2} = \frac{Q_2}{Q_1}, \quad \frac{x}{x+h} = \frac{\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}},$$

$$x\sqrt{Q_1} = \sqrt{Q_2}x + \sqrt{Q_2}h,$$

$$x = \frac{\sqrt{Q_2}h}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}, \quad SO = \frac{\sqrt{Q_2}h}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} + h = \frac{\sqrt{Q_1}h}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}.$$

46. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная усеченная четырехугольная пирамида. $AB = a$, $A_1B_1 = b$. OO_1 — высота. M и M_1 — середины ребер AD и A_1D_1. MM_1 — апофема. M_1O_1OM — трапеция. OO_1 — высота. Опустим высоту M_1N, $M_1N = OO_1$.



M_1O_1ON — прямоугольник. $NO = M_1O_1$. O_1M_1 и OM — радиусы вписанных в квадраты $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ окружностей.

$O_1M_1 = \frac{b}{2}$, $OM = \frac{a}{2}$. MN — проекция наклонной MM_1 на плоскость большего основания. $\angle M_1MN$ — двугранный угол при ребре AD, $\angle M_1MN = \alpha$.

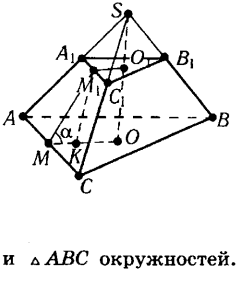
$MN = OM - NO$, $MN = \frac{1}{2}(a - b)$. Из $\triangle MM_1N$:

$\angle M_1NM = 90°$, $M_1N = MN\operatorname{tg}\alpha$, $M_1N = \frac{1}{2}(a - b) \operatorname{tg}\alpha$.

Объем срезанной пирамиды $V = \frac{1}{3} h \left(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2\right)$ (задача 44), где $h = M_1N$, $Q_1 = S_{ABCD} = a^2$, $Q_2 = S_{A_1B_1C_1D_1} = b^2$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(a - b)\operatorname{tg}\alpha \cdot (a^2 + ab + b^2) = \frac{1}{6}(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha.$$

47. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная треугольная пирамида. $AC = a$, $A_1C_1 = b$. OO_1 — высота. M и M_1 — середины ребер AC и A_1C_1, MM_1 — апофема. MM_1O_1O — трапеция, OO_1 — ее высота. Опустим высоту M_1K, $M_1K = OO_1$, $M_1K \parallel OO_1$.



KM_1O_1O — прямоугольник, $KO = M_1O_1$. MK — проекция наклонной M_1M на плоскость большего основания, по теореме о трех перпендикулярах $MK \perp AC$, $O_1M_1 \parallel MK$, $A_1C_1 \parallel AC$, $O_1M_1 \perp A_1C_1$, $\angle M_1MK = \alpha$. O_1M_1 и OM — радиусы вписанных в $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$ окружностей. $O_1M_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$, $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $MK = MO - KO$, $MK = \frac{\sqrt{3}}{6}(a-b)$.

Из $\triangle M_1MK$, $\angle M_1KM = 90°$, $M_1K = MK \operatorname{tg}\alpha$, $M_1K = \frac{\sqrt{3}}{6}(a-b)\operatorname{tg}\alpha$.

Объем срезанной пирамиды $V = \frac{1}{3}h\left(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2\right)$ (задача 44), где $h = M_1K$, $Q_1 = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $Q_2 = S_{A_1B_1C_1} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$.

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}(a-b)\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab}{4}\sqrt{3} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{24}(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{24}\left(a^3 - b^3\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

48. Задача решена в учебнике Погорелова.

49. Пусть расстояние от вершины пирамиды равно x. Объемы подобных тел соотносятся как кубы их соответствующих линейных размеров, откуда $\frac{x^3}{h^3} = \frac{1}{2}$; $x^3 = \frac{h^3}{2}$, $x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

§ 8. Объемы и поверхности тел вращения

1. Плотность меди $\rho = 8{,}94$ г/см^3, масса проволоки $m = 100{,}7$ г, длина проволоки $l = 25$ м $= 2500$ см, $\rho = \frac{m}{V}$, где V — объем проволоки. $V = \frac{m}{\rho}$, $V = \frac{100{,}7}{8{,}94} \approx 11{,}26$ (см^3). Объем проволоки $V = \pi r^2 l$, где r — радиус проволоки, $r^2 = \frac{V}{\pi l}$, диаметр проволоки $d = 2\sqrt{\frac{V}{\pi l}}$, $d = 2\sqrt{\frac{11{,}26}{\pi\cdot 2500}} \approx$ $\approx 0{,}075$ см $= 0{,}75$ мм.

2. За один ход поршень проталкивает объем воды $V_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h$, где $d =$ $= 80$ мм $= 0{,}8$ дм, $h = 150$ мм $= 1{,}5$ дм. $V_1 = \frac{\pi \cdot (0{,}8)^2}{4} \cdot 1{,}5 \approx 0{,}75$ л. За одну минуту продуктивность поршня составляет $V_2 = 50 \cdot V_1 = 50 \cdot 0{,}75 =$ $= 37{,}5$ л, а за час $V = 60 \cdot V_2 = 60 \cdot 37{,}5 = 2250$ л. Продуктивность насоса $V_в = 2 \cdot V = 4500$ л.

3. Объем цилиндра $V_1 = \pi r^2 h$, где r — радиус основания, h — высота, если объем увеличится в n раз, то $V = nV_1 = n\pi r^2 h = \pi r^2 H$, где $H = nh$, следовательно, высоту нужно увеличить в n раз, или $V = nV_1 = n\pi r^2 h =$ $= \pi R^2 H$, $R^2 = nr^2$, $R = \sqrt{n} r$, таким образом, радиус нужно увеличить в $\sqrt{n}$ раз.

4. Пусть сторона основания правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, равна a, тогда радиус основания цилиндра — радиус описанной вокруг основания призмы окружности $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Пусть высота цилиндра H, тогда объем $V_1 = S_{осн} \cdot H = \pi R^2 H$, $V_1 =$ $= \frac{a^2}{3}\pi H$. Радиус основания цилиндра, вписанного в призму,— это радиус вписанной в основание призмы окружности $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Высота этого цилиндра тоже H, а объем $V_2 = \pi r^2 H$, $V_2 = \frac{a^2}{12}\pi H$. Отношение объемов $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^2}{3}\pi H \cdot \frac{12}{a^2 \pi H} = 4$.

5. Радиус основания цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, является радиусом окружности, вписанной в правильный шестиугольник, то есть $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, где a — сторона шестиугольника.

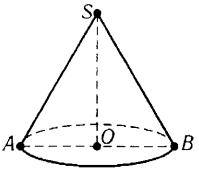
Объем цилиндра $V = \pi r^2 H$, где H — высота цилиндра и длина бокового ребра призмы, $H = a$. $V = \pi \cdot \frac{a^2 3}{4} a = \frac{3}{4}\pi a^3$.

6. Объем трубы $V = \pi H(R^2 - r^2)$, где r — внутренний радиус трубы, $r =$ $= \frac{1}{2}d$, $d = 13$ мм, $r = 6{,}5$ мм $= 0{,}65$ см, R — внешний радиус трубы, $R =$ $= r + 4 = 6{,}5 + 4 = 10{,}5$ (мм) $= 1{,}05$ (см), H — длина трубы, $H = 25$ м $=$ $= 2500$ см.

$V = \pi \cdot 2500(1{,}1025 - 0{,}4225) = 5340$ (см^3).

Масса трубы $m = \rho V$, где $\rho = 11{,}4$ г/см^3, $m = 11{,}4 \cdot 5340 = 60884$ (г) $\approx$ ≈ 61 (кг).

7. Радиус основания конуса $OB = 2$ м, образующая $SB = 2{,}5$ м. SO — высота конуса. Из $\triangle SBO$, $\angle SOB = 90°$, $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$,



$SO = \sqrt{6{,}25 - 4} \approx 1{,}5$ (м).

Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где $R = OB$, $H = SO$,

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 1{,}5 \approx 6{,}3$ (м^3).

8. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. SAB — осевое сечение конуса.

$\triangle SAB$ — равнобедренный, $SA = SB$, $\angle ASB = 90°$, $S_{SAB} = 9$ м^2, $S_{SAB} = \frac{1}{2}SA \cdot SB = \frac{1}{2}SA^2$, $SA = \sqrt{2S_{SAB}}$, $SA = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$ (м). SO — медиана и высота $\triangle SAB$, высота конуса. $\angle SAO = 45°$, $SO = AO = SA \cdot \cos 45°$, $SO = AO = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$ (м). Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где $R = AO$, $H = SO$, $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 3 = 9\pi$ (м^3).

9. Воспользуемся рисунком к задаче 7. Образующая $SB = l$, длина окружности основания равна c. $c = 2\pi R$, где R — радиус основания.

$R = \frac{c}{2\pi}$. SO — высота конуса. Из $\triangle SBO$: $\angle SOB = 90°$,

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$, $OB = R$, $SO = \sqrt{l^2 - \frac{c^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}$.

Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где $H = SO$.

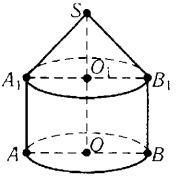
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{c^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2} = \frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}$.

10. Воспользуемся рисунком к задаче 7. Образующая конуса $SB = l$, SO — высота конуса. OB — проекция образующей SB на плоскость основания, радиус основания. $\angle SBO = \alpha$. Из $\triangle SBO$, $\angle SOB = 90°$, $SO = SB\sin\alpha$, $SO = l\sin\alpha$; $OB = SB\cos\alpha$, $OB = l\cos\alpha$. Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$,

где $R = OB$, $H = SO$. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot l^2 \cos^2\alpha l \sin\alpha = \frac{\pi l^3}{3}\sin\alpha\cos^2\alpha$.

11. Радиус основания цилиндра $R = 2{,}5$ м, его высота $OO_1 = 2{,}2$ м, высота стога $SO = 4$ м, высота конической части $SO_1 = SO - OO_1$, $SO_1 = 4 - 2{,}2 = 1{,}8$ (м).

Объем цилиндра $V_ц = \pi R^2 H_ц$, где $H_ц = OO_1$, $V_ц = \pi \cdot 6{,}25 \cdot 2{,}2 \approx 43$ (м^3).



Объем конуса $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H_к$, где $H_к = SO_1$.

$V_к = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 6,25\cdot 1,8 \approx 11,8$ (м³).

Объем стога $V = V_ц + V_к$, $V = 43 + 11,8 = 54,8$ м³.

Масса конуса $m = \rho V$, где $\rho = 0,03$ г/см³ = = 30 кг/м³.

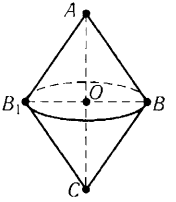
$m = 30\cdot 54,8 = 1644$ (кг) $\approx 1,6$ (т).

12. Объем жидкости в конце $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где $H = 0,18$ м, $R = \frac{1}{2}d$, $d = 0,24$ м, $R = 0,12$ м, $V_к = \frac{1}{3}\pi\cdot 0,0144\cdot 0,18 = 0,0027$ (м³). $V_к = V_ц$.

Объем цилиндра $V_ц = \pi r^2 h$, где $r = \frac{1}{2}d_ц$, $d_ц = 0,1$ м, $r = 0,05$ м. $h = \frac{V_ц}{\pi r^2}$,

$h = \frac{0,0027}{\pi\cdot 0,0025} \approx 0,34$ м.

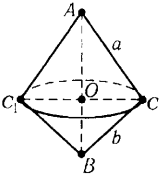
13. В результате вращения правильного треугольника ABC со стороной a вокруг стороны AC получим фигуру, которую можно разбить на два конуса с общим основанием радиусом OB, O — середина AC. AO — высота конуса, $AO = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$. Из



$\triangle OAB$, $\angle AOB = 90°$, $\angle OAB = 60°$, $OB = AB\sin 60°$, $OB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Объем конуса $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где $R = OB$, $H = AO$, $V_1 = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{a}{2} = \frac{\pi a^3}{8}$.

Объем тела вращения $V = 2V_1$, $V = \frac{\pi a^3}{4}$.

14. Прямоугольный $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90°$) вращается вокруг своей гипотенузы. $AC = a$, $BC = b$. Получим фигуру, которая состоит из двух конусов с общим основанием.



Объем фигуры $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где $R = OC$, $H = AB$, OC — высота $\triangle ABC$.

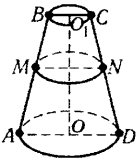
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$, $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BC = \frac{1}{2}AB\cdot OC,\ OC = \frac{AC\cdot BC}{AB},\ OC = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}\cdot\sqrt{a^2+b^2} = \frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}.$$

15*. Задача решена в учебнике Погорелова.

16. Сосновая колода имеет форму усеченного конуса с диаметрами оснований $AD = 42$ см, $BC = 25$ см и высотой $OO_1 = 15{,}5$ см.



Объем усеченного конуса $V_1 = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$ (см. предыдущую задачу), где $H = OO_1$, $R_1 = \frac{1}{2}AD$, $R_1 = 21$ см, $R_2 = \frac{1}{2}BC$, $R_2 = 12{,}5$ см.

$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 15{,}5 \cdot (441 + 262{,}5 + 156{,}25) \approx 4442\pi$ (м^2).

$ABCD$ — осевое сечение конуса, $ABCD$ — трапеция, MN — средняя линия. $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$, $MN = \frac{1}{2}(42 + 25) = 33{,}5$ (см).

Через прямую MN проведем плоскость, параллельную основанию, получим сечение с диаметром MN. Его площадь $S = \frac{\pi d^2}{4}$, $d = MN$,

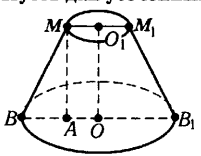
$S = \frac{\pi \cdot 1122{,}25}{4} \approx 280{,}56\pi$ (см^3).

Объем колоды $V_2 = S \cdot H$, $V_2 = 280{,}56\pi \cdot 15{,}5 = 4348{,}68$ (см^3).

Погрешность при вычислении $\Delta V = \frac{V_1 - V_2}{V_1} \cdot 100\% =$

$= \frac{4442\pi - 4348{,}68\pi}{4442\pi} \cdot 100\% \approx 2\%$.

17. Пусть дан усеченный конус, OO_1 — его высота. Радиусы его оснований $OB = R$, $O_1M = r$. MB — образующая. Из точки M проведем прямую $MA \parallel OO_1$,



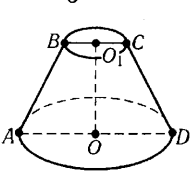
MA — перпендикуляр к плоскости основания.

$OA = O_1M = r$, $AB = R - r$. AB — проекция образующей MB на плоскость большего основания. $\angle MBA = 45°$, $MA = AB = R - r$.

Объем срезанного конуса $V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$, где $H = MA$, $R_1 = R$, $R_2 = r$.

$V = \frac{1}{3}\pi(R - r)(R^2 + rR + r^2) = \frac{\pi}{3}(R^3 - r^3)$. Если $R < r$ $V = \frac{\pi}{3}\left|R^3 - r^3\right|$

18.



Радиусы оснований усеченного конуса $OD = R$, $O_1C = r$, OO_1 — высота конуса.

Осевым сечением срезанного конуса является трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 2R$, $BC = 2r$. Площади оснований конуса $S_1 = \pi R^2$, $S_2 = \pi r^2$.

Площадь трапеции $ABCD$ $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot$

$H = \pi(R^2 - r^2)$, где $H = OO_1$. $H = \dfrac{2\pi(R^2 - r^2)}{(AD + BC)} = \dfrac{\pi(R - r)(R + r)}{R + r} = \pi(R - r)$.

Объем усеченного конуса: $V = \dfrac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$, $R_1 = R$, $R_2 = r$.

$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \pi(R - r)(R^2 + rR + r^2) = \dfrac{\pi^2}{3}(R^3 - r^3)$.

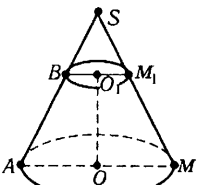
Для любых R и r $V = \dfrac{\pi^2}{3}\left|R^3 - r^3\right|$

19. Радиусы оснований усеченного конуса $R_1 = 4$ см, $R_2 = 22$ см. Объем усеченного конуса $V = \dfrac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$, где H — высота конуса.

$V = \dfrac{1}{3}\pi H(16 + 4 \cdot 22 + 484) = 196\pi H$ (см³). Объем равновеликого цилиндра $V = \pi R^2 H$, где R — радиус основания цилиндра. $R = \sqrt{\dfrac{V}{\pi H}}$.

$R = \sqrt{\dfrac{196\pi H}{\pi H}} = 14$ (см).

20. Радиусы оснований усеченного конуса $OM = R$, $O_1M_1 = r$. SO — высота полного конуса, OO_1 — высота срезанного конуса. Пусть $OO_1 = h$, $SO = H$, тогда $SO_1 = H - h$. Объем срезанного конуса:



$V_{ср} = \dfrac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$, где $R_1 = R$, $R_2 = r$.

$V_{ср} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot h(R^2 + rR + r^2)$. $\triangle SO_1M_1 \sim \triangle SOM$,

так как $\angle SO_1M_1 = \angle SOM = 90°$, $\angle OSM$ — общий.

$\dfrac{SO_1}{SO} = \dfrac{O_1M_1}{OM}$, $\dfrac{H - h}{H} = \dfrac{r}{R}$, $RH - hR = rH$, $h = \dfrac{H(R - r)}{R}$.

Объем полного конуса $V_п = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$. Отношение объемов полного и срезанного конусов:

$$\frac{V_{ср}}{V_п} = \frac{\frac{1}{3}\pi\frac{H(R) - r}{R}(R^2 + rR + r^2)}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{R^3 - r^3}{R^3} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3, \text{ если } R > r$$

21. Масса шара $m = \rho V$, $V = \dfrac{m}{\rho}$, где $m = 10$ кг $= 10\,000$ г, $\rho = 7{,}2$ г/см³.

$V = \dfrac{10000}{7{,}2} \approx 1389$ (см³). Объем шара $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $R = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$,

$R = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 1389}{4\pi}} \approx 7$ (см). Диаметр шара $d = 2R$, $d = 14$ см.

22. Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $R = \frac{d}{2}$, $V = \frac{4}{3}\pi\frac{d^3}{8} = \frac{\pi d^3}{6}$, где d — диаметр шара.

$V_1 = \frac{\pi d_1^3}{6}$, $d_1 = 25$ см, $V_1 = \frac{\pi \cdot 15625}{6} \approx 2604\pi$ (см³).

$V_2 = \frac{\pi d_2^3}{6}$, $d_2 = 35$ см, $V_2 = \frac{\pi \cdot 42875}{6} \approx 7146\pi$ (см³).

$V = V_1 + V_2 = (2\ 604 + 7\ 146)\pi = 9\ 750\pi$ (см³).

$V = \frac{\pi d^3}{6}$, $d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$, $d = \sqrt{\frac{6 \cdot 9750\pi}{\pi}} \approx 39$ (см).

23. Объем свинца $V = \frac{m}{\rho}$, где $m = 1$ кг $= 1000$ г, $\rho = 11{,}4$ г/см³. $V = \frac{1000}{11{,}4} \approx$ ≈ 88 (см³).

Объем шарика $V_ш = \frac{\pi d^3}{6}$, где $d = 1$ см, $V_ш = \frac{\pi}{6}$ (см³).

Из 1 кг свинца можно выплавить шариков $N = \frac{V}{V_ш}$, $N = \frac{88 \cdot 6}{\pi} \approx$ ≈ 167.

24. Объем цилиндра, высота которого равна диаметру основания и равна d, $V_ц = \frac{\pi d^2}{4}d = \frac{\pi d^3}{4}$. Диаметр самого большого шара, который можно выточить из этого цилиндра, тоже d. Его объем $V_к = \frac{\pi d^3}{6}$. Процент сточенного материала определяется по формуле $\Delta V = \frac{V_ц - V_ш}{V_ц} \cdot 100\%$,

$$\Delta V = \frac{\frac{\pi d^3}{4} - \frac{\pi d^3}{6}}{\frac{\pi d^3}{4}} \cdot 100\% \approx 33\frac{1}{3}\%.$$

25. Объем материала, из которого изготовлен шар $V = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)$, где R — внешний радиус, $R = \frac{1}{2}D$, $D = 18$ см, $R = 9$ см, r — внутренний радиус,

$r = R - 3 = 9 - 3 = 6$ (см). $V = \frac{4}{3}\pi(729 - 216) \approx 2149$ (см³).

26. Объем полушара $V_п = \frac{2}{3}\pi R^3$, объем цилиндра $V_ц = \pi R^2 H$.

$V = V_п + V_ц$, $V = \frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 H$, $H = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R$.

27. Диаметр шара $d = 3 + 9 = 12$ (см), радиус шара $R = \frac{1}{2}d$, $R = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см).

Объем сегмента шара $V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$. $H_1 = 3$ см, $H_2 = 9$ см.

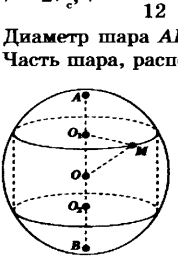
$V_1 = \pi \cdot 9\left(6 - \frac{3}{3}\right) = 45\pi$ (см^3). $V_2 = \pi \cdot 81\left(6 - \frac{9}{3}\right) = 243\pi$ (см^3).

28. Если диаметр шара d, то его радиус $R = \frac{1}{2}d$, $d = 2R$.

Высота сегмента $H = 0{,}1\ d = 0{,}2R$. Объем шара $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$, объем сегмента $V_с = \pi \cdot 0{,}04R^2\left(R - \frac{0{,}2R}{3}\right) \approx 0{,}037\pi R^3$. $\frac{V_с}{V_ш} = 0{,}037\pi R^3 \cdot \frac{3}{4\pi R^3} = 0{,}028$.

29. Пусть радиус шаров равен R. Объем одного такого шара $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$. Общая часть двух шаров состоит из двух сегментов, высота которых $H = \frac{R}{2}$. Объем такого сегмента $V_с = \pi\frac{R^2}{4}\left(R - \frac{R}{6}\right) = \frac{5\pi R^3}{24}$. Объем общей части шара $V = 2V_с$, $V = \frac{5\pi R^3}{12}$. $\frac{V}{V_ш} = \frac{5\pi R^3}{12} \cdot \frac{3}{4\pi R^3} = \frac{5}{16}$.

30. Диаметр шара $AB = 30$ см. AB — ось цилиндра с радиусом 12 см. Часть шара, расположенного внутри этого цилиндра, состоит из цилиндра с высотой O_1O_2 и двух равновеликих сегментов с высотами O_1A и O_2B, $O_1A = O_2B$. Точка O — центр шара, середина высоты O_1O_2 цилиндра. $OA = OB = \frac{1}{2}AB = 15$ см. $O_1M = 12$ см.



Из $\triangle OMO_1$, $\angle OO_1M = 90°$, $OM = 15$ см, $OO_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2}$, $OO_1 = \sqrt{225 - 144} = 9$ (см), $O_1O_2 = 2 \cdot OO_1 = 18$ см.

$AO_1 = OA - OO_1$, $AO_1 = 15 - 9 = 6$ (см).

Объем цилиндра $V_ц = \pi r^2 H$, где $r = O_1M$, $H = O_1O_2$.

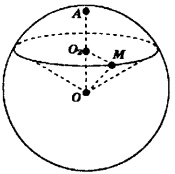
$V_ц = \pi \cdot 144 \cdot 18 = 2\,592\pi$ (см^3). Объем сегмента

$V_с = \pi \cdot h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$, где $R = OA$, $h = O_1A$. $V_с = \pi \cdot 36\left(15 - \frac{6}{3}\right) = 468\pi$ (см^3). Объем части шара, расположенного внутри цилиндра $V = V_ц + 2V_с$, $V = (2\,592 + 2 \cdot 468)\pi = 3\,528\pi$ (см^3).

31. Радиус шара $OA = 75$ см, радиус основания сектора шара $O_1M = 60$ см.

Из $\triangle OMO_1$, $\angle OO_1M = 90°$, $OM = OA = 75$ см, $OO_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2}$, $OO_1 = \sqrt{5625 - 3600} = 45$ (см). $AO_1 = AO - OO_1$, $AO_1 = 75 - 45 = 30$ (см).

Объем сектора шара: $V_1 = \frac{2}{3}\pi R^2 H$, где $R = OA$, $H = AO_1$.



$V_1 = \frac{2}{3}\pi \cdot 5625 \cdot 30 = 112\,500\pi$ (см³) $= 112{,}5\pi$ дм³.

Или $V_2 = V - V_1$, где V — объем шара

$V = \frac{4}{3}\pi R^2$,

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 421\,875 = 562\,500\pi$ (см³).

$V_2 = (562\,500 - 112\,500)\pi = 450\,000\pi$ (см³) $= 450\pi$ (дм³).

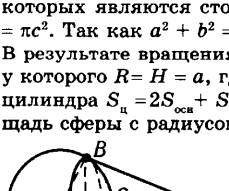
32. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. $\angle O_1OM = 30°$, $OM = R$, $OO_1 = OM\cos 30°$, $OO_1 = R\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AO_1 = AO - OO_1$, $AO_1 = R - \frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{(2-\sqrt{3})}{2}R$. Объем сектора шара $V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot H$, где $H = AO_1$. $V = \frac{2}{3}\pi R^2 \frac{(2-\sqrt{3})}{2}R = \frac{1}{3}\pi R^3(2-\sqrt{3})$.

33. Поверхности двух шаров $S_1 = 4\pi R_1^2$, $S_2 = 4\pi R_2^2$, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$, $\frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \frac{m}{n}$, $\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$. Объемы шаров $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \frac{\sqrt{m^3}}{\sqrt{n^3}}$.

34. Пусть a и b — катеты треугольника, c — его гипотенуза. Поверхность шара с диаметром d $S = 4\pi \cdot \frac{d^2}{4} = \pi d^2$. Поверхности шаров, диаметры которых являются сторонами треугольника: $S_a = \pi a^2$, $S_b = \pi b^2$, $S_c = \pi c^2$. Так как $a^2 + b^2 = c^2$, то $S_c = S_a + S_b$.

35. В результате вращения квадрата вокруг стороны получим цилиндр, у которого $R = H = a$, где a — сторона квадрата. Полная поверхность цилиндра $S_ц = 2S_{осн} + S_б = 2\pi R^2 + 2\pi RH$. $S_ц = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$. Площадь сферы с радиусом a $S_{сф} = 4\pi a^2$. $S_ц = S_{сф}$.

36.



Радиус шара $OC = 15$ см, $OA = 25$ см. AB — касательная к шару, $OB \perp AB$.

$\triangle OBO_1 \sim \triangle OBA$, так как $\angle OBA = \angle OO_1B = 90°$, $\angle BOA$ — общий. $\frac{OB}{OA} = \frac{OO_1}{OB}$, $OO_1 = \frac{OB^2}{OA}$,

$OO_1 = \frac{225}{25} = 9$ (см). $O_1C = OC - OO_1$, $O_1C = 15 - 9 = 6$ (см).

Площадь сферического сегмента $S = 2\pi RH$, где $H = O_1C$. $S = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 = 180\pi$ (см²).

37. Воспользуемся рисунком к задаче 30. Радиус шара $OM = 10$ см, диаметр отверстия $d = 12$ см, радиус $O_1M = \frac{1}{2}d = 6$ см. Из $\triangle OMO_1$, $\angle OO_1M = 90°$, $OO_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2}$, $OO_1 = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см). Площадь боковой поверхности цилиндра $S_ц = 2\pi rH$, где $r = O_1M$, $H = O_1O_2 = 2OO_1$.

$S_ц = 2\pi \cdot 6 \cdot 16 = 192\pi$ (см²). $O_1A = OA - OO_1$, $O_1A = 10 - 8 = 2$ (см).

Площадь сферического сегмента $S_с = 2\pi RH$, где $R = OM$, $h = O_1A$.

$S_с = 2\pi \cdot 10 \cdot 2 = 40\pi$ (см²). Площадь сферы $S_{сф} = 4\pi R^2$, где $R = OM$, $S_{сф} = 4\pi \cdot 100 = 400\pi$ (см²). Площадь сферы с просверленным в ней отверстием $S = S_{сф} - 2S_с + S_ц$,

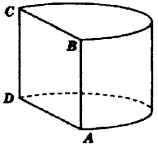
$S = 400\pi - 80\pi + 192\pi = 512\pi$ (см²).

38. Площадь боковой поверхности трубы $S = \pi dH$, где $d = 65$ см, $H = 18$ м $= 1800$ см.

$S = \pi \cdot 65 \cdot 1800 = 117000\pi$ (см²) $= 11{,}7\pi$ (м²). Но это составляет 90 % от всей жести, необходимой для изготовления трубы, $S_ж = \frac{S}{0{,}9}$,

$S_ж = \frac{11{,}7\pi}{0{,}9} \approx 40{,}8$ (м²).

39. Диаметр основания $AD = 5{,}8$ м, высота $AB = 6$ м. Площадь основания



$S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot \pi \frac{d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{8}$.

$S_{осн} = \frac{\pi \cdot 33{,}64}{8} \approx 4{,}205\pi$ (м²). $S_{ABCD} = AD \cdot AB$,

$S_{ABCD} = 5{,}8 \cdot 6 = 34{,}8$ (м²). Боковая поверхность полуцилиндра

$S_б = \frac{1}{2}\pi dH$, $S_б = \frac{1}{2}\pi \cdot 5{,}8 \cdot 6 = 54{,}7$ (м²).

Полная поверхность $S = S_б + S_{ABCD} + 2S_{осн}$.

$S = 54{,}7 + 34{,}8 + 26{,}4 \approx 116$ (м²).

40. Площадь стакана $S = \pi\frac{d^2}{4} + \pi dH$, где $d = 25$ см, $H = 50$ см.

$S = \pi \cdot \frac{625}{4} + \pi \cdot 25 \cdot 50 = 4418$ (см²). Площадь листа $S = \frac{\pi D^2}{4}$, $D = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$,

$D = \sqrt{\frac{4 \cdot 4418}{\pi}} = 75$ (см).

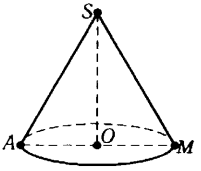
41. Площадь основания цилиндра $S_{осн} = \pi R^2 = Q$, $R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$. Площадь осевого

сечения $S_{сер} = M = 2RH$, где H — высота цилиндра. $H = \frac{M}{2R} = \frac{M}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q}}$.

Боковая поверхность цилиндра $S_б = 2\pi RH$, $S_б = 2\pi\sqrt{\frac{Q}{\pi}} \cdot \frac{M}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q}} = \pi M$.

Полная поверхность цилиндра $S = 2S_{осн} + S_б$, $S = 2Q + \pi M$.

42.



Высота конуса $SO = 3{,}5$ м. Радиус основания $OM = \frac{1}{2}d$, $d = 4$ м, $OM = 2$ м. Образующую SM найдем из $\triangle SMO$, $\angle SOM = 90°$.

$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}$, $SM = \sqrt{12{,}25 + 4} = 0{,}5\sqrt{65}$ м.

Боковая поверхность конуса $S_б = \pi Rl$, где $l = SM$,

$S_б = \pi \cdot 2 \cdot 0{,}5\sqrt{65} \approx 25$ (м²).

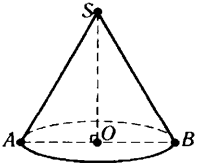
43. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. Высота конуса $SO = 2$ м, радиус основания $OM = \frac{1}{2}d$, $d = 6$ м, $OM = 3$ м.

Из $\triangle SMO$ $\angle SOM = 90°$, $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}$, $SM = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Поверхность крыши $S = \pi \cdot OM \cdot SM$. $S = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{13} \approx 33{,}98$ (м²).

44. Воспользуемся рисунком к задаче 42. Площадь основания конуса $S = \pi R^2$, где R — радиус основания, $R = OM = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. OM — проекция образующей SM на плоскость основания. $\angle SMO = \alpha$. Из $\triangle SMO$ $\angle SOM = 90°$, $SM = \frac{OM}{\cos\alpha}$, $SM = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Боковая поверхность конуса $S_б = \pi \cdot OM \cdot SM$. $S_б = \pi \cdot \sqrt{\frac{S}{\pi}} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{S}{\pi}} = \frac{S}{\cos\alpha}$.

45. Осевым сечением конуса является правильный $\triangle SAB$. Пусть $SA = SB = AB = a$. Боковая поверхность конуса $S_б = \frac{1}{2}\pi dl$,



где $d = AB$, $l = SB$. $S_б = \frac{\pi a^2}{2}$.

Полная поверхность конуса $S = S_б + S_{осн}$, где $S_{осн} = \frac{\pi d^2}{4}$, $S_{осн} = \frac{\pi a^2}{4}$.

$$S = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{4} = \frac{3}{4}\pi a^2. \quad \frac{S_з}{S} = \frac{\pi a^2}{2} \cdot \frac{4}{3\pi a^2} = \frac{2}{3}.$$

46. Полная поверхность равностороннего конуса $S_{кон} = \frac{3}{4}\pi a^2$ (см. предыдущую задачу), где a — сторона осевого сечения. Высота конуса

является диаметром шара, но она также является высотой осевого сечения конуса. Диаметр шара $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, радиус шара $R = \frac{d}{2}$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Поверхность шара $S_к = 4\pi R^2$,

$S_к = \frac{3}{4}\pi a^2$. $S_к = S_{кон}$.

47. Воспользуемся рисунком к задаче 45. $A = SB = R$, где R — радиус полукруга. Длина дуги полукруга $L = \pi R$, а длина окружности основания конуса $l = 2\pi r$, где r — радиус основания. $L = l$, откуда $r = \frac{R}{2}$. Диаметр основания $AB = 2r = R$. $\triangle SAB$ — правильный, $\angle ASB = 60°$.

SO — медиана, высота и биссектриса $\angle ASB$, $\angle OSB = \frac{1}{2}\angle ASB$, $\angle OSB = 30°$.

48. Радиус кругового сектора $R = 3$ м, его угол 120°. Длина дуги сектора $L = \frac{2\pi R}{360°} \cdot 120° = \frac{2}{3}\pi R$. Длина окружности основания конуса $l = 2\pi r$, где r — радиус основания. Так как $L = l$, то $\frac{2}{3}\pi R = 2\pi r$, $r = \frac{1}{3}R$. $r = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ (м).

49. Воспользуемся рисунком к задаче 20. Плоскость, проходящая через точку O_1 на высоте SO конуса параллельна его основанию, делит конус на срезанный конус с высотой OO_1 и подобный к первоначальному конус с высотой SO_1. SM — образующая полного конуса, SM_1 — образующая меньшего конуса, MM_1 — образующая срезанного конуса. $MM_1 = 1{,}42$ м. Пусть $SM_1 = x$ м, тогда $SM = (x + 1{,}42)$ м. Диаметры оснований срезанного конуса 0,43 м и 0,036 м, радиусы оснований соответственно $OM = 0{,}215$ м,

$O_1M_1 = 0{,}018$ м. $\triangle SO_1M_1 \sim \triangle SOM$, так как $\angle SOM = \angle SO_1M_1 = 90°$, $\angle OSM$ — общий.

$\frac{O_1M_1}{OM} = \frac{SM_1}{SM}$; $\frac{0{,}018}{0{,}215} = \frac{x}{x + 1{,}42}$, $x \approx 0{,}13$.

$SM_1 = 0{,}13$ м, $SM = 0{,}13 + 1{,}42 = 1{,}55$ (м).

Боковая поверхность конуса $S = \pi RL$, где R — радиус основания, l — образующая. Боковая поверхность большего конуса $S_1 = \pi \cdot OM \times SM$,

$S_1 = \pi \cdot 0{,}215 \cdot 1{,}55 \approx 1{,}05$ (м²). Боковая поверхность меньшего конуса

$S_2 = \pi \cdot O_1M_1 \cdot SM_1$, $S_2 = \pi \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}13 \approx 0{,}007$ (м²).

Боковая поверхность срезанного конуса $S = S_1 - S_2$, $S = 1{,}05 - 0{,}007 \approx 1{,}04$ (м²).

50. Воспользуемся рисунком к задаче 20. Диаметры оснований срезанного конуса 25 см и 30 см, соответственно радиусы оснований $O_1M_1 = 12{,}5$ см =

= 0,125 м, OM = 15 см = 0,15 м. Образующая срезанного конуса M_1M = = 27,5 см = 0,275 м. SO — высота полного конуса, SM — его образующая. Конус с высотой SO_1 подобный полному, SM_1 — его образующая, O_1M_1 — радиус его основания. $\frac{O_1M_1}{OM} = \frac{SM_1}{SM}$.

Если $SM_1 = x$ м, то $SM = (x + 0{,}275)$.

Имеем: $\frac{0{,}125}{0{,}15} = \frac{x}{x + 0{,}275}$, $x = 1{,}375$.

$SM_1 = 1{,}375$ м, $SM = 1{,}375 + 0{,}275 = 1{,}65$ (м). Боковая поверхность полного конуса $S_1 = \pi \cdot OM \cdot SM$, $S_1 = \pi \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}65 \approx 0{,}78$ (м^2).

Боковая поверхность меньшего конуса $S_1 = \pi \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}65 \approx 0{,}78$ (м^2). Боковая поверхность меньшего конуса $S_2 = \pi \cdot O_1M_1 \cdot S_1M$, $S_2 = \pi \cdot 0{,}125 \cdot 1{,}375 = 0{,}54$ (м^2). Боковая поверхность срезанного конуса $S_б = S_1 - S_2$, $S_б = 0{,}78 - 0{,}54 = 0{,}24$ (м^2). Площадь меньшего основания срезанного конуса $S_{осн} = \pi \cdot O_1M_1^2$, $S_{осн} = \pi \cdot 0{,}0156 \approx 0{,}049$ (м^2). Площадь ведра, которую нужно покрасить, $S_в = S_б + S_{осн}$, $S_в = 0{,}24 + 0{,}049 = 0{,}289$ (м^2). Площадь ста ведер $S = 100 \cdot S_в$. $S = 100 \cdot 0{,}289 = 28{,}9$ (м^2). Для этого нужно олифы $28{,}9 \cdot 150 = 4335$ (г) $\approx 4{,}3$ (кг).