Вариант № 21165276

1. Задание 1 № 516319

Флакон шампуня стоит 150 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 800 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25 %?

Решение.

Во время распродажи шампунь станет стоить $150 - 0{,}25 \cdot 150 = 112{,}5$ рублей. Разделим 800 на 112,5:

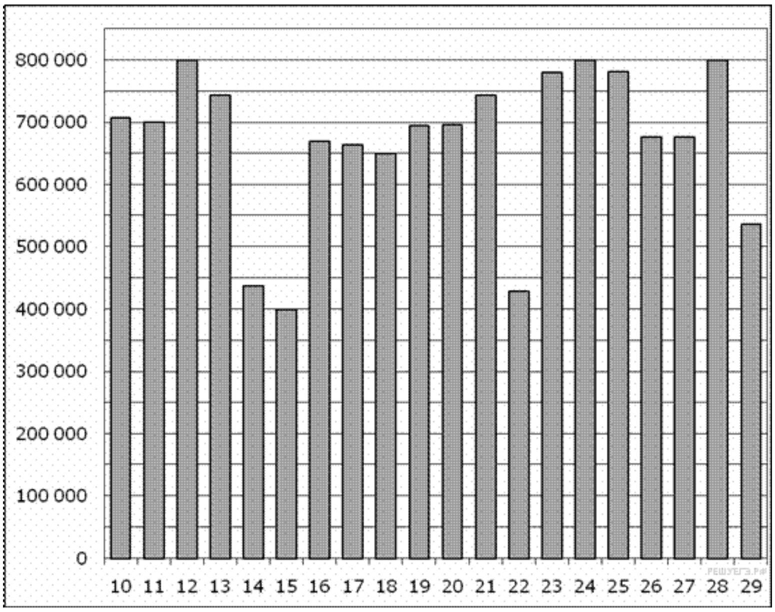
$$\frac{800}{112{,}5} = \frac{8000}{1125} = \frac{7875+125}{1125} = 7\frac{1}{9}.$$

Значит, можно будет купить 7 флаконов шампуня.

Ответ: 7.
Ответ: 7

2. Задание 2 № 28765

На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, во сколько раз наибольшее количество посетителей больше, чем наименьшее количество посетителей за день.



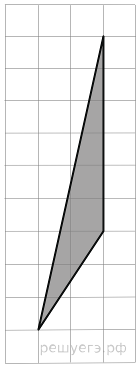
Решение.

Из графика видно, что наибольшее количество посетителей (800 тысяч) больше, чем наименьшее количество посетителей за день (400 тысяч) в 2 раза (см. рисунок).

Ответ: 2.
Ответ: 2

3. Задание 3 № 247697

Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение.

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, проведенную к этому основанию. Поэтому

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2=6 \text{ см}^2.$$

Ответ: 6.

Ответ: 6

4. Задание 4 № 500166

В чемпионате по гимнастике участвуют 60 спортсменок: 27 из Японии, 27 из Китая, остальные из Кореи. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Кореи.

Решение.

В чемпионате принимает участие $60-(27+27)=6$ спортсменок из Кореи. Тогда вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Кореи, равна

$$\frac{6}{60}=\frac{1}{10}=0,1.$$

Ответ: 0,1.

Ответ: 0,1

5. Задание 5 № 103517

Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi(x-5)}{3}=-\sqrt{3}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

Решение.

Решим уравнение:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi(x-5)}{3}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{\pi(x-5)}{3}=-\frac{\pi}{3}+\pi k\Leftrightarrow x=4+3k, k\in\mathbb{Z}.$$

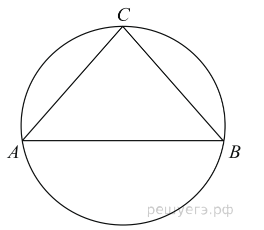
Значению $k=-1$ соответствует $x=1$. Значениям параметра меньше либо равным −2 соответствуют отрицательные значения корней, неотрицательным значениям параметра соответствуют большие значения корней. Следовательно, наименьшим положительным корнем является число 1.

Ответ: 1.

Ответ: 1

6. Задание 6 № 27923

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Решение.

Для нахождения площади треугольника ABC, воспользуемся формулой Герона:

$$S=\sqrt{p(p-AC)(p-AB)(p-BC)}=768.$$

Далее по формуле $R=\frac{abc}{4S}$:

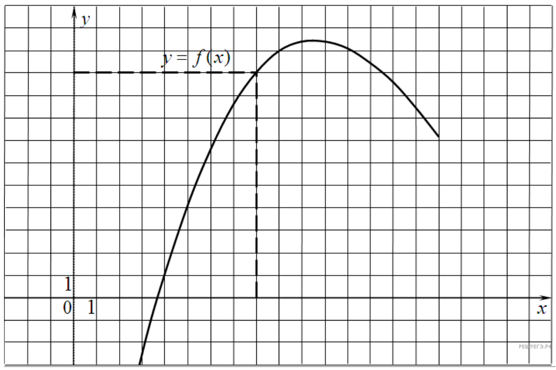
$$R=\frac{40\cdot 40\cdot 48}{4\cdot\sqrt{64\cdot 24\cdot 24\cdot 16}}=\frac{10\cdot 40\cdot 48}{24\cdot 8\cdot 4}=25.$$

Ответ: 25.

Ответ: 25

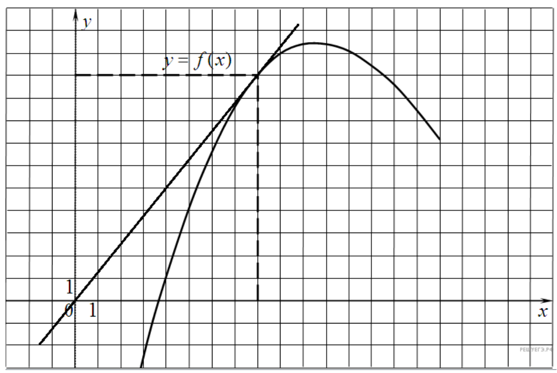
7. Задание 7 № 40129

На рисунке изображен график функции *y=f(x)*. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите *f '(8)*.



Решение.

Поскольку касательная проходит через начало координат, ее уравнение имеет вид $y = kx$. Эта прямая проходит через точку (8; 10), поэтому $10 = 8 \cdot k$, откуда $k = 1{,}25$. Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, получаем: $f'(8) = 1{,}25$.

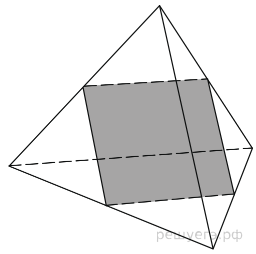


Ответ: 1,25.

Ответ: 1,25

8. Задание 8 № 27175

Ребра тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.



Решение.

В правильном тетраэдре скрещивающиеся ребра перпендикулярны. Каждая сторона сечения является средней линией соответствующей грани, которая, как известно, в 2 раза меньше параллельной ей стороны и равна поэтому 0,5. Значит, сечением является квадрат со стороной 0,5. Тогда площадь сечения $S = a^2 = 0,25.$

Ответ: 0,25.
Ответ: 0,25

9. Задание 9 № 66929

Найдите значение выражения $10p(a) - 60a - 4$, если $p(a) = 6a - 2.$

Решение.

Выполним преобразования:

$$10p(a) - 60a - 4 = 60a - 20 - 60a - 4 = -24.$$

Ответ: −24.
Ответ: -24

10. Задание 10 № 41309

Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 85 - 5p.$ Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p.$ Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 210 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $r(p) \geq 210$:

$$r(p) = q \cdot p = (85 - 5p)p = 85p - 5p^2,$$

$$r(p) \geq 210 \Leftrightarrow 5p^2 - 85p + 210 \leq 0 \Leftrightarrow p^2 - 17p + 42 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq p \leq 14.$$

Ответ: 14.
Ответ: 14

11. Задание 11 № 323855

Клиент А. сделал вклад в банке в размере 7700 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Еще ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 847 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Решение.

Пусть банк начислял $p\%$ годовых. Тогда клиент А. за два года получил $7700(1+0,01p)^2$ руб., а клиент Б. за один год получил $7700(1+0,01p)$ руб. Обозначим $x=1+0,01p$, тогда поскольку А. получил на 847 руб. больше, имеем:

$$7700x^2-7700x=847 \Leftrightarrow 100x^2-100x-11=0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,1, \\ x=-0,1. \end{array}\right.$$

Поскольку $x>0$ получаем: $x=1,1$, откуда $p=10$. Тем самым, банк начислял вкладчикам по 10% годовых.

Ответ: 10.

Ответ: 10

12. Задание 12 № 77492

Найдите точку максимума функции $y=(2x-3)\cos x-2\sin x+5$, принадлежащую промежутку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y'=2\cos x+(3-2x)\sin x-2\cos x=(3-2x)\sin x.$$

На заданном промежутке (первая четверть без граничных точек) синус не обращается в нуль и принимает только положительные значения. Поэтому единственный нуль производной — число 1,5.

Определим знаки производной функции: она положительна при x < 1,5 и отрицательна при x > 1,5. Поэтому искомая точка максимума — число 1,5.

Ответ: 1,5.

Ответ: 1,5

13. Задание 13 № 501483

а) Решите уравнение: $36^{\sin 2x}=6^{2\sin x}$.

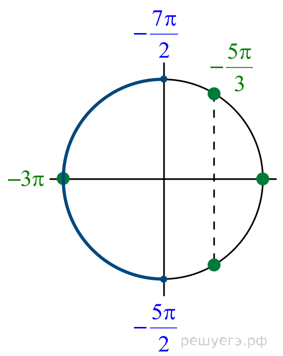
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Перейдем к одному основанию:

$$36^{\sin 2x}=36^{\sin x} \Leftrightarrow 2\sin x\cos x=\sin x \Leftrightarrow \sin x\cdot(2\cos x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0, \\ \cos x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k, \\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, \\ x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$. Получим число -3π.

Ответ: а) $\left\{\pi k,-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\frac{\pi}{3}+2\pi k: k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) -3π.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

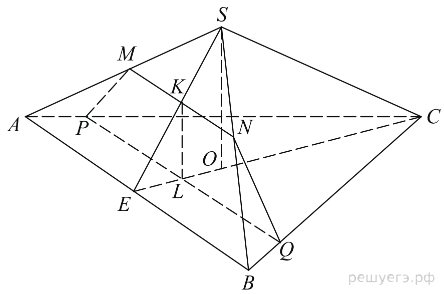
14. Задание 14 № 510107

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Решение.



а) Прямая MN параллельна плоскости ABC, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ, параллельной MN. Рассмотрим плоскость SCE. Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN, L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ, O —центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярна плоскости ABC, поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC, а значит, параллельна прямой SO. Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB, точка K является серединой ES. Значит, L — середина EO. Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении 2 : 1. Значит, $CL : LE = 5 : 1$.

б) В трапеции $MNQP$ имеем:

$$MN=\frac{AB}{2}=12,\quad PQ=\frac{5AB}{6}=20,\quad KL=\frac{SO}{2}=\frac{\sqrt{SC^2-CO^2}}{2}=\frac{13}{2}.$$

Значит, площадь трапеции $MNPQ$ равна $\frac{MN+PQ}{2}\cdot KL=104.$

Ответ: б) 104.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

15. Задание 15 № 507497

Решите неравенство $\left(2x+1-\frac{6}{x}\right)\left(\frac{28}{x+2}-2+\left(\sqrt{-3-2x}\right)^2\right)\geq 0.$

Решение.

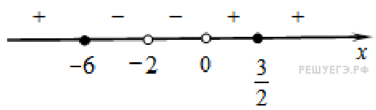
Данное неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} -3-2x\geq 0, \\ \dfrac{2x^2+x-6}{x}\cdot\dfrac{28-2x-4+(x+2)(-3-2x)}{x+2}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{(x+2)(2x-3)}{x}\cdot\dfrac{28-2x-4-2x^2-7x-6}{x+2}\geq 0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство методом интервалов:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x}(-2x^2-9x+18)\geq 0, \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3}{x}\cdot(-2)(x+6)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\geq 0, \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x-3)^2(x+6)}{x}\leq 0, \\ x\neq -2. \end{cases}$$

Отметим на прямой точки как показано на рисунке:



Учитывая неравенство $x\leq -\frac{3}{2}$, получаем решение: $[-6;\ -2)\cup\left(-2;\ -\frac{3}{2}\right]$.

Ответ: $[-6;\ -2)\cup\left(-2;\ -\frac{3}{2}\right]$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16. Задание 16 № 522125

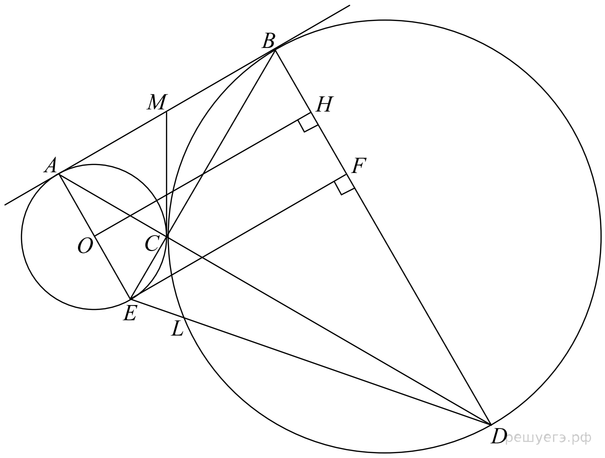
Две окружности касаются внешним образом в точке C. Прямая касается меньшей окружности в точке A, а большей — в точке B, отличной от A. Прямая AC вторично пересекает бóльшую окружность в точке D, прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке E.

а) Докажите, что прямая AE параллельна прямой BD.

б) Пусть L — отличная от D точка пересечения отрезка DE с большей окружностью. Найдите EL, если радиусы окружностей равны 2 и 3.

Решение.

а) Пусть общая касательная к данным окружностям, проведённая через точку C, пересекает общую касательную AB в точке M. Тогда $MA = MC = MB$, то есть медиана CM треугольника ABC равна половине стороны AB. Значит, $\angle ACB = 90^\circ$. Тогда $\angle ACE = 90^\circ$, поэтому AE — диаметр меньшей окружности. Следовательно, прямая AE перпендикулярна прямой AB. Аналогично докажем, что прямая BD перпендикулярна прямой AB. Прямые AE и BD перпендикулярны одной и той же прямой AB, значит, они параллельны.



б) Пусть радиусы окружностей равны r и R, где $r < R$. Опустим перпендикуляр OH из центра O меньшей окружности на диаметр BD большей. Тогда

$$OH^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4rR.$$

Опустим перпендикуляр EF из точки E на BD. Тогда

$$DE = \sqrt{EF^2 + DF^2} = \sqrt{OH^2 + (BD - BF)^2} =$$

$$= \sqrt{4rR + (2R - 2r)^2} = 2\sqrt{R^2 + r^2 - Rr} = 2\sqrt{9+4-6} = 2\sqrt{7}.$$

Отрезок AC — высота прямоугольного треугольника ABE, проведённая из вершины прямого угла, а EB и ED — секущие к большей окружности, проведённые из одной точки, поэтому

$$EL \cdot DE = EC \cdot EB = AE^2.$$

Следовательно,

$$EL = \frac{EC \cdot EB}{ED} = \frac{AE^2}{ED} = \frac{16}{2\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}.$$

Ответ: $\frac{8\sqrt{7}}{7}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* и использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

17. Задание 17 № 509972

15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на *r*% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите *r*.

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшиться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{38S}{39}, \ldots,\ \frac{2S}{39},\ \frac{S}{39},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-ое число каждого месяца такова:

$$kS,\ \frac{38kS}{39}, \ldots,\ \frac{2kS}{39},\ \frac{kS}{39}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{39},\ \frac{38(k-1)S+S}{39}, \ldots,\ \frac{2(k-1)S+S}{39},\ \frac{(k-1)S+S}{39}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{38}{39}+\cdots+\frac{2}{39}+\frac{1}{39}\right)=S\left(1+20(k-1)\right).$$

Общая сумма выплат на 20% больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$20(k-1)=0,2 \Leftrightarrow k=1,01 \Leftrightarrow r=1.$$

Ответ: 1.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

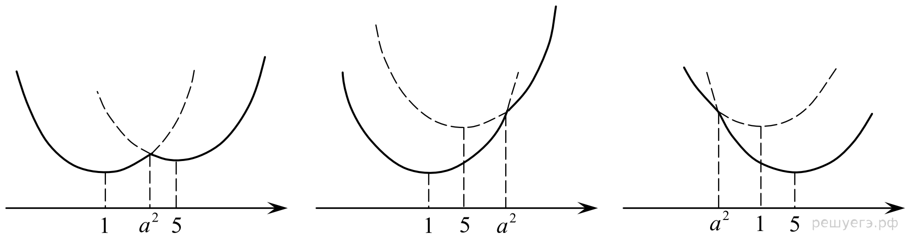
18. Задание 18 № 507186

Найдите все значения *a*, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-4|x-a^2|-6x$ имеет более двух точек экстремума.

Решение.
Раскроем модуль:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-10x+4a^2, \text{ при } x\geq a^2, \\ x^2-2x-4a^2, \text{ при } x<a^2. \end{cases}$$

График функции при $x\geq a^2$ представляет собой параболу с ветвями верх и вершиной с абсциссой $x=5$. При $x<a^2$ график представляет собой параболу с ветвями верх и вершиной с абсциссой $x=1$. Рассмотрим все возможные конфигурации при различных значениях a:



Из рисунка видно, что график имеет более двух точек экстремума при $1<a^2<5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{5}<a<-1, \\ 1<a<\sqrt{5}. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\sqrt{5};\ -1)\cup(1;\ \sqrt{5})$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

19. Задание 19 № 514479

На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.

б) Можно ли сделать 10 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Решение.
а) 1-й ход (13, 14, 7), сумма 34.
2-й ход (12, 15, 6), сумма 33.
3-й ход (11, 16, 5), сумма 32.
4-й ход (10, 17, 4), сумма 31.
5-й ход (9, 18, 3), сумма 30.

б) Допустим, удалось сделать 10 ходов. Максимальные суммы, которые могли получится,

$$25+26+\ldots+33+34=\frac{(25+34)\cdot 10}{2}=295.$$

При этом были использованы все числа на доске, но сумма всех чисел с доски

$$1+2+\ldots+29+30=\frac{(1+30)\cdot 30}{2}=465.$$

Суммы не равны, значит, 10 ходов сделать не удастся.

в) Добавим к пяти ходам пункта а) 6-й (8, 19, 2) сумма 29. Значит, 6 ходов сделать можно. Покажем, что 7 ходов сделать нельзя. Предположим, что мы сделали 7 ходов, использовав 21 число, причем получили максимальные возможные суммы 34, 33, ..., 28. Таким образом, минимальная возможная сумма оставшихся 9 чисел должна быть

$$465-(34+\ldots+28)=465-\frac{(34+28)\cdot 7}{2}=465-217=248.$$

При этом максимальная возможная сумма 9 чисел из набора получается, если сложить

$$21+22+\ldots+30=\frac{(22+30)\cdot 9}{2}=234.$$

Таким образом, получили противоречие, 7 ходов сделать нельзя.

Ответ: а) (13, 14, 7), (12, 15, 6), (11, 16, 5), (10, 17, 4), (9, 18, 3); б) нет; в) 6.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующий результатов: — пример в п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	516319	7
2	28765	2
3	247697	6
4	500166	0,1
5	103517	1
6	27923	25
7	40129	1,25
8	27175	0,25
9	66929	-24
10	41309	14
11	323855	10
12	77492	1,5