Вариант № 21165272

1. Задание 1 № 318753

Бегун пробежал 300 м за 30 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

Решение.

Средняя скорость бегуна 300 : 30 = 10 м/с. Переведем метры в секунду в километры в час:

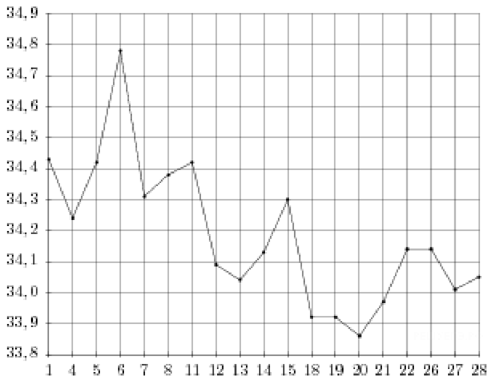
$$1\text{ м/с} = 60\text{ м/мин} = 3600\text{ м/ч} = 3{,}6\text{ км/ч}.\ \text{Поэтому } 10\text{ м/с} = 36\text{ км/ч}.$$

Ответ: 36.

Ответ: 36

2. Задание 2 № 263649

На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 1 февраля по 28 февраля 2003 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какой был курс евро 15 февраля. Ответ дайте в рублях.



Примечание РЕШУ ЕГЭ: условие содержит неточности.

Решение.

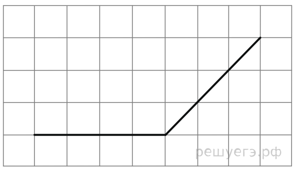
Из графика видно, что курс евро 15 февраля был равен 34,3.

Ответ: 34,3.

Ответ: 34,3

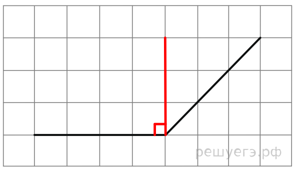
3. Задание 3 № 324461

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см изображён угол. Найдите его градусную величину.



Решение.

Изображённый на рисунке угол равен сумме прямого угла и угла 45°, поэтому он равен 135°.



Ответ: 135.

Ответ: 135

4. Задание 4 № 325839

Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что 76% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение.

Анализ пациента может быть положительным по двум причинам: А) пациент болеет гепатитом, его анализ верен; В) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем:

$$P(A) = 0,8 \cdot 0,76 = 0,608,$$
$$P(B) = 0,02 \cdot 0,24 = 0,0048,$$
$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,608 + 0,0048 = 0,6128.$$

Ответ: 0,6128.

Ответ: 0,6128

5. Задание 5 № 101881

Решите уравнение $\sqrt{\frac{2}{11-x}} = 1.$

Решение.

Возведем в квадрат:

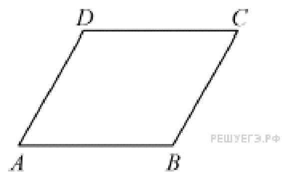
$$\sqrt{\frac{2}{11-x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{11-x} = 1 \Leftrightarrow 2 = 11 - x \Leftrightarrow x = 9.$$

Ответ: 9.

Ответ: 9

6. Задание 6 № 504250

Периметр параллелограмма равен 70. Меньшая сторона равна 16. Найдите большую сторону параллелограмма.



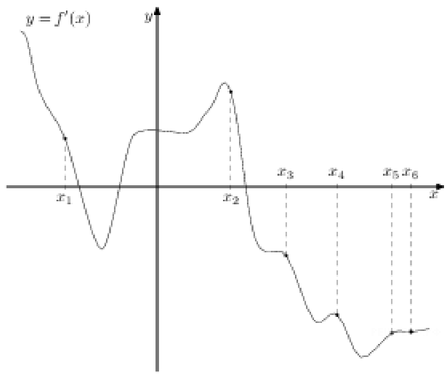
Решение.

Периметр параллелограмма равен сумме длин его сторон. Длины противоположных сторон параллелограмма равны, следовательно сумма длин двух меньших его сторон равна 32, а сумма больших равна 70 − 32 = 38. Поэтому длина больших сторон параллелограмма равна 19.

Ответ: 19

7. Задание 7 № 505463

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ на оси абсцисс отмечены шесть точек: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_6$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Решение.

Положительным значениям производной соответствуют интервалы, на которых функция $f(x)$ возрастает. В этих интервалах лежат точки x_1, x_2. Таких точек 2.

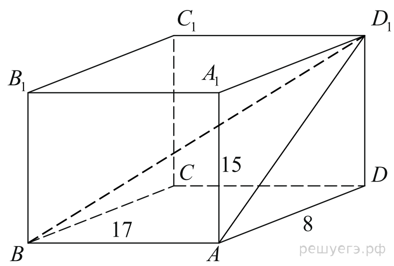
Ответ: 2.

Дублирует задание 317745.

Ответ: 2

8. Задание 8 № 271573

Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 17$, $AD = 8$, $AA_1 = 15$. Ответ дайте в градусах.



Решение.

В прямоугольнике AA_1D_1D отрезок AD_1 является диагональю, $A_1D_1 = AD$. По теореме Пифагора

$$AD_1 = \sqrt{AA_1{}^2 + A_1D_1{}^2} = \sqrt{225 + 64} = 17.$$

Прямоугольный треугольник ABD_1 равнобедренный: $AB = AD_1 = 17$, значит, его острые углы равны $45°$

Ответ: 45.

Ответ: 45

9. Задание 9 № 26898

Найдите значение выражения $(7x - 13)(7x + 13) - 49x^2 + 6x + 22$ при $x = 80$.

Решение.

Используем формулу разности квадратов:

$$(7x - 13)(7x + 13) - 49x^2 + 6x + 22 = 49x^2 - 169 - 49x^2 + 6x + 22 = 6x - 147 = 480 - 147 = 333.$$

Ответ: 333.

Ответ: 333

10. Задание 10 № 28006

Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле $A = FS\cos\alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $A \geq 2000$ на интервале $(0^\circ;\ 90^\circ)$ при заданных значениях силы $F = 80$ кН и длины пути $S = 50$ м:

$$A \geq 2000 \Leftrightarrow 80 \cdot 50 \cdot \cos\alpha \geq 2000 \Leftrightarrow \cos\alpha \geq \frac{1}{2} \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 0^\circ < \alpha \leq 60^\circ.$$

Ответ: 60.

Ответ: 60

11. Задание 11 № 513444

На изготовление 575 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Решение.

Обозначим n — число деталей, которые изготавливает за час первый рабочий. Тогда второй рабочий за час изготавливает $n-1$ деталь. На изготовление 575 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 таких же деталей, отсюда имеем:

$$\frac{600}{n-1} - 2 = \frac{575}{n} \Leftrightarrow \frac{602-2n}{n-1} = \frac{575}{n} \Leftrightarrow (602-2n)n = 575(n-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 27n - 575 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = \dfrac{27+\sqrt{729+4\cdot 2\cdot 575}}{4} = 25; \\ n = \dfrac{27-\sqrt{729+4\cdot 2\cdot 575}}{4} = -11{,}5 \end{array}\right. \underset{n>0}{\Leftrightarrow} n = 25.$$

Таким образом,первый рабочий делает 25 деталей в час.

Ответ: 25.

Ответ: 25

12. Задание 12 № 77475

Найдите наименьшее значение функции $y = (8-x)e^{9-x}$ на отрезке $[3;10]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

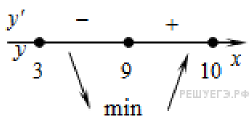
$$y' = \left((8-x)e^{9-x}\right)' = (8-x)'e^{9-x} + (8-x)(e^{9-x})' =$$

$$= -(8-x)e^{9-x} - e^{9-x} = (x-9)e^{9-x}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} (x-9)e^{9-x} = 0, \\ 3 \leq x \leq 10. \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 9$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(9) = -1 \cdot 1 = -1$.

Ответ: −1.

Ответ: -1

13. Задание 13 № 511286

Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x - 2\sin^2 x - 4\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$

Решение.
Найдем ОДЗ: $1-x^2>0 \Leftrightarrow -1<x<1.$
Найдем корни числителя:

$$\sin 2x-2(\sin x)^2-4\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x-2\sin^2 x-4(\cos^2 x-\sin^2 x)=0 \Leftrightarrow \sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}\, x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x=1,\\ \mathrm{tg}\, x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\\ x=-\mathrm{arctg}\, 2+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ получаем: $x=\dfrac{\pi}{4}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}.$

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

14. Задание 14 № 514654

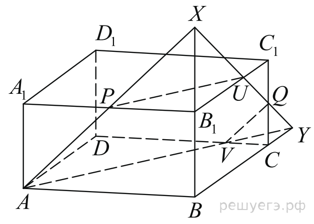
В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=4$, $BC=3$, $AA_1=2$. Точки P и Q — середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке U.

а) Докажите, что $B_1U : UC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью APQ.

Решение.

а) Пусть прямые AP и BB_1 пересекаются в точке X (см. рисунок). Тогда точка U — точка пересечения прямых XQ и B_1C_1.



Треугольники AXB и PXB_1 подобны, откуда

$$\frac{XB_1}{XB}=\frac{PB_1}{AB}=\frac{1}{2};$$

$$B_1X=BB_1=2.$$

Треугольники B_1XU и C_1QU подобны, откуда

$$\frac{B_1U}{C_1U}=\frac{B_1X}{C_1Q}=2;$$

$$B_1U=2C_1U.$$

Значит. $B_1U:UC_1=2:1.$

б) Пусть Y — точка пересечения прямых QX и BC, а V — точка пересечения прямых CD и AY. Тогда пятиугольник $APUQV$ — сечение, площадь которого надо найти.

Треугольники C_1UQ и CYQ равны, откуда $CY=C_1U=1$.

Треугольники AYB и VYC подобны, откуда $\frac{VC}{AB}=\frac{CY}{BY}=\frac{1}{4}$, $VC=\frac{AB}{4}=1$. Четырёхугольник $APUY$ — равнобедренная трапеция, в которой

$$AP=PU=UY=2\sqrt{2}$$

$$AY=4\sqrt{2}.$$

Треугольник QYV — равносторонний состороной $\sqrt{2}$, нетрудно вычислить, что его площадь $S_{QYV}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Вычислим высоту трапеции $APUY$, $h=\sqrt{AP^2-\left(\frac{AY-PU}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$. Таким образом, её площадь $S_{APUY}=\frac{2\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{6}=6\sqrt{3}$. Значит, искомая площадь равна $S_{APUY}-S_{QYV}=6\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

15. Задание 15 № 508364

Решите неравенство: $\frac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2}\le\frac{(3x+1)^2}{4}$.

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\frac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2}\le\frac{(3x+1)^2}{4}\Leftrightarrow 2(x-1)^2+8(x+1)^2\le(3x+1)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+2+8x^2+16x+8\le 9x^2+6x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+9\le 0\Leftrightarrow(x+3)^2\le 0\Leftrightarrow x=-3.$$

Ответ: $\{-3\}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы

Обоснованно получен верный ответ.	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

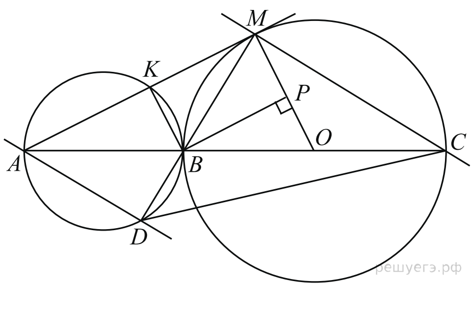
16. Задание 16 № 513103

Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

Решение.



а) Точки M и D лежат на окружностях с диаметрами BC и AB соответственно, поэтому

$$\angle BMC = \angle BDA = 90^\circ.$$

Прямые AD и MC перпендикулярны одной и той же прямой MD, следовательно, прямые AD и MC параллельны.

б) Пусть O — центр окружности с диаметром BC. Тогда прямые OM и AM перпендикулярны. Учитывая, что прямые BK и AM перпендикулярны, получаем, что прямые OM и BK параллельны. Обозначим BK через x. Треугольник AMO подобен треугольнику AKB с коэффициентом 5, поэтому $OB = OM = 5x$. Опустим перпендикуляр BP из точки B на прямую OM. Так как четырёхугольник $BKMP$ — прямоугольник,

$$BP = KM = 12,$$
$$OP = OM - MP = OM - BK = 5x - x = 4x.$$

По теореме Пифагора $OB^2 = BP^2 + OP^2$, откуда $25x^2 = 144 + 16x^2$. Получаем, что $x = 4$.

Поскольку прямые AD и MC параллельны,

$$S_{DBC} = S_{MDC} - S_{MBC} = S_{MAC} - S_{MBC} = S_{ABM}.$$

Значит, треугольники DBC и AMB равновелики. Следовательно,

$$S_{DBC} = S_{AMB} = \frac{1}{2} AM \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 15x = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4 = 30.$$

Ответ: 30.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17. Задание 17 № 515766

В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 19 000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 3000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение.

Чтобы узнать, в начале какого года нужно продать ценную бумагу и положить деньги в банк, необходимо найти, в какой год прибавка к счету станет больше 3000 рублей.

1-й год (2001 год) $19\,000\cdot 0,1=1900<3000$ руб.
2-й год $22\,000\cdot 0,1=2200<3000$ руб.
3-й год $25\,000\cdot 0,1=2500<3000$ руб.
4-й год $28\,000\cdot 0,1=2800<3000$ руб.
5-й год $31\,000\cdot 0,1=3100>3000$ руб.

Значит, нужно продать ценную бумагу в начале 2005 года.

Ответ: 2005.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Получено верное выражение для суммы платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу.	2
Получено выражение для ежегодной выплаты, но уравнение не составлено ИЛИ верный ответ найден подбором.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

18. Задание 18 № 509584

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4. \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Первое уравнение системы раскладывается на множители: $(x-2y)(y-2x)=0$. Следовательно, уравнение задаёт пару прямых $x=2y$ и $y=2x$.

Второе уравнение при каждом $a\neq 0$ — уравнение окружности с центром $(a,\ a)$ и радиусом $a^2\sqrt{5}$.

Если $a=0$, то система имеет единственное решение и поэтому не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a\neq 0$. Тогда условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда окружность касается каждой из прямых. То есть расстояние от центра до каждой из прямых равно радиусу окружности.

Можно воспользоваться геометрическим методом или использовать формулу расстояния от точки до прямой.

$$\frac{|a-2a|}{\sqrt{5}}=\frac{|2a-a|}{\sqrt{5}}=a^2\sqrt{5}.$$

Отсюда $a=\pm\,0{,}2$.

Ответ: $a=\pm\,0{,}2$.

Комментарий: на самом деле, конечно, задача сводится к исследований количества решений системы

$$\begin{cases} y=2x, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4. \end{cases}$$

То есть, уравнения $(x-a)^2+(2x-a)^2=5a^4 \Leftrightarrow 5x^2-6ax+2a^2-5a^4=0,$ которое имеет единственное решение при

$$D=100a^4-4a^2=4a^2(25a^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a=\pm 0,2. \end{array}\right.$$

При $a=0$ прямые пересекаются, поэтому исходная система имеет не два, а всего одно решение.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Найдено множество значений *а*, корни, соответствующие единственному значению параметра не определены ИЛИ Найдены корни, но в множество значений а не включены одна или две граничные точки.	3
Найдено множество значений *а*, но не включены одна или две граничные точки. Корни, соответствующие единственному значению параметра не найдены.	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

19. Задание 19 № 507488

На доске написано более 42, но менее 54 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −12.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

а) Напомним, что среднее арифметическое нескольких чисел есть сумма этих чисел, делённая на их количество. Пусть на доске написано n чисел. Тогда их сумма: $S = -7n$. Обозначим: p — количество положительных чисел, m — количество отрицательных чисел, z — количество нулей. Таким образом, $n = p + m + z$.

Пусть S_+ и S_- — суммы положительных и отрицательных чисел соответственно. Имеем: $S_+ = 6p$, $S_- = -12m$, и так как $S = S_+ + S_-$, то: $-7n = 6p - 12m$. Правая часть данного равенства делится на 6. Поскольку 6 и 7 взаимно просты, число n делится на 6. Между числами 42 и 54 есть только одно такое число: $n = 48$.

б) Из равенства $-7 \cdot 48 = 6p - 12m$ получаем после сокращения на 6: $2m - p = 56$. Кроме того: $p + m + z = 48$. Сложим полученные равенства: $3m + z = 104$. Так как 104 при делении на 3 дает остаток 2, число z также даёт остаток 2: $z = 3k + 2$. Отсюда: $3m + 3k + 2 = 104$, или $m = 34 - k$.

Соответственно, $p = 2m - 56 = 2(34 - k) - 56 = 12 - 2k$.

Составляем разность: $p - m = (12 - 2k) - (34 - k) = -22 - k < 0$, так что $p < m$ — отрицательных чисел написано больше.

в) Из равенства $p = 12 - 2k$ видим, что $p \leq 12$. Приведём пример с $p = 12$ (тогда $k = 0$, $z = 2$, $m = 34$). Пусть написано 12 чисел 6, 34 числа -12 и два нуля. Этот набор удовлетворяет условию задачи: среднее арифметическое положительных чисел равно, очевидно, 6; среднее арифметическое отрицательных чисел равно -12, а среднее арифметическое всех чисел:

$$\frac{12 \cdot 6 + 34 \cdot (-12)}{48} = -7$$

Следовательно, наибольшее возможное количество положительных чисел равно 12

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	318753	36
2	263649	34,3
3	324461	135
4	325839	0,6128
5	101881	9
6	504250	19
7	505463	2
8	271573	45
9	26898	333
10	28006	60
11	513444	25
12	77475	-1