ГЛАВА V

§ 1. Координаты точки и координаты вектора

400. Даны точки: $A(3; -1; 0)$, $B(0; 0; 7)$, $C(2; 0; 0)$, $D(-4; 0; 3)$, $E(0; -1; 0)$, $F(1; 2; 3)$, $G(0; 5; -7)$, $H(-\sqrt{5}; \sqrt{3}; 0)$;

а) ось абсцисс: точка C;

б) ось ординат: точка E;

в) ось аппликат: точка B;

г) плоскость Oxy: точки H, E, C, A;

д) плоскость Oyz: точки B, E, G;

е) плоскость Oxz: точки B, C, D.

401. Даны точки: $A(2; -3; 5)$, $B\left(3; -5; \frac{1}{2}\right)$, $C\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$.

а) плоскость Oxz: $A_1'(2; 0; 5)$, $B_1'\left(3; 0; \frac{1}{2}\right)$, $C_1'(-\sqrt{3}; 0; \sqrt{5}-\sqrt{3})$;

плоскость Oxy: $A_2'(2; -3; 0)$, $B_2'(3; -5; 0)$, $C_2'\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$;

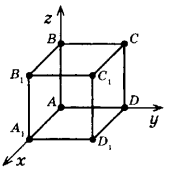
плоскость Oyz: $A_3'(0; -3; 5)$, $B_3'\left(0; -5; \frac{1}{2}\right)$, $C_3'\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$;

б) ось Ox: $A_4'(2; 0; 0)$, $B_4'(3; 0; 0)$, $C_4'(-\sqrt{3}; 0; 0)$;

ось Oy: $A_5'(0; -3; 0)$, $B_5'(0; -5; 0)$, $C_5'\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$;

ось Oz: $A_6'(0; 0; 5)$, $B_6'\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$, $C_6'\left(0; 0; \sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$.

402.



По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, вершины: $A(0; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $D(0; 1; 0)$, $A_1(1; 0; 0)$, $AA_1 = 1$. Сторона куба равна 1. Тогда $B_1(1; 0; 1)$, $C(0; 1; 1)$; $C_1(1; 1; 1)$, $D_1(1; 1; 0)$.

403. $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$; $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$; $\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{m} = \vec{k} - \vec{i}$; $\vec{n} = 0{,}7\vec{k}$;
$\vec{a}\{3; 2; -5\}$; $\vec{b}\{-5; 3; -1\}$; $\vec{c}\{1; -1; 0\}$; $\vec{d}\{0; 1; 1\}$; $\vec{m}\{-1; 0; 1\}$; $\vec{n}\{0; 0; 0{,}7\}$.

404. Дано: $\vec{a}\{5; -1; 2\} \Rightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$;
$\vec{b}\{-3; -1; 0\} \Rightarrow \vec{b} = -3\vec{i} - \vec{j}$;
$\vec{c}\{0; -1; 0\} \Rightarrow \vec{c} = -\vec{j}$;
$\vec{d}\{0; 0; 0\} \Rightarrow \vec{d} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$.

405. По условию (рис. 124) $AOBCA_1O_1B_1C_1$ — прямоугольный параллелепипед. $AO = 2$; $OB = 3$; $OO_1 = 2$.
Точка $A_1(2; 0; 2)$; $B_1(0; 3; 2)$; $O(0; 0; 0)$; $C_1(0; 0; 2)$.
$OA_1\{2; 0; 2\}$; $OA\{2; 0; 0\}$; $BB_1\{0; 3; 2\}$; $OB\{0; 3; 0\}$; $OO_1\{0; 0; 2\}$;
$OB_1\{0; 3; 2\}$;
$C(2; 3; 0) \Rightarrow OC\{2; 3; 0\}$;
$C_1(2; 3; 2) \Rightarrow OC_1\{2; 0; 2\}$;
$BC_1 = OC_1 - OB$; $BC_1\{2 - 0; 3 - 3; 2 - 0\}$; $BC_1\{2; 0; 2\}$;
$AC_1 = OC_1 - OA$; $AC_1\{2 - 2; 3 - 0; 2 - 0\}$; $AC_1\{0; 3; 2\}$;
$O_1C = OC - OO_1$; $O_1C\{2 - 0; 3 - 0; 0 - 2\}$; $O_1C\{2; 3; -2\}$.

406.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ — некомпланарные. Вектор $\overrightarrow{DC}$ параллельно перенесли и получили вектор $\overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$.

По правилу сложения векторов:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AC_1}$.

Если $\begin{matrix} AB\{x_1; y_1; z_1\} \\ BC_1\{x_2; y_2; z_2\} \end{matrix} \Rightarrow AC_1\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.

Координаты вектора: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$;
$\overrightarrow{BC_1}(x_{C_1} - x_B; y_{C_1} - y_B; z_{C_1} - z_B)$;
$\overrightarrow{AC_1}(x_{C_1} - x_A; y_{C_1} - y_A; z_{C_1} - z_A)$.

Из того, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AC_1}$, получим:
$x_1 = x_B - x_A$; $x_2 = x_{C_1} - x_B$; $y_1 = y_B - y_A$; $y_2 = y_{C_1} - y_B$; $z_1 = z_B - z_A$; $z_2 = z_{C_1} - z_B$.

Сумма $\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = x_B - x_A + x_{C_1} - x_B = x_{C_1} - x_A \\ y_1 + y_2 = y_B + y_A - y_{C_1} - y_B = y_{C_1} - y_A \\ z_1 + z_2 = z_B + z_A - z_{C_1} - z_B = z_{C_1} - z_A \end{matrix}\right\}$ — координаты вектора $\overrightarrow{AC_1}$.

407. Даны векторы: $\vec{a}\{3; -5; 2\}$; $\vec{b}\{0; 7; -1\}$; $\vec{c}\left\{\frac{2}{3}; 0; 0\right\}$; $\vec{d} = \{-2,7; 3,1; 0,5\}$.

а) $\vec{a} + \vec{b}\{3 + 0; -5 + 7; 2 + (-1)\}$; $\vec{a} + \vec{b}\{3; 2; 1\}$;

б) $\vec{a} + \vec{c}\left\{3 + \frac{2}{3}; -5 + 0; 2 + 0\right\}$; $\vec{a} + \vec{c}\left\{3\frac{2}{3}; -5; 2\right\}$;

в) $\vec{b} + \vec{c}\left\{0 + \frac{2}{3}; 7 + 0; -1 + 0\right\}$; $\vec{b} + \vec{c}\left\{\frac{2}{3}; 7; -1\right\}$;

г) $\vec{d} + \vec{b}\{-2,7 + 0; 3,1 + 7; 0,5 + (-1)\}$; $\vec{d} + \vec{b}\{-2,7; 10,1; -0,5\}$;

д) $\vec{d} + \vec{a}\{-2,7 + 3; 3,1 + (-5); 0,5 + 2\}$; $\vec{d} + \vec{a}\{0,3; -1,9; 2,5\}$;

е) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$; $\vec{a} + \vec{b}$: $\{3; 2; 1\}$;
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$: $\left\{3 + \frac{2}{3}; 2 + 0; 1 + 0\right\}$; $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$: $\left\{3\frac{2}{3}; 2; 1\right\}$;

ж) $\vec{b} + \vec{a} + \vec{d}$ — ? $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; $\vec{a} + \vec{b}$: $\{3; 2; 1\}$;
$\vec{b} + \vec{a} + \vec{d}$: $\{3 + (-2,7); 2 + 3,1; 1 + 0,5\}$; $\vec{b} + \vec{a} + \vec{d}$: $(0,3; 5,1; 1,5\}$;

з) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{d}$; $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}:\left\{3\frac{2}{3};2;1\right\}$;

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}:\left\{3\frac{2}{3}+(-2{,}7);2+3{,}1;1+0{,}5\right\}$; $3\frac{2}{3}-2\frac{7}{10}=\frac{110-27\cdot 3}{30}=\frac{29}{30}$;

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}:\left\{\frac{29}{30};5{,}1;1{,}5\right\}$.

408. Рис. 125. $OA=4$; $OB=9$; $OC=2$; M — середина AC; N — середина OC; P — середина CB.

$A(4;0;0)$; $B(0;9;0)$; $C(0;0;2)\Rightarrow \overrightarrow{AC}\{0-4;0-0;2-0;\}$; $\overrightarrow{AC}\{-4;0;2\}$;

$\overrightarrow{CB}\{0-0;9-0;0-2;\}$; $\overrightarrow{CB}\{0;9;-2\}$; $\overrightarrow{AB}\{0-4;9-0;0-0;\}$; $\overrightarrow{AB}\{-4;9;0\}$;

$\overrightarrow{MN}$ — ?

$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{ON}\left\{\frac{1}{2}\cdot 0;\frac{1}{2}\cdot 0;\frac{1}{2}\cdot 2\right\}$; $\overrightarrow{ON}\{0;0;1\}\Rightarrow N(0;0;1)$;

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$; $\overrightarrow{OM}\left\{\frac{1}{2}\cdot(4+0);\frac{1}{2}\cdot(0+0);\frac{1}{2}\cdot(0+2)\right\}$;

$\overrightarrow{OM}\{2;0;1\}\Rightarrow M(2;0;1)$; $\overrightarrow{MN}\{0-2;0-0;1-1\}$; $\overrightarrow{MN}\{-2;0;0\}$;

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$; $\overrightarrow{OP}\left\{\frac{1}{2}\cdot(0+0);\frac{1}{2}\cdot(9+0);\frac{1}{2}\cdot(0+2)\right\}$;

$\overrightarrow{OP}\left\{0;4\frac{1}{2};1\right\}\Rightarrow P=(0;4{,}5;1)$;

$\overrightarrow{BM}\{2-0;0-9;1-0\}$; $\overrightarrow{BM}\{2;-9;1\}$;

$\overrightarrow{NP}\{0-0;4{,}5-0;1-1\}$; $\overrightarrow{NP}\{0;4{,}5;0\}$.

409. По условию: $\vec{a}\{5;-1;1\}$; $\vec{b}\{-2;1;0\}$; $\vec{c}\{0;0,2;0\}$; $\vec{d}\left\{-\frac{1}{3};2\frac{2}{5};-\frac{1}{7}\right\}$.

а) $\vec{a}-\vec{b}:\{5-(-2);-1-1;1-0\}$; $\vec{a}-\vec{b}:\{7;-2;1\}$;

б) $\vec{b}-\vec{a}:\{-2-5;1-(-1);0-1\}$; $\vec{b}-\vec{a}:\{-7;2;-1\}$;

в) $\vec{a}-\vec{c}:\{5-0;-1-0,2;1-0\}$; $\vec{a}-\vec{c}:\{5;-1,2;1\}$;

г) $\vec{d}-\vec{a}:\left\{-\frac{1}{3}-5;2\frac{2}{5}-(-1);-\frac{1}{7}-1\right\}$; $\vec{d}-\vec{a}:\left\{-5\frac{1}{3};3\frac{2}{5};-1\frac{1}{7}\right\}$;

д) $\vec{c}-\vec{d}:\left\{0-\left(-\frac{1}{3}\right);0,2-2\frac{2}{5};0-\left(-\frac{1}{7}\right)\right\}$; $\vec{c}-\vec{d}:\left\{\frac{1}{3};-2,2;\frac{1}{7}\right\}$;

е) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}$;

$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}:\{7+0;-2+0,2;1+0\}$; $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}:\{7;-1,8;1\}$;

ж) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}$;

$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}:\{7-0;-2-0,2;1-0\}$; $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}:\{7;-2,2;1\}$;

з) $2\vec{a}:\{2\cdot 5;2\cdot(-1);2\cdot 1\}$; $2\vec{a}:\{10;-2;2\}$;

и) $-3\vec{b}:\{-3\cdot(-2);-3\cdot 1;-3\cdot 0\}$; $-3\vec{b}:\{6;-3;0\}$;

к) $-6\vec{c}:\{-6\cdot 0;-6\cdot 0,2;-6\cdot 0\}$; $-6\vec{c}:\{0;-1,2;0\}$;

* Решения и ответы приводятся к учебникам указанных годов.

л) $-\frac{1}{3}\vec{d}:\left\{-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right);-\frac{1}{3}\cdot 2\frac{2}{5};-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\right\};\ -\frac{1}{3}\vec{d}:\left\{\frac{1}{9};-\frac{12}{15};\frac{1}{21}\right\};$

м) $0{,}2\vec{b}:\{0{,}2\cdot(-2);0{,}2\cdot 1;0{,}2\cdot 0\};\ 0{,}2\vec{b}:\{-0{,}4;0{,}2;0\}.$

410. По условию: $\vec{a}\{-1;2;0\};\ \vec{b}\{0;-5;-2\};\ \vec{c}\{2;1;-3\}.$

$\vec{p}=3\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c};$

$3\vec{b}\{0;-15;-6\};\ -2\vec{a}\{2;-4;0\};$

$\vec{p}\{0+2+2;-15-4+1;-6+0-3\};\ \vec{p}(4;-18;-9\};$

$\vec{q}=3\vec{c}-2\vec{b}+\vec{a};$

$3\vec{c}\{6;3;-9\};\ -2\vec{b}\{0;10;4\};$

$\vec{q}\{6+0-1;3+10+2;-9+4+0\};\ \vec{q}\{5;15;-5\}.$

411. По условию: $\vec{a}\{-1;1;1\};\ \vec{b}\{0;2;-2\};\ \vec{c}\{-3;2;0\};\ \vec{d}\{-2;1;-2\}.$

а) $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c};$

$3\vec{a}\{-3;3;3\};\ 2\vec{b}\{0;4;-4\};\ -\vec{c}\{3;-2;0\};$

$3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}:\{-3+0+3;3+4-2;3-4+0\};\ 3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}:\{0;5;-1\};$

б) $-\vec{a}+2\vec{c}-\vec{d};$

$-\vec{a}\{1;-1;-1\};\ 2\vec{c}\{-6;4;0\};\ -\vec{d}\{2;-1;2\};$

$-\vec{a}+2\vec{c}-\vec{d}:\{1-6+2;-1+4-1;-1+0+2\};\ -\vec{a}+2\vec{c}-\vec{d}:\{-3;2;1\};$

в) $0{,}1\vec{a}+3\vec{b}+0{,}7\vec{c}-5\vec{d};$

$0{,}1\vec{a}\{-0{,}1;0{,}1;0{,}1\};\ 3\vec{b}\{0;6;-6\};\ 0{,}7\vec{c}\{-2{,}1;1{,}4;0\};\ -5\vec{d}\{10;-5;10\};$

$0{,}1\vec{a}+3\vec{b}+0{,}7\vec{c}-5\vec{d}:\{-0{,}1+0-2{,}1+10;0{,}1+6+1{,}4-5;0{,}1-6+0+10\};$

$0{,}1\vec{a}+3\vec{b}+0{,}7\vec{c}-5\vec{d}:\{7{,}8;2{,}5;4{,}1\};$

г) $(2\vec{a}+3\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})+2(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{a}+\underline{2\vec{b}}+2\vec{a}-\underline{2\vec{b}}=3\vec{a}-3\vec{b};$

$3\vec{a}:\{-3;3;3\};\ 3\vec{b}:\{0;6;-6\};$

$3\vec{a}+3\vec{b}:\{-3+0;3+6;3-6\};\ 3\vec{a}+3\vec{b}:\{-3;9;-3\}.$

412. По условию $\vec{a}\{2;0;0\};\ \vec{b}\{-3;-5;-7\};\ \vec{c}\{-0{,}3;0;1{,}75\}.$

$\vec{a}\{2;0;0\}\Rightarrow-\vec{a}\{-2;0;0\};$

$\vec{b}\{-3;5;-7\}\Rightarrow-\vec{b}\{3;-5;7\};$

$\vec{c}\{-0{,}3;0;1{,}75\}\Rightarrow-\vec{c}\{0{,}3;0;-1{,}75\}.$

413. а) и б) — решение в учебнике.

в) $\vec{i}\{1;0;0\},\ \vec{j}\{0;1;0\}$ — эти векторы не пропорциональные $\Rightarrow$ $\vec{i}$ и $\vec{j}$ не коллинеарны;

г) $\vec{m}\{0;0;0\},\ \vec{n}\{5;7;-3\}$ — эти векторы пропорциональны, $k=0$, значит, векторы m и n коллинеарны;

д) $\vec{p}\left\{\frac{1}{3};-1;5\right\},\ \vec{q}\{-1;-3;-15\}$ — эти векторы не пропорциональны;

$\frac{\frac{1}{3}}{-1}\neq\frac{-1}{-3}\neq\frac{5}{-15}\Rightarrow\vec{p}$ и $\vec{q}$ — не коллинеарны.

414. а) $\vec{a}\{15;m;1\}$, $\vec{b}\{18;12;n\}$; $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарны.

$$\frac{15}{18}=\frac{m}{12}=\frac{1}{n}=\frac{5}{6};\ \frac{5}{6}=\frac{m}{12}\Rightarrow m=\frac{5\cdot 12}{6}=10;\ \frac{5}{6}=\frac{1}{n}\Rightarrow n=\frac{6\cdot 1}{5}=1,2;$$

б) $\vec{c}(m;0,4;-1)$, $\vec{d}\left\{-\frac{1}{2};n;5\right\}$; $\vec{c}$ и $\vec{d}$ — коллинеарны.

$$\frac{m}{-\frac{1}{2}}=\frac{0,4}{n}=-\frac{1}{5};\ \frac{m}{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{5}\Rightarrow m=\frac{-\frac{1}{2}\cdot(-1)}{5}=0,1;$$

$$\frac{0,4}{n}=-\frac{1}{5}\Rightarrow n=\frac{0,4\cdot 5}{-1}=-2.$$

415. $\vec{a}\{-3;-3;0\}$; $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — эти векторы компланарны.

а) $\vec{i}\{1;0;0\}$; $\vec{j}\{0;1;0\}$ $\vec{a}=x\vec{i}+\vec{j}y$;

$$\begin{cases}-3=1\cdot x+0\cdot y;\\-3=0\cdot x+1\cdot y;\\0=0\cdot x+0\cdot y;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3;\\y=-3;\end{cases}$$

$\vec{a}=-3\vec{i}-3\vec{j}$, то есть векторы $\vec{a},\vec{i},\vec{j}$ — компланарны.

б) $\vec{b}\{2;0;-3\}$; $\vec{i},\vec{j}$; $\vec{i}\{1;0;0\}$; $\vec{j}\{0;1;0\}$; $\vec{b}=x\vec{i}+y\vec{j}$;

$$\begin{cases}2=1\cdot x+0\cdot y;\\0=0\cdot x+1\cdot y;\\-3=0\cdot x+0\cdot y;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2;\\y=0.\end{cases}$$

Тогда $\vec{b},\vec{i}$ и $\vec{j}$ — не компланарны.

в) $\vec{c}\{1;0;-2\}$; $\vec{i}$ и $\vec{k}$; $\vec{c}=x\vec{i}+\vec{k}y$; $\vec{i}\{1;0;0\}$; $\vec{k}\{0;0;1\}$;

$$\begin{cases}1=1\cdot x+0\cdot y;\\0=0\cdot x+0\cdot y;\\-2=0\cdot x+1\cdot y;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1;\\y=-2;\end{cases}$$

$\vec{c}=\vec{i}-2\vec{k}$, то есть $\vec{c},\vec{i}$ и $\vec{k}$ — компланарны.

г) Решение в учебнике стр. 102.

д) $\vec{m}\{1;0;2\}$; $\vec{n}\{1;1;-1\}$; $\vec{p}\{-1;2;4\}$; $\vec{m}=x\vec{n}+y\vec{p}$;

$$\begin{cases}1=1x-1y;\\0=1x+2y;\\2=-1x+4y;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=1;\\x+2y=0;\\-x+4y=2;\end{cases}\Rightarrow \text{система не имеет решений.}$$

Тогда векторы $\vec{m},\vec{n}$ и $\vec{p}$ — не компланарны.

е) $\vec{q}\{0;5;3\}$; $\vec{r}\{3;3;3\}$; $\vec{s}\{1;1;4\}$; $\vec{q}=x\vec{r}+y\vec{s}$;

$$\begin{cases}0=3x+y;\\=3x+y;\\3=3x+4y;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3x;\\y=5-3x;\\y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4};\end{cases}\Rightarrow \text{система не имеет решений.}$$

Тогда $\vec{q},\vec{r},\vec{s}$ — не компланарны.

416. По условию $\overrightarrow{OA}\{3;2;1\}$; $\overrightarrow{OB}\{1;-3;5\}$ $\overrightarrow{OC}\left\{-\frac{1}{3};0{,}75;-2\frac{3}{4}\right\}$;

$A(3;\ 2;\ 1)$; $B(1;\ -3;\ 5)$; $C\left(-\frac{1}{3};0{,}75;-2\frac{3}{4}\right)$, поскольку $O(0;0;0)$.

417. По условию $A(2;\ -3;\ 0)$; $B(7;\ -12;\ 18)$; $C(-8;\ 0;\ 5)$;
$O(0;\ 0;\ 0)$; $\overrightarrow{OA}\{2;-3;0\}$; $\overrightarrow{OB}\{7;-12;18\}$; $\overrightarrow{OC}\{-8;0;5\}$.

418. По условию

а) $A(3;\ -1;\ 2)$; $B(2;\ -1;\ 4)$; $\overrightarrow{AB}$ — ?
$\overrightarrow{AB}\{2-3;-1-(-1);4-2\}$; $\overrightarrow{AB}\{-1;0;2\}$;

б) $A(-2;\ 6;\ -2)$; $B(3;\ -1;\ 0)$;
$\overrightarrow{AB}\{3-(-2);-1-6;0-(-2)\}$; $\overrightarrow{AB}\{5;-7;2\}$;

в) $A\left(1;\frac{5}{6};\frac{1}{2}\right)$; $B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$;
$\overrightarrow{AB}\left\{\frac{1}{2}-1;\frac{1}{3}-\frac{5}{6};\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right\}$; $\overrightarrow{AB}\{-0{,}5;-0{,}5;-0{,}5\}$.

419. По условию задачи ABC — треугольник.
$A(1;\ 6;\ 2)$; $B(2;\ 3;\ -1)$; $C(-3;\ 4;\ 5)$; $\vec{i}\{1;0;0\}$; $\vec{j}\{0;1;0\}$; $\vec{k}\{0;0;1\}$;
$\overrightarrow{AB}(2-1;3-6;-1-2\}$; $\overrightarrow{AB}\{1;-3;-3\}$; $\overrightarrow{AB}=\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$;
$\overrightarrow{BC}\{-3-2;4-3;5-(-1)\}$; $\overrightarrow{BC}\{-5;1;6\}$; $\overrightarrow{BC}=-5\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$;
$\overrightarrow{CA}\{1-(-3);6-4;2-5\}$; $\overrightarrow{CA}\{4;2;-3\}$; $\overrightarrow{CA}=4\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

420. Даны точки: $A(3;\ -1;\ 5)$; $B(2;\ 3;\ -4)$; $C(7;\ 0;\ -1)$; $D(8;\ -4;\ 8)$;
$\overrightarrow{AB}\{2-3;3-(-1);-4-5\}$; $\overrightarrow{AB}\{-1;4;-9\}$;
$\overrightarrow{DC}\{7-8;0-(-4);-1-8\}$; $\overrightarrow{DC}\{-1;4;-9\}$.

Поскольку векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ имеют одинаковые координаты, то они равны.

$\overrightarrow{BC}\{7-2;0-3;-1-(-4)\}$; $\overrightarrow{BC}\{5;-3;3\}$;
$\overrightarrow{AD}\{8-3;-4-(-1);8-5\}$; $\overrightarrow{AD}\{5;-3;3\}$.

Аналогично, векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ имеют одинаковые координаты, тогда они равны.

421. а) Решение в учебнике — стр. 103;
б) $A(-5;\ 7;\ 12)$; $B(4;\ -8;\ 3)$; $C(13;\ -23;\ -6)$;
$\overrightarrow{AB}\{4-(-5);-8-7;3-12\}$; $\overrightarrow{AB}\{9;-15;-9\}$;
$\overrightarrow{AC}\{13-(-5);-23-7;-6-12\}$; $\overrightarrow{AC}\{18;-30;-18\}$.

Из координат векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ видно, что $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$, поэтому они коллинеарны, а значит, точки A, B, C лежат на одной прямой.
в) $A(-4;\ 8;\ -2)$; $B(-3;\ -1;\ 7)$; $C(-2;\ -10;\ -16)$;
$\overrightarrow{AB}\{-3-(-4);-1-8;7-(-2)\}$; $\overrightarrow{AB}\{1;-9;9\}$;

$\overline{AC}\{-2-(-4);-10-8;-16-(-2)\}$; $\overline{AC}\{2;-18;-14\}$.

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ — не коллинеарны, значит, точки A, B, C не лежат на одной прямой.

422. а) $A(-2;-13;3)$; $B(1;4;1)$; $C(-1;-1;-4)$; $D(0;0;0)$;

$\overline{DA}\{-2-0;-13-0;3-0\}$; $\overline{DA}\{-2;-13;3\}$; $\overline{DB}\{1;4;1\}$; $\overline{DC}\{-1;-1;-4\}$;

$\overline{DA}=m\overline{DB}+n\overline{DC}$;

$$\begin{cases}-2=1m-1n;\\-13=4m-1n;\\3=1m-4n;\end{cases}\begin{cases}m-n=-2;\\4m-n=-13;\\m-4n=3;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=n-2;\\m=3+4n;\\4m=n-13;\end{cases}\Rightarrow$$

$n-2=3+4n$; $3n=-5$; $n=-\frac{5}{3}$; $m=-\frac{5}{3}-2=-\frac{11}{3}$.

$\overline{DA}=-\frac{11}{3}\overline{DB}-\frac{5}{3}\overline{DC}$.

Векторы $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ — компланарны по определению, тогда точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

б) $A(0;1;0)$; $B(3;4;-1)$; $C(-2;-3;0)$; $D(2;0;3)$;

$\overline{AD}\{2-0;0-1;3-0\}$; $\overline{AD}\{2;-1;3\}$;

$\overline{AB}\{3-0;4-1;-1-0\}$; $\overline{AB}\{3;3;-1\}$;

$\overline{AC}\{-2-0;-3-1;0\}$; $\overline{AC}\{-2;-4;0\}$;

$\overline{AD}=m\overline{AB}+n\overline{AC}$;

$$\begin{cases}2=3m-2n;\\-1=3m-4n;\\3=-1m+0n;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-m=3;\\3m-2n=2;\\3m-4n=-1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-3;\\n=-2;\\n=-5{,}5.\end{cases}$$

Система не имеет решения $\Rightarrow$ точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

в) $A(5;-1;0)$; $B(-2;7;1)$; $C(12;-15;-7)$; $D(1;1;-2)$;

$\overline{AD}\{1-5;1-(-1);-2-0\}$; $\overline{AD}\{-4;2;-2\}$;

$\overline{AB}\{-2-5;7-(-1);1-0\}$; $\overline{AB}\{-7;8;1\}$;

$\overline{AC}\{12-5;-15-(-1);-7-0\}$; $\overline{AC}\{7;-14;-7\}$;

$\overline{AD}=m\overline{AB}+n\overline{AC}$;

$$\begin{cases}-4=-7m+7n;\\2=8m-14n;\\-2=1m-7n;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7m=7n+4;\\8m=2+14n;\\m=7n-2;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7(7n-2)=7n+4;\\8m=2+14n;\\m=7n-2;\end{cases}\Rightarrow$$

$49n-14-7n=4$; $42n=18$; $n=\frac{3}{7}$; $m=7\cdot\frac{3}{7}-2=1$.

$\overline{AD}=\overline{AB}+\frac{3}{7}\overline{AC}$ $\Rightarrow$ векторы отложены от одной точки $\Rightarrow$ точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

423. $A(x_1; y_2. z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$; $C(x_3; y_3; z_3)$; M — точка пересечения медиан ΔABC

$$M\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$

AA_1, BB_1, CC_1 — медианы ΔABC, точка $O(0; 0; 0)$.

$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MA_1}$, поскольку точка M — точка пересечения медиан.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$;

$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}$;

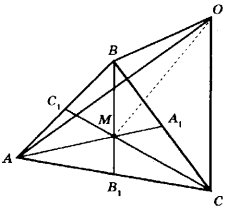
$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM})$;

$\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA_1}$;

$\overrightarrow{OA_1} = \dfrac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}{2}$;

$3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$;

$\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}{3}$,



то есть $M\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}; \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}; \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

424. Точка M — середина отрезка AB.

а) $A(0; 3; -4)$; $B(-2; 2; 0)$.

Координаты середины отрезка:

$x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$; $\quad y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$; $\quad z = \dfrac{z_1+z_2}{2}$;

$x = \dfrac{0-2}{2} = -1$; $\quad y = \dfrac{3+2}{2} = 2{,}5$; $\quad z = \dfrac{-4+0}{2} = -2$;

$M(-1; 2{,}5; -2)$;

б) $B(x_2; y_2; z_2)$ — ? $A(14; -8; 5)$; $M(3; -2; -7)$

$x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$; $\quad y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$; $\quad z = \dfrac{z_1+z_2}{2}$;

$3 = \dfrac{14+x_2}{2}$; $\quad -2 = \dfrac{-8+y_2}{2}$; $\quad -7 = \dfrac{5+z_2}{2}$;

$6 = 14 + x_2$; $\quad -4 = -8 + y_2$; $\quad -14 = 5 + z_2$;

$x_2 = -8$; $\quad y_2 = 4$; $\quad z_2 = -19$;

$B(-8; 4; -19)$;

в) $A(x_1; y_1; z_1)$ — ? $B(0; 0; 2)$; $M(-12; 4; 15)$

$x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$; $\quad y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$; $\quad z = \dfrac{z_1+z_2}{2}$;

$-12 = \dfrac{0+x_1}{2}$; $\quad 4 = \dfrac{y_1+0}{2}$; $\quad 15 = \dfrac{2+z_2}{2}$;

$-24 = x_1$; $\quad y_1 = 8$; $\quad 30 = 2 + z_1$; $z_1 = 28$;

$A(-24; 8; 28)$.

425. M — середина отрезка AB, точка M лежит на оси Ox; точка $y = 0$; $z = 0$

а) $A(-3;\ m;\ 5)$; $B(2;\ -2;\ n)$;

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2};$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-3+2}{2}; \\ 0 = \dfrac{m-2}{2}; \\ 0 = \dfrac{5+n}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}; \\ m = 2; \\ n = -5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2; \\ n = -5; \end{cases}$$

б) $A(1;\ 0{,}5;\ -4)$; $B(1;\ m;\ 2n)$;

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+1}{2}; \\ 0 = \dfrac{0{,}5+m}{2}; \\ 0 = \dfrac{-4+2n}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; \\ m = -0{,}5; \\ 2n = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; \\ m = -0{,}5; \\ n = 2; \end{cases}$$

в) $A(0;\ m;\ n+1)$; $B(1;\ n;\ -m+1)$;

$$\begin{cases} x = \dfrac{0+1}{2}; \\ 0 = \dfrac{m+n}{2}; \\ 0 = \dfrac{n+1-m+1}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}; \\ m+n = 0; \\ n-m = -2; \end{cases} \Bigg| + \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}; \\ 2n = -2; \\ m-1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}; \\ n = -1; \\ m = 1; \end{cases}$$

г) $A(7;\ 2m+n;\ -n)$; $B(-5;\ -3;\ m-3)$;

$$\begin{cases} x = \dfrac{7-5}{2}; \\ 0 = \dfrac{2m+n-3}{2}; \\ 0 = \dfrac{-n+m-3}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; \\ 2m+n = 3; \\ m-n = 3; \end{cases} \begin{cases} x = 1; \\ 3m = 6; \\ 2-n = 3; \end{cases} \begin{cases} x = 1; \\ m = 2; \\ n = -1. \end{cases}$$

426. $|\overline{AB}|$ — ?

а) $A(-1;\ 0;\ 2)$; $B(1;\ -2;\ 3)$;

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-2-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3;$$

б) $A(-35;\ -17;\ 20)$; $B(-34;\ -5;\ 8)$;

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-34-(-35))^2 + (-5-(-17))^2 + (8-20)^2};$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 12^2 + (-12)^2} = \sqrt{289} = 17.$$

427. $\vec{a}\{5;-1;7\}$; $|\vec{a}|=\sqrt{5^2+(-1)^2+7^2}=\sqrt{25+1+49}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$;

$\vec{b}\{2\sqrt{3};-6;1\}$; $|\vec{b}|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-6)^2+1^2}=\sqrt{49}=7$;

$\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{c}\{1;1;1\}$; $|\vec{c}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$;

$\vec{d}=-2\vec{k}$; $\vec{d}\{0;0;-2\}$; $|\vec{d}|=\sqrt{0+0+(-2)^2}=2$;

$\vec{m}=\vec{i}-2\vec{j}$; $\vec{m}\{1;-2;0\}$; $|\vec{m}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+0}=\sqrt{5}$.

428. $\vec{a}\{3;-2;1\}$; $\vec{b}\{-2;3;1\}$; $\vec{c}\{-3;2;1\}$;

а) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(3-2)^2+(-2+3)^2+(1+1)^2}$; $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$;

б) $|\vec{a}|+|\vec{b}|$; $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{14}$; $|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$;

$|\vec{a}|+|\vec{b}|=2\sqrt{14}$;

в) $|\vec{a}|-|\vec{b}|=\sqrt{14}-\sqrt{14}=0$;

г) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-2-3)^2+(3-(-2))^2+(1-1)^2}$; $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$;

д) $|3\vec{c}|$ — ? $3\vec{c}\{-9;6;3\}$; $|3\vec{c}|=\sqrt{(-9)^2+6^2+3^2}=\sqrt{126}=3\sqrt{14}$;

е) $\sqrt{14}\,|\vec{c}|$ — ? $|\vec{c}|=\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$; $\sqrt{14}\,|\vec{c}|=\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}=14$;

ж) $|2\vec{a}-3\vec{c}|$ — ? $2\vec{a}\{6;-4;2\}$; $3\vec{c}\{-9;6;3\}$;

$|2\vec{a}-3\vec{c}|=\sqrt{(6-(-9))^2+(-4-6)^2+(2-3)^2}$;

$|2\vec{a}-3\vec{c}|=\sqrt{15^2+(-10)^2+(-1)^2}=\sqrt{326}$.

429. $M(-4;\ 7;\ 0)$; $N(0;\ -1;\ 2)$; K — середина отрезка MN, $K(x;\ y;\ z)$;

$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$; $z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$;

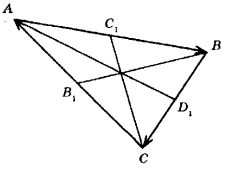
$x=\dfrac{-4+0}{2}$; $y=\dfrac{7-1}{2}$; $z=\dfrac{0+2}{2}$;

$x=-2$; $y=3$; $z=1$.

$K(-2;\ 3;\ 1)$; $O(0;\ 0;\ 0)$ — начало координат, $OK\{-2;\ 3;\ 1\}$;

$|\overrightarrow{OK}|=\sqrt{(-2)^2+3^3+1^2}=\sqrt{14}$.

430. $A\left(\dfrac{3}{2};1;-2\right)$; $B(2;\ 2;\ -3)$; $C(2;\ 0;\ -1)$;



а) $P_{\Delta ABC}$ — ? $P_{\Delta ABC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$;

$\overrightarrow{AB}\left\{2-\dfrac{3}{2};2-1;-3-(-2)\right\}$; $\overrightarrow{AB}\left\{\dfrac{1}{2};1;-1\right\}$;

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$;

$\overrightarrow{BC}\{2-2;0-2;-1-(-3)\}$; $\overrightarrow{BC}\{0;-2;2\}$; $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{0^2+(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{CA}\left\{\frac{3}{2}-2;1-0;-2-(-1)\right\}$; $\overrightarrow{CA}\left\{-\frac{1}{2};1;-1\right\}$;

$$\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2};$$

$$P=\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{CA}\right|=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2};$$

б) медианы ΔABC: AA_1 — ? BB_1 — ? CC_1 — ?

По определению медиана делит противоположную сторону пополам.

$A_1(x;\ y;\ z)$ — середина BC.

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2};\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2};$$

$$x=\frac{2+2}{2};\qquad y=\frac{2+0}{2};\qquad z=\frac{-3-1}{2};$$

$$x=2;\qquad y=1;\qquad z=-2.$$

$A_1(2;\ 1;\ -2)$; $\overrightarrow{AA_1}\left\{2-\frac{3}{2};1-1;-2-(-2)\right\}$; $\overrightarrow{AA_1}\left\{\frac{1}{2};0;0\right\}$;

$$\left|\overrightarrow{AA_1}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0+0}=\frac{1}{2}.$$

$B_1(x;\ y;\ z)$ — середина AC.

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2};\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2};$$

$$x=\frac{\frac{3}{2}+2}{2};\qquad y=\frac{1+0}{2};\qquad z=\frac{-2-1}{2};$$

$$x=\frac{7}{4};\qquad y=\frac{1}{2};\qquad z=-\frac{3}{2};$$

$\overrightarrow{BB_1}\left\{\frac{7}{4}-2;\frac{1}{2}-2;-\frac{3}{2}+3\right\}$; $\overrightarrow{BB_1}\left\{-\frac{1}{4};-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$;

$$\left|\overrightarrow{BB_1}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{73}{16}}=\frac{\sqrt{73}}{4};$$

$C_1(x;\ y;\ z)$ — середина AB.

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2};\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2};$$

$$x=\frac{\frac{3}{2}+2}{2};\qquad y=\frac{1+2}{2};\qquad z=\frac{-2-3}{2};$$

$$x=\frac{7}{4};\qquad y=\frac{3}{2};\qquad z=-\frac{5}{2};$$

$\overrightarrow{CC_1}\left\{\frac{7}{4}-2;\frac{3}{2}-0;-\frac{5}{2}+1\right\}$; $\overrightarrow{CC_1}=\left\{-\frac{1}{4};\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right\}$;

$$\left|\overrightarrow{CC_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{73}}{4}.$$

431. а) $A(9; 3; -5)$; $B(2; 10; -5)$; $C(2; 3; 2)$. ΔABC — какой? Найдем AB, BC, AC и сравним их.

$\overrightarrow{AB}\{2-9; 10-3; -5-(-5)\}$; $\overrightarrow{AB}\{-7; 7; 0\}$;

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + 0} = 7\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{BC}\{2-2; 3-10; 2-(-5)\}$; $\overrightarrow{BC}\{0; -7; 7\}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0 + (-7)^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{AC}\{2-9; 3-3; 2-(-5)\}$; $\overrightarrow{AC}\{-7; 0; 7\}$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 0 + 7^2} = 7\sqrt{2}$.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = 7\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABC$ — равносторонний.

б) $A(3; 7; -4)$; $B(5; -3; 2)$; $C(1; 3; -10)$;

$\overrightarrow{AB}\{5-3; -3-7; 2+4\}$; $\overrightarrow{AB}\{2; -10; 6\}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-10)^2 + 6^2} = \sqrt{140}$;

$\overrightarrow{BC}\{1-5; 3-(-3); -10-2\}$; $\overrightarrow{BC}\{-4; 6; -12\}$;

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + (-12)^2} = \sqrt{196}$;

$\overrightarrow{AC}\{1-3; 3-7; -10-(-4)\}$; $\overrightarrow{AC}\{-2; -4; -6\}$;

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{56}$.

Все стороны разные, но проверим выполнение теоремы Пифагора:
$BC > AB > AC$; $BC^2 = AC^2 + AB^2$; $(\sqrt{196})^2 = (\sqrt{56})^2 + (\sqrt{140})^2$; $196 = 196$; ΔABC — прямоугольный.

в) $A(5; -5; -1)$; $B(5; -3; -1)$; $C(4; -3; 0)$;

$\overrightarrow{AB}\{5-5; -3-(-5); -1-(-1)\}$; $\overrightarrow{AB}\{0; 2; 0\}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0+4+0} = 2$;

$\overrightarrow{BC}\{4-5; -3-(-3); 0-(-1)\}$; $\overrightarrow{BC}\{-1; 0; 1\}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;

$\overrightarrow{AC}\{4-5; -3-(-5); 0-(-1)\}$; $\overrightarrow{AC}\{-1; 2; 1\}$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1^2 + 4 + 1} = \sqrt{6}$.

$AC > AB > BC$. Все стороны разные, но проверим выполнение теоремы Пифагора:
$AC^2 = AB^2 + BC^2$; $6 = 2^2 + 2$; $6 = 6$; ΔABC — прямоугольный.

г) $A(-5; 2; 0)$; $B(-4; 3; 0)$; $C(-5; 2; -2)$;

$\overrightarrow{AB}\{-4-(-5); 3-2; 0\}$; $\overrightarrow{AB}\{1; 1; 0\}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2}$;

$\overrightarrow{BC}\{-5-(-4); 2-3; -2-0\}$; $\overrightarrow{BC}\{-1; -1; -2\}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$;

$\overrightarrow{AC}\{-5-(-5); 2-2; -2-0\}$; $\overrightarrow{AC}\{0; 0; -2\}$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0+0+2^2} = 2$.

Все стороны имеют разную величину, но проверим выполнение теоремы Пифагора:
$AC > AB > BC$; $AC^2 = AB^2 + BC^2$; $\sqrt{6}^2 = \sqrt{2}^2 + 2^2$; $6 = 6$; ΔABC — прямоугольный.

432. $A(-3;\ 4;\ -4)$;

а) расстояние до координатных плоскостей. Точка A_1 лежит в плоскости Oxy; $A_1(-3;\ 4;\ 0)$.
Точка A_2 лежит в плоскости Oyz; $A_2(0;\ 4;\ -4)$.
Точка A_3 лежит в плоскости Oxz; $A_3(-3;\ 0;\ -4)$.

$\overrightarrow{AA_1}\{0;0;-4\}$; $\left|\overrightarrow{AA_1}\right| = \sqrt{0+0+(-4)^2} = 4$;

$\overrightarrow{AA_2}\{-3;0;0\}$; $\left|\overrightarrow{AA_2}\right| = \sqrt{(-3)^2+0+0} = 3$;

$\overrightarrow{AA_3}\{0;4;0\}$; $\left|\overrightarrow{AA_3}\right| = \sqrt{0+4^2+0} = 4$;

б) расстояние до осей координат:

Ox: $A_1(-3;\ 0;\ 0)$; $\left|\overrightarrow{AA_1}\right| = \sqrt{(-3-(-3))^2+(0-4)^2+(0+4)^2} = 4\sqrt{2}$;

Oy: $A_2(0;\ 4;\ 0)$; $\left|\overrightarrow{AA_2}\right| = \sqrt{(-3+0)^2+(4-4)^2+(0+4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$;

Oz: $A_3(0;\ 0;\ -4)$; $\left|\overrightarrow{AA_3}\right| = \sqrt{(-3+0)^2+(0+4)^2+(-4+4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

433. Дана точка $A(-1;\ 2;\ -3)$. Для того, чтобы найти искомые точки на каждой оси, нужно провести перпендикуляры из этой точки до осей, тогда имеем точки: $A_1(0;\ 2;\ -3)$; $A_2(-1;\ 0;\ -3)$; $A_3(-1;\ 2;\ 0)$.

434. Дана точка $B(3;-4;\sqrt{7})$. Для того, чтобы найти наименьшее расстояние от точки до точки оси, нужно найти длину перпендикуляра.
Ox: $B_1(3;\ 0;\ 0)$; Oy: $B_2(0;\ -4;\ 0)$; Oz: $B_3(0;0;\sqrt{7})$.

435. По условию дано: $A(1;\ 0;\ k)$; $B(-1;\ 2;\ 3)$; $C(0;\ 0;\ 1)$.
k — ? ΔABC — равнобедренный.
Найдем стороны ΔABC: AB, BC, AC.

$\overrightarrow{AB}\{-1-1;2-0;3-k\}$; $\overrightarrow{AB}\{-2;2;3-k\}$;

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+4+(3-k)^2} = \sqrt{8+(k-3)^2}$;

$\overrightarrow{BC}\{0+1;0-2;1-3\}$; $\overrightarrow{BC}\{1;-2;-2\}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$;

$\overrightarrow{AC}\{0-1;0;1-k\}$; $\overrightarrow{AC}\{-1;0;1-k\}$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1+(1-k)^2} = \sqrt{1+(k-1)^2}$.

Если ΔABC — равнобедренный, тогда или $AB = AC$, или $AC = BC$, или $AB = BC$.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$;
$8 + (k-3)^2 = 1 + (k-1)^2$;
$8 + k^2 - 6k + 9 = 1 + k^2 - 2k + 1$;
$-4k = 2 - 9 - 8$;
$-4k = -15$;

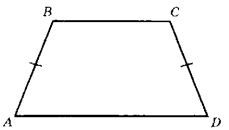
$k = \dfrac{15}{4} = 3{,}75$;

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$;

$1 + (k-1)^2 = 3^2$;
$1 + k^2 - 2k + 1 - 9 = 0$;

$k^2 - 2k - 7 = 0;$
$D = 4 + 28 = 32;$
$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{2};$
$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|;$
$8 + (k - 3)^2 = 9;$
$(k - 3)^2 = 9 - 8;$
$k - 3 = \pm 1;$
$k = 1 + 3;\ k = -1 + 3;$
$k = 4;\ k = 2.$
Ответ: 2; 4; 3,75; $1 \pm 2\sqrt{2}$.

436.



По условию $A(4; 4; 0)$; $B(0; 0; 0)$; $C(0; 3; 4)$; $D(1; 4; 4)$.
$ABCD$ — равнобедренная трапеция.
Найти стороны трапеции $ABCD$: AB, CD, BC, DA.

$\overrightarrow{AB}\{-4; -4; 0\};\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2};$

$\overrightarrow{BC}\{0; 3; 4\};\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0 + 3^2 + 4^2} = 5;$

$\overrightarrow{CD}\{1 - 0; 4 - 3; 4 - 4\};\ \overrightarrow{CD}\{1; 1; 0\};\ |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$

$\overrightarrow{DA}\{4 - 1; 4 - 4; 4 - 0\};\ \overrightarrow{DA}\{3; 0; 4\};\ |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{3^2 + 0 + 4^2} = 5.$

Поскольку $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DC}| = 5$, а $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ – коллинеарны, то ⏢ $ABCD$ — равнобедренная трапеция.

437. По условию $A(-2; 3; 5)$; $B(3; 2; -3)$;
а) Ox: $K(x; 0; 0)$ — точка по оси Ox, равноудаленная от точек A и B.
$KA = KB$.
$|\overrightarrow{KA}| = \sqrt{(-2 - x)^2 + 3^2 + 5^2};\ |\overrightarrow{KB}| = \sqrt{(3 - x)^2 + 2^2 + (-3)^2};$
$4 + 4x + x^2 + 9 + 25 = 9 - 6x + x^2 + 4 + 9;$
$4x + 6x = 18 + 4 - 9 - 25 - 4;$
$10x = -16;$
$x = -1{,}6 \Rightarrow C(-1{,}6; 0; 0);$
б) Oy: $D(0; y; 0)$ — точка по оси Oy, равноудаленная от точек A и B.
$AD = DB$.
$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (3 - y)^2 + 5^2};\ |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{3^2 + (2 - y)^2 + (-3)^2};$
$4 + (3 - y)^2 + 25 = 9 + (2 - y)^2 + 9;$
$29 + 9 - 6y + y^2 = 18 + 4 - 4y + y^2;$
$-6y + 38 = -4y + 22;$
$2y = 16;\ y = 8;\ D(0; 8; 0);$
в) Oz: $C(0; 0; z)$ — точка по оси Oz, равноудаленная от точек A и B.
$AC = CB$.
$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (5 - z)^2};\ |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-3 - z)^2};$

$4 + 9 + (5 - z)^2 = 9 + 4 + (-3 - z)^2;$
$25 - 10z + z^2 = 9 + 6z + z^2;$
$-16z = -16;$
$z = 1;\ C(0;\ 0;\ 1).$

438. По условию $A(-1;\ 2;\ 3)$; $B(-2;\ 1;\ 2)$; $C(0;\ -1;\ 1)$;

а) Oxy: $K(x;\ y;\ 0)$ — равноудалена от точек A, B, C. $\begin{cases} AK = BK; \\ AK = CK. \end{cases}$

$$\left|\overrightarrow{AK}\right| = \sqrt{(-1-x)^2 + (2-y)^2 + 3^2};\quad \left|\overrightarrow{BK}\right| = \sqrt{(-2-x)^2 + (1-y)^2 + 2^2};$$
$$\left|\overrightarrow{CK}\right| = \sqrt{x^2 + (-1-y)^2 + 1^2};$$
$$\begin{cases} (-1-x)^2 + (2-y)^2 + 9 = (-2-x)^2 + (1-y)^2 + 4; \\ (-1-x)^2 + (2-y)^2 + 9 = x^2 + (-1-y)^2 + 1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 + 4 - 4y + y^2 + 9 = 4 + 4x + x^2 + 1 - 2y + y^2 + 4; \\ x^2 + 2x + 1 + 4 - 4y + y^2 + 9 = x^2 + 1 + 2y + y^2 + 1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x + 14 - 4y = 9 + 4x - 2y; \\ 2x - 4y + 14 = 2 + 2y; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x + 2y = 5; \\ 2x - 6y = -12; \end{cases} \Big| - \Rightarrow\ 8y = -17;\ y = \frac{17}{8};$$
$$2x + 2 \cdot \frac{17}{8} = 5;\ 2x = 5 - \frac{17}{4} = \frac{3}{4};\ x = \frac{3}{8}.$$
$$K\left(\frac{3}{8}; \frac{17}{8}; 0\right).$$

б) Oyz: $P(0;\ y;\ z)$ — равноудалена от точек A, B, C.

$$\begin{cases} AP = BP; \\ AP = CP; \end{cases} \Rightarrow PP = CP;$$
$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (2-y)^2 + (3-z)^2};\quad \left|\overrightarrow{BP}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (1-y)^2 + (2-z)^2};$$
$$\left|\overrightarrow{CP}\right| = \sqrt{0 + (-1-y)^2 + (1-z)^2};$$
$$\begin{cases} 1 + (2-y)^2 + (3-z)^2 = 4 + (1-y)^2 + (2-z)^2; \\ 1 + (2-y)^2 + (3-z)^2 = (-1-y)^2 + (1-z)^2; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 1 + 4 - 4y + y^2 + 9 - 6z + z^2 = 4 + 1 - 2y + y^2 + 4 - 4z + z^2; \\ 1 + 4 - 4y + y^2 + 9 - 6z + z^2 = 1 + 2y + y^2 + 1 - 2z + z^2; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 5 + 9 - 4y - 6z = 5 - 2y - 4z + 4; \\ 5 + 9 - 4y - 6z = 2 + 2y - 2z; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2y + 2z = 5; \\ 6y + 4z = 12; \ |:2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2z = 5; \\ 3y + 2z = 6; \end{cases} \Big| - \Rightarrow\ y = 1;$$
$$2 \cdot 1 + 2z = 5;\ 2z = 3;\ z = \frac{3}{2}.$$
$$P\left(0; 1; \frac{3}{2}\right).$$

в) Ozx: $R(x;\ 0;\ z)$ — равноудалена от точек A, B, C. $\begin{cases} AR = BR; \\ AR = CR. \end{cases}$

$|\overrightarrow{AR}| = \sqrt{(-1-x)^2 + 2^2 + (3-z)^2}$; $|\overrightarrow{BR}| = \sqrt{(-2-x)^2 + 1^2 + (2-z)^2}$;

$|\overrightarrow{CR}| = \sqrt{x^2 + (-1)^2 + (1-z)^2}$;

$$\begin{cases} (-1-x)^2 + 4 + (3-z)^2 = (-2-x)^2 + 1^2 + (2-z)^2; \\ (-1-x)^2 + 4 + (3-z)^2 = x^2 + 1 + (1-z)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 2x + x^2 + 4 + 9 - 6z + z^2 = 4 + 4x + x^2 + 1 + 4 - 4z + z^2; \\ 1 + 2x + x^2 + 4 + 9 - 6z + z^2 = x^2 + 1 + 1 - 2z + z^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 + 9 + 2x - 6z = 9 + 4x - 4z; \\ 5 + 9 + 2x - 6z = 2 - 2z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2z = 5; \\ 2x - 4z = -12; \end{cases} \Bigg| - \Rightarrow\ 6z = 17;\ z = \frac{17}{6};$$

$$2x + 2 \cdot \frac{17}{6} = 5;\ 2x = 5 - \frac{17}{3} = -\frac{2}{3};\ x = -\frac{1}{3}.$$

$$R\left(-\frac{1}{3}; 0; \frac{17}{6}\right).$$

439. По условию $O(0;\ 0;\ 0)$; $A(4;\ 0;\ 0)$; $B(0;\ 6;\ 0)$; $C(0;\ 0;\ -2)$.

а) Точка K — центр окружности, описанной около ΔAOB.

$K(x;\ y;\ 0)$; $AK = BK = r$; $AK = OK = r$, где r — радиус окружности.

Точки A, O, B и K — лежат в одной плоскости.

Точка $O(0;\ 0;\ 0)$ — начало координат; $A(4;\ 0;\ 0)$ — лежит на оси Ox; $B(0;\ 6;\ 0)$ — лежит на оси Oy.

ΔABC — лежит в плоскости Oxy $\Rightarrow$ тогда центр описанной окружности лежит в плоскости Oxy.

$|\overrightarrow{AK}| = \sqrt{(4-x)^2 + y^2 + 0}$; $|\overrightarrow{BK}| = \sqrt{x^2 + (6-y)^2 + 0}$;

$|\overrightarrow{OK}| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$$\begin{cases} (4-x)^2 + y^2 = x^2 + (6-y)^2; \\ (4-x)^2 + y^2 = x^2 + y^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 - 8x + x^2 + y^2 = x^2 + 36 - 12y + y^2; \\ 16 - 8x + x^2 + y^2 = x^2 + y^2; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x = 12y - 20; \\ 8x = 16; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ 8 \cdot 2 + 20 = 12y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = \dfrac{36}{12} = ; \end{cases}$$

$K(2;\ 3;\ 0)$; $AK = OK = BK = r$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

б) $OABC$ — тетраэдр. $K(x;\ y;\ z)$ — равноудалена от вершин тетраэдра $OABC$.

$OK = AK$; $AK = BK$; $BK = CK$;

$|\overrightarrow{OK}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $|\overrightarrow{AK}| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2 + z^2}$; $|\overrightarrow{BK}| = \sqrt{x^2 + (y-6)^2 + z^2}$;

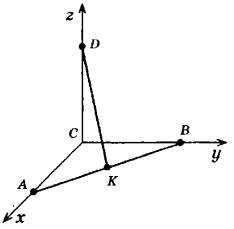
$|\overrightarrow{CK}| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+2)^2}$;

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=(x-4)^2+y^2+z^2; \\ (x-4)^2+y^2+z^2=x^2+(y-6)^2+z^2; \\ x^2+(y-6)^2+z^2=z^2+y^2+(z+2)^2; \end{cases} \begin{cases} x^2=x^2-8x+16; \\ x^2-8x+16+y^2=x^2+y^2-12y+36; \\ y^2-12y+36+z^2=y^2+z^2+4z+4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x=16; \\ -8x+12y=20; \\ 4z+12y=32; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2; \\ 12y=20+8x; \\ 12y=32-4z; \end{cases} \begin{cases} x=1; \\ 12y=20+16; \\ 36=32-4z; \end{cases} \begin{cases} x=2; \\ y=3; \\ z=-1. \end{cases}$$

$K(2; 3; -1)$.

440.



$AC = b$; $BC = a$.

$A(b; 0; 0;)$;

$B(0; a; 0)$;

$C(0; 0; 0)$;

$D(0; 0; m)$;

ΔABC — прямоугольный, $\angle C = 90°$.

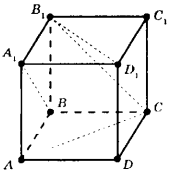
K — середина AB; $K\left(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$;

$$\left|\overline{DK}\right| = \sqrt{\left(\frac{b}{2}-0\right)^2+\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+(0-m)^2};$$

$$\left|\overline{DK}\right| = \sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}+m^2}.$$

§ 2. Скалярное произведение векторов

441. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.



а) $\angle BB_1C$ — ?

ΔBB_1C — прямоугольный, $\angle B = 90°$,

$\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \angle BB_1C = 45°$;

б) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B_1D_1}$, потому что векторы одинаково направлены и имеют одинаковую длину. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B_1D_1} = -\overrightarrow{DB}$. Тогда угол между $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DA}$ — это угол между стороной и диагональю квадрата и равен он 45°;

$\angle(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = 135° \Rightarrow$ угол между $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$ равен 135°;

в) векторы $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$ совпадают со сторонами ΔABC, что равносторонний;

г) векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, тогда $\angle(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AC}) = (\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}}) = 45°$, поскольку это угол между стороной и диагональю квадрата;

д) векторы $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Поскольку $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$, а $\angle(\overrightarrow{BB_1}; \overrightarrow{AC}) = (\widehat{\overrightarrow{AA_1}; \overrightarrow{AC}})$, то угол между векторами $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен 90°;

е) векторы $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{AD_1}$.

Точка O — точка пересечения диагоналей B_1C и BC_1 квадрата BB_1C_1C.

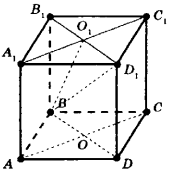
$BC_1 = 2 \cdot OC_1$; $B_1C = 2 \cdot OC \Rightarrow \angle(BC_1, B_1C) = \angle(OC_1, O_1C)$ и равен 90°;

ж) векторы $\overrightarrow{A_1D_1}$ и $\overrightarrow{BC}$. Поскольку $\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow$ угол равен 0°;

з) векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$. Поскольку $\overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{C_1C} \Rightarrow$ угол равен 180°.

442. По условию угол между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен φ, тогда угол между $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$ тоже равен φ. Угол между $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен (180° − φ). Угол между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равен (180° − φ), поскольку первые векторы образуют вертикальные углы, а два остальных — смежные.

443. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро равно a.



а) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}$ — ?

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{B_1C_1}| \cos(\widehat{\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{B_1C_1}})$;

$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{B_1C_1}| = a$; $\cos(\widehat{\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{B_1C_1}}) = 1$;

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = a^2$.

б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1}$ — ?

$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{C_1A_1}$; $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{C_1A_1}}) = \cos 180° = -1$;

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{C_1A_1}| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1} = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot (-1) = -2a^2$.

в) $\overline{D_1B}\cdot\overline{AC}$ — ?

Векторы $\overline{DB}\perp\overline{AC}$ по теореме о трех перпендикулярах.

$\cos(\widehat{\overline{D_1B}\,\overline{AC}})=\cos 90^\circ=0$; тогда $\overline{D_1B}\cdot\overline{AC}=0$.

г) $\overline{BA_1}\cdot\overline{BC_1}$ — ?

$\left|\overline{BA_1}\right|=\left|\overline{BC_1}\right|=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$; ΔA_1BC_1 — равносторонний,

$\angle A_1BC_1=60^\circ$, тогда $\cos(\widehat{\overline{BA_1},\overline{BC_1}})=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$;

$\overline{BA_1}\cdot\overline{BC_1}=\left|\overline{BA_1}\right|\cdot\left|\overline{BC_1}\right|\cos(\widehat{\overline{BA_1},\overline{BC_1}})=a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=a^2$.

д) $\overline{A_1O_1}\cdot\overline{A_1C_1}$ — ?

$\overline{A_1O_1}=\frac{1}{2}\overline{A_1C_1}$; $\cos(\widehat{\overline{A_1O_1},\overline{A_1C_1}})=\cos 0^\circ=1$;

$\left|\overline{A_1O_1}\right|=\frac{1}{2}\left|\overline{A_1C_1}\right|=\frac{1}{2}a\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\overline{A_1O_1}\cdot\overline{A_1C_1}=a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=a^2$.

е) $\overline{D_1O_1}\cdot\overline{B_1O_1}$ — ?

$\overline{D_1O_1}=\frac{1}{2}\overline{D_1B_1}$; $\overline{B_1O_1}=\frac{1}{2}\overline{B_1D_1}=-\frac{1}{2}\overline{D_1B_1}=-\overline{D_1O_1}$;

угол $(D_1O_1, B_1O_1)=180^\circ$; $\cos 180^\circ=-1$;

$\left|\overline{D_1O_1}\right|=\left|\overline{B_1O_1}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\overline{D_1O_1}\cdot\overline{B_1O_1}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot(-1)=-\frac{a^2}{2}$.

ж) $\overline{BO_1}\cdot\overline{C_1B}$ — ?

ΔBB_1O_1 — прямоугольный, ΔBA_1C_1 — равносторонний.

$\left|\overline{BB_1}\right|=a$; $\left|\overline{B_1O_1}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$\left|\overline{BO_1}\right|=\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}a$; $\left|\overline{C_1B}\right|=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

Угол $(\widehat{\overline{BO_1},\overline{C_1B}})=180^\circ-(\widehat{\overline{BO_1},\overline{BC_1}})=180^\circ-\angle O_1BC_1$;

$\angle O_1BC_1=\frac{1}{2}\angle A_1BC_1=\frac{1}{2}\cdot 60^\circ=30^\circ$;

$\overline{BO_1}\cdot\overline{C_1B}=\left|\overline{BO_1}\right|\cdot\left|\overline{C_1B}\right|\cos(180^\circ-30^\circ)$;

$\overline{BO_1}\cdot\overline{C_1B}=\sqrt{\frac{3}{2}}a\cdot a\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}a^2$.

444. Векторы: $\vec{a}\{1;-1;2\}$; $\vec{b}\{-1;1;1\}$; $\vec{c}\{5;6;2\}$;

$\vec{a}\cdot\vec{c}=1\cdot 5+(-1)\cdot 6+2\cdot 2=5-6+4=3$; $\vec{a}\cdot\vec{c}=3$;

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+2\cdot 1=(-1)+(-1)+2=0$;

$\vec{b}\cdot\vec{c}=5\cdot(-1)+6\cdot 1+2\cdot 1=-5+6+2=3$;

$\vec{a}\cdot\vec{a}=1+1+4=6$; $\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$.

445. По условию $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{j}-5\vec{k}$; $\vec{a}\{3;-5;1\}$; $\vec{b}\{0;1;-5\}$.

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 0+(-5)\cdot 1+1\cdot(-5)=-5-5=-10$;

б) $\vec{a}\cdot\vec{i}=3\cdot 1=3$; $\vec{i}\{1;0;0\}$;

в) $\vec{b}\cdot\vec{j}=1\cdot 1=1$; $\vec{j}\{0;1;0\}$;

г) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{k}=\vec{a}\vec{k}+\vec{b}\vec{k}$; $\vec{k}\{0;0;1\}$; $\vec{a}\vec{k}=1$; $\vec{b}\vec{k}=-5$; $(\vec{a}+\vec{b})\vec{k}=1-5=-4$;

д) $(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{k}+\vec{i}-2\vec{j})=\vec{a}\vec{k}+\vec{a}\vec{i}-2\vec{a}\vec{j}-2\vec{b}\vec{k}-2\vec{b}\vec{i}+4\vec{b}\vec{j}$;

$\vec{a}\vec{k}=1$; $2\vec{a}\vec{j}=2\cdot(-5)=-10$; $2\vec{b}\vec{i}=0$;

$\vec{a}\vec{i}=3$; $2\vec{b}\vec{k}=2\cdot(-5)\cdot 1=-10$; $4\vec{b}\vec{j}=4\cdot 1=4$;

$(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{k}+\vec{i}-2\vec{j})=1+3+10+10+4+0=28$.

446. $\vec{a}\{3;-1;1\}$; $\vec{b}\{-5;1;0\}$; $\vec{c}\{-1;-2;1\}$.

а) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Найдем $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$.

Если $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})<0$ — угол тупой, если $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})>0$ — угол острый, если $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})=0$ — угол прямой.

$$\cos\alpha=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

знаменатель больше нуля, потому что данные векторы не нулевые, тогда узнаем знак числителя.

а) $3\cdot(-5)+(-1)\cdot 1+0\cdot 1=-15-1=-16<0\Rightarrow$ угол $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$ тупой;

б) $-5\cdot(-1)+1\cdot(-2)+0=3>0\Rightarrow$ угол $(\widehat{\vec{b}\,\vec{c}})$ острый;

в) $3\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)+1=0\Rightarrow$ угол $(\widehat{\vec{a}\,\vec{c}})$ прямой.

447. По условию $\vec{a}\{3;-5;0\}$.

а) $\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}<90°$; $\vec{i}\{1;0;0\}$;

$\cos\alpha=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$. Знаменатель больше нуля, потому что данные векторы не нулевые. Тогда знак $\cos\alpha$ зависит от знака числителя. Если $\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}<90°\Rightarrow\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{i}})>0$;

$x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=3\cdot 0+(-5)\cdot 1+0\cdot 0=-5<0$;

б) $\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}>90°\Rightarrow\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{j}})<0$;

$x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=3\cdot 0+(-5)\cdot 1+0=-5<0\Rightarrow\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{j}})<0$;

$\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}>90°$.

в) $\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}=90°\Rightarrow\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{k}})=0$; $\cos\alpha=0\Rightarrow$ числитель равен нулю.

$x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=3\cdot 0+(-5)\cdot 0+0\cdot 1=0\Rightarrow\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}=90°$.

448. По условию $\vec{a}\{-1;2;3\}$; $\vec{b}\{5;x;-1\}$.

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$; x — ?

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\cdot5+2x+3\cdot(-1)=2x-8;\ 2x-8=3;\ x=5{,}5;$

б) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1;$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2x-8;\ 2x-8=-1;\ 2x=7;\ x=3{,}5;$

в) $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})=0;\ 2x-8=0;\ x=4.$

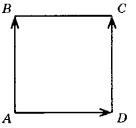
449. По условию $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k};\ \vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k};$

$\vec{a}\perp\vec{b};\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0;\ m$ — ?

$\vec{a}\{m;3;4\};\ \vec{b}\{4;m;-7\};\ \vec{a}\cdot\vec{b}=4m+3m-28=0;\ 7m=28;\ m=4.$

450. По условию $A(0;\ 1;\ 2);\ B(\sqrt{2};1;2);\ C(\sqrt{2};2;1);\ D(0;\ 2;\ 1)$

$ABCD$ — квадрат ?



$|\overline{AB}|=|\overline{DC}|\Rightarrow\overline{AB}\cdot\overline{AD}=0;\ |\overline{AB}|=|\overline{AD}|;$

$|\overline{AB}|=\sqrt{(\sqrt{2}-0)^2+(1-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{2};$

$|\overline{DC}|=\sqrt{(\sqrt{2}-0)^2+(1-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{2};$

$\overline{AB}\cdot\overline{AD}=(\sqrt{2}-1)\cdot0+0\cdot1+0\cdot(-1)=0;$

$\overline{AB}=\overline{DC}=\overline{AD};\ \overline{AB}\cdot\overline{AD}=0\Rightarrow ABCD$ — квадрат.

451. Угол $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})$ — ?

а) $\vec{a}\{2;-2;0\};\ \vec{b}\{3;0;-3\};$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})=\frac{2\cdot3+(-2)\cdot0+0\cdot(-3)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+0}\cdot\sqrt{3^2+0+(-3)^2}}=\frac{6}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2};\ \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=60^\circ;$$

б) $\vec{a}\{\sqrt{2};\sqrt{2};2);\ \vec{b}\{-3;-3;0\};$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})=\frac{-\sqrt{2}\cdot3+\sqrt{2}\cdot(-3)+2\cdot0}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+4}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0}}=\frac{-6\sqrt{2}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=180^\circ-45^\circ=135^\circ.$

в) $\vec{a}\{0;5;0\};\ \vec{b}\{0;-\sqrt{3};1\};$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})=\frac{0+5\cdot(-\sqrt{3})+0}{\sqrt{0+25+0}\cdot\sqrt{0+(-\sqrt{3})^2+1}}=\frac{-5\sqrt{3}}{5\cdot2}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=180^\circ-30^\circ=150^\circ.$

г) $\vec{a}\{-2{,}5;2{,}5;0\};\ \vec{b}\{-5;5;5\sqrt{2}\};$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})=\frac{-2{,}5\cdot(-5)+2{,}5\cdot5+0\cdot5\sqrt{2}}{\sqrt{(-2{,}5)^2+(2{,}5)^2+0}\cdot\sqrt{(-5)^2+5^2+(5\sqrt{2})^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=45^\circ.$$

д) $\vec{a}\{-\sqrt{2};-\sqrt{2};-2\};\ \vec{b}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-1\right\};$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})=\frac{(-\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+(-\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{2+2+4}\cdot\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+1}}=\frac{-1-1+2}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}=0;\ \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=90^\circ.$$

452. $\vec{a}\{2;1;2\}$; $\vec{b}\{1;0;0\}$; $\vec{j}\{0;1;0\}$; $\vec{k}\{0;0;1\}$;

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{i}})=\frac{2\cdot1+0+0}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+0+0}}=\frac{2}{3\cdot1}=\frac{2}{3}\Rightarrow\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}=50°46';$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{j}})=\frac{2\cdot0+1\cdot1+2\cdot0}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{0+1+0}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}=63°26';$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{k}})=\frac{2\cdot0+1\cdot0+2\cdot1}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{0+0+1}}=\frac{2}{3}\Rightarrow\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}=50°46'.$$

453. По условию $A(1;3;0)$; $B(2;3;-1)$; $C(1;2;-1)$;

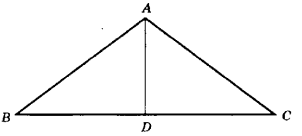
$\overrightarrow{CA}\{1-1;3-2;0+1\}$; $\overrightarrow{CA}\{0;1;1\}$;

$\overrightarrow{CB}\{2-1;3-2;-1+1\}$; $\overrightarrow{CB}\{1;1;0\}$;

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB}})=\frac{0+1+0}{\sqrt{1^2+1}\cdot\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB}}=60°$$

454. По условию $A(1;-1;3)$; $B(3;-1;1)$; $C(-1;1;3)$.

$P_{\Delta ABC}$ — ? $S_{\Delta ABC}$ — ?



$\overrightarrow{AB}\{3-1;-1+1;1-3\}$;

$\overrightarrow{AB}\{2;0;-2\}$;

$\overrightarrow{BA}\{-2;0;2\}$;

$\overrightarrow{AC}\{-1-1;1+1;3-3\}$;

$\overrightarrow{AC}\{-2;2;0\}$;

$\overrightarrow{CA}\{2;-2;0\}$;

$\overrightarrow{BC}\{-1-3;1+1;3-1\}$;

$\overrightarrow{BC}\{-4;2;2\}$;

$\overrightarrow{CB}\{4;-2;-2\}$;

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2};\quad\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2};$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6};$$

$$P=\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{2}\cdot(2+\sqrt{3});\quad S=\frac{1}{2}BC\cdot AD.$$

Найдем точку D.

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}})=\frac{-4+0}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{4+4}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\angle\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}}=120°;$$

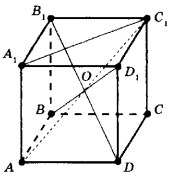
$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC}})=\frac{-2\cdot(-4)+0+4}{\sqrt{4+0+4}\cdot\sqrt{16+4+4}}=\frac{12}{4\cdot2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\angle\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC}}=30°;$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB}})=\frac{2\cdot4+(-2)\cdot(-2)+0\cdot(-2)}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{16+4+4}}=\frac{12}{2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\angle\widehat{\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB}}=30°.$$

Тогда ΔABC — равнобедренный и точка D — середина стороны BC, $D(1;0;2)$.

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2};\quad S=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$

455.



По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Допустим, сторона (ребро) куба равно a.

а) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AA_1}\ \overrightarrow{AC_1}})$ — ?

ΔAA_1C_1 — прямоугольный, $AA_1 = a$.

По теореме Пифагора:

$A_1C_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$;

$\left|\overrightarrow{AC_1}\right| = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$;

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AA_1}\ \overrightarrow{AC_1}}) = \cos\angle A_1AC_1 = \frac{AA_1}{AC_1} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

б) $\cos(\widehat{\overrightarrow{BD_1}\ \overrightarrow{DB_1}})$ — ?

Векторы $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{DB_1}$ лежат в плоскости BB_1D. BB_1D_1D — прямоугольник со сторонами a и $a\sqrt{2}$. По теореме косинусов в ΔB_1OD_1:

$$\left|\overrightarrow{B_1D_1}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OB_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OD_1}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OB_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OD_1}\right|\cos\angle B_1OD_1;$$

$$\left|\overrightarrow{OB_1}\right| = \left|\overrightarrow{OD_1}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{DB_1}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC_1}\right| = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$\left|\overrightarrow{B_1D_1}\right| = \left|\overrightarrow{A_1C_1}\right| = a\sqrt{2};$$

$$\cos\angle B_1OD_1 = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}a^2 - 2a^2}{\frac{3}{2}a^2} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}.$$

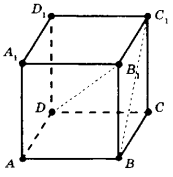
в) $\cos(\widehat{\overrightarrow{DB}\ \overrightarrow{AC_1}})$ — ?

$\overrightarrow{CC_1} \perp \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$. BD — перпендикулярно плоскости $AC_1C \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC_1}$.

$\cos(\widehat{\overrightarrow{BD}\ \overrightarrow{AC_1}}) = \cos 90° = 0.$

456.



По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольний параллелепипед.

$AB = 1$; $BC = CC_1 = 2$. $(\widehat{\overrightarrow{DB_1}, \overrightarrow{BC_1}})$ — ?

$D(0; 0; 0)$; $A(2; 0; 0)$; $B_1(2; 1; 2)$; $A_1(2; 0; 2)$;

$B(2; 1; 0)$; $C(0; 1; 0)$; $C_1(0; 1; 2)$; $D_1(0; 0; 2)$;

$\overrightarrow{DB}\{2; 1; 2\}$; $\overrightarrow{BC_1}\{0-2; 1-1; 2-0\}$; $\overrightarrow{BC_1}\{-2; 0; 2\}$;

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{DB_1}\ \overrightarrow{BC_1}}) = \frac{2\cdot(-2) + 1\cdot 0 + 2\cdot 2}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{4+0+4}} = \frac{-4+4}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{8}} = 0,$$

тогда угол $\widehat{\overrightarrow{DB_1}\ \overrightarrow{BC_1}} = 90°$.

457. По условию $\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = \widehat{\vec{b}\,\vec{c}} = 60°$; $\left|\vec{a}\right| = 1$; $\left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = 2$;

$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$;

$\vec{a}\cdot\vec{c} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{c}}) = 1\cdot 2\cos 60° = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$;

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos(\widehat{\vec{b}\,\vec{c}})=2\cdot 2\cos 60^\circ=4\cdot\frac{1}{2}=2;$

$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=1+2=3.$

458. Решение в учебнике — стр. 109.

459. По условию $\vec{a}\perp\vec{c}$; $\vec{b}\perp\vec{c}$; $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=120^\circ$; $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.

а) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(2\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot 2\vec{b}+2\vec{b}\vec{c}=2\vec{b}\vec{a}+2\vec{b}\vec{b}+2\vec{b}\vec{c};$

$\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos 120^\circ=1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2};$

$\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cos 0^\circ=1\cdot 1\cdot 1=1;$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos 90^\circ=0$, потому что $\vec{b}\perp\vec{c}$;

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(2\vec{b})=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot 1=1;$

$(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}-\vec{c})=\vec{a}\vec{a}-\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}-\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}-\vec{c}\vec{c}=\vec{a}\vec{a}-\vec{a}\vec{b}-\vec{c}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}=$

$=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0^\circ-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 120^\circ-|\vec{c}|\cdot|\vec{c}|\cos 0^\circ+|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos 90^\circ=1+\frac{1}{2}-1+0=\frac{1}{2}.$

б) $|\vec{a}-\vec{b}|$ — ?

По теореме косинусов:

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})}=\sqrt{1+1-2\cdot 1\cdot 1\cos 120^\circ}=\sqrt{3};$

$|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$ — ?

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(180^\circ-\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})}=\sqrt{1+1-2\cdot 1\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{1};$

$|\vec{c}|=1\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{(\sqrt{1})^2+(\sqrt{1})^2}=\sqrt{2}.$

460. Решение в учебнике — стр. 109.

461. По условию $ABCD$ — тетраэдр, в котором ребра все равны.
Точка M — середина AD, N — середина BC.

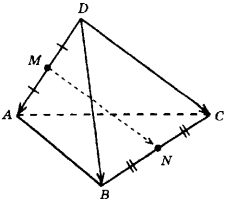
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB};$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC});$

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=$

$=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{DA}|\cdot|\overrightarrow{DB}|\cos 60^\circ+\frac{1}{2}|\overrightarrow{DA}|\cdot|\overrightarrow{DA}|\cos 0^\circ-$

$-\frac{1}{2}|\overrightarrow{DA}|\cdot|\overrightarrow{DC}|\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0.$

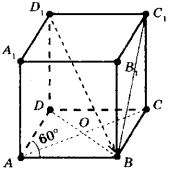


$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB})=$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}^2-$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}^2-$$
$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\cdot 0=-\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0.$$
$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}.$$

462. По условию задачи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, в котором $AA_1=AB=AD=1$; $\angle DAB=60°$; $\angle A_1AD=\angle A_1AB=90°$



а) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{D_1C_1}$ — ?

$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{D_1C_1}$; $\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{D_1C_1}=-\overrightarrow{AB}^2=-1$;

б) $\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{D_1B}$ — ?

$\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$;

$\overrightarrow{D_1B}=\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{D_1B}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}^2+$
$+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}^2-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}$; $AA_1=AB=AD=1$;

$\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{D_1B}=1\cdot 1\cos 60°-1\cdot 1\cos 60°-1^2-1\cdot 1\cos 90°=\frac{1}{2}-1-1=-1{,}5$;

в) $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}$ — ?

$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$;

$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\times$
$\times\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}^2$;

$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}=1+1\cdot 1\cos 60°+1\cdot 1\cos 60°+1+1=3+1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=4$;

г) $\left|\overrightarrow{DB_1}\right|$ — ?

Поскольку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, а $ABCD$ — ромб, $\angle A=\angle C=60°$; $AD=1$; $AB=1\Rightarrow DB=1$; $\angle ADB=\angle DBA=60°$.

В ΔDBB_1: $DB=1$; $BB_1=AA_1=1$; $\begin{matrix}BB_1\perp(ABCD)\\ AA_1\perp(ABCD)\end{matrix}\Rightarrow BB_1\parallel AA_1$;

$\left|\overrightarrow{DB_1}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{BB_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{DB}\right|^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$;

д) $\left|\overrightarrow{A_1C}\right|$ — ?

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка O — точка пересечения диагоналей ромба.

ΔADB — равносторонний, AO — высота;

$AO=AB\sin 60°=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $AC=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

ΔAA_1C — прямоугольный, $\left|\overrightarrow{A_1C}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AC}^2}=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=4$.

е) $\cos(\widehat{\overrightarrow{DA_1}\,\overrightarrow{D_1B}})$ — ?

$\overrightarrow{DA_1}=(-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AA_1}$; $\overrightarrow{D_1B}=\overrightarrow{D_1D}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{D_1B}=(\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}^2-$

$-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AA_1}^2+AA_1\times$

$\times\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{D_1B}=1-1+0-1\cdot1\cos60^\circ=-\frac{1}{2}$;

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{DA_1}\,\overrightarrow{D_1B}})=\frac{\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{D_1B}}{|\overrightarrow{DA_1}|\cdot|\overrightarrow{D_1B}|};$$

$|\overrightarrow{DA_1}|=\sqrt{AD^2+AA_1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{D_1B}|=\sqrt{2}$;

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{DA_1}\,\overrightarrow{D_1B}})=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{2-2}=-\frac{1}{4};$$

ж) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC_1}\,\overrightarrow{DB_1}})$ — ?

$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$;

$\overrightarrow{DB_1}=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$;

$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{DB_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+$

$+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}^2=$

$=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2=1+2\cdot0-1+1=1.$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AC_1}\,\overrightarrow{DB_1}})=\frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{DB_1}}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{DB_1}|};\quad |\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{A_1A_1^2+AC^2}=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2;$$

$|\overrightarrow{DB_1}|=\sqrt{2}.$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AC_1}\,\overrightarrow{DB_1}})=\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

463. Решение в учебнике стр. 109.

464. а) $A(3;-2;4)$; $B(4;-1;2)$; $C(6;-3;2)$; $D(7;-3;1)$; $\cos\varphi$ — угол между прямыми AB и CD.

$$\cos\varphi=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}};$$

$\overrightarrow{AB}\{4-3;-1-(-2);2-4\}$; $\overrightarrow{AB}\{1;1;-2\}$; $\overrightarrow{CD}\{7-6;-3+3;1-2\}$;

$\overrightarrow{CD}\{1;0;-1\}$;

$$\cos\varphi=\frac{|1\cdot1+1\cdot0+(-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{1+0+1}}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$\varphi=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=30^\circ.$

б) $A(5;-8;-1)$; $B(6;-8;-2)$; $C(7;-5;-11)$; $D(7;-7;-9)$;

$\overrightarrow{AB}\{6-5;-8+8;-2+1\}$; $\overrightarrow{AB}\{1;0;-1\}$; $\overrightarrow{CD}\{7-7;-7+5;-9+11\}$;

$\overrightarrow{CD}\{0;-2;2\}$;

$$\cos\varphi=\frac{|1\cdot 0+0\cdot(-2)-2|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{4+4}}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{1}{2};\quad \varphi=\arccos\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=60^\circ.$$

в) $A(1;\,0;\,2)$; $B(2;\,1;\,0)$; $C(0;\,-2;\,-4)$; $D(-2;\,-4;\,0)$;

$\overrightarrow{AB}\{2-1;1-0;0-2\}$; $\overrightarrow{AB}\{1;1;-2\}$; $\overrightarrow{CD}\{-2-0;-4+2;0+4\}$;

$\overrightarrow{CD}\{-2;-2;4\}$;

$$\cos\varphi=\frac{|-2-2-8|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{4+4+16}}=\frac{12}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}}=\frac{12}{12}=1;\quad \varphi=\arccos 1\Rightarrow\varphi=0^\circ.$$

г) $A(-6;\,-15;\,7)$; $B(-7;\,-15;\,8)$; $C(14;\,-10;\,9)$; $D(14;\,-10;\,7)$;

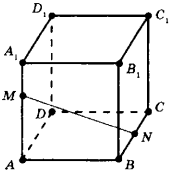
$\overrightarrow{AB}\{-7+6;-15+15;8-7\}$; $\overrightarrow{AB}\{-1;0;1\}$; $\overrightarrow{CD}\{14-14;-10+10;7-9\}$;

$\overrightarrow{CD}\{0;0;-2\}$;

$$\cos\varphi=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{0+4}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=45^\circ.$$

465. Решение в учебнике — стр. 110.

466. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка M лежит на AA_1; $AM : MA_1 = 3 : 1$; N — середина ребра BC.
Пусть сторона куба равна a.



а) $\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{DD_1}})$ — ?

$A(a;\,0;\,0)$; $B(a;\,a;\,0)$;

$C(0;\,a;\,0)$; $D(0;\,0;\,0;)$;

$A_1(a;\,0;\,a)$; $B_1(a;\,a;\,a)$;

$C_1(0;\,a;\,a)$; $D_1(0;\,0;\,a)$;

$M\left(a;0;\frac{3}{4}a\right)$; $N\left(\frac{1}{2}a;a;0\right)$;

$\overrightarrow{MN}=\left\{\frac{1}{2}a-a;a-0;0-\frac{3}{4}a\right\}$; $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{1}{2}a;a;-\frac{3}{4}a\right)$; $\overrightarrow{DD_1}\{0;0;a\}$;

$$\cos\varphi=\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{DD_1}})=\frac{\left|0+0-\frac{3}{4}a^2\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2+a^2+\frac{9}{16}a^2}\cdot\sqrt{0+0+a^2}}=\frac{\frac{3}{4}a^2}{a\sqrt{\frac{29}{16}}\cdot a}=\frac{3}{\sqrt{29}};$$

б) $\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{BD}})$ — ?

$\overrightarrow{MN}\left\{-\frac{1}{2}a;a;-\frac{3}{4}a\right\}$; $\overrightarrow{BD}\{-a;-a;0\}$;

$$\cos\varphi=\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{BD}})=\frac{\left|\frac{1}{2}a^2-a^2+0\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2+a^2+\frac{9}{16}a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2}}=\frac{a^2\cdot\frac{1}{2}}{a\sqrt{\frac{29}{16}}\cdot a\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{4}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}}=\frac{2}{\sqrt{58}};$$

в) $\cos(\widehat{\overline{MN}\,\overline{B_1D}})$ — ?

$\overline{MN}\left\{-\frac{1}{2}a; a; -\frac{3}{4}a\right\}$; $\overline{B_1D}\{-a; -a; a\}$;

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\overline{MN}\,\overline{B_1D}}) = \frac{\left|\frac{1}{2}a^2 - a^2 + \frac{3}{4}a^2\right|}{a\sqrt{\frac{29}{16}}\cdot\sqrt{3a^2}} = \frac{a^2\cdot 1}{a^2 4\cdot\frac{\sqrt{29}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{16}}} = \frac{1}{\sqrt{3\cdot 29}} = \frac{1}{\sqrt{87}};$$

г) $\cos(\widehat{\overline{MN}\,\overline{A_1C}})$ — ?

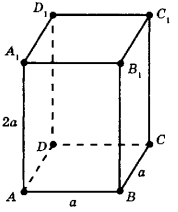
$\overline{MN}\left\{-\frac{1}{2}a; a; -\frac{3}{4}a\right\}$; $\overline{A_1C}\{-a; a; -a\}$;

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\overline{MN}\,\overline{A_1C}}) = \frac{\left|\frac{1}{2}a^2 + a^2 + \frac{3}{4}a^2\right|}{a\sqrt{\frac{29}{16}}\cdot a\sqrt{3}} = \frac{a^2 9\sqrt{16}}{a^2 4\sqrt{29}\cdot\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}.$$

467. По условию задачи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед.

Пусть $AB = BC = a \Rightarrow AA_1 = 2a$.

$A(a; 0; 0)$;
$B(a; a; 0)$;
$C(0; a; 0)$;
$D(0; 0; 0)$;
$A_1(a; 0; 2a)$;
$B_1(a; a; 2a)$;
$C_1(0; a; 2a)$;
$D_1(0; 0; 2a)$.



а) $\cos(\widehat{\overline{BD}\,\overline{CD_1}})$ — ?

$\overline{BD}\{-a; -a; 0\}$; $\overline{CD_1}\{0; -a; 2a\}$;

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\overline{BD}\,\overline{CD_1}}) = \frac{|0 + a^2 + 0|}{\sqrt{a^2 + a^2}\cdot\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \varphi \approx 71°34';$$

б) $\cos(\widehat{\overline{AC}\,\overline{AC_1}})$ — ?

$\overline{AC}\{-a; a; 0\}$; $\overline{AC_1}\{-a; a; 2a\}$;

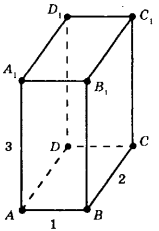
$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\overline{AC}\,\overline{AC_1}}) = \frac{|a^2 + a^2 + 0|}{\sqrt{a^2 + a^2}\cdot\sqrt{a^2 + a^2 + 4a^2}} = \frac{2a^2}{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 54°44'.$$

468. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед.

$AB = 1$; $BC = 2$; $BB_1 = 3$.

$A(2; 0; 0)$;
$B(2; 1; 0)$;
$C(0; 1; 0)$;
$D(0; 0; 0)$;
$A_1(2; 0; 3)$;
$B_1(2; 1; 3)$;
$C_1(0; 1; 3)$;
$D(0; 0; 3)$.



а) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{D_1B}})$ — ?

$\overrightarrow{AC}\{-2; 1; 0\}$; $\overrightarrow{D_1B}\{2; 1; -3\}$;

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{D_1B}}) = \frac{|-4+1|}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{4+1+9}} = \frac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{70}};$$

б) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB_1}\,\overrightarrow{BC_1}})$ — ?

$\overrightarrow{AB_1}\{0; 1; 3\}$; $\overrightarrow{BC_1}\{-2; 0; 3\}$;

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB_1}\,\overrightarrow{BC_1}}) = \frac{|0+0+9|}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{4+9}} = \frac{9}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{130}};$$

в) $\cos(\widehat{\overrightarrow{A_1D}\,\overrightarrow{AC_1}})$ — ?

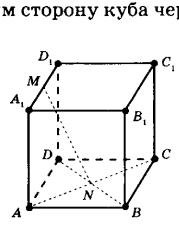
$\overrightarrow{A_1D}\{-2; 0; -3\}$; $\overrightarrow{AC_1}\{-2; 1; 3\}$;

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{A_1D}\,\overrightarrow{AC_1}}) = \frac{|4-9|}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{4+1+9}} = \frac{5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{182}}.$$

469. По условию $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $ABCD$ — квадрат, диагонали пересекаются в точке N. Обозначим сторону куба через a.

а) $\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}\,(ABCD)})$ — ?

$A(a; 0; 0)$;
$B(a; a; 0)$;
$C(0; a; 0)$;
$D(0; 0; 0)$;
$A_1(a; 0; a)$;
$B_1(a; a; a)$;
$C_1(0; a; a)$;
$D_1(0; 0; a)$;



$M\left(\frac{4}{5}a; 0; a\right)$; $N\left(\frac{1}{2}a; \frac{1}{2}a; 0\right)$.

Тогда $\overrightarrow{DA}\{a; 0; 0\}$; $\overrightarrow{DC}\{0; a; 0\}$; $\overrightarrow{DD_1}\{0; 0; a\}$; $\overrightarrow{MN}\left\{-\frac{3}{10}a; \frac{1}{2}a; -a\right\}$.

$\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}\,(ABCD)}) = \left|\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{DD_1}})\right|$, поскольку $\overrightarrow{DD_1} \perp (ABCD)$;

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}\,(ABCD)}) = \left|\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{DD_1}})\right| = \frac{|0+0-a^2|}{\sqrt{\frac{9}{100}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + a^2}\cdot\sqrt{a^2}} =$$

$$=\frac{\sqrt{100}a^2}{a^2\sqrt{134}}=\frac{10}{\sqrt{134}};$$

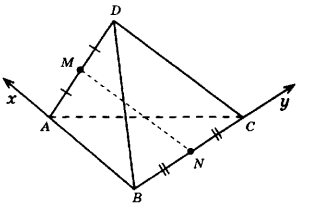
б) $\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}\,(DD_1C_1C)})$ — ? Поск ольку $\overrightarrow{DA}\perp(DD_1C_1C)$;

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}\,(DD_1C_1C)})=\left|\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{DA}})\right|=\frac{\left|-\frac{3}{10}a\cdot a+0\right|}{\sqrt{\frac{9}{100}a^2+\frac{1}{4}a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2}}=\frac{3}{\sqrt{134}};$$

в) $\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}\,(AA_1D_1D)})$ — ? Поскольку $\overrightarrow{DC}\perp(AA_1D_1D)$;

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}\,(AA_1D_1D)})=\left|\cos(\widehat{\overrightarrow{DC}\,\overrightarrow{MN}})\right|=\frac{\left|\frac{1}{2}a\cdot a+0\right|}{\sqrt{\frac{9}{100}a^2+\frac{1}{4}a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2}}=\frac{5}{\sqrt{134}}.$$

470. По условию $ABCD$ — тетраэдр. $\angle ABD=\angle ABC=\angle DBC=90°$; $AB=BD=2$; $BC=1$.



$A(2;0;0)$;
$B(0;0;0)$;
$C(0;1;0)$;
$D(0;0;2)$;
$M(1;0;1)$;
$N\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

а) M — середина AD;
N — середина BC;

$\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}\,(ABD)})=\left|\cos(\widehat{\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{MN}})\right|$, потому что $\overrightarrow{BC}\perp(ABD)$;

$\overrightarrow{BC}\{0;1;0\}$; $\overrightarrow{MN}\left\{-1;\frac{1}{2};-1\right\}$;

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}\,(ABD)})=\left|\cos(\widehat{\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{MN}})\right|=\frac{\left|0+\frac{1}{2}+0\right|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}}}=\frac{1}{3};$$

б) $\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}\,(DBC)})$ — ?

$\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}\,(DBC)})=\left|\cos(\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{MN}})\right|$, потому что $\overrightarrow{BA}\perp(DBC)$;

$\overrightarrow{BA}\{2;0;0\}$; $\overrightarrow{MN}\left\{-1;\frac{1}{2};-1\right\}$;

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{MN}\,(DBC)})=\left|\cos(\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{MN}})\right|=\frac{|-2|}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}}=\frac{2}{2\sqrt{\frac{9}{4}}}=\frac{2}{3};$$

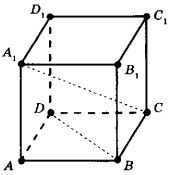
в) $\sin(\widehat{\overline{MN}\,(ABC)})$ — ?

$\sin(\widehat{\overline{MN}\,(ABC)}) = \left|\cos(\widehat{\overline{BD}\,\overline{MN}})\right|$, потому что $\overline{BD} \perp (ABC)$;

$\overline{BD}\{0; 0; 2\}$; $\overline{MN}\left\{-1; \frac{1}{2}; -1\right\}$;

$$\sin(\widehat{\overline{MN}\,(ABC)}) = \left|\cos(\widehat{\overline{BD}\,\overline{MN}})\right| = \frac{|-2|}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}} = \frac{2}{2\cdot\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

471. По условию задачи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, A_1C — диагональ куба, DB — диагональ грани куба.

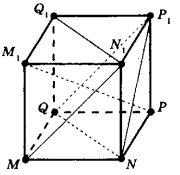


$D(0; 0; 0)$;
$A(a; 0; 0)$;
$B(a; a; 0)$;
$C(0; a; 0)$;
$A_1(a; 0; a)$;
$B_1(a; a; a)$;
$C_1(0; a; a)$;
$D_1(0; 0; a)$;

$\overline{A_1C}\{-a; a; -a\}$; $\overline{DB}\{a; a; 0\}$;

$\cos(\widehat{\overline{DB}\,\overline{A_1C}}) = \dfrac{|-a\cdot a + a\cdot a|}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2+a^2}} = 0 \Rightarrow \widehat{\overline{DB}\,\overline{A_1C}} = 90°$, что и требовалось доказать.

472. По условию $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ — куб. Пусть ребро куба равно a.



$Q(0; 0; 0)$;
$Q_1(0; 0; a)$;
$N(a; a; 0)$;
$N_1(a; a; a)$;
$M(a; 0; 0)$;
$M_1(a; 0; a)$;
$P(0; a; 0)$;
$P_1(0; a; a)$;

$\overline{PM_1}\{a; -a; a\}$;

$\cos(\widehat{\overline{PM_1}\,\overline{MQ_1}}) = \dfrac{|-a^2+a^2|}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2}} = 0 \Rightarrow$ угол между прямыми равен 90°.

Значит, $PM_1 \perp MQ_1$.

$\overline{MN_1}\{0; a; a\}$;

$\cos(\widehat{\overline{PM_1}\,\overline{MN_1}}) = \dfrac{|-a^2+a^2|}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2}} = 0 \Rightarrow$ угол между прямыми равен 90°.

Значит, $PM_1 \perp NM_1 \Rightarrow PM_1 \perp MN_1$ лежит в плоскости MN_1Q_1; MQ_1 лежит в плоскости MN_1Q_1. Эти прямые пересекаются в точке $M \Rightarrow$ $\Rightarrow PM_1 \perp (MN_1Q_1)$.

Докажем, что $PM_1 \perp (QNP_1)$.

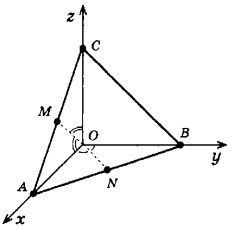
$\overline{QN}\{a; a; 0\}$; $\overline{QP_1}\{0; a; a\}$; $\overline{PM_1}\{a; -a; a\}$;

$\cos(\widehat{\overline{PM_1}\,\overline{QN}}) = \dfrac{|a^2 - a^2|}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2}} = 0 \Rightarrow$ угол между прямыми равен 90°;

$\cos(\widehat{\overline{PM_1}\,\overline{QP_1}}) = \dfrac{|-a^2+a^2|}{\sqrt{3a^2}\cdot\sqrt{2a^2}} = 0 \Rightarrow$ угол между прямыми равен 90°.

Аналогично, прямая $PM_1 \perp (QNP_1)$.

473. OA, OB, OC — лучи, что отложены на осях Ox, Oy, Oz.
$OA = OB = OC = 1$.
OM и ON — биссектрисы углов.



$AM = MC = \dfrac{1}{2}AC$; $AN = NB = \dfrac{1}{2}AB$;
$A(1; 0; 0)$;
$B(0; 1; 0)$;
$C(0; 0; 1)$;
$M\left(\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{2}\right)$;
$N\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 0\right)$;

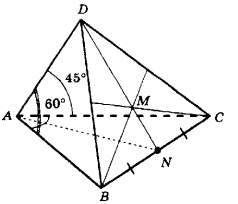
$\overline{OM}\left\{\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{2}\right\}$; $\overline{ON}\left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 0\right\}$;

$$\cos(\widehat{\overline{OM}\,\overline{ON}}) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 + 0}{\sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2};$$

$(\widehat{\overline{OM}\,\overline{ON}}) = \arccos\dfrac{1}{2} = 60° \Rightarrow \angle MON = 60°$.

474. Решение в учебнике — стр. 111.

475. По условию $DABC$ — тетраэдр.
$AB = 4$ см;
$AC = 3$ см;
$DA = 5$ см;
$\angle BAC = 90°$;
$\angle DAB = 60°$;



$\angle DAC = 45°$;

$A(0;0;0)$; $C(0;3;0)$; $B(4;0;0)$; $D(5\cos 60°; 5\cos 45°; 5\sin\varphi)$;

$\angle DAN = \varphi$.

$\overline{AD}\left\{5\cdot\frac{1}{2}; 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}; 5\sin\varphi\right\}$; $\overline{AD}\left\{\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}; 5\sin\varphi\right\}$; $\overline{AD}\cdot\overline{AD} = \left|\overline{AD}\right|^2 = 25$;

$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (5\sin\varphi)^2 = 25$; $\frac{25}{4} + \frac{25}{2} + 25\sin^2\varphi = 25$;

$\sin^2\varphi = \left(25 - \frac{25}{4} - \frac{25}{2}\right)\cdot\frac{1}{25}$; $\sin^2\varphi = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30°$;

$\overline{AD}\left\{\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5}{2}\right\} \Rightarrow \angle DAN = 30°$;

$\overline{AN}\left\{2; \frac{3}{2}; 0\right\}$; $\left|\overline{AN}\right| = \sqrt{4 + \frac{9}{4} + 0} = \frac{5}{2}$;

$\overline{AM} = \overline{AN} + \overline{NM} = \overline{AN} + \frac{1}{3}\overline{ND} = \overline{AN} + \frac{1}{3}(\overline{AD} - \overline{AN}) = \frac{1}{3}\overline{AD} + \frac{2}{3}\overline{AN}$;

$\overline{AM}\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2} + \frac{2}{3}\cdot 2; \frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\right\}$; $\overline{AM}\left\{\frac{13}{6}; \frac{5\sqrt{2}+6}{6}; \frac{5}{6}\right\}$;

$$\left|\overline{AM}\right| = \sqrt{\left(\frac{13}{6}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}+6}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{169 + 25\cdot 2 + 2\cdot 5\sqrt{2}\cdot 6 + 36 + 25}}{6} =$$

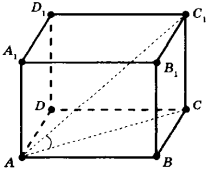
$$= \frac{1}{6}\sqrt{280 + 60\sqrt{2}} = \frac{2}{6}\sqrt{70 + 15\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{70 + 15\sqrt{2}}.$$

476. По условию задачи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед.

$\angle CAC_1$ — ?

$\overline{AC_1}(\cos 60°; \cos 60°; \sin\angle CAC_1)$.

Пусть AC_1 — единичный вектор.



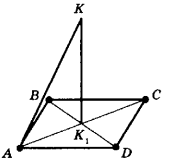
$\overline{AC_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\angle CAC_1 = 1$;

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \sin^2\angle CAC_1 = 1$;

$\sin^2\angle CAC_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\angle CAC_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\angle CAC_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$.

477. По условию $ABCD$ — квадрат, точка K не лежит в плоскости квадрата. K_1 — точка пересечения диагоналей. Сторона квадрата равна a.



$\overrightarrow{AD}\{a;0;0\}$;

$\overrightarrow{AB}\{0;a;0;\}$;

$\overrightarrow{BD}\{a;-a;0\}$;

$K_1\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$; $K\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};b\right)$; $KK_1=b$; $\overrightarrow{AK}\left\{\frac{a}{2};\frac{a}{2};b\right\}$.

Из ΔBAD: $\angle A=90°$; $BD=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

Из ΔAKK_1: $\angle K_1=90°$; $AK_1=\frac{1}{2}BD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$$AK=\sqrt{b^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4b^2+2a^2}{4}}=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}};$$

$$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BD}=\left|\overrightarrow{AK}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos(\widehat{\overrightarrow{AK}\,\overrightarrow{BD}});$$

$$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BD}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+0=0;$$

$$0=a\sqrt{2}\cdot\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}}\cos(\widehat{\overrightarrow{AK}\,\overrightarrow{AD}}).$$

Векторы не нулевые $\Rightarrow$ $\cos(\widehat{\overrightarrow{AK}\,\overrightarrow{BD}})=0\Rightarrow$ угол $\widehat{\overrightarrow{AK}\,\overrightarrow{BD}}=90°$.

§ 3. Движение

478. По условию:

а) $A(0;1;2)$, $B(3;-1;4)$, $C(1;0;-2)$ — симметрия относительно начала координат: $A_1(0;-1;-2)$, $B_1(-3;1;-4)$, $C_1(-1;0;2)$

б) $A(0;1;2)$, $B(3;-1;4)$, $C(1;0;-2)$ — симметрия относительно оси Ox: $A_1(0;-1;-2)$, $B_1(3;1;-4)$, $C_1(1;0;2)$

симметрия относительно оси Oy: $A_2(0;1;-2)$, $B_2(-3;-1;-4)$, $C_2(-1;0;2)$

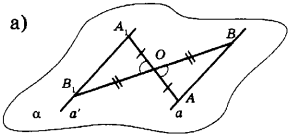
симметрия относительно оси Oz: $A_3(0;-1;2)$, $B_3(-3;1;4)$, $C_3(-1;0;-2)$

в) $A(0;1;2)$, $B(3;-1;4)$, $C(1;0;-2)$ — зеркальная симметрия относительно плоскости Oxy: $A_1(0;1;-2)$, $B_1(3;-1;-4)$, $C_1(1;0;2)$

зеркальная симметрия относительно оси Oyz: $A_2(0;1;2)$, $B_2(-3;-1;4)$, $C_2(-1;0;-2)$

зеркальная симметрия относительно оси Oxz: $A_3(0;-1;2)$, $B_3(3;1;4)$, $C_3(1;0;-2)$

479. а)



Пусть O — центр симметрии.
a — данная прямая;
α — плоскость, что провели через точку O и прямую a (по теореме о существовании единственной плоскости).

Точка $A \in a$, $AO = A_1O$; точка A_1 симметрична точке A.
Точка $B \in a$; $BO = OB_1$; точка B_1 симметрична точке B.

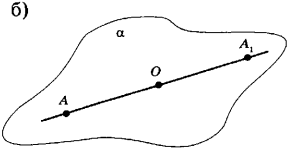
Через точки A_1 и B_1 провели прямую a'.

$$\Delta AOB \text{ и } \Delta A_1OB_1: \left.\begin{array}{l} AO = A_1O \\ BO = B_1O \\ \angle A_1OB_1 = \angle AOB \end{array}\right\} \Delta AOB = \Delta A_1OB_1$$

как вертикальные.

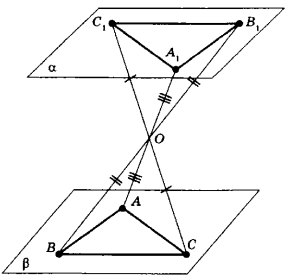
Отсюда $\angle B = \angle B_1$ и $a \| a'$.

б)



Пусть точка $A \in a$. $AO = OA_1$; A_1 — симметрична точке A. Поскольку точку A выбрано произвольно, то любая точка прямой a также симметричная точке относительно центра O лежит на прямой a. Прямая a переходит сама в себя при условии, что проходит через центр симметрии.

480. а)



Допустим точка O — центр симметрии, α — плоскость, точка $C \in \alpha$, $OC_1 = OC$; точка $A \in \alpha$, $AO = OA_1$ и точка $B \in \alpha$, $OB = OB_1$. Точки A_1, B_1, $C_1 \in$ плоскости α_1.

Соединив точки A, B, C, A_1, B_1, C_1, получим равные пары треугольников: $\Delta OAC = \Delta OA_1C_1 \Rightarrow OA_1 = OA$, $OC_1 = OC$ и вертикальные углы $\angle AOC = \angle A_1OC_1$.

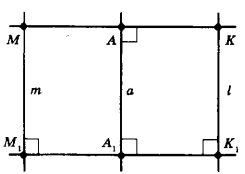
Из равенства треугольников $\Rightarrow$ $AC = A_1C_1$. Тогда $\angle A_1C_1O = \angle ACO$, поскольку $A_1C_1 \| AC$. Аналогично, $\Delta OAB = \Delta OA_1B_1 \Rightarrow A_1B_1 \| AB$.

Если две пересекающиеся прямые в одной плоскости соответственно параллельны двум другим прямым в другой плоскости, то эти плоскости параллельны, то есть $\alpha \| \beta$.

б) Если точка $O \in \alpha$, то любая точка плоскости β имеет симметричную ей точку O_1 тоже принадлежащую плоскости α.

Тогда для точки $A \in \alpha$ есть симметричная точка $A_1 \in \alpha$, для $B \in \alpha$ есть точка $B_1 \in \alpha$, для $C \in \alpha$ есть $C_1 \in \alpha$. А через три точки A_1, B_1, C_1 плоскости β можно провести единственную плоскость, что совпадает с плоскостью α.

481. а)



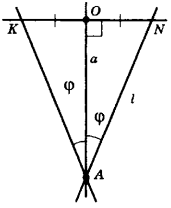
Пусть прямая a — ось симметрии, $l \| a$.

Из точки $K \in l$ есть перпендикуляр $KA \perp a$, $KA = AM$.

Из точки $K_1 \in l$ проведем $K_1A_1 \perp a$, $A_1M_1 = K_1A_1$. Прямые a и l лежат в одной плоскости, тогда KMM_1K_1 — плоский четырехугольник.

$MK = M_1K_1$, $MK \perp l$, $M_1K_1 \perp l \Rightarrow MK \| M_1K_1 \Rightarrow MKK_1M_1$ — прямоугольник. Тогда $m \| l$.

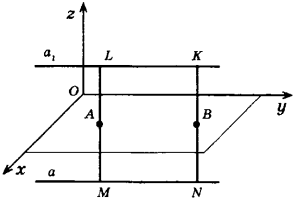
б)



Если прямая a не параллельна $l \Rightarrow a$, пересекается с прямой в точке A. Пусть $N \in l$, $NO \perp a$, пусть $NO = OK$. Через точку K проведем прямую KA.

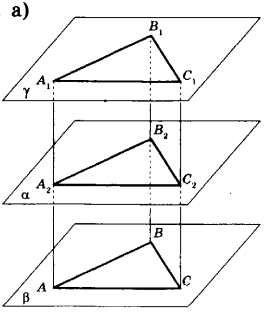
ΔAOK и ΔAON: $NO = OK$, AO — общий катет, тогда эти треугольники равны. Тогда прямая KA образует угол φ с осью симметрии, где $\varphi = \angle AON = \angle OAK$.

482. Пусть прямая a параллельна плоскости Oxy. Точки M, L, K, N симметричны. $MA = AL$; $NB = BK$.



$NB = MA = BK = AL \Rightarrow ML \| NK$;
$ML = NK \Rightarrow MNKL$ — прямоугольник, поскольку $LK \| MN$. $a \| a_1$, тогда a и a_1 лежат в плоскости Oxy. А если прямая a не параллельна плоскости Oxy, тогда прямая пересекает эту плоскость в точке P, а при симметрии точка P переходит в себя, так как лежит в плоскости Oxy. То есть точка $P \in a_1 \Rightarrow a$ и a_1 имеют общую точку и лежат в одной плоскости.

483. а)



Три точки A, B, C не лежат на одной прямой. Проведем $AA_2 \perp \alpha$, $BB_2 \perp \alpha$, $CC_2 \perp \alpha$. Продлив эти отрезки, получим точки A_1, B_1, C_1.

$A_1A_2 = AA_2$; $B_1B_2 = BB_2$; $C_1C_2 = CC_2$ AA_1B_1B — прямоугольник $\Rightarrow AA_1 = BB_1$; $AA_1 \| BB_1$. Таким образом, $A_1B_1 \| AB$. BB_1C_1C — прямоугольник $\Rightarrow BB_1 = CC_1$; $BB_1 \| CC_1$. Таким образом, $B_1C_1 \| BC$.

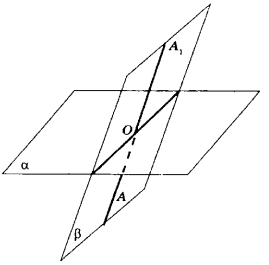
Плоскость γ проходит через точки A_1, B_1, C_1 и она единственная. Если две прямые AB и BC пересекаются в плоскости β и параллельны двум прямым A_1B_1 и B_1C_1 другой плоскости $\gamma \Rightarrow$ плоскости $\gamma \| \beta$.

б) По условию $\beta \perp \alpha$.

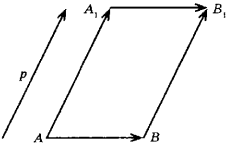
Точка $A \in \beta$, $AO \perp \alpha$, $A_1O = AO$.

α и β — две взаимно перпендикулярные плоскости, к одной проведен перпендикуляр, что имеет общую точку с другой плоскостью ⇒ перпендикуляр весь лежит в этой плоскости.

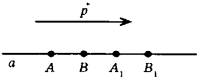
$AO \subset \beta \Rightarrow AA_1 \subset \beta$. То есть точка плоскости β отображается в точку ей симметричную, которая принадлежит плоскости ⇒ плоскость β отображается сама на себя.



484. а) $AB \| A_1B_1 \Rightarrow A_1B_1 = AB$; $\overrightarrow{AA_1} = \vec{p}$; $\overrightarrow{BB_1} = \vec{p}$.
По правилу треугольника $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} \Rightarrow$
$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$; $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$; или
$\vec{p} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \vec{p} \Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$;



б) $a \| \vec{p}$; $A \in a \Rightarrow$ точка A перейдет в точку $A_1 \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \vec{p}$. $\overrightarrow{AA_1}$ и $\vec{p}$ лежат в одной плоскости. В плоскости через точку A можно провести только одну прямую $AA_1 \| \vec{p} \Rightarrow A_1 \in a$.



Для точки $B \in a \Rightarrow$ каждая точка прямой a переходит в точку прямой $a_1 \Rightarrow$ прямая отображается на себя. Прямая a содержит $\vec{p}$, тогда доказательство верно, просто векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\vec{p}$ лежат на a.

485. По условию $A_1B_1C_1$ — треугольник, полученный параллельным переносом ΔABC на вектор $\vec{p}$,

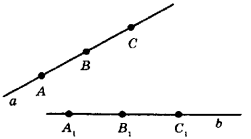
$$AB = A_1B_1$$

тогда $BC = B_1C_1 \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. M — точка ΔABC.

$$AC = A_1C_1$$

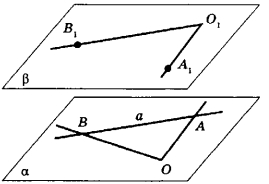
$AM = A_1M_1$, AMM_1A_1 — параллелограмм, потому что $AM \| A_1M_1$;
$AM = A_1M_1$; $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{MM_1} = \vec{p}$.

486. а)



По условию дана прямая a. Возьмем точки A, B, C на прямой a. При движении эти точки перейдут в A_1, B_1, C_1.
$AB = A_1B_1$; $BC = B_1C_1$; $AC = A_1C_1$; $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1 \Rightarrow$ три точки лежат на одной прямой.
$A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1 \Rightarrow$ точки A, B, C выбрано произвольно $\Rightarrow$ движение переводит прямую в прямую.

б) В плоскости α проведем прямую a и возьмем точку $O \notin a$.
Из точки O проведено пересекающие прямую a в точках A и B.

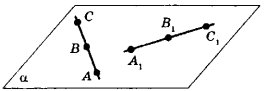


При движении: $\begin{matrix} O \to O_1 \\ A \to A_1 \end{matrix} \Rightarrow OA = O_1A_1$;

$B \to B_1 \Rightarrow OB = O_1B_1$.

Тогда через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и только одна.

487. а) По условию AC — отрезок, $AC \subset \alpha$.



Точка $B \in AC$.

При движении: $\begin{matrix} A \to A_1 \\ C \to C_1 \\ B \to B_1 \end{matrix} \Rightarrow AB + BC = AC$.

При движении расстояние между точками сохраняется $\Rightarrow$

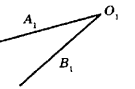
$AB = A_1B_1$

$BC = B_1C_1 \Rightarrow A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$.

$AC = A_1C_1$

Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

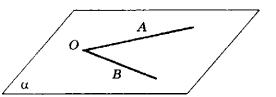
б) По условию $\angle AOB$ — угол в плоскости α



$O \to O_1 \quad OA = O_1A_1$

При движении: $A \to A_1 \Rightarrow OB = O_1B_1$

$B \to B_1 \quad AB = A_1B_1$.



$\Delta OAB = \Delta O_1A_1B_1$ по трем сторонам.

Если $\angle AOB = 180° \Rightarrow \angle A_1O_1B_1 = 180°$.

$AB = A_1B_1$

Итак, $AO = A_1O_1 \Rightarrow AO_1 + O_1B_1 = A_1B_1$.

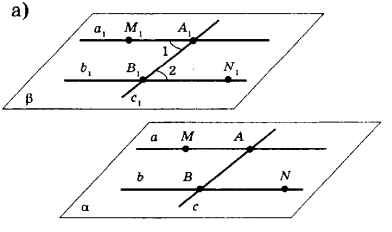
$OB = O_1B_1$

Точки A_1, O_1, B_1 лежат на одной прямой.

$\angle A_1O_1B_1$ — развернутый $\Rightarrow \angle A_1O_1B_1 = 180°$.

488. По условию $a \| b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$.

а)

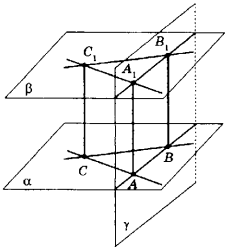


Пересечем a и b прямой $c \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$. $\angle 1$ и $\angle 2$ — внутренние накрестлежащие. Точки M и N — произвольные.

При движении: $\angle MAB \to$ $\to \angle M_1A_1B_1$; $\angle ABN \to$ $\to \angle A_1B_1N_1$; $\alpha \to \beta$.

Углы $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 1 = \angle 2$ по признаку параллельности прямых $M_1A_1 \| B_1N_1$ и $a_1 \| b_1 \Rightarrow a \to a_1$, $a \| a_1$; $b \to b_1$, $b \| b_1$.

б)



По условию плоскости $\alpha \| \beta$. Плоскости α и β пересечены $\gamma \Rightarrow A_1B_1 \| AB$.

$AA_1 = BB_1 = CC_1 \Rightarrow ABCA_1B_1C_1$ — призма.

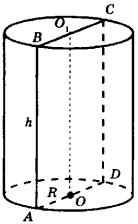
При движении угол → угол. При этом основания призм $A_1B_1C_1$ и ABC остаются параллельными друг другу и плоскости, которые можно провести через вершины A, B, C и A_1, B_1, C_1 будут параллельны друг другу.

489. а) По условию дана окружность. Поскольку при движении отрезок переходит в такой же отрезок, то $R \to R_1$. $OA = O_1A_1 = R$.
Поскольку окружность — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от центра на R, то при движении окружность перейдет в окружность того же радиуса, потому что длина отрезков сохраняется.
б) При движении ребра прямоугольного параллелепипеда переходят в такие же ребра без сдвигов и поворотов относительно друг друга и длины и углы остаются без изменений.

ГЛАВА VI. ЦИЛИНДР, КОНУС, ШАР

§ 1. Цилиндр

521.



По условию дан цилиндр, одно основание цилиндра получено из другого параллельным переносом, а поскольку параллельный перенос сохраняет расстояния, то $BC = AD$ и $AB = CD \Rightarrow ABCD$ — прямоугольник. $R = 1{,}5$ м, $h = 4$ м.

По теореме Пифагора:

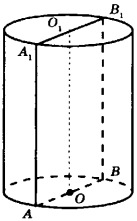
$$AC = BD = \sqrt{4^2 + (2R)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ м}; \; 2R = D = 3 \text{ м}.$$

522. По условию дан цилиндр. AA_1B_1B — прямоугольник. Из ΔAB_1B: $\angle B_1 = 60°$; $AB = 2R = AB_1 \sin \angle B_1$; $\angle B = 90°$;

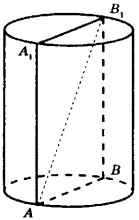
$AB = 48 \sin 60° = 24\sqrt{3}$ см; $R = 12\sqrt{3}$ см.

$$H = B_1B = AA_1 = AB_1 \cos \angle B_1 = 48 \cos 60° = 48 \cdot \frac{1}{2} = 24 \text{ см};$$

$$S_{осн} = \pi R^2 = \pi (12\sqrt{3})^2 = \pi \cdot 144 \cdot 3 = 432\pi \text{ см}^2.$$



523.



По условию дан цилиндр, осевое сечение которого — квадрат. AA_1B_1B — квадрат. $AA_1 = AB = H$; $AB_1 = 20$ см. По теореме Пифагора:

$$H^2 + H^2 = AB_1^2; \; 2H^2 = 400; \; H^2 = 200 \Rightarrow H = 10\sqrt{2};$$

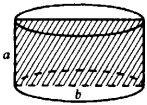
$$R = \frac{H}{2} = 5\sqrt{2};$$

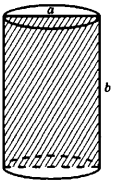
$$S_{осн} = \pi R^2 = \pi \cdot (5\sqrt{2})^2 = 50\pi \text{ см}^2.$$

524. Нет.

Два цилиндра.

Осевые сечения равны, а высоты разные, видно по рисунку.



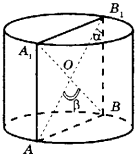


525. По условию дан цилиндр. Площадь сечения 10 м². Площадь основания 5 м². h — ?

$S_{сеч} = 2Rh = 10$; $S_{осн} = \pi R^2 = 5$;

$$\begin{cases} 2Rh = 10; \\ \pi R^2 = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Rh = 5; \\ \pi R^2 = 5; \end{cases} \Rightarrow R = \frac{5}{h}; \quad \pi \cdot \left(\frac{5}{h}\right)^2 = 5; \ \frac{5\pi}{h^2} = 1 \Rightarrow h = \sqrt{5\pi}\text{ м}.$$

526.



По условию дан цилиндр.

$$\frac{S_{осн}}{S_{осев.сеч.}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}; \ S_{осн} = \pi R^2; S_{осев.сеч} = 2Rh;$$

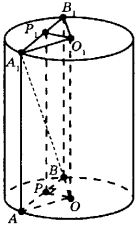
$$\frac{\pi R^2}{2Rh} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \Rightarrow \frac{R}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2R}{h} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$; $\gamma = 90° - \alpha = 30°$;

б) $\angle\beta = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$;

$\angle B_1AB = 30°$; $\angle A_1BA = 30°$; $\angle AOA_1 = 60°$.

527.



По условию дан цилиндр: r — радиус, h — высота, $OP_1 = d$. A_1B и OO_1 — скрещивающиеся прямые.

а) r — 10 дм; $d = 8$ дм; $A_1B = 13$ дм. AA_1B_1B — прямоугольник.

$\rho(A_1B_1OO_1) = \rho((AA_1B)OO_1)$; $OP \perp AB$; $\rho(A_1B_1OO_1) = OP = d$;

$AP = BP = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (дм); $AB = 2AP = 2 \cdot 6 = 12$ (дм).

По теореме Пифагора:

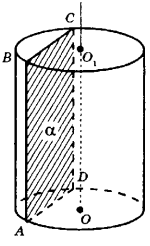
$$H = \sqrt{A_1B^2 - AB^2} = \sqrt{169 - 144} = 5 \text{ дм}.$$

б) $h = 6$ см; $r = 5$ см; $A_1B = 10$ см;

$$AB = \sqrt{A_1B^2 - h^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ дм}; \ AP = PB = 4 \text{ см}.$$

Из ΔAOP: по теореме Пифагора $d = \sqrt{r^2 - AP^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ см.

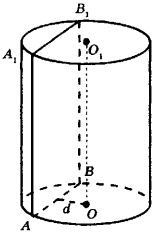
528.



По условию дан цилиндр: OO_1 — ось цилиндра, α — секущая плоскость $ABCD$.

$\alpha \| O_1O \Rightarrow O_1O$ перпендикулярна плоскостям оснований. Тогда прямые AB и CD, по которым плоскость α пересечет боковую поверхность цилиндра, тоже перпендикулярны плоскостям основания $\Rightarrow$ $\Rightarrow ABCD$ — прямоугольник. Точка A переходит в точку B, точка D переходит в точку C.

529.



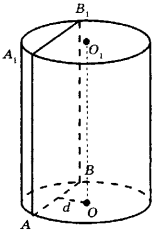
По условию дан цилиндр:
$H = 8$ см; $r = 5$ см; $d = 3$ см.
AA_1B_1B — прямоугольник.
По теореме Пифагора:

$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{r^2 - d^2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{r^2 - d^2};$$

$$AB = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 2\sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ см};$$

$$S = AB \cdot H = 8 \cdot 8 = 64 \text{ см}^2.$$

530. По условию задачи дан цилиндр:
$H = 12$ см, $R = 10$ см.
AA_1B_1B — квадрат, $AB = H = 12$ см.
По теореме Пифагора:

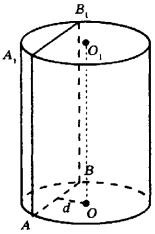


$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2};$$

$$\frac{12}{2} = \sqrt{10^2 - d^2}; \quad 6 = \sqrt{100 - d^2}; \; d^2 = 64;$$

$$36 = 100 - d^2 \Rightarrow d = 8 \text{ см}.$$

531.

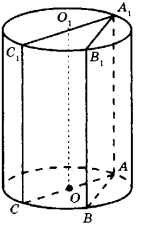


По условию задачи дан цилиндр. $H = 10$ дм. $S_{сеч} = 240$ дм^2; $S = H \cdot AB$; $d = 9$ дм; $240 = 10 \cdot AB \Rightarrow AB = 24$ (дм).
По теореме Пифагора:

$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2}; \quad \frac{24}{2} = \sqrt{R^2 - 9^2};$$

$$12^2 = R^2 - 81; \; R^2 = 225; \; R = 15 \text{ дм}.$$

532. По условию дан цилиндр, h — высота.
$\angle BAC = \varphi$ — линейный угол двугранного угла CA_1AB. R — радиус основания.



$$S_1 = S_{A_1C_1CA} = 2R \cdot H;$$

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\varphi)} = \frac{R}{\sin\varphi} \text{ — по теореме синусов;}$$

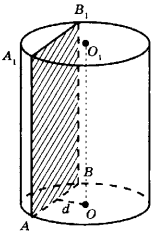
$$\frac{AB}{\sin 2\varphi} = \frac{R}{\sin\varphi} \Rightarrow AB = \frac{2R\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi};$$

$$AB = 2R\cos\varphi;$$

$$S_2 = S_{AA_1B_1B} = AB \cdot H; \; S_2 = 2R\cos\varphi \cdot H;$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2RH}{2RH\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

533. По условию дан цилиндр, h — высота.



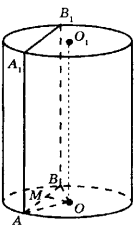
$$S = 2Rh \Rightarrow R = \frac{S}{2h};$$

$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{S^2}{(2h)^2} - d^2} \cdot 2;$$

$$S_{\text{сеч}} = AB \cdot h = 2h\sqrt{\frac{S^2}{4h^2} - d^2} = \frac{2h\sqrt{S^2 - d^2 \cdot 4h^2}}{2h};$$

$$S_{\text{сеч}} = \sqrt{S^2 - 4n^2d^2}.$$

534.

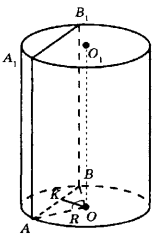


По условию дан цилиндр.
Из ΔAOB: $AO = OB = R$; $\angle AOB = 120°$; h — высота.

$$BM = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \operatorname{tg} 60° = \frac{BM}{d} = \sqrt{3}; BM = \sqrt{3}d;$$

$$2BM = 2\sqrt{3}d; \quad AB = 2\sqrt{3}; \quad S = 2\sqrt{3}d \cdot h.$$

535. По условию дан цилиндр:
$\angle AOB = 60°$; $d = 2$ см.



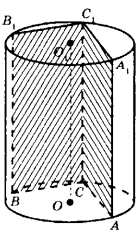
$$\frac{BK}{OK} = \frac{BK}{2} = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad BK = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$AB = 2BK = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см}.$$

Поскольку AA_1B_1B — прямоугольник, то

$$S = AB \cdot 10\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 10\sqrt{3} = 40 \text{ см}^2.$$

536.



По условию дан цилиндр. $\angle ACB$ — вписаный в основание; $\angle ACB = 90°$; h — высота и образующая; R — радиус цилиндра.
По теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{(2R)^2 - BC^2} = \sqrt{4R^2 - BC^2};$$

$$S_1 = S_{BB_1C_1C} = BC \cdot h = S_2 = S_{ACC_1A_1} = h \cdot \sqrt{4R^2 - BC^2};$$

$$BC \cdot h = h\sqrt{4R^2 - BC^2}; \quad BC = \sqrt{4R^2 - BC^2};$$

$$BC^2 = 4R^2 - BC^2 \Rightarrow 2BC^2 = 4R^2; BC^2 = 2R^2 \Rightarrow$$

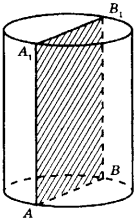
$\Rightarrow BC = R\sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{BC}{\sqrt{2}}$. Площадь осевого сечения

$$S = 2Rh = \frac{2h \cdot BC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}BC \cdot h; \quad S = \sqrt{2}S_1 = \sqrt{2}S_2.$$

537. По условию дан цилиндр: D — диаметр, $D = 1$ м; $H = \pi D$ — длина окружности.

$$S_{бок} = 2\pi RH;\ R = \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}\text{ м};\ H = \pi \cdot 1 = \pi\text{ м};\ S_{бок} = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\pi = \pi^2\ (\text{м}^2).$$

538.



По условию дан цилиндр.

$$S_{бок} = S;\ S_{бок} = 2\pi rh = S;\ S_{сеч} = S_{AA_1B_1B};\ S_{AA_1B_1B} = ABh;$$

$$S_{сеч} = AB \cdot h = 2rh = \frac{S}{\pi}.$$

539. По условию дан бак цилиндрической формы: $D = 1{,}5$ м; $h = 3$ м;

$$R = \frac{1{,}5}{2}\text{ м}.$$

На 1 м² — 200 г краски. $S_{бака} = S_{пол} + S_{осн} = 2\pi rh + \pi r^2$;

$$S_{бака} = D\pi h + \pi r^2 = 1{,}5 \cdot 3\pi + \pi \cdot \left(\frac{1{,}5}{2}\right)^2;\ S_{бака} = 4{,}5\pi + 1{,}125\pi = 5{,}625\pi.$$

Количество краски $0{,}2$ кг $\cdot\ 5{,}625\pi = 1{,}125\pi$ кг.

540. По условию дан цилиндр, в котором $H - R = 12$ см.

$S_{пол} = 288\pi$ см²; $S_{пол} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot H$;

$$\begin{cases} 2\pi R(R+H) = 288\pi; \\ H - R = 12; \end{cases} \begin{cases} R(R+H) = 144; \\ H - R = 12; \end{cases} \Rightarrow \quad H = 12 + r;\ R^2 + R(12 + R) =$$

$= 144$; $2R^2 + 12R - 144 = 0$; $R^2 + 6R - 72 = 0$; $D = 81$; $R_{1,2} = 6; -12$;

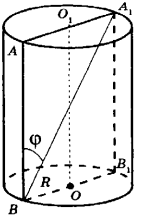
$R = 6$ см; $H = 12 + 6 = 18$ см.

541. Труба имеет форму цилиндра: $d = 20$ см $= 0{,}2$ м.

$$S_{бок} = 2\pi rl = \pi dl;\ S_{шв} = \frac{2{,}5\pi d \cdot l}{100};$$

$$S_{бок} + S_{шв} = \pi \cdot 0{,}2 \cdot 4 + \frac{2{,}5\pi \cdot 0{,}2 \cdot 4}{100} = 0{,}8\pi\left(1 + \frac{25}{100}\right) = 0{,}82\pi\ (\text{м}^2).$$

542.



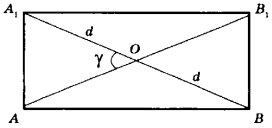
По условию дан цилиндр. $S_{осн} = S = \pi R^2$. h — высота цилиндра.

$$\Delta AA_1B_1:\ \frac{2R}{h} = \text{tg}\,\varphi;\ R = \sqrt{\frac{S}{\pi}};\ h = \frac{2R}{tg\,\varphi} = \text{ctg}\,\varphi \cdot 2\sqrt{\frac{S}{\pi}};$$

$$S_{бок} = 2\pi Rh = 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} \cdot \text{ctg}\,\varphi \cdot 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 4\pi\,\text{ctg}\,\varphi \cdot \frac{S}{\pi};$$

$$S_{бок} = 4S\ \text{ctg}\ \varphi.$$

543.



По условию дан цилиндр. $S_{бок} = 2\pi Rh$; $S_{пол} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$; $AB = 2\pi R$; AA_1B_1B — прямоугольник. Диагонали прямоугольника равны и пересекаются в точке O.

Из ΔAOA_1: по теореме косинусов:

$$AA_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\cos\varphi;\ \angle A_1OA = \varphi;$$

$$AA_1^2 = \frac{2d^2}{4} - \frac{2d^2}{4}\cos\varphi = \frac{d^2}{2}(1-\cos\varphi) = \frac{d^2}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2};$$

$$AA_1 = d\sin\frac{\varphi}{2};\ AA_1 = h.$$

Из ΔAOB: по теореме косинусов:

$$AB^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\cos(180^\circ - \varphi) = \frac{2d^2}{4} + \frac{2d^2}{4}\cos\varphi;$$

$$AB^2 = d^2\cos^2\frac{\varphi}{2} \Rightarrow AB = d\cos\frac{\varphi}{2};$$

$$R = \frac{AB}{2\pi} = \frac{d\cos\frac{\varphi}{2}}{2\pi};\ S_{бок} = 2\pi\cdot\frac{d\cos\frac{\varphi}{2}}{2\pi} = d\sin\frac{\varphi}{2} = d^2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2};$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi;$$

$$S_{осн} = \pi R^2 = \frac{\pi d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{4\pi^2} = \frac{d^2}{4\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2};\ S_{осн} = \frac{d^2}{4\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2};$$

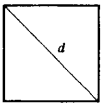
$$S_{пол} = S_{бок} + 2S_{осн};\ S_{пол} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi + 2\cdot\frac{d^2}{4\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{d^2}{2}\left(\sin\varphi + \frac{1}{\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

А если за основание взять AA_1, высоту AB

$$S_{осн} = \pi R^2 = \frac{d^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\pi};$$

$$S_{пол} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi + 2\cdot\frac{d^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\pi};\ S_{пол} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi + \frac{d^2}{2\pi}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

544.

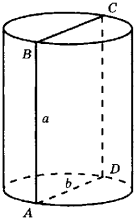


Дан квадрат и из него свернута боковая поверхность цилиндра, сторона квадрата $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

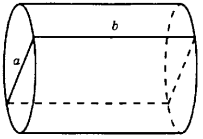
$$S_{осн} = \pi R^2;\ \frac{d}{\sqrt{2}} = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{d}{2\sqrt{2}\pi};\ S_{осн} = \pi\cdot\frac{d^2}{8\pi^2} = \frac{d^2}{8\pi}.$$

545. По условию задачи дан цилиндр.
$R = H = a$, потому что цилиндр получен от вращения квадрата.
а) $S_{осев.\ сеч} = 2RH = 2a^2$;
б) $S_{бок} = 2\pi Rh = 2\pi a^2$;
в) $S_{пол} = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$.

546. По условию дан цилиндр. $ABCD$ — прямоугольник. $AB = a$; $BC = b$.
а) $S_{бок} = 2\pi ba$; $S_{бок} = 2\pi ab$;



б) $S_{пол} = 2\pi ba + 2\pi b^2 = S_1$; $S_{пол} = 2\pi ab + 2\pi a^2 = S_2$; $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2\pi b(a+b)}{2\pi a(a+b)} = \dfrac{b}{a}$.

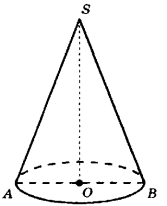


§ 2. Конус

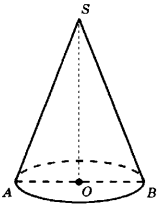
547. По условию дан конус.
$SO = h = 15$ см,
$R = OA = 8$ см.
По теореме Пифагора:

$AS = \sqrt{SO^2 + OA^2}$;

$AS = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ см.



548.



По условию дан конус.
а) $\alpha = 30°$;
$R = OA = AS \cos\alpha = AS \cos 30°$;

$R = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ см;

$S_{осн} = \pi R^2 = \pi(6\sqrt{3})^2 = 108\pi$ (см^2);

б) $\alpha = 45°$;

$R = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ см; $S_{осн} = \pi R^2 = \pi(6\sqrt{2})^2 = 72\pi$ (см^2);

в) $\alpha = 60°$;

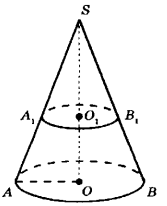
$R = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ см;

$S_{осн} = \pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$ (см^2).

549. По условию дан конус: $h = 8$ дм, $SO = h = 8$ дм.

а) $S_1 = \frac{1}{2} S_{осн}$;

б) $S_1 = \frac{1}{4} S_{осн}$.



Плоскость параллельная основанию пересекает конус по окружности, разбивает конус на две части.

$\Delta SO_1A \sim \Delta SOA \Rightarrow \frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1A_1}{OA} = \frac{SO_1}{8} = \frac{r}{R}$;

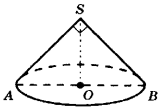
$S = \pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$;

$\frac{SO_1}{8} = \frac{\sqrt{\frac{S_1}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S_{осн}}{\pi}}} = \sqrt{\frac{S_1}{S_{осн}}} \Rightarrow$

а) $SO_1 = 8\sqrt{\frac{S_1}{S_{осн}}} = 8\sqrt{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$ дм;

б) $SO_1 = 8 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 4$ дм.

550.



По условию задачи дан конус. $\angle ASB = 90°$; $AO = OB = 5$ см.

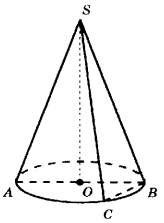
$$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2}AS \cdot SB = \frac{1}{2}AS^2.$$

По теореме Пифагора в ΔASB: $AB^2 = AS^2 + SB^2$; $AB^2 = 2AS^2$; $AB = 10$ см;

$$AS^2 = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50; \quad AS = \sqrt{50} \text{ см};$$

$$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2}AS^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25 \text{ см}^2.$$

551.



По условию дан конус.

а) $\angle BSC = 30°$; $SC = SB = 2r$;

$$S_{\Delta BSC} = \frac{1}{2}SB \cdot SC \sin 30°;$$

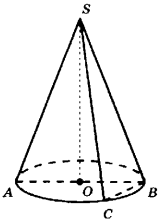
$$S_{\Delta BSC} = \frac{2r \cdot 2r}{2} \cdot \frac{1}{2} = r^2;$$

б) $\angle BSC = 45°$;

$$S_{\Delta BSC} = \frac{2r \cdot 2r}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}r^2;$$

в) $\angle BSC = 60°$; $S_{\Delta BSC} = \frac{2r \cdot 2r}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}r^2$.

552.



По условию дан конус, h — высота, $SO = h$; $\angle ASO = 60°$; $CS \perp SB$.

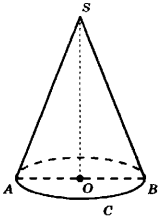
Если SO — катет, лежащий против угла в 30°, то $AS = 2h$.

$AS = SB = 2h$, как образующие конуса.

ΔCSB — прямоугольный;

$$S_{\Delta CSB} = \frac{1}{2}CS \cdot SB = \frac{2h \cdot 2h}{2} = 2h^2.$$

553.



По условию дан конус, где ASB — осевое сечение.

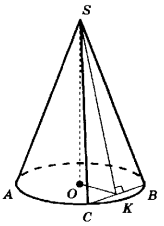
$S_{\Delta}ASB = 6$ дм^2; $S_{осн} = 8$ дм^2; $S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2}SO \cdot AB$;

$AB = 2r$; $S_{\Delta ASB} = \frac{SO \cdot 2r}{2} = rh$; $6 = rh \Rightarrow h = \frac{6}{r}$;

$S_{осн} = \pi r^2$; $8 = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{8}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$;

$$h = \frac{6\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ дм}.$$

554.



По условию задачи дан конус.

а) BC — хорда; $OK \perp BC$; $SK \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах); SK — высота ΔBSC; $\angle COB = 60°$; ΔCOK – прямоугольный, $\angle COK = 30° \Rightarrow$

$$CK = \frac{OC}{2} = \frac{r}{2};\ S_{сеч} = S_{\Delta BSC} = \frac{1}{2}CB \cdot SK.$$

Из ΔSOK: по теореме Пифагора $SK^2 = SO^2 + OK^2$.

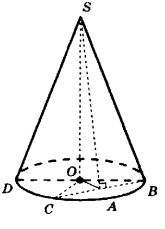
Из ΔCSK: по теореме Пифагора

$$SK^2 = \sqrt{CS^2 - CK^2};\ SK = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2};$$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2}r \cdot \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2} = \frac{r}{4}\sqrt{4l^2 - r^2};$$

б) $\angle COB = 90°$; $\angle COK = 45° \Rightarrow$ по теореме Пифагора $OC^2 = 2CK^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow CK = \frac{OC}{\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow CB = 2CK = \frac{2r}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}r$ $CB = r\sqrt{2}$. По теореме Пифагора $SK = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2l^2 - r^2}{2}}$; $S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot r\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2l^2 - r^2}}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{2l^2 - r^2}$.

555.



По условию дан конус. $SO = h = 10$ см; $\angle COB = 60°$.

а) BC — хорда;

$\angle SAO$ — двугранный угол между плоскостью основания и плоскостью BSC.

$OA \perp BC$, $SA \perp BC$, $SO \perp AO$ — по теореме о трех перпендикулярах.

Из ΔSOA: $\angle SAO = 30°$; $SA = \frac{h}{\sin 30°} = 2h$. Из ΔCOB: $BC = r = 2CA$.

$$\frac{CA}{OA} = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow CA = \frac{OA}{\sqrt{3}}.$$

$$\Delta SOA:\ \frac{h}{OA} = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow OA = h\sqrt{3}.\ CA = \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = h;\ BC = 2h;$$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2}BC \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot 2h \cdot 2h = 2h^2;\ S_{сеч} = 2 \cdot 10^2 = 200\ см^2.$$

б) $\angle SAO = 45°$; $SA = h\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ см; $OA = h$; $CA = \frac{h}{\sqrt{3}}$; $BC = \frac{2h}{\sqrt{3}}$;

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot h\sqrt{2} = \frac{h^2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{100}{3}\sqrt{6}\ (см^2).$$

в) $\angle SAO = 60°$; $\frac{h}{OA} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} \Rightarrow AO = \frac{h}{\sqrt{3}}$; $CA = \frac{OA}{\sqrt{3}} = \frac{h}{3}$; $CB = \frac{2h}{3}$;

$$SA = \frac{h}{\sin 60°} = \frac{2h}{\sqrt{3}}\ см;\ S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{2h^2}{3\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 100}{3\sqrt{3}} = \frac{200\sqrt{3}}{9}\ (см^2).$$

556. Решение в учебнике — стр. 127.

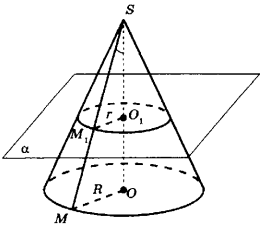
557. По условию дан конус.

$\Delta SO_1M_1 \sim \Delta SOM$; $O_1M_1 = r$; $OM = R$;

$\frac{O_1M_1}{OM} = \frac{O_1S}{OS}$; $\frac{r}{R} = \frac{SO_1}{SO}$;

$S_1 = \pi r^2$; $S_2 = \pi R^2$;

$\frac{r^2}{R^2} = \frac{SO_1^2}{SO^2} \Rightarrow \frac{S_1}{\pi} : \frac{S_2}{\pi} = \frac{SO_1^2}{SO^2}$.



558. По условию дан конус: $h = 4$ см, $R = 3$ см, дуга α.

$S_{бок} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360°} = \pi R l$.

По теореме Пифагора $l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

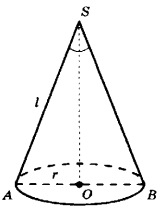
$\frac{\pi \cdot 25\alpha}{360°} = 15\pi \Rightarrow \alpha = \frac{360° \cdot \pi \cdot 15}{\pi \cdot 25} = 72° \cdot 3 = 216°$.

559. По условию дан конус.

$r = l\cos 60° = \frac{l}{2} \Rightarrow r = \frac{l}{2}$; $S_{бок} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360°} = \pi r l$.

Градусная мера дуги α: $\alpha = \frac{360° \cdot \pi \cdot l \cdot l}{\pi \cdot l^2 \cdot 2} = 180°$.

560.



По условию дан конус, $AS = l$; $AO = r$.

а) $\frac{\pi l^2 \alpha}{360°} = \pi r l \Rightarrow r = \frac{\pi l^2 \alpha}{360° \pi l}$; $r = \frac{\alpha l}{360°}$; $\alpha = 180°$;

$r = \frac{l}{2} = \frac{180° l}{360°}$.

Из ΔASO: $\sin\angle ASO = \frac{AO}{SA} = \frac{r}{l}$;

$\sin\angle ASO = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ASO = 30° = \angle ASB = 2\angle ASO$;

$\angle ASB = 60°$.

б) $\alpha = 90°$

$r = \frac{90° l}{360°}$; $r = \frac{l}{4}$; $\sin\angle ASO = \frac{1}{4} \Rightarrow \angle ASO = \arcsin\frac{1}{4}$;

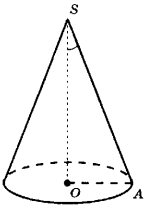
$\angle ASB = 2\arcsin\frac{1}{4}$;

в) $\alpha = 60°$

$r = \frac{60° l}{360°} = \frac{l}{6}$; $\sin\angle ASO = \frac{1}{6} \Rightarrow \angle ASO = \arcsin\frac{1}{6}$;

$\angle ASB = 2\arcsin\frac{1}{6}$.

561.



По условию дан конус.

$r = 9$ см, $\varphi = 120°$, l — длина дуги сектора;

$$l = \frac{2\pi r\varphi}{360°} = \frac{2\pi \cdot 9 \cdot 120°}{360°} = 6\pi;$$

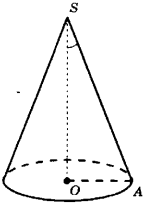
l — длина окружности основания;

$$R = \frac{l}{2\pi} = \frac{6\pi}{2\pi} = 3 \text{ см};$$

$$S_{осн} = \pi R^2 = 9\pi \text{ см}^2;$$

$$H = \sqrt{r^2 - R^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ см}.$$

562.



По условию дан конус.

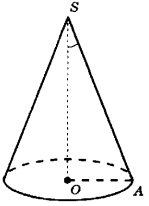
ΔAOS — равнобедренный, $r = AO = l \sin 45°$;

$$r = \frac{6,5\sqrt{2}}{2} = 3,25\sqrt{2} \text{ см}.$$

$$S_{бок} = \pi r l;$$

$$S_{бок} = \pi \cdot 3,25\sqrt{2} \cdot 6,5 = \frac{169\pi\sqrt{2}}{8} (\text{см}^2).$$

563.



По условию дан конус, $S_{сеч} = 0,6$ см^2, $H = 1,2$ см;

$$S_{пол} = \pi r l + \pi r^2;$$

$$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} AB \cdot SO; \quad S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot H = rH;$$

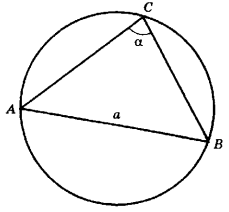
$$0,6 = r \cdot 1,2 \Rightarrow r = \frac{0,6}{1,2} = \frac{1}{2} \text{ см}.$$

По теореме Пифагора $l = \sqrt{H^2 + r^2}$;

$$l = \sqrt{(1,2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1,69} = 1,3 \text{ см};$$

$$S_{пол} = \pi \cdot 0,5 \cdot 1,3 + \pi \cdot (0,5)^2 = \pi \cdot 0,5 \cdot 1,8 = 0,9\pi \ (\text{см}^2).$$

564.



По условию дан конус. В основание конуса вписан ΔABC, у которого одна сторона равна a и угол α.

По теореме синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2r \Rightarrow r \cdot \frac{a}{2\sin\alpha}$;

$l = \frac{r}{\cos\varphi}$; φ — угол между плоскостью основания и наклонной образующей.

$$l = \frac{a}{2\sin\alpha\cos\varphi}; \quad S_{пол} = \pi r^2 + \pi r l;$$

$$S_{\text{полн}} = \pi \cdot \frac{a^2}{4\sin^2\alpha} + \pi \cdot \frac{a \cdot a}{2\sin\alpha 2\sin\alpha\cos\varphi} = \frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right);$$

$$S_{\text{полн}} = \frac{\pi a^2(1+\cos\varphi)}{4\sin^2\alpha\cos\varphi}$$

565. Прямоугольный ΔABC ($AB = 6$ см, $BC = 8$ см) вращается вокруг AB, получив конус. $h = 6$; $r = 8$ см; $S_{\text{бок}} = \pi rl$.

По теореме Пифагора найдем l: $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{6^2 + 8^2}$; $l = 10$ см.

$S_{\text{бок}} = \pi \cdot 10 \cdot 8 = 80\pi$ (см²); $S_{\text{полн}} = \pi r(l + r)$;

$S_{\text{полн}} = \pi \cdot 8 \cdot (10 + 8) = 144\pi$ (см²).

566. По условию дан конус, получившийся в результате вращения равнобедренного ΔABC.

$AB = BC = m$; AC — основание; $\angle A = \angle C = \varphi$.

$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{бок}} = 2\pi rl$; $r = m \sin\varphi$; $l = m$;

$S_{\text{бок}} = \pi rl = \pi m \sin\varphi m = \pi m^2 \sin\varphi$;

$S_{\text{полн}} = 2\pi m^2 \sin\varphi$.

567. По условию дан усеченный конус.

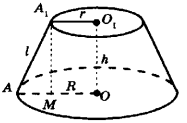
$r = 3$ см, $R = 6$ см, $h = 4$ см, l — ?

$A_1M \perp OA$; $MO = r = 3$ см; $AM = 3$ см.

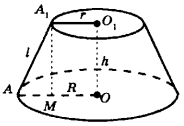
По теореме Пифагора:

$$A_1A = \sqrt{AM^2 + A_1M^2} = \sqrt{H^2 + AM^2};$$

$$A_1A = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ см}.$$



568.



По условию дан усеченный конус.

$A_1M \perp OA$; $A_1M = OO_1 = H$; $AM = 6$ см.

По теореме Пифагора:

а) $H = \sqrt{10^2 - AM^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см);

б) $S_{\frac{\text{сеч}}{2}} = S_{\text{трапеции } AA_1O_1O} = \frac{r + R}{2} \cdot h = \frac{5 + 11}{2} \cdot 8 = 64$ см²;

$S_{\text{сеч}} = 2 \cdot 64 = 128$ см².

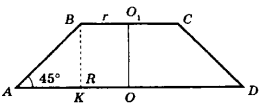
569. По условию дан усеченный конус. R и r — радиусы оснований, $R > r$. Осевое сечение усеченного конуса — равнобедренная трапеция.

$2r = BC$;

$2R = AD$;

$OO_1 = BK$;

$AK = R - r$.

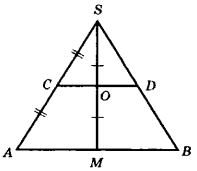


ΔAKB — равнобедренный прямоугольный.

$AK = BK = R - r$.

$$S_{\square ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot OO_1 = \frac{2r + 2R}{2} \cdot (R - r) = (R + r)(R - r) = R^2 - r^2.$$

570.



По условию дан конус.
$S_{бок} = 80$ см^2; $SO = OM$; $CD \perp SM$.
$S_{бок} = \pi(r + R)l$; $r = OC$; $R = MA$; $l = CA$.
ΔASM: CO — средняя линия. $AC = CS$;
$CA = CS = l$; $S_{бок} = \pi R \cdot AC$.

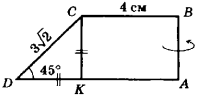
$\pi R \cdot 2l = 80$; $R\pi l = 40 \Rightarrow l = \dfrac{40}{\pi R}$.

$\Delta SOC \sim \Delta SMA \Rightarrow \dfrac{SO}{SM} = \dfrac{OC}{MA} = \dfrac{SC}{SA}$;

$\dfrac{r}{R} = \dfrac{l}{2l} \Rightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{2}$; $R = 2r \Rightarrow r = \dfrac{R}{2}$;

$S_{бок} = \pi\left(\dfrac{R}{2} + R\right) \cdot \dfrac{40}{\pi R} = \dfrac{3R\pi \cdot 40}{2\pi R} = 60$.

571.



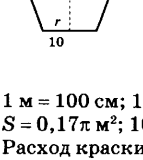
По условию дан усеченный конус, где $ABCD$ — трапеция.
$\angle A = 90°$; $\angle B = 45°$; $BC = 4$ см; $CD = 3\sqrt{2}$ см;
$BC = r$; $AD = R$; $DC = l$; $AB = CK = H$; $CK \perp AD$.
ΔDCK: $\angle D = 45° \Rightarrow \angle C = 45°$; $DK = CK$.

По теореме Пифагора:
$KD^2 + KD^2 = CD^2$; $2KD^2 = (3\sqrt{2})^2$; $KD^2 = \dfrac{9 \cdot 2}{2} \Rightarrow KD = 3$; $DK = CK = 3$.
$AD = DK + KA = 3 + 4 = 7$ см;

$S_{бок} = \pi(R + r)l = \pi(4 + 7) \cdot 3\sqrt{2} = 33\sqrt{2}\pi$ (см^2);

$S_{полн} = S_{бок} + \pi(R^2 + r^2)$; $S_{полн} = 33\sqrt{2}\pi + \pi(16 + 49) = 33\sqrt{2}\pi + 65\pi$.

572.

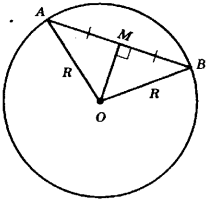


По условию дано ведро, которое имеет форму усеченного конуса.
$R = 15$ см; $r = 10$ см; $l = 30$ см; 1 м^2 = 150 г;
$N = 100$ ведер.
$S_{бок} = \pi(r + R)l$; $S_{осн} = \pi r^2$;
$S_{полн} = 2(\pi(10 + 15) \cdot 30 + \pi \cdot 10^2) = 2(25 \cdot 30\pi + 10\pi)$;
$S_{полн} = 1700\pi$ см^2.

1 м = 100 см; 1 м^2 = 10^4 см^2; x м^2 = 1700π см^2; $x = \dfrac{1700\pi}{100 \cdot 100} = 0{,}17\pi$ м^2.
$S = 0{,}17\pi$ м^2; $100S = 17\pi$ м^2.
Расход краски $0{,}15 \cdot 17\pi \approx 8{,}012$ кг.

§ 3. Сфера

573.

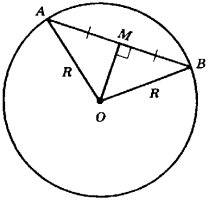


По условию дана сфера. Через точки A, B, O — проходит плоскость.

а) $OA = OB = R$; ΔAOB — равнобедренный, OM — высота, медиана, биссектриса, M — середина AB; $OM \perp AB$.

б) Если $OM \perp AB$, OM — высота, ΔAOB — равнобедренный, тогда OM — медиана, биссектриса $\Rightarrow$ точка M — середина AB.

574.



По условию дана сфера. $AO = OB = R$; M — середина AB; OM — медиана, высота, биссектриса, потому что ΔAOB — равнобедренный. $OM \perp AB$.

а) $R = 50$ см; $AB = 40$ см;

$$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{40}{2} = 20 \text{ см}.$$

По теореме Пифагора в ΔAOM:

$$OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{50^2 - 20^2} = \sqrt{2500 - 400} = 10\sqrt{21} \text{ см}.$$

б) $R = 15$ мм; $AB = 18$ мм; $AM = \frac{1}{2}AB = 9$ мм.

По теореме Пифагора: $OM^2 = AO^2 - AM^2 = R^2 - 9^2 = 15^2 - 81 = 144$; $OM = 12$ мм.

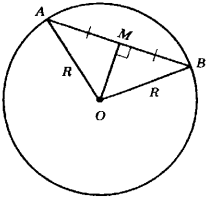
в) $R = 10$ дм; $OM = 60$ см $= 6$ дм; AB — ?

По теореме Пифагора $AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ дм; $AB = 2AM = 16$ дм.

г) $R = a$; $OM = b$; AM — ?

По теореме Пифагора $AM^2 = AO^2 - OM^2 = a^2 - b^2$; $AM = \sqrt{a^2 - b^2}$.

575.



По условию дана сфера. $AB = m$; $AO = OB = R$.

ΔAOB — равнобедренный, $OM \perp AB$; OM — медиана, высота;

$$MA = MB = \frac{m}{2}.$$

Расстояние от центра до прямой $AB = OM$.

По теореме Пифагора:

$$OM = \sqrt{OA^2 - MA^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4R^2 - m^2}}{2}.$$

576. а) $A(2; -4; 7)$; $R = 3$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$; $x_0 = 2$; $y_0 = -4$; $z_0 = 7$;

$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 7)^2 = 9$;

б) $A(0; 0; 0)$; $R = \sqrt{2}$;

$x^2 + y^2 + z^2 = 2$;

в) $A(2; 0; 0)$; $R = 4$;

$(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 16$.

577. а) $A(-2; 2; 0)$; $N(5; 0; -1)$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$; $x_0 = -2$; $y_0 = 2$; $z_0 = 0$.

Если точка N лежит на сфере, то ее координаты удовлетворяют уравнению

$(5 + 2)^2 + (0 - 2)^2 + (-1)^2 = R^2$;

$49 + 4 + 1 = R^2 \Rightarrow R^2 = 54$;

$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 54$;

б) $A(-2; 2; 0)$; $N(0; 0; 0)$; $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = R^2$;

$(0 + 2)^2 + (0 - 2)^2 + 0^2 = R^2$; $4 + 4 = R^2 \Rightarrow R^2 = 8$; $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 8$;

в) $A(0; 0; 0)$; $N(5; 3; 1)$; $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

$5^2 + 3^2 + 1^2 = R^2$; $25 + 9 + 1 = R^2 \Rightarrow R^2 = 35$; $x^2 + y^2 + z^2 = 35$.

578. а) O — центр сферы, R — радиус.

$x^2 + y^2 + z^2 = 49$; $O(0; 0; 0)$; $R = \sqrt{49} = 7$;

б) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 2$;

O — центр сферы, $O(3; -2; 0)$; $R = \sqrt{2}$.

579. а) $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0$;

$(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) - 2^2 + y^2 + z^2 = 0$;

$(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

$O(2; 0; 0)$; $R = 2$; O — центр сферы, R — радиус.

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 24$;

$x^2 + (y^2 - 2 \cdot 1y + 1^2) - 1^2 + z^2 = 24$;

$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 25$.

$O(0; 1; 0)$; $R = \sqrt{25} = 5$; O — центр сферы, R — радиус.

в) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 3$;

$(x^2 + 2 \cdot 1x + 1^2) - 1^2 + y^2 + z^2 = 3$;

$(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

$O(-1; 0; 0)$; $R = \sqrt{4} = 2$. $O(x_0; y_0; z_0)$ — центр сферы, R — радиус.

г) $x^2 - x + y^2 + 3y + z^2 - 2z = 2{,}5$;

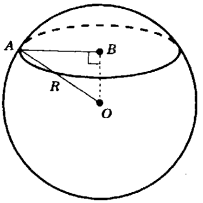
$$\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (z^2 - 2 \cdot 1 \cdot z + 1^2) -$$

$$-1^2 = 2{,}5; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 1)^2 = 2{,}5 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1;$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 1)^2 = 2{,}5 + \frac{5}{2} + 1 = 6.$$

$O\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 1\right)$; $R = \sqrt{6}$; $O(x_0; y_0; z_0)$ — центр сферы, R — радиус.

580.



По условию дан шар. $R = 41$ дм. Сечение шара есть плоскость — это круг. $OB \perp$ плоскости сечения. $R = OA$; $OB = 9$ дм; $\angle B = 90°$

Из ΔOBA: по теореме Пифагора

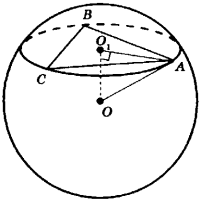
$$AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40 \text{ (дм)};$$

$$S = \pi \cdot (AB)^2 = 40^2 \cdot \pi = 1600\pi \text{ (дм}^2\text{)}.$$

581. По условию дана сфера.

Плоскость ΔABC пересекает сферу, где O — центр сферы. $OO_1 \perp (ABC)$.

ΔOO_1A — прямоугольный.



По теореме Пифагора $OO_1 = \sqrt{OA^2 - O_1O^2}$;

AO_1 — ?

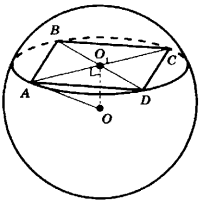
$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)};$$

$$AO_1 = \frac{AB \cdot CB \cdot AC}{4S_{\Delta ABC}}; \quad AO_1 = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = 5 \text{ см};$$

$$p = \frac{6+8+10}{2} = 12;$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = 24 \text{ (см}^2\text{)}; \quad OO_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ см}.$$

582.



По условию дана сфера, плоскость прямоугольника пересекает сферу по окружности, которая будет описанной около $\square ABCD$. Центр окружности — точка пересечения диагоналей $\square ABCD$.

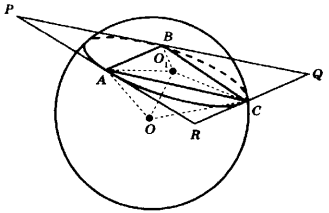
O — центр сферы, O_1 — точка пересечения $\square ABCD$. OO_1 — ?

Из ΔAO_1O: по теореме Пифагора

$$OO_1 = \sqrt{OA^2 - AO_1^2};$$

$$AC = 16 \text{ см}; \quad AO_1 = O_1C = \frac{AC}{2} = 8 \text{ см}; \quad OO_1 = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ (см)}.$$

583.



По условию дана сфера, радиус $OA = OB = OC = R$. ΔPQR — равнобедренный. Точки A, B, C — точки на сфере, которыми касается ΔPQR. $OO_1 \perp PQR$.

$O_1A \perp PR$; $O_1B \perp PQ$; $O_1C \perp RQ$ — по теореме о трех перпендикулярах.

$\Delta OO_1A = \Delta OO_1B = \Delta OO_1C$. OO_1 — общий катет, $OA = OB = OC = R$.

$r=\frac{S_{\Delta PQR}}{p}$; $p=\frac{PQ+QR+PR}{2}=\frac{10+10+12}{2}=16$ см;

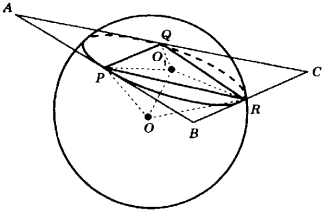
$S_{\Delta PQR}=\sqrt{p(p-PQ)(p-QR)(p-PR)}$; $S_{\Delta PQR}=\sqrt{16\cdot6\cdot6\cdot4}=48$ (см^2);

$r=\frac{48}{16}=3$ см.

ΔOO_1B: по теореме Пифагора

$OO_1=\sqrt{OB^2-O_1B^2}=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ см.

584.



По условию дана сфера. ΔABC — разносторонний. AB = 13 см; BC = 14 см; AC = 15 см; O_1 — центр ΔABC.

$O_1P\perp AB$; $O_1Q\perp AC$; $O_1R\perp BC$ — по теореме о трех перпендикулярах.

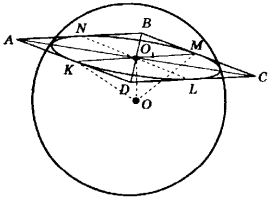
$\Delta OO_1P=\Delta OO_1Q=\Delta OO_1R$ — прямоугольные, OO_1 — общий катет, $OP=OQ=OR$ — радиусы.

$r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p}$; $p=\frac{AB+BC+AC}{2}=\frac{13+14+15}{2}=21$ см;

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$; $S_{\Delta ABC}=\sqrt{21\cdot8\cdot7\cdot6}=84$ (см^2);

$r=\frac{84}{21}=4$ см. Тогда $OO_1=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$ см.

585.



По условию дана сфера. O — центр сферы, $ABCD$ — ромб.

$O_1L\perp DC$; $O_1M\perp BC$; $O_1N\perp AB$; $O_1K\perp AD$ — по теореме о трех перпендикулярах.

$\Delta OO_1L=\Delta OO_1N=\Delta OO_1K=\Delta OO_1M$ — прямоугольные.

OO_1 — общий катет, $OK=OL=ON=OM=R$.

O_1 — центр вписанной окружности в ромб $ABCD$.

ΔOO_1L: по теореме Пифагора $OO_1=\sqrt{OL^2-O_1L^2}=\sqrt{R^2-r^2}$;

$R=10$ см; r — ? $DB=15$ см; $AC=20$ см; $O_1C=\frac{1}{2}AC=10$ см;

$O_1D=\frac{1}{2}BD=\frac{15}{2}$ см;

$$CD=\sqrt{O_1C^2+O_1D^3}=\sqrt{10^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{625}}{2}=\frac{25}{2}$$

$$S_{\Delta O_1CD}=\frac{1}{2}CD\cdot O_1L=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{2}\cdot r=\frac{25r}{4};$$

$$S_{\Delta O_1CD}=\frac{1}{4}S_{\square ABCD}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{8}\cdot 20\cdot 15=\frac{15\cdot 5}{2}=\frac{75}{2};$$

$$\frac{25r}{4}=\frac{75}{2}\Rightarrow r=\frac{75\cdot 4}{2\cdot 25}=6\text{ см};$$

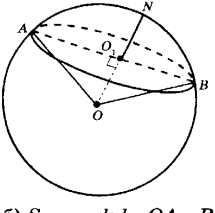
$$OO_1=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8\text{ см}.$$

586. По условию дан тетраэдр $OABC$ и сфера.
$x^2+y^2=R^2-d^2$; R — радиус сферы; d — расстояние от центра до плоскости α.
а) $R=6$ см; $OH=60$ см;
$OH=d$; $OH\perp(ABC)$; $R=OH=d=6$ дм $\Rightarrow$ сфера и плоскость имеют одну общую точку, то есть касаются.
б) $R=3$ м; $OH=95$ см
$OH=d=0{,}95$ м. $R>d$. $R^2-d^2>0$ — уравнение $x^2+y^2=R^2-d^2$ окружности на плоскости ABC. Значит, сфера и плоскость основания тетраэдра пересекаются по окружности.
в) $R=5$ дм; $OH=45$ см $=4{,}5$ дм;
$R>d$; $R^2-d^2>0$ аналогично б) сфера и плоскость пересекаются по окружности.
г) $R=3{,}5$ дм; $OH=40$ см; $OH=d=4$ дм
$R<d$; $R^2-d^2<0$.
Уравнение $x^2+y^2=R^2-d^2$ не имеет решений $\Rightarrow$ плоскость ABC и сфера не имеют общих точек.

587. По условию дан шар.
а) $R=12$ см; $d=8$ см; $R>d\Rightarrow$ секущая плоскость и сфера пересекаются по окружности.
$r^2=R^2-d^2$; $r^2=12^2-8^2=80$; $S=\pi r^2=80\pi$ (см^2);
б) $S=12$ см^2; $d=2$см; $S=\pi R^2-\pi d^2\Rightarrow\pi R^2=S+\pi d^2$;

$$R^2=\frac{S+\pi d^2}{\pi}\Rightarrow R=\sqrt{\frac{S+\pi d^2}{\pi}};\quad R=\sqrt{\frac{12+\pi\cdot 4}{\pi}}=\sqrt{4+\frac{12}{\pi}}\text{ см}.$$

588.



По условию дана сфера.

$OO_1=O_1N=\frac{R}{2}$; $AO_1=O_1B=r$. ΔAOO_1 — прямоугольный.

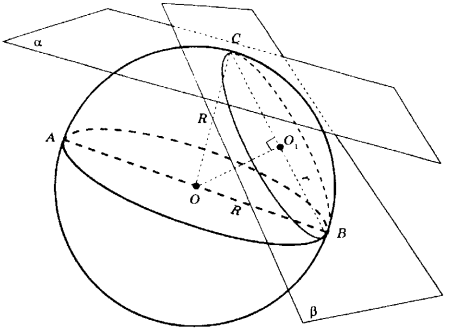
а) r — радиус полученного сечения.
По теореме Пифагора

$$r=\sqrt{R^2-OO_1^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

б) $S_{бок}=\pi rl$; $l=OA=R$;

$$S_{бок}=\pi rR=\pi\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot R=\frac{\pi R^2\sqrt{3}}{2}.$$

589. По условию дана сфера. OO_1 — перпендикуляр, $OO_1 \perp BC$.



ΔCOB — равнобедренный, OO_1 — медиана. $CO_1 = O_1B$, O_1 — центр окружности. $\angle OBO_1 = \alpha$ — угол между диаметром и плоскостью. $O_1B = r$.

а) $R = 2$ см; $\alpha = 30°$

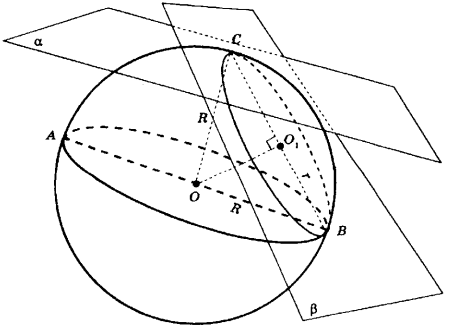
ΔOO_1B: $O_1B = r = R\cos\alpha$; $O_1B = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$; $L = 2\pi r$;

$L = \dfrac{2\pi R\sqrt{3}}{2} = \pi R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi$ (см).

б) $R = 5$ см; $\alpha = 45°$

$r = R\cos 45° = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$; $L = 2\pi r = 2\pi \cdot \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\pi$ (м).

590.



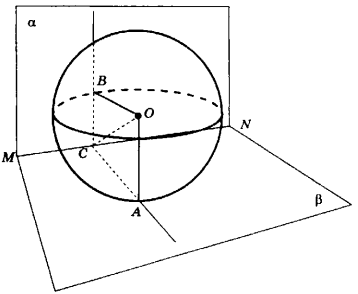
По условию дана сфера, радиус R, C — точка, касающая плоскость α со сферой. $OO_1 \perp BC$. $\Delta OO_1C = \Delta OO_1B$ — прямоугольные, OO_1 — общий катет, $OC = OB = R$. $CO_1 = O_1B$. O_1 — центр окружности, φ — угол между плоскостями α и β. $\angle OCB = 90° - \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta BOC$ — равнобедренный.

ΔOO_1B: $O_1B = r = R\cos(90° - \varphi) = R\sin\varphi$;

$S_{сеч} = \pi r^2$; $S = \pi(R\sin\varphi)^2 = \pi R^2 \sin^2\varphi$.

591.



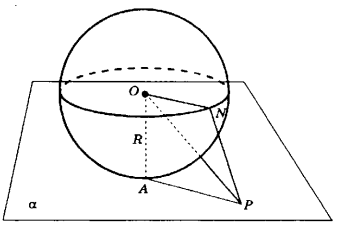
По условию дана сфера. Сечение, проходящей через центр шара O и перпендикулярно ребру двугранного угла, что образуют плоскости α и β.
$OB \perp \alpha$; $OA \perp \beta$; $OB = OA = R$;
OC — расстояние от центра сферы до ребра MN.
$AC \perp MN$; $BC \perp MN$; $OC \perp MN$; по теореме о трех перпендикулярах; $OC = a$.
$\Delta OBC = \Delta OAC$; OC — общая, $OB = OA = R$; OC — биссектриса $\angle ACB$; $\angle ACB = 120°$; $\angle OCA = 60°$.

ΔOCA: $OA = R = a\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

ΔAOB — равнобедренный. $\angle OCA = 60°$; $\angle OAB = \angle OBA = 60°$.

ΔAOB — равносторонний, $AB = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

592.



По условию дана сфера, радиус $OK = OA = R$; $R = 112$ см; $AP = 15$ см. N лежит на сфере.
$ON + NP > OP$; $OP = OA + AP$;
$R + NP > R + AP$; $NP > AP$.
$AP < NP \Rightarrow$ точка N выбрана произвольно $\Rightarrow$ точка $A \in OP$.
ΔOAP:
$OP = \sqrt{OA^2 + AP^2} = \sqrt{R^2 + 15^2} =$
$= \sqrt{112^2 + 15^2} = 113$ см;

$AP = OP - R = 113 - 112 = 1$ см.

593. По условию дана сфера.
$S = 4\pi R^2$
а) $R = 6$ см; $S = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi$ см^2;
б) $R = 2$ дм; $S = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$ дм^2;
в) $R = \sqrt{2}$ м; $S = 4\pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 8\pi$ м^2;
г) $R = 2\sqrt{3}$ см; $S = 4\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 4\pi \cdot 12 = 48\pi$ см^2.

594. По условию дана сфера.

$S_{сеч} = 9$ м^2; $S_{сеч} = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = \dfrac{9}{\pi}$ м^2; $S_{сф} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \dfrac{9}{\pi} = 36$ (м^2).

595. По условию дана сфера.

$S_{сф} = 324$ см^2; $S_{сф} = 4\pi R^2$;

$4\pi R^2 = 324 \Rightarrow R^2 = \dfrac{324}{4\pi} = \dfrac{81}{\pi} \Rightarrow R = \dfrac{9}{\sqrt{\pi}}$ см.

596. По условию даны две сферы.

$S_1 = 4\pi R_1^2$ — площадь первой сферы;

$S_2 = 4\pi R_2^2$ — площадь второй сферы.

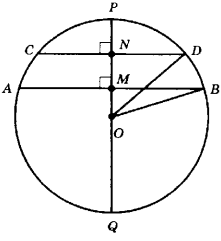
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2.$$

597. По условию даны сфера и круг.

$S_{сф} = 4\pi R^2$; $R = 5$ м; $S_{сф} = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$ (м^2);

$S = \pi L^2$; L — радиус круга; $\pi L^2 = \pi \cdot 100$; $L^2 = 100$; $L = 10$ м.

598.



По условию даны два параллельных сечения сферы.

$ND = r_1 = 9$ см; $MB = r_2 = 12$ см; $NM = 3$ см;

$OD = OB = R$;

ΔOBM: по теореме Пифагора:

$OM = \sqrt{R^2 - r_2^2} = \sqrt{R^2 - 12^2} = \sqrt{R^2 - 144}$.

ΔODN: по теореме Пифагора:

$ON = \sqrt{R^2 - r_1^2} = \sqrt{R^2 - 9^2} = \sqrt{R^2 - 81}$.

$MN = NO - MO = 3$;

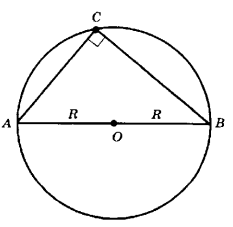
$\sqrt{R^2 - 81} - \sqrt{R^2 - 144} = 3$; $\sqrt{R^2 - 81} = 3 + \sqrt{R^2 - 144}$;

$R^2 - 81 = 3 + R^2 - 144 + 6\sqrt{R^2 - 144}$; $6\sqrt{R^2 - 144} = 54 \Rightarrow \sqrt{R^2 - 144} = 9$;

$R^2 - 144 = 81$; $R^2 = 225 \Rightarrow R = 15$.

$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 225 = 900\pi$ (см^2).

599.



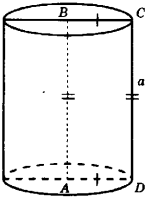
Рассмотрим сферы с двумя взаимно перпендикулярными плоскостями. Общая точка двух сечений, из которой под углом 90° есть два радиуса r_1 и r_2. $\angle ACB$ — вписанный. $\angle ACB = 90°$; $AC = 2r_2$; $BC = 2r_1$; $AB = 2R$.

По теореме Пифагора:

$(2R)^2 = (2r_1)^2 + (2r_2)^2$; $R^2 = r_1^2 + r_2^2$;

$S_{сф} = 4\pi R^2 = 4\pi(r_1^2 + r_2^2)$.

600.



Цилиндр получили в результате вращение $ABCD$.

$AB = a$

$S_{сф} = 4\pi a^2$; $S_{осн} = \pi a^2$;

$S_{бок} = 2\pi \cdot AD \cdot AB$;

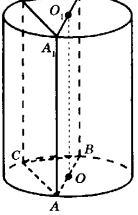
$S_{бок} = 2\pi \cdot a \cdot a = 2\pi a^2$;

$S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$;

$S_{сф} = S_{пол.цилиндра}$.

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ НА МНОГОГРАННИКИ, ЦИЛИНДР, КОНУС, ШАР

629.



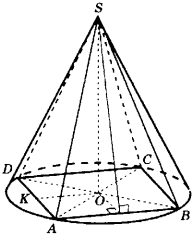
По условию в цилиндр вписана треугольная призма.

AB — диаметр окружности. $\angle ACB = 90°$;

$BC \perp CC_1$; CC_1 — образующая и перпендикуляр на основанию.

$BC \perp (ACC_1)$; $(AA_1C_1C) \perp (BCC_1B_1)$ — по признаку перпендикулярности двух плоскостей.

630.



По условию в конус вписана пирамида, в которой $ABCD$ — прямоугольник. $SO \perp (ABCD)$.

$SO = h = 12$ см; $AB = CD = 8$ см; $BC = AD = 6$ см;

$OA = OB = r$; $BD = 2r$.

По теореме Пифагора в ΔBAD:

$BD = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ см.

$OA = OB = 5$ см; $S_{осн} = \pi r^2$ — площадь конуса;

$S_{осн} = \pi \cdot 25$ (см^2).

ΔSOA: по теореме Пифагора

$SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ см;

$S_{бок} = \pi rl$, где $SA = l$; $S_{бок} = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi$ см^2;

$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 25\pi + 65\pi = 90\pi$ (см^2).

$S\square ABCD = AB \cdot BC$ — площадь прямоугольника; $S\square ABCD = 6 \cdot 8 = 48$ см^2.

$OK \perp AD$; $OL \perp AB$ — по теореме о трех перпендикулярах.

$SK \perp AD$ и $SL \perp AB$. $OK = \frac{1}{2}AB = 4$ см; $OL = \frac{1}{2}BC = 3$ см.

Из прямоугольного ΔSOK: по теореме Пифагора:

$SK = \sqrt{h^2 + OK^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$ (см);

$S_{\Delta ASD} = \frac{1}{2}SK \cdot DA = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\sqrt{10} = 12\sqrt{10}$ (см^2).

Из ΔSOL: по теореме Пифагора:

$SL = \sqrt{h^2 + OL^2} = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$ (см);

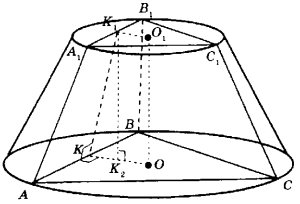
$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2}SL \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3\sqrt{17} = 12\sqrt{17}$ (см^2);

$S_{бок} = 2(S_{\Delta ASD} + S_{\Delta ASB}) = 2 \cdot (12\sqrt{10} + 12\sqrt{17}) = 24 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{17})$ см^2;

$S_{пол} = S_{бок} + S_{осн} = 24 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{17}) + 48 = 24 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{17} + 2)$ см^2;

$$\frac{S_{пир}}{S_{кон}} = \frac{24 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{17} + 2)}{90\pi} = \frac{4 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{17} + 2)}{15\pi}.$$

631.



По условию дан усеченный конус, в который вписана правильная усеченная пирамида.

а) $r = 2$ см; $h = 4$ см; $R = 5$ см.

Треугольная пирамида. $AC = BC = AB = a$. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $a = R\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — площадь правильного треугольника; $S_{\Delta ABC} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ (см^2);

$A_1C_1 = B_1C_1 = A_1B_1 = b$; $r = \frac{b}{\sqrt{3}}$; $b = r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ см;

$S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$ см^2.

$O_1K_1 \perp A_1B_1$; $OK \perp AB$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $KK_1 \perp AB$, OK и O_1K_1 — радиусы вписаных окружностей.

$OK = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ см; $O_1K_1 = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$ см.

Проведем $K_1K_2 \| OO_1$; $K_1K_2 \perp OK$. $K_2K_1 = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$ см.

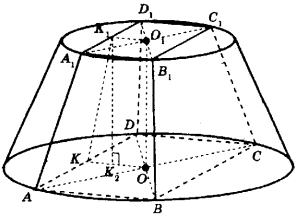
Из ΔK_1K_2K: по теореме Пифагора:

$KK_1 = \sqrt{h^2 + (1{,}5)^2} = \sqrt{16 + (1{,}5)^2} = \frac{\sqrt{73}}{2}$ (см);

$S_{бок} = 3S_{\Delta ABB_1A_1} = \frac{21\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{73}}{2} = \frac{21\sqrt{3 \cdot 73}}{4}$ (см^2);

$S_{полн} = S_{бок} + S_{\Delta A_1B_1C_1} + S_{\Delta ABC} = \frac{21\sqrt{3 \cdot 73}}{4} + \frac{75\sqrt{3}}{4} + 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot (7\sqrt{73} + 25 + 4) =$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot (7\sqrt{73} + 29)$ см^2.



б) $n = 4$; $AB = a$;

$R = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = R\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ см;

$h = 4$ см.

$S\square ABCD = a^2 = 25 \cdot 2 = 50$ (см^2).

$A_1B_1 = b = r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (см);

$S_{\Delta A_1B_1C_1} = b^2 = 8$ (см^2).

Боковые грани — есть равнобедренные трапеции.

$O_1K_1 \perp A_1D_1$; $OK \perp AD$, по теореме о трех перпендикулярах $KK_1 \perp AD$.

$O_1K_1 = \frac{b}{2} = \sqrt{2}$ см; $OK = \frac{a}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$; $K_2K_1 = \frac{5}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ см.

Из ΔK_1K_2K: по теореме Пифагора:

$KK_1^2 = \sqrt{h^2 + K_2K_1^2} = \sqrt{h^2 + \frac{9 \cdot 2}{4}} = \frac{\sqrt{82}}{2}$ см.

$$S_{\square AA_1D_1D}=\frac{A_1D_1+AD}{2}\cdot K_1K=\frac{a+b}{2}\cdot K_1K=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{82}}{2}\,(\text{см}^2);$$

$$S_{\square AA_1D_1D}=\frac{7\sqrt{2}\cdot\sqrt{82}}{4}\,\text{см}^2;\ S_{\text{бок}}=4S_{\square AA_1D_1D}=7\sqrt{2}\cdot\sqrt{82}\,(\text{см}^2);$$

$$S_{\text{полн}}=S_{\text{бок}}+S_{\square ABCD}+S_{\square A_1B_1C_1D_1}=7\sqrt{2}\cdot\sqrt{82}+50+8=14\sqrt{41}+58\,(\text{см}^2).$$

в) $n=6$.

Сторона верхнего основания — b, нижнего основания — a, $a>b$; радиус верхнего основания — r, нижнего основания — R; $b=r$; $a=R$.

Поскольку правильный 6-угольник состоит из шести равносторонних треугольников, тогда высота равна радиусу вписанной в 6-угольник окружности и равна h, а в нижний — H.

$$h=\frac{b\sqrt{3}}{2};\ H=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow h=\sqrt{3}\,\text{см};\ H=\frac{5\sqrt{3}}{2}\,\text{см}.$$

Площадь нижнего основания пирамиды равна

$$S_{\text{н}}=6\cdot\frac{1}{2}a\cdot H=15\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{75\sqrt{3}}{2}\,(\text{см}^2).$$

Площадь верхнего основания: $S_{\text{в}}=6\cdot\frac{1}{2}bh=3\cdot2\sqrt{3}=6\sqrt{3}\,(\text{см}^2)$.

Все шесть боковых граней являются равными равнобедренными трапециями. Вычислить нужно высоту. В плоскости верхнего основания есть $O_1K_1\perp$ стороне 6-угольника; в плоскости нижнего основания есть $OK\perp$ стороне.

$$OK=y;\ O_1K_1=x\Rightarrow KK_1=y-x=\frac{a\sqrt{3}}{3}-\frac{b\sqrt{3}}{2};$$

$$KK_2=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(5-2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{см}.$$

Из ΔK_1K_2K: по теореме Пифагора:

$$K_1K=\sqrt{h^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{16+\frac{27}{4}}=\frac{\sqrt{91}}{2}\,\text{см};$$

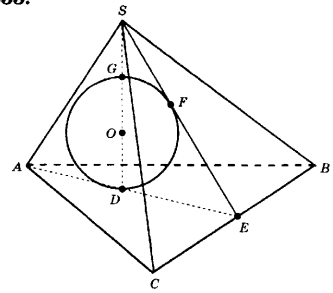
$$S_{\text{бок}}=6\cdot\frac{a+b}{2}\cdot KK_1=3(R+r)\cdot\frac{\sqrt{91}}{2}=3\cdot(2+5)\cdot\frac{\sqrt{91}}{2}=\frac{21\sqrt{91}}{2};$$

$$S_{\text{полн}}=S_{\text{бок}}+S_{\text{в}}+S_{\text{н}}=\frac{21\sqrt{91}}{2}+6\sqrt{3}+\frac{75\sqrt{3}}{2};\ S_{\text{полн}}=\frac{3}{2}\cdot(7\sqrt{91}+29\sqrt{3})\,\text{см}^2.$$

632. По условию дана правильная призма, центр сферы лежит в плоскости α, что параллельна основаниям и проходит через середины боковых ребер, так как она касается всех граней.

Центр сферы будет совпадать с центром треугольника, что получится пересечением призмы и плоскости α, а он лежит на отрезке (высоте), что соединяет центры оснований.

633.



По условию дана правильная пирамида, в которую вписана сфера. Пусть это будет треугольная правильная пирамида.

SD — высота, O — центр сферы; $AE \perp BC \Rightarrow SE \perp CB$ по теореме о трех перпендикулярах.

ΔSDE — прямоугольный, DFG — полуокружность. Центр O окружности лежит на катете SD и касается сторон DE и SE. ΔSED вместе с полуокружностью DFG повернем вокруг SD. Тогда точка E опишет окружность, что вписана в ΔABC, то есть гипотенуза SE при вращении останется в пирамиде. То есть сфера, образованная вращением полуокружности DFG, имеет единственную общую точку с каждой из боковых граней, то есть эта сфера касается основания пирамиды в точке $D \Rightarrow$ центр вписанной в пирамиду $SABC$ сферы лежит на высоте SD.

634. а) Куб.

Рассмотрим сечение, проходящее через ось. Получим квадрат и вписанную в него окружность, ее радиус равен радиусу сферы. Ребро куба a, $a = 2R$, R — радиус окружности.

Площадь одной грани $S = a^2 = 4R^2$; $S_{полн} = 6 \cdot 4R^2 = 24R^2$.

б) Правильная шестиугольная призма.

OO_1 — высота призмы, $OO_1 = d$, d — диаметр сферы.

Точки касания сферы с боковыми гранями лежат в сечении призмы плоскостью, которая проходит через середину высоты призмы перпендикулярно к боковым ребрам.

a — сторона 6-угольника $\Rightarrow a = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Боковые грани — прямоугольники, $S = H \cdot a$; $S = 2R \cdot \dfrac{2R}{\sqrt{3}} = \dfrac{4R^2}{\sqrt{3}}$;

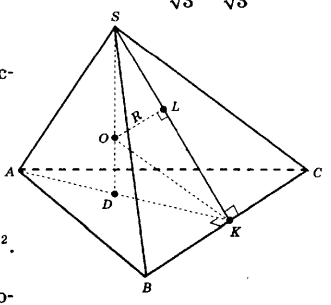
$$S_{бок} = 6 \cdot \frac{4R^2}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}R^2.$$

Поскольку основание состоит из шести равносторонних треугольников

$$S = \frac{1}{2}a \cdot R = \frac{1}{2} \cdot \frac{2R \cdot R}{\sqrt{3}} = \frac{R^2}{\sqrt{3}};$$

$$S_{осн} = \frac{6R^2}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3}R^2 = 2\sqrt{3}R^2;$$

$$S_{пол} = 8\sqrt{3}R^2 + 2\sqrt{3}R^2 + 2\sqrt{3}R^2 = 12\sqrt{3}R^2.$$



в) Правильный тетраэдр.

Все ребра тетраэдра равны между собой и равны a.

$AK \perp BC$, $SK \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах,

$\angle AKS$ — линейный угол двугранного угла при основании тетраэдра.
$\Delta OKL = \Delta OKD$, OK — общая гипотенуза, OK — биссектриса $\angle AKS$.
Из ΔSBK: по теореме Пифагора:

$$SK = \sqrt{SB^2 - BK^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

DK — радиус вписанной окружности, $DK = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.

$$\Delta SKD\text{: } \cos\angle SKD = \frac{DK}{SK} = \frac{a}{2\sqrt{3}} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3};$$

$$\sin\angle SKD = \sqrt{1-\cos^2\angle SKD} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\angle SKD}{2}\right) = \frac{\sin\angle SKD}{1+\cos\angle SKD} = \frac{2\sqrt{2}}{3} : \left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из ΔODK: $\dfrac{R}{DK} = \operatorname{tg}\dfrac{\angle SKD}{2} \Rightarrow DK = \dfrac{R}{\operatorname{tg}\dfrac{\angle SKD}{2}} = \dfrac{2R}{\sqrt{2}} = R$;

$a = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot R = 2\sqrt{6}R.$

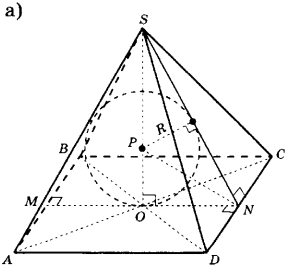
$S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — площадь правильного треугольника;

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(2\sqrt{6})^2 R^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}R^2.$$

Поскольку грани правильного тетраэдра есть равносторонние треугольники

$$S_{\text{полн}} = 4S_{\Delta ABC} = 24\sqrt{3}R^2.$$

635. а)



По условию дана правильная 4-угольная пирамида, в которую вписана сфера. SO — высота пирамиды. $NM \parallel AD$, точка $O \in MN$.
$SN \perp DC$; $SM \perp AB$ — по теореме о трех перпендикулярах.
Центр сферы P совпадает с точкой пересечения биссектрис двугранных углов при основании и лежит он на высоте SO.
PN — биссектриса, $\angle SNO$ — линейный угол двугранного угла.

$$AD = a;\ SN = l;\ \operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2} = \frac{AD}{2SN} \Rightarrow SN = \frac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{\angle DSC}{2}};$$

ΔSON — прямоугольный

$$\cos\angle SNO = \frac{ON}{SN} = \frac{a}{2l} = \operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2};$$

$$\sin\angle SNO = \sqrt{1-\cos^2\angle SNO} = \sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\angle DSC}{2}}.$$

В прямоугольном ΔPON: $\operatorname{tg}\frac{\angle SNO}{2}=\frac{PO}{ON}=\frac{2R}{a}$;

$$\operatorname{tg}\frac{\angle SPC}{2}=\frac{\sin\frac{\angle DSC}{2}}{1+\cos\frac{\angle DSC}{2}};$$

$$\frac{2R}{a}=\frac{\sin\angle SNO}{1+\cos\angle SNO}=\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\angle DSC}{2}}}{1+\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}}\Rightarrow a=\frac{2R\left(1+\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}\right)}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\angle DSC}{2}}},$$

тогда $SN=\dfrac{R\left(1+\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}\right)}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\angle DSC}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}}$;

$$S_{\Delta DCS}=\frac{1}{2}a\cdot SN;$$

$$S_{\Delta DCS}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2R^2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\angle DSC}{2}\right)^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}}=\frac{R^2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}\right)^2}{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\angle DSC}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}};$$

$$S_{бк}=4S_{\Delta DCS}=\frac{4R^2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}\right)^2}{\left(1-\left(\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}\right)^2\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}}=$$

$$=\frac{4R^2}{\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}}\cdot\frac{\left(1+\frac{\sin\angle DSC}{1+\cos\angle DSC}\right)^2}{1-\left(\frac{\sin\angle DSC}{1+\cos\angle DSC}\right)^2}=$$

$$=\frac{4R^2}{\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}}\cdot\frac{\left(\frac{1+\cos\angle DSC+\sin\angle DSC}{1+\cos\angle DSC}\right)^2}{\frac{(1+\cos\angle DSC)^2-\sin\angle DSC}{(1+\cos\angle DSC)^2}}=$$

$$=\frac{4R^2}{\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}}\cdot\frac{(1+\cos\angle DSC+\sin\angle DSC)^2}{(1+\cos\angle DSC)^2-\sin^2\angle DSC}=$$

$$=\frac{4R^2}{\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}}\cdot\frac{(1+\cos\angle DSC)^2+2(1+\cos\angle DSC)\cdot\sin\angle DSC+\sin^2\angle DSC}{1+2\cos\angle DSC+\cos^2\angle DSC-\sin^2\angle DSC}=$$

$$=\frac{4R^2}{\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}}\cdot\frac{2+2\cos\angle DSC+2\sin\angle DSC+2\cos\angle DSC\cdot\sin\angle DSC}{2\cos\angle DSC(1+\cos\angle DSC)}=$$

$$=\frac{4R^2}{\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}}\cdot\frac{1+\sin\angle DSC}{\cos\angle DSC}$$

домножим на сопряжение

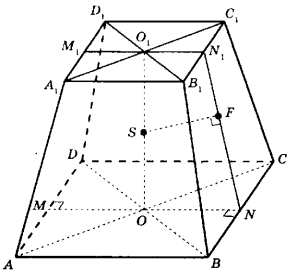
$$=\frac{4R^2}{\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}}\cdot\frac{1-\sin^2\angle DSC}{\cos\angle DSC(1-\sin\angle DSC)}=\frac{4R^2}{\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}}\cdot\frac{\cos\angle DSC}{(1-\sin\angle DSC)}=$$

$$=\frac{4R^2\cos\angle DSC}{(1-\sin\angle DSC)\operatorname{tg}\frac{\angle DSC}{2}}.$$

б) $R=5$; $\alpha=\angle DSC=60°$

$$S_{бок}=\frac{4\cdot 25\cos 60°}{tg\,30°(1-\sin 60°)}=\frac{100\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=100\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{3})\,(см^2).$$

636.



По условию дана правильная усеченная 4-угольная пирамида, в которую можно вписать сферу. Боковые грани — равнобедренные трапеции.

O и O_1 — центры оснований, S — центр сферы.

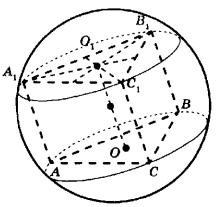
Центр сферы находится на OO_1, точнее на середине отрезка OO_1. Если в 4-угольную пирамиду можно вписать сферу, то в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

$MM_1+NN_1=M_1N_1+MN$; $MM_1=NN_1$; $2NN_1=M_1N_1+MN$;

$NN_1=\frac{M_1N_1+MN}{2}=\frac{B_1C_1+BC}{2}$, потому что в основаниях лежат квадраты.

Тогда $M_1N_1=A_1B_1=B_1C_1$; $MN=AB=BC$.

637. а)

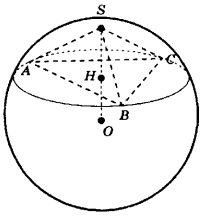


По условию сфера описана вокруг правильной призмы.

Пусть в основаниях призмы лежат равносторонние треугольники, пусть O и O_1 — центры оснований, S — центр сферы. Точки, которые лежат на перпендикуляре O_1O равноудалены от вершин треугольника ABC и аналогично от вер-

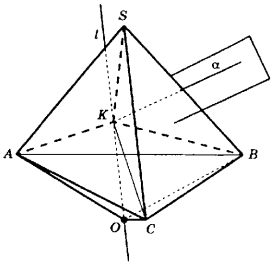
шин $\Delta A_1B_1C_1$. Поскольку призма правильная, то $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC проектируются один в другой $\Rightarrow$ тогда точка O проектируется в точку O_1 и наоборот. $OO_1 \perp (ABC) \Rightarrow OO_1$ — геометрическое место точек, что равноудалены от вершин каждого из треугольников. А середина OO_1, точка S, равноудалена от вершин $\Delta A_1B_1C_1$ и от вершин ΔABC на расстояние R — радиуса описанной окружности.

б)



Сфера описана около правильной пирамиды. $SABC$ — пирамида. $SH \perp (ABC)$.
$\Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$ — прямоугольные, $\angle H = 90°$; SH — общий катет, $SA = SB = SC$ — по условию $\Rightarrow HA = HB = HC = r$, r — радиус описанной около ΔABC окружности.
Если провести отрезок $OK \perp (ABC)$ и отрезки $KA, KB, KC, KO, OC, OB, OA \Rightarrow \Delta OKA = \Delta OKB = \Delta OKC$; OK — катет, $OA = OB = OC = R$ — радиус сферы.
$KA = KB = KC = r$, r — радиус окружности, описанной около ΔABC.
Тогда вокруг ΔABC можно описать единственную окружность. То есть точки H и K совпадают и лежат вместе с точкой O на одной прямой.
Точка O — центр сферы — лежит на высоте SH или на продолжении за точкой H.

638.



По условию дан тетраэдр.
а) Пусть O — центр окружности, $SABC$ — тетраэдр. Геометрическое место точек пространства, что равноудалены от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проведенная через его середину $\Rightarrow$ Центр сферы K описанной около тетраэдра, принадлежит каждой из плоскостей, проведенных через середины ребер тетраэдра перпендикулярно к этим ребрам.
Прямая $l \perp (ABC)$; $OA = OB = OC = r$ — радиус описанной окружности, точка $K \in l \Rightarrow \Delta KOA = \Delta KOB = \Delta KOC$; KO — общий катет. $OA = OB = OC \Rightarrow KA = KB = KC$. Плоскость α проходит через середину SB и $\alpha \perp SB$.
Если $\alpha \parallel l$, то $\alpha \perp SB$ и $l \parallel \alpha$, то $SB \perp l$ и $l \perp BC$, а значит, $l \perp (SBC)$ — по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Через точку K проведены две разных плоскости, которые перпендикулярны к одной прямой, а это невозможно, значит, $\alpha \nparallel l$, тогда l и α пересекаются в точке K.
$SK = KB$, поскольку S принадлежит каждой плоскости. $O \in (ABC)$. Расстояние от точки K до всех вершин одинаково и равно R. Сфера с центром K и радиусом R проходит через все данные точки $\Rightarrow$ сфера единственная.

б) Дан тетраэдр. Докажем, что в тетраэдр можно вписать сферу.
Центр сферы, вписанной в тетраэдр, равноудален от всех граней пирамиды, и он принадлежит каждой из плоскостей, то есть это точка пересечения биссектрисных плоскостей всех двугранных углов тетраэдра.
Все точки плоскости, что имеют биссектрисы, лежат между гранями двугранного угла, тогда центр сферы, вписанной в тетраэдр, всегда находится в середине тетраэдра. У сферы бывает только один центр. Сфера с радиусом, равным расстоянию от этой точки до плоскости какой-либо грани тетраэдра, касается всех граней тетраэдра $\Rightarrow$ в любой тетраэдр можно вписать сферу и только одну.

639. а) По условию дана сфера, в которую вписан куб. Точка O — точка пересечения диагоналей куба, сторона (ребро) куба равно a. Диагональ куба $d=\sqrt{3}a$; $d=2R$, R — радиус сферы; $2R=\sqrt{3}a \Rightarrow a=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$;
$S=a^2$ — площадь одной грани (квадрата);

$$S_{\text{полн}}=6a^2;\ S_{\text{полн}}=6\cdot\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{6\cdot 4R^2}{3}=8R^2.$$

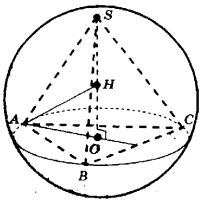
б) Правильная шестиугольная призма.
O_1 и O_2 — центры оснований призмы, O_1O_2 — высота призмы.
Сечение, что проходит через диаметр основания призмы — прямоугольник.
Радиус r описанной окружности около основания призмы найдем по теореме Пифагора:

$r=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{R}{2}\right)^2}=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$; $a=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ — в правильном 6-угольнике сторона и радиус описанной окружности равны.

$$S_{\text{бок}}=6aR=6\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot R=3\sqrt{3}R^2;\ S_{\text{полн}}=3\sqrt{3}R^2+2S_{\text{осн}}=3\sqrt{3}R^2+3\sqrt{3}a^2;$$

$$S_{\text{полн}}=3\sqrt{3}\left(R^2+\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)=\frac{3\sqrt{3}\cdot 7R^2}{4}=\frac{21\sqrt{3}R^2}{4}.$$

в)



Дан правильный тетраэдр. Ребро тетраэдра равно a. O — центр ΔABC, H — центр описанной сферы; SO – высота; $H \in SO$.
$OA=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.
По теореме Пифагора:

$$SO=\sqrt{a^2-OA^2};\ SO=a\sqrt{1-\frac{1}{3}}=a\sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$\cos\angle ASO=\frac{SO}{AS}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

По теореме косинусов в ΔAHS:

$a^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cos(180° - 2\angle ASO)$;

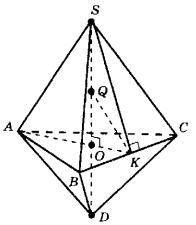
$a^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\angle ASO$;

$$a^2 = 2R^2 - 2R^2(\cos^2 \angle ASO - 1) = 2R^2 - 2R^2 \cdot \frac{2}{3} + 2R^2 = 4R^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8R^2}{3}.$$

Грани тетраэдра — правильные треугольники.

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ S_{\text{полн}} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4 \cdot 8R^2\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{8\sqrt{3}}{3}R^2.$$

640.



По условию дана правильная треугольная пирамида.

SO — высота пирамиды, $SO = h$; O — центр основания; K — середина BC; AK — высота ΔABC.

$AO = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, где a — сторона основания.

$OK = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $SO \perp (ABC)$; SD — диаметр шара, $\angle SKC = 90°$.

$$\Delta OAS \approx \Delta ODA \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{OA}{OD} \Rightarrow OD = \frac{OA^2}{OD};$$

$$2R = SD = SO + OD = h + \frac{a^2}{3h} = \frac{3h^2 + a^2}{3h};\ R = \frac{3h^2 + a^2}{6h}.$$

ΔSKC: по теореме Пифагора: $SK = \sqrt{SC^2 - CK^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$;

$$OK = \frac{a}{2\sqrt{3}};\ h = SO = \sqrt{SK^2 - OK^2} = \sqrt{\frac{15a^2}{4} - \frac{a^2}{4 \cdot 3}} = a\sqrt{\frac{44}{12}};\ h = a\sqrt{\frac{11}{3}}.$$

$$R = \frac{3a^2 \cdot \frac{11}{3} + a^2}{2 \cdot 3a\sqrt{\frac{11}{3}}} = \frac{12a^2}{6a\sqrt{\frac{11}{3}}} = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{11}} = \frac{2a\sqrt{33}}{11}.$$

r — ?

$r = OQ$, Q — центр вписанного шара, KQ — биссектриса $\angle SKO$;

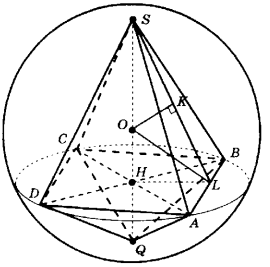
$$SK = \frac{a\sqrt{15}}{2};$$

$$\frac{OQ}{SQ} = \frac{OK}{SK} \Rightarrow \frac{r}{h - r} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 3a\sqrt{15}};\ h = a\sqrt{\frac{11}{3}};$$

$$\frac{r}{h - r} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \Rightarrow h = 3\sqrt{5}r + r;\ h = r(3\sqrt{5} + 1);$$

$$OQ = r = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3} \cdot (3\sqrt{5} + 1)} = \frac{(3\sqrt{5} - 1)a}{4\sqrt{33}}.$$

641.



По условию дана правильная 4-угольная пирамида. O — центр вписанной сферы, SH — высота пирамиды, $\angle QAS = 90°$, поскольку опирается на диаметр, SQ — диаметр.

Из подобия ΔHAS и ΔHAQ:

$$\frac{HA}{HS} = \frac{HQ}{HA} \Rightarrow HA^2 = HQ \cdot HS;$$

$HQ = R = 5$; $SQ = 10$ см.

Сторона основания равна $a \Rightarrow$

$$AH = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2};\ \frac{a^2 \cdot 2}{4} = h(10-h);$$

$a^2 = 2h(10-h)$; $HL \perp AB$; $(SLH) \perp (ABS)$; $LH = \frac{a}{2}$; $OK \perp SL$; $OH = OK = r$;

OL — биссектриса $\angle HLS$.

По теореме Пифагора: $SL = \sqrt{h^2 + LH^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$;

$$\sin\angle HLS = \frac{SH}{LS} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + a^2}};\ \cos\angle HLS = \frac{a}{\sqrt{4h^2 + a^2}}.$$

$$\Delta OLH:\ \frac{OH}{LH} = \frac{r}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\angle HLS}{2};\quad \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle HLS}{2} = r = 2 \text{ см};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\angle HLS}{2} = \frac{1-\cos\angle HLS}{\sin\angle HLS} = \frac{1 - \frac{a}{\sqrt{4h^2+a^2}}}{\frac{2h}{\sqrt{4h^2+a^2}}} = \frac{\sqrt{4h^2+a^2} - a}{2h};$$

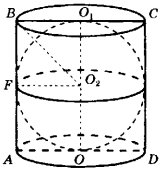
$$\operatorname{tg}\frac{\angle HLS}{2} = \frac{4}{a};\ \frac{\sqrt{4h^2+a^2} - a}{2h} = \frac{4}{a};\ \begin{cases} a\sqrt{4h^2+a^2} - a^2 = 8h; \\ a^2 = 2h(10-h); \end{cases}$$

$a\sqrt{4h^2 + a^2} = 8h + 2h(10-h)$;
$a^2(4h^2 + a^2) = (8h + 20h - 2h^2)^2$;
$(20h - 2h^2)(4h^2 + 20h - 2h^2) = (-2h^2 + 28h)^2$;
$2(10h - h^2)(20h + 2h^2) = 4(-h^2 + 14h)^2$;
$(10h - h^2)(10h + h^2) = (-h^2 + 14h)^2$;
$100h^2 - h^4 = h^4 + 196h^3 - 28h^3$;
$-2h^4 + 28h^3 - 96h^2 = 0$;
$2h^2(h^2 - 14h + 48) = 0$;
$h = 0$;

$$h = \frac{14 \pm \sqrt{196-192}}{2} = \frac{14 \pm 2}{2};$$

$h_1 = 8$; $a_1^2 = 2 \cdot 8 \cdot (10-8) = 32$; $a_1 = 4\sqrt{2}$ см;
$h_2 = 6$; $a_2^2 = 2 \cdot 6 \cdot (10-6) = 48$; $a_2 = 4\sqrt{3}$ см.

642.



По условию дан цилиндр, в который вписана сфера.

$ABCD$ — квадрат. R — радиус сферы.

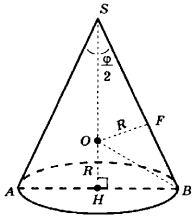
$\Delta O_2BF = \Delta O_2BO_1$; $BO_1 = O_2O_1 = R$; $O_1O = 2R$ — высота цилиндра.

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$; $S_{осн} = \pi R^2$;

$S_{бок} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$;

$$S_{полн} = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2;\ S_{сф} = 4\pi R^2;\ \frac{S_{сф}}{S_{полн}} = \frac{4\pi R^2}{6\pi R^2} = \frac{2}{3}.$$

643.



По условию дан конус, в который вписана сфера.

а) SH — высота конуса; SH — биссектриса угла φ.

ΔSHB: $\angle HBS = 90° - \frac{\varphi}{2}$; OB — биссектриса $\angle HBS$; $\angle HBO = \frac{\angle HBS}{2}$.

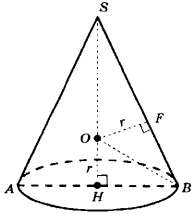
ΔOHB: $\angle H = 90°$; $\operatorname{tg}\angle HBO = \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right) = \frac{R}{r}$;

$$r = \frac{R}{\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right)} = \frac{R}{\operatorname{ctg}\left(45° + \frac{\varphi}{4}\right)} = R \cdot \operatorname{tg}\left(45° + \frac{\varphi}{4}\right).$$

б) $\frac{R}{r} = \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right)$; $R = r\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right)$, где $\frac{\varphi}{4}$ — острый угол.

в) $\frac{R}{r} = \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}30°$; $45° - \frac{\varphi}{4} \Rightarrow \varphi = 60°$ — острый угол.

644.



По условию дан конус, в который вписана сфера. $\angle SBH = \alpha$; SH — высота конуса; OB — биссектриса $\angle HBS$.

ΔOBH: $\angle OBH = \frac{\alpha}{2}$; r — радиус сферы,

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{BH}$; $BH = a$; $S_{осн} = \pi a^2 = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Из ΔSHB: $\cos\alpha = \frac{a}{SB} \Rightarrow SB = \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$;

$$S_{бок} = \pi a \cdot SB = \frac{\pi r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{r}{\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha};$$

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right);$$

$$S_{полн} = \frac{\pi r^2}{tg^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

645. По условию дан цилиндр, который вписан в сферу (рис. в учебнике, стр. 139).

$ABCD$ — квадрат. Осевое сечение — это квадрат. $AD = a$; R — радиус сферы.

ΔADC: по теореме Пифагора: $AC^2 = (2R)^2 = a^2 + a^2$;

$$2R = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

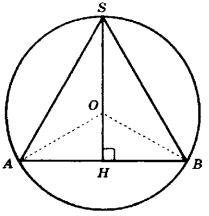
$$S_{сф} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{a^2 \cdot 2}{4} = 2\pi a^2.$$

Радиус основания $\frac{a}{2}$; $S_{бок} = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \pi a^2$; $S_{осн} = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$;

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$; $S_{сф} = 2\pi a^2$; $S_{полн} = \pi a^2 + 2 \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$

$$\frac{S_{полн}}{S_{сф}} = \frac{3\pi a^2}{2 \cdot 2\pi a^2} = \frac{3}{4}.$$

646.



По условию дан конус.

SH — высота конуса, $SO = OB = OA = R$;

ΔSOB — равнобедренный;

$$\angle OSB = \angle SBO = \frac{\varphi}{2};$$

ΔSHB — прямоугольный;

$$\angle OBH = \left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{r}{R} = \cos\varphi.$$

а) r — ? $r = R\cos\varphi$;

б) R — ? $R = \frac{r}{\cos\varphi}$;

в) φ — ? $\cos\varphi = \frac{r}{R} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60°$.

ГЛАВА VII. ОБЪЕМЫ ТЕЛ

§ 1. Объем прямоугольного параллелепипеда

647. По условию дано тело R, которое состоит из P и Q.

а) V — ?

V_1 — объем тела P; V_2 — объем тела Q; $V = V_1 + V_2$;

б) тела P и Q имеют общую часть, объем которой $\frac{1}{3}V_1$.

$$V = \frac{2}{3}V_1 + V_2; \quad V = V_1 - \frac{1}{3}V_1 + V_2 = \frac{2}{3}V_1 + V_2.$$

648. По условию дан прямоугольный параллелепипед.

а) $a = 11$; $b = 12$; $h = 15$;

$V = a \cdot b \cdot h = 11 \cdot 12 \cdot 15 = 1980$;

б) $a = 3\sqrt{2}$; $b = \sqrt{5}$; $h = 10\sqrt{10}$;

$V = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 10\sqrt{10} = 30\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 300$;

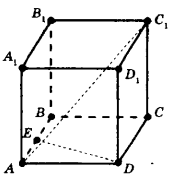
в) $a = 18$; $b = 5\sqrt{3}$; $h = 13$;

$V = 18 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 13 = 90 \cdot 13\sqrt{3} = 1170\sqrt{3}$;

г) $a = 3\frac{1}{3}$; $b = \sqrt{5}$; $h = 0{,}96$;

$$V = \frac{10}{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{96}{100} = 3{,}2\sqrt{5}.$$

649.



По условию дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) $AC = 12$ см. V — ?

Сторона (ребро) куба равно a.

ΔACD: $a\sqrt{2} = 12$ см; $a = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$ см;

$V = a^3 = (6\sqrt{2})^3 = 432\sqrt{2}$ (см^3);

б) $AC_1 = 3\sqrt{2}$ м. Сторона куба — a.

$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = (a^2 + a^2) + a^2 = 3a^2$; $AC_1 = a\sqrt{3}$; $3\sqrt{2} = a\sqrt{3}$; $a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

$$V = a^3 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{27 \cdot 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 6\sqrt{6} \text{ (м}^3\text{)};$$

в) $DE = 1$ см, где E — середина AB.

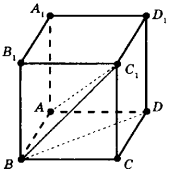
ΔEAD: $DE^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$; $DE = 1 = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$$V = a^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{8}{5\sqrt{5}} = 0{,}32\sqrt{5} \text{ (см}^3\text{)}.$$

650. По условию дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $a = 8$ см; $b = 12$ см; $c = 18$ см.
$V_1 = 8 \cdot 12 \cdot 18 = 1728$ (см^3); $V_2 = V_{\text{куба}} = a^3$, где a — ребро куба.
$a^3 = 1728 \Rightarrow a = \sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{144 \cdot 12} = 12$ см.

651. Кирпич имеет форму прямоугольного параллелепипеда.
$a = 25$ см; $b = 12$ см; $c = 6{,}5$ см; $V = abc = 25 \cdot 12 \cdot 6{,}5 = 1950$ (см^2).
$m = \rho \cdot V$; $\rho = 1{,}8$ г/см^3; $m = 1{,}8 \cdot 1950 = 3510$ г; $m = 3{,}51$ кг.

652. По условию дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
$AC_1 = 13$ см; $BD = 12$ см; $BC_1 = 11$ см; $AB = a$; $BC = b$; $CC_1 = c$.
По теореме Пифагора:



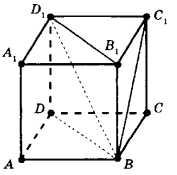
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 12^2; \\ b^2 + c^2 = 11^2; \\ a^2 + b^2 + c^2 = 13^2; \end{cases}$$

$a^2 + b^2 = AC^2$; $AC^2 + CC_1^2 = AC_1^2$;

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 144; \\ b^2 + c^2 = 121; \\ a^2 + b^2 + c^2 = 169; \Rightarrow \end{cases}$$

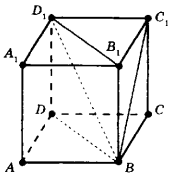
$\Rightarrow c^2 = 169 - (a^2 + b^2) = 169 - 144$; $c^2 = 25$; $c = 5$ см;
$b^2 = 121 - c^2 = 121 - 25 = 96$; $b = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ см;
$a^2 = 144 - 96 = 48$; $a = 4\sqrt{3}$ см;
$V = abc = 5 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6} = 240\sqrt{2}$ (см^3).

653. По условию дан прямоугольный параллелепипед.
$\angle D_1BC_1 = 30°$; $\angle D_1BB_1 = 45°$.
ΔD_1C_1B: $\angle C_1 = 90°$; $D_1C_1 = 9$ см, D_1C_1 — катет, что лежит против угла 30°.
ΔD_1B_1B — прямоугольный;



$BB_1 = 18\sin 45° = \dfrac{18\sqrt{2}}{2}$; $BB_1 = 9\sqrt{2}$ см.
D_1B — диагональ прямоугольного параллелепипеда.
$D_1B^2 = a^2 + b^2 + c^2$;
$18^2 = 9^2 + (9\sqrt{2})^2 + B_1C_1^2 \Rightarrow B_1C_1^2 = 18^2 - 9^2 - 81 \cdot 2$;
$B_1C_1^2 = 81$; $B_1C_1 = 9$ см.
$V = abc = 9 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 9 = 729\sqrt{2}$ (см^3).

654. По условию дан прямоугольный параллелепипед. DB — проекция диагонали на плоскость основания; BC_1 — проекция диагонали на боковую грань.
$\angle D_1BD = \beta$; $\angle D_1BC_1 = \alpha$; $DD_1 = AA_1 = h$.



ΔD_1DB: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{DD_1}{BD} \Rightarrow \dfrac{h}{DB} = \operatorname{tg}\beta \Rightarrow DB = \dfrac{h}{\operatorname{tg}\beta}$;

$D_1B = \dfrac{DD_1}{\sin\beta} = \dfrac{h}{\sin\beta}$.

ΔADB: по теореме Пифагора:

$AB^2 + AD^2 = DB^2 = \dfrac{h^2}{\operatorname{tg}^2\beta}$; $AB^2 + AD^2 = \dfrac{h^2}{\operatorname{tg}^2\beta}$.

ΔD_1BC_1: $D_1C_1 = D_1B\sin\alpha$; $D_1C_1 = \dfrac{h\sin\alpha}{\sin\beta}$;

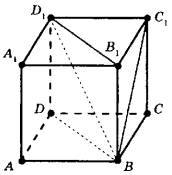
$D_1C_1 = AB = \dfrac{h\sin\alpha}{\sin\beta}$;

$\dfrac{h^2\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} + AD^2 = \dfrac{h^2}{\operatorname{tg}^2\beta} \Rightarrow AD^2 = \dfrac{h^2}{\operatorname{tg}^2\beta} - \dfrac{h^2\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \dfrac{h^2}{\sin^2\beta}\cdot(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)$;

$AD = \dfrac{h}{\sin\beta}\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}$;

$V = AB\cdot AD\cdot DD_1 = \dfrac{h^2}{\sin\beta}\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}\cdot\dfrac{h\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{h^2\sin\alpha\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}}{\sin^2\beta}$.

655.



По условию дан прямоугольный параллелепипед. $AB = a$; $BC = b$; C_1B — проекция диагонали на плоскость боковой грани.

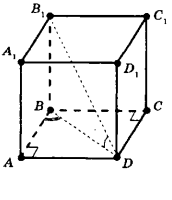
ΔD_1BC_1: $AB = \dfrac{1}{2}D_1B \Rightarrow D_1B = 2a$;

$BC_1 = D_1B\cos 30° = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

ΔBC_1C: по теореме Пифагора $BC^2 + CC_1^2 = BC_1^2 = (a\sqrt{3})^2$;

$C_1C^2 = 3a^2 - b^2 \Rightarrow C_1C = \sqrt{3a^2 - b^2}$; $V = a\cdot b\cdot CC_1 = ab\sqrt{3a^2 - b^2}$.

656.



По условию дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

$AC = BD = 12$ см; $A_1B_1 \parallel AB$; $AB \perp BB_1$; $BD \perp BB_1$.

$\angle ABD = 60°$; $\angle ABD$ — линейный угол двугранного угла A_1B_1BD.

ΔB_1BD: $B_1B = BD = 12$ см, $\angle B_1DB = 45° \Rightarrow$

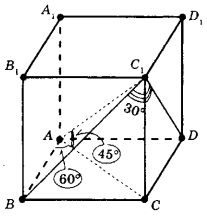
$\Rightarrow \Delta B_1BD$ — прямоугольный равнобедренный.

$AB = \dfrac{1}{2}\cdot 12 = 6$ см;

$AD = 12\cdot\sin 60° = 12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ см;

$V = 6\cdot 6\sqrt{3}\cdot 12 = 432\sqrt{3}$ (см^3).

657.



По условию дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) $AC_1 = 1$ м; $\angle C_1AC = 45°$; $\angle C_1AB = 60°$; ΔC_1CA — прямоугольный, равнобедренный,

$$CA = CC_1 = 1\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{ (м)}.$$

$C_1B \perp AB$; ΔABC_1 — прямоугольный,

$$AB = \frac{1}{2}\text{ м}.$$

ΔABC: по теореме Пифагора $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$;

$$BC = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\text{ м};$$

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}\text{ (м}^3\text{)}.$$

б) $AC_1 = 24$ см; $\angle C_1AA_1 = 45°$; $\angle AC_1D = 30°$.

ΔAA_1C_1: $AA_1 = AC_1 \sin 45°$; $AA_1 = 24\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$ (см).

ΔAC_1D: $AD = \frac{1}{2}AC_1 = 12$ см;

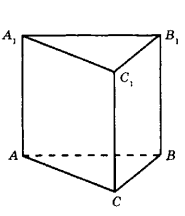
$$C_1D = AC_1\cos\angle AC_1D = 24\cos 30° = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}\text{ (см)}.$$

ΔC_1CD — прямоугольный, $\angle C_1CD = 90°$;

$C_1D^2 = AA_1^2 + CD^2$; $CC_1 = AA_1$; $(12\sqrt{3})^2 = (12\sqrt{2})^2 + CD^2$; $CD^2 = 12^2\cdot(3 - 2) = 12^2$; $CD = 12$ см.

$$V = 12\sqrt{2}\cdot 12\cdot 12 = 1728\sqrt{2}\text{ (см}^3\text{)}.$$

658.



По условию дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$.
$AB = 35$ см; $\angle BAC = 90°$; $BC = 37$ см; $AA_1 = 1{,}1$ дм $= 11$ см.

ΔABC: по теореме Пифагора:

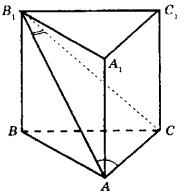
$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{37^2 - 35^2} = 12\text{ см};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot 35\cdot 12 = 210\text{ (см}^2\text{)};$$

$$V = S_{\Delta ABC}\cdot AA_1 = 210\cdot 11 = 2310\text{ (см}^3\text{)}.$$

§ 2. Объем прямой призмы и цилиндра

659. По условию дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$.



а) $\angle BAC = 120°$; $AB = 5$ см; $AC = 3$ см; $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

ΔABC: по теореме косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120°$;

$$BC^2 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right); \quad BC^2 = 49; \; BC = 7 \text{ см}.$$

Наибольшая площадь у боковой грани, у которой сторона (или AB, BC, AC) наибольшая.

$BC = 7$ см $\Rightarrow S_{\square BB_1C_1C} = 35$ см^2; $S_{\square BB_1C_1C} = BC \cdot BB_1$; $7 \cdot BB_1 = 35 \Rightarrow BB_1 = 5$ см.

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \sin 120° = \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$V = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = \frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ (см}^3\text{)}.$$

б) $\angle AB_1C = 60°$; $AB_1 = 3$; $CB_1 = 2$; $\angle ABC = 90°$ — линейный угол двугранного угла с ребром BB_1; $BB_1 \perp BC$.

ΔAB_1C: по теореме косинусов: $AC^2 = AB_1^2 + B_1C^2 - 2AB_1 \cdot B_1C \cos 60°$;

$$AC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}; \quad AC^2 = 7 \Rightarrow AC = \sqrt{7}.$$

ΔABC: по теореме Пифагора: $AB^2 + BC^2 = AC^2$; $AB^2 + BC^2 = 7$.

ΔAB_1B: по теореме Пифагора: $AB^2 + BB_1^2 = AB_1^2$; $AB^2 + BB_1^2 = 9$.

ΔCB_1B: по теореме Пифагора: $BC^2 + BB_1^2 = CB_1^2$; $BC^2 + BB_1^2 = 4$.

$$\begin{cases} AB^2 + BC^2 = 7; \\ AB^2 + BB_1^2 = 9; \\ BC^2 + BB_1^2 = 4; \end{cases} \Bigg| - \Rightarrow \begin{cases} AB^2 + BC^2 = 7; \\ AB^2 - BC^2 = 5; \end{cases} \Bigg| + \; 2AB^2 = 12; AB^2 = 6 \Rightarrow$$

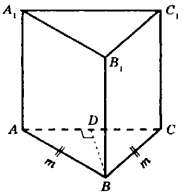
$\Rightarrow AB = \sqrt{6}$; $\qquad BC = 1$;

$6 + BC^2 = 7$; $\qquad BB_1^2 + 1 = 4$;

$BC^2 = 1$; $\qquad BB_1^2 = 3 \Rightarrow BB_1 = \sqrt{3}$;

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot BB_1 = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot 1\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1{,}5\sqrt{2}.$$

660.



По условию дана прямая призма.
$AB = BC \Rightarrow \Delta ABC$ — равнобедренный;
$AB = BC = m$; $\angle ABC = \varphi$; $BB_1 = BD$; BD — высота.

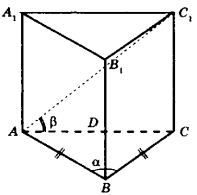
ΔABD: $BD = AB \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$; $BD = m\cos\frac{\varphi}{2}$;

$BB_1 = m\cos\frac{\varphi}{2}$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC\sin\varphi$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}m^2\sin\varphi$;

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot BB_1 = \frac{1}{2}m^2\sin\varphi \cdot m\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}m^3\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}.$$

661.



По условию дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$.
$AB = BC$; $\angle ABC = \alpha$; $AC_1 = l$; $\angle C_1AC = \beta$.
$A_1C_1 = A_1C\cos\beta = l\cos\beta$; $CC_1 = A_1C\sin\beta = l\sin\beta$; $AC = A_1C_1 = l\cos\beta$.
ΔABC: по теореме косинусов:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle ABC$;
$AC^2 = AB^2 + AB^2 - 2AB^2\cos\alpha$;
$l^2\cos^2\beta = 2AB^2(1 - \cos\alpha)$;

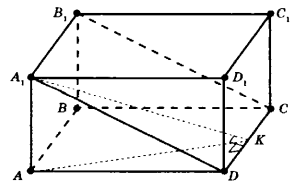
$$AB^2 = \frac{l^2\cos^2\beta}{2(1-\cos\alpha)};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC\sin\alpha = \frac{1}{2}AB^2\sin\alpha = \frac{1}{4} \cdot \frac{l^2\cos^2\beta\sin\alpha}{1-\cos\alpha};$$

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot CC_1 = \frac{l^2\cos^2\beta\sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)} \cdot l\sin\beta;$$

$$V = \frac{l^3\cos^2\beta\sin\beta 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4 \cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{l^3\sin\beta\cos^2\beta}{4\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

662.



По условию дана прямая призма, в которой $ABCD$ — параллелограмм. Сечение A_1B_1CD — параллелограмм.
$AK \perp CD$; $CD = a$; $S_{\square A_1B_1CD} = Q$;

$S_{\square A_1B_1CD} = CD \cdot A_1K$;

$Q = a \cdot A_1K \Rightarrow A_1K = \frac{Q}{a}$.

ΔA_1AK: $AK = A_1K\cos\beta = \frac{Q}{a}\cos\beta$; $A_1A = \frac{Q}{a}\sin\beta$;

$S_{\square ABCD} = AK \cdot DC = \frac{Q}{a}\cos\beta \cdot a = Q\cos\beta$;

$$V = S_{\square ABCD} \cdot AA_1 = Q\cos\beta \cdot \frac{Q}{a}\sin\beta = \frac{Q^2}{2a}2\cos\beta\sin\beta; \quad V = \frac{Q}{2a}\sin 2\beta.$$

663. По условию дана правильная n-угольная призма.

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}; \quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}};$$

$$S_{осн} = nS_{\Delta ABC} = \frac{na^2}{4\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}; \quad V = S_{осн} \cdot h = \frac{na^3}{4\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}.$$

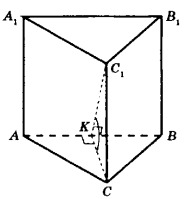
а) $n = 3$; $V = \dfrac{3a^3}{4\operatorname{tg}\frac{180°}{3}} = \dfrac{3a^3}{4\operatorname{tg}60°} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$;

б) $n = 4$; $V = \dfrac{4a^3}{4\operatorname{tg}\frac{180°}{4}} = \dfrac{4a^3}{4\operatorname{tg}45°} = a^3$;

в) $n = 6$; $V = \dfrac{6a^3}{4\operatorname{tg}\frac{180°}{6}} = \dfrac{3a^3}{2\operatorname{tg}30°} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{2}$;

г) $n = 8$; $V = \dfrac{8a^3}{4\operatorname{tg}\frac{180°}{8}} = \dfrac{2a^3}{\operatorname{tg}22°30'}$.

664.



По условию дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

$\angle C_1KC = 60°$; $C_1K \perp AB$; $CK \perp AB$ — по теореме о трех перпендикулярах.

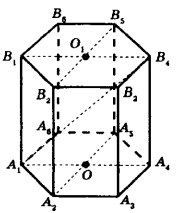
$$\operatorname{tg}\angle C_1CK = \frac{C_1C}{CK} = \operatorname{tg}60° = \sqrt{3}; \quad C_1C = CK \cdot \sqrt{3}.$$

$$\Delta CKB: CK = a\sin\angle CBK; \quad CK = a\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}.$$

$$S_{\Delta ACB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad V = S_{\Delta ABC} \cdot CC_1; \quad V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}.$$

665.



По условию дана правильная 6-угольная призма. Наибольшая диагональ A_1B_4; A_1A_4 — проекция диагонали A_1B_4.

Сторона равна R, R — радиус описанной окружности; $A_1A_4 = 2R$.

$$\Delta A_1A_4B_4: \angle A_1B_4A_4 = 30°; \quad \operatorname{tg}30° = \frac{A_1A_4}{B_4A_4};$$

$\frac{A_1A_4}{B_4A_4}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{2R}{A_4B_4}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow A_4B_4=2R\sqrt{3};$

$S_{осн}=6S_{\Delta A_1OA_2};\ S_{\Delta A_1OA_2}=\frac{A_1A_2^2\sqrt{3}}{4}=\frac{R^2\sqrt{3}}{4};$

$A_1A_4=2R=A_1B_4\sin 30°=8\sin 30°=4;$

$2R=4\Rightarrow R=2$, значит, сторона шестиугольника 2 см.

$A_4B_4=2\cdot 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ см;

$S_{\Delta A_1OA_2}=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\,(см^2);\ S_{A_1A_2\ldots A_6}=6S_{\Delta A_1OA_2}=6\sqrt{3}\,(см^2);$

$V=S_{A_1A_2\ldots A_6}\cdot A_4B_4=6\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}=24\cdot 3=72\,(см^3).$

666. По условию дан цилиндр.

а) V — ?

$r=2\sqrt{2}$ см; $h=3$ см; $V=\pi r^2h$; $V=\pi(2\sqrt{2})^2\cdot 3=24\pi\,(см^3)$.

б) r — ?

$V=120$ см^3; $h=3{,}6$ см; $V=\pi r^2h\Rightarrow r^2=\frac{V}{\pi h}$;

$r^2=\frac{120}{\pi\cdot 3{,}6}=\frac{40}{\pi\cdot 1{,}2}=\frac{10}{0{,}3\pi}=\frac{100}{3\pi};\ r=\frac{10}{\sqrt{3\pi}}$ см.

в) h — ?

$r=h$; $V=8\pi$ см^3; $V=\pi r^2h\Rightarrow h=\frac{V}{\pi r^2};\ h=\frac{8\pi}{\pi h^2}=\frac{8}{h^2}\Rightarrow h^3=8\Rightarrow h=2$ см.

667. По условию дан провод, который имеет форму цилиндра.

$V=\pi r^2h$; $h=l$ — длина провода, r — радиус сечения, плотность $\rho=\frac{m}{V}$; $\rho=2{,}6$ г/см^3; $\frac{m}{\pi r^2l}=\rho$; $d=4$ мм; $r=2$ мм $=0{,}2$ см; $m=6{,}8$ кг $=$ $=6800$ г;

$l=\frac{m}{\pi r^2\rho}$;

$l=\frac{6800}{3{,}14\cdot(0{,}2)^2\cdot 2{,}6}=\frac{6800}{3{,}14\cdot 0{,}04\cdot 2{,}6}\approx 2{,}08\cdot 10^4$ см; $l\approx 208$ м.

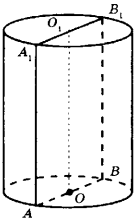
668. По условию дана цистерна, которая имеет форму цилиндра.

$V=\pi r^2h$; $d=18$ м; $r=9$ м; $h=7$ м; $V=\pi\cdot 81\cdot 7=567\pi$ (м^3).

$\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow m=\rho V$; $m=0{,}85\cdot 10^3\cdot 567\pi=0{,}85\cdot 10^3\cdot 567\cdot 3{,}14$; $m=$ $=1513$ т;

$\rho=0{,}85$ г/см$^3=0{,}85\cdot\frac{10^{-3}}{10^{-6}}$; $\rho=0{,}85\cdot 10^3$ кг/м^3.

669.



По условию дан цилиндр.

$S_{осн.\ цил} = Q$; $S_{сеч} = S$; $S_{осн.\ цил} = \pi r^2 = Q$; $S_{сеч} = 2rh = S$;

$r = \dfrac{S}{2h}$; V — ? $V = \pi r^2 h$; $V = Qh$; $Qh = \pi r^2 h$; $Q = \pi r^2$;

$Q = \dfrac{\pi S^2}{4h^2} \Rightarrow h^2 = \dfrac{\pi S^2}{4Q}$; $h = \dfrac{S}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{Q}}$;

$V = Q \cdot \dfrac{S}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{Q}} = \dfrac{1}{2}S\sqrt{\pi Q}$.

670. По условию дана труба, которая имеет форму цилиндра.

$\rho = 11{,}4$ г/см^3 $= 11{,}4 \cdot \dfrac{10^{-3}}{10^{-6}} = 11{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3 l — длина трубы;

$d = 13$ мм; $r = 6{,}5$ мм $= 6{,}5 \cdot 10^{-3}$ м; $R = 6{,}5 + 4 = 10{,}5$ мм $= 10{,}5 \cdot 10^{-3}$ м.

$V = \pi R^2 l - \pi r^2 l = \pi l(R^2 - r^2) = 3{,}14 \cdot 25(10{,}5^2 \cdot 10^{-6} - 13{,}14 - 6{,}5^2 \cdot 10^{-6})$

$V = 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot (110{,}25 - 42{,}25) = 5338 \cdot 10^{-6}$ м^3;

$m = \rho V$; $m = 11{,}4 \cdot 10^3 \cdot 5338 \cdot 10^{-6} = 60\,853{,}2 \cdot 10^{-3}$; $m \approx 60{,}83$ кг $\approx$ ≈ 61 кг.

671. По условию в цилиндр вписана правильная n-угольная призма. Высота призмы = высоте цилиндра.

$\dfrac{V_{пр}}{V_{цил}} = \dfrac{S_{осн}}{S_{круга}}$.

а) $n = 3$; ΔABC — правильный, a — сторона ΔABC

$2r = \dfrac{a}{\sin 60°}$; $r = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$; $S_{\Delta ACB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{кр} = \pi r^2 = \pi\dfrac{a^2}{3}$;

$\dfrac{V_{пр}}{V_{цил}} = \dfrac{S_{осн}}{S_{кр}} = \dfrac{S_{\Delta ACB}}{S_{кр}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{3}{\pi a^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

б) $n = 4$; $ABCD$ — квадрат, a — сторона квадрата

$S_{\square ABCD} = a^2$; $2r = a\sqrt{2} \Rightarrow r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $S_{кр} = \pi r^2 = \dfrac{\pi a^2 \cdot 2}{4} = \dfrac{\pi a^2}{2}$;

$\dfrac{V_{пр}}{V_{цил}} = \dfrac{S_{\square ABCD}}{S_{кр}} = \dfrac{a^2 \cdot 2}{\pi a^2} = \dfrac{2}{\pi}$.

в) $n = 6$; a — сторона 6-угольника; $r = a$

$S_{6\text{-угол}} = 6S_{\Delta AOB} = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$; $S_{кр} = \pi r^2$;

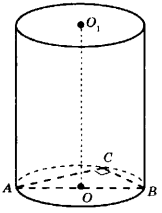
$\dfrac{V_{кр}}{V_{цил}} = \dfrac{S_{6\text{-угол}}}{S_{кр}} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2} \cdot \dfrac{1}{\pi a^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

г) n — произвольное число, a — сторона; $r = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$;

$$S_{n\text{-угол}} = nS = n\cdot\frac{a^2}{2\left(2\sin\frac{180^\circ}{n}\right)^2}\sin\frac{360^\circ}{n};\ S_{кр} = \pi\cdot\frac{a^2}{\left(2\sin\frac{180^\circ}{n}\right)^2};$$

$$\frac{V_{пр}}{V_{цил}} = \frac{S_{n\text{-угол}}}{S_{кр}};\ \frac{V_{пр}}{V_{цил}} = \frac{na^2\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}}{8\sin^2\frac{180^\circ}{n}}\cdot\frac{4\sin^2\frac{180^\circ}{n}}{\pi a^2} = \frac{n}{2\pi}\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

672.



По условию в цилиндр вписана призма, где ΔABC — прямоугольный.

$\angle C = 90^\circ \Rightarrow AB$ — диаметр;

$AB = 2r = \frac{a}{\cos\alpha} \Rightarrow r = \frac{a}{2\cos\alpha}$; r — радиус основания.

Высота цилиндра = высота призмы.

$$V_{цил} = \pi r^2 h = \pi\cdot\frac{a^2 h}{4\cos^2\alpha}.$$

§ 3. Объем наклонной призмы, пирамиды и конуса

673. По условию дана фигура (стр. 154, рис. 175 в учебнике.)

$$V=\int_a^b S(x)dx;\ a=1;\ S(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^2=x^{-2};$$

$$V=\int_1^2 x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^2=-\frac{1}{x}\Big|_1^2=-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

674. По условию дана фигура (стр. 154, рис. 176 в учебнике.)

$$V=\int_a^b S(x)dx;\ a=0;\ b=1;\ S(x)=\pi(\sqrt{x})^2=\pi x;$$

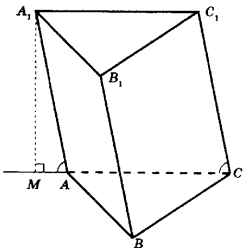
$$V=\int_0^1 \pi x dx=\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

675. По условию дана фигура (стр. 154, рис. 177 в учебнике.)

$$V=\int_a^b S(y)dy;\ a=0;\ b=1;\ S(y)=(y^2)^2\pi=y^4\pi;$$

$$V=\int_0^1 \pi y^4 dy=\pi\cdot\frac{y^5}{5}\Big|_0^1=\pi\cdot\frac{1}{5}=\frac{\pi}{5}.$$

676.



По условию дана наклонная призма.
$A_1M\perp(ABC)$; $\angle A_1AM=60°$ — угол, образованный боковым ребром и плоскостью основания.
ΔA_1AM — прямоугольный;

$A_1M=AA_1\sin\angle A_1AM=8\sin 60°=4\sqrt{3}$ (см);

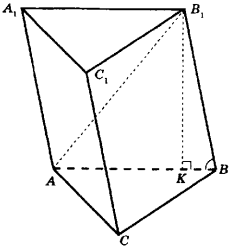
$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$;

$p=\dfrac{10+10+12}{2}=16$ см;

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{16\cdot 6\cdot 6\cdot 4}=48$ см^2;

$V=S_{\Delta ABC}\cdot A_1M=48\cdot 4\sqrt{3}=192\sqrt{3}$ (см^3).

677.



По условию дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, ΔABC — равносторонний,

$AB=BC=AC=a$; $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

ABB_1A_1 — ромб, $AB_1=b$; $ABB_1A_1\perp(ABC)$;
$B_1K\perp AB$; B_1K — высота в ΔAB_1B.
По теореме Пифагора:

$KB=\sqrt{B_1B^2-B_1K^2}$; $AK=\sqrt{AB_1^2-B_1K^2}$;

$AK+KB=AB=a$; $B_1K=h$; $B_1B=a$;

$AB_1=b$; $\sqrt{b^2-h^2}+\sqrt{a^2-h^2}=a$;

Возведем в квадрат обе части: $b^2-h^2+2\sqrt{(b^2-h^2)(a^2-h^2)}+a^2-h^2=a^2$; по определению квадратного корня

$2\sqrt{(b^2-h^2)(a^2-h^2)}=2h^2-b^2$; $2h^2-b^2\ge 0$; $h\ge\frac{b}{\sqrt{2}}$;

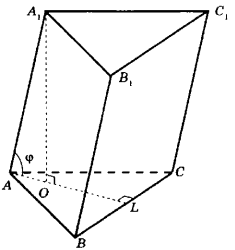
$4(b^2a^2-b^2h^2-h^2a^2+h^4)=4h^4-4h^2b^2+b^4$;

$4b^2a^2-b^4=4a^2h^2$;

$h^2=\frac{b^2(4a^2-b^2)}{4a^2}\Rightarrow h=\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}$;

$V=S_{\Delta ABC}\cdot h=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}=\frac{ab}{8}\sqrt{12a^2-3b^2}$.

678.



По условию $ABCA_1B_1C_1$ — призма, где ΔABC — равносторонний, $AB=BC=AC=m$.

$A_1O\Rightarrow(ABC)$, точка O — центр ΔABC, $OA=r$ — радиус, описанной около ΔABC окружности.

По теореме синусов:

$\frac{BC}{\sin\angle A}=2AO=2r\Rightarrow AO=r=\frac{m}{2\sin 60^\circ}=\frac{m}{\sqrt{3}}$.

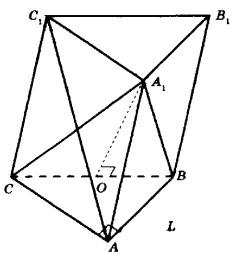
$\angle A=\angle B=\angle C$, потому что ΔABC — равносторонний.

ΔA_1AO — прямоугольный.

A_1O — высота; $A_1O=r\,\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{m}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\,\varphi$; $S_{\Delta ABC}=\frac{m^2\sqrt{3}}{4}$;

$V=S_{\Delta ABC}\cdot A_1O=\frac{m}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\,\varphi\cdot\frac{m^2\sqrt{3}}{4}=\frac{m^3\mathrm{tg}\,\varphi}{4}$.

679.



По условию $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма, где ΔABC — прямоугольный.

$AB=7$ см; $AC=24$ см; $A_1B=A_1A=A_1C$

Точка O — центр описанной окружности около ΔABC.

Точка O — середина гипотенузы BC. A_1O — высота, $A_1O\perp BC$; т.к. ΔA_1OA — прямоугольный, $\angle A_1OA=45^\circ$, то ΔA_1OA — равнобедренный, $A_1O=AO$.

По теореме Пифагора в ΔABC:

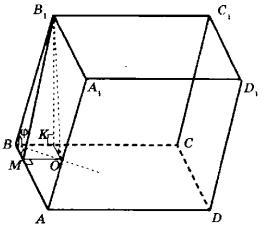
$BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{7^2+24^2}=\sqrt{625}=25$ см;

$OC=OB=OA=\frac{25}{2}=12{,}5$ см; $O_1A=12{,}5$ см;

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{7\cdot 24}{2}=84$ (см^2); $V=S_{\Delta ABC}\cdot O_1A=84\cdot 12{,}5=$

$=1050$ (см^3).

680.



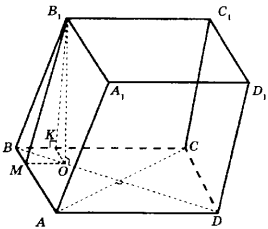
По условию дан наклонный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $ABCD$ — прямоугольник, $AB = CD = a$; $BC = AD = b$; $BB_1 = c$. $B_1M \perp AB$; $B_1K \perp BC \Rightarrow \Delta B_1BM = \Delta B_1BK \Rightarrow B_1M = B_1K \Rightarrow OM = OK \Rightarrow$ $\Rightarrow$ точка O лежит на биссектрисе $\angle ABC$; $B_1O \perp (ABC)$. Из ΔB_1BM: $BM = BB_1 \cos\varphi = c \cdot \cos\varphi$; $BO = BM\sqrt{2} = c\sqrt{2}\cos\varphi$.

ΔB_1BO: по теореме Пифагора:

$B_1O = \sqrt{BB_1^2 - BO^2} = \sqrt{c^2 - 2c^2\cos^2\varphi}$; $B_1O = c\sqrt{1 - 2\cos^2\varphi} = c\sqrt{-\cos 2\varphi}$;

$S_{\square ABCD} = AB \cdot BC = ab$; $V = S_{\square ABCD} \cdot B_1O = abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$, но $2\varphi > 90°$, тогда $\cos 2\varphi < 0$, а $-\cos 2\varphi > 0$.

681.



По условию дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании — ромб, грани — ромбы. $AC = 6$ см; $BD = 8$ см;

$$S_{\square ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\,(\text{см}^2).$$

$\angle B_1BA = \angle B_1BC$; $B_1M \perp AB$; $B_1K \perp BC$; $\Delta B_1BM = \Delta B_1BK$ (по гипотенузе и острым углам); $B_1M = B_1K$; $B_1O \perp (ABCD)$; $OM = OK$ — как проекции равных отрезков. Точка O равноудалена от сторон ромба, то есть точка O лежит на биссектрисе $\angle ABC$. А поскольку $ABCD$ — ромб, то биссектрисы угла являются диагоналями ромба, точка O лежит на BD. B_1O — высота. $\Delta A_1B_1O_1$ — прямоугольный. По теореме Пифагора, O_1 — точка пересечения A_1B и AB; $AB_1 = AB$; $A_1B_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ см.

$$S_{\square ABB_1A_1} = AB \cdot B_1M = 24 \Rightarrow B_1M = \frac{24}{5}\text{ см};\quad S_{\square ABCD} = S_{\square ABB_1A_1} = 24\text{ см}^2.$$

ΔB_1MB: по теореме Пифагора:

$$BM = \sqrt{BB_1^2 - B_1M^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}\,(\text{см}).$$

$$\Delta ABO:\ \cos\angle\frac{\beta}{2} = \frac{4}{5};\quad BO = BM \cdot \frac{1}{\cos\angle\frac{\beta}{2}} = \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{7}{4}\,(\text{см}).$$

ΔB_1OB: по теореме Пифагора:

$$B_1O = \sqrt{BB_1^2 - BO^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{351}{16}} = \frac{3\sqrt{39}}{4}\,(\text{см});$$

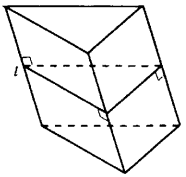
$$V = S_{\square ABCD} \cdot B_1O = 24 \cdot \frac{3\sqrt{39}}{4} = 18\sqrt{39}\,(\text{см}^3).$$

682. По условию дана наклонная призма. Пусть α и β — плоскости оснований, γ — плоскость, перпендикулярная боковым ребрам призмы. Если параллельным переносом перенести плоскости β и γ, тогда α и β совместятся $\Rightarrow$ призма — прямая.

V_1 — объем исходной призмы; V_2 — объем полученной призмы;

$V_1 = V_2$; $V_2 = S \cdot l$, где S — площадь основания.

683.



По условию дана наклонная треугольная призма.

l — длина бокового ребра, $V = S \cdot l$, S — площадь перпендикулярного сечения.

По теореме Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$p = \frac{37+13+30}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ см};$$

$a = 37$ см; $b = 13$ см; $c = 30$ см; $S = \sqrt{40 \cdot 3 \cdot 27 \cdot 10} = 20 \cdot 9 = 180$ см^2;

$S_{бок} = 480$ см^2; $S_{бок} = 2 \cdot p \cdot l = (a+b+c)l$; $480 = l(a+b+c)$;

$$l = \frac{480}{a+b+c} = \frac{480}{37+13+30} = 6; \ V = S \cdot l = 180 \cdot 6 = 1080 \text{ (см}^3\text{)}.$$

684. По условию дана пирамида.

а) $h = 2$ м; $ABCD$ — квадрат;

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 2 = 6 \text{ (м}^3\text{)}.$$

б) $h = 2{,}2$ м; ΔABC — основание пирамиды.

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2{,}2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC;$$

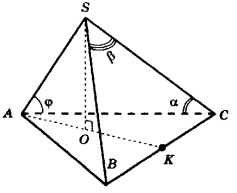
$$V = \frac{1}{3} \cdot 2{,}2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 13{,}5 \cdot \sin 30^\circ = 22{,}5 \cdot 220 = 4950 \text{ (см}^3\text{)}.$$

685. По условию дана правильная треугольная пирамида.

$h = 12$ см; $a = 13$ см; a — сторона основания.

$$S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{13^2\sqrt{3}}{4} = \frac{169\sqrt{3}}{4}; \ V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{169\sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 169\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

686.



По условию дана правильная треугольная пирамида $SABC$.

а) $SA = SB = SC = l$; SO — высота пирамиды.

ΔASO: $SO = SA \sin \angle SAO$; $SO = l \sin \varphi$.

ΔABC: OA — радиус описанной около ΔABC окружности.

По теореме синусов: $2AO = \dfrac{BC}{\sin 60^\circ}$,

ΔABC — равносторонний;

$AO = l\cos\varphi$.

$$BC = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot l\cos\varphi = \sqrt{3}l\cos\varphi;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3}l\cos\varphi)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}l^2\cos^2\varphi;$$

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}l^2\cos^2\varphi\cdot l\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}l^3\sin\varphi\cos^2\varphi.$$

б) ΔASC — равнобедренный, $\angle S = 180° - (\alpha + \alpha) = 180° - 2\alpha$.
По теореме косинусов:

$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2\cdot SA\cdot SC\cos(180° - 2\alpha)$;

$AC^2 = 2l^2 - 2l^2\cos(180° - 2\alpha)$;

$AC^2 = 2l^2(1 + \cos 2\alpha) = 4l^2\cos^2\alpha$;

$AC = 2l|\cos\alpha| = 2l\cos\alpha$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4l^2\cos^2\alpha\sqrt{3}}{4} = l^2\sqrt{3}\cos^2\alpha.$$

$AO = R$ — радиус описанной около ΔABC окружности.

$$\frac{AC}{\sin 60°} = 2AO \Rightarrow AO = \frac{2l\cos\alpha}{\sqrt{3}}.$$

ΔASO: по теореме Пифагора:

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{l^2 - \frac{4l^2\cos^2\alpha}{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\cos^2\alpha};$$

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO = \frac{l^2}{3}\sqrt{3}\cos^2\alpha\cdot\frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\cos^2\alpha} = \frac{1}{3}l^3\cos^2\alpha\sqrt{3 - 4\cos^2\alpha}.$$

в) ΔBSC — равнобедренный. По теореме косинусов:
$BC^2 = BS^2 + SC^2 - 2BC\cdot SC\cos\beta = 2l^2 - 2l^2\cos\beta$;

$$BC^2 = 2l^2\cdot 2\sin^2\frac{\beta}{2};\quad BC = 2l\sin\frac{\beta}{2};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4l^2\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3}}{4} = l^2\sqrt{3}\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

ΔABC: OA — радиус описанной окружности.

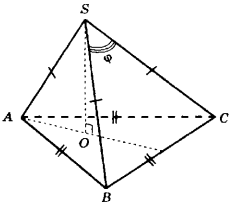
$$\frac{BC}{\sin 60°} = 2AO \Rightarrow OA = \frac{BC}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2l\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{3}}.$$

ΔAOS: по теореме Пифагора

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{l^2 - \frac{4l^2\sin^2\frac{\beta}{2}}{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\beta}{2}};$$

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot SO=\frac{1}{3}\sqrt{3}l^2\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\beta}{2}};\ V=\frac{l^3}{3}\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

687.



По условию дана правильная треугольная пирамида.

$AB = BC = AC = a$; $SA = SB = SC = l$.

По теореме косинусов $a^2 = l^2 + l^2 - 2l^2\cos\varphi$;

в ΔSBC: $a^2=2l^2\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$;

$a=2l\sin\frac{\varphi}{2}\Rightarrow l=\frac{a}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$.

$SO\perp(ABC)$; $AO = r$ — радиус окружности.

По теореме Пифагора: $SO=\sqrt{l^2-OA^2}$.

По теореме синусов $\frac{a}{\sin 60^\circ}=2AO\Rightarrow AO=\frac{a}{\sqrt{3}}$;

$$SO=\sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}-\frac{a^2}{3}}=\sqrt{\frac{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot 3}}\cdot a;\ V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO;$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{2\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{a^3\sqrt{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{24\sin\frac{\varphi}{2}}.$$