Вариант № 21165275

1. Задание 1 № 518946

Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 4 %. Книга стоит 150 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

Решение.

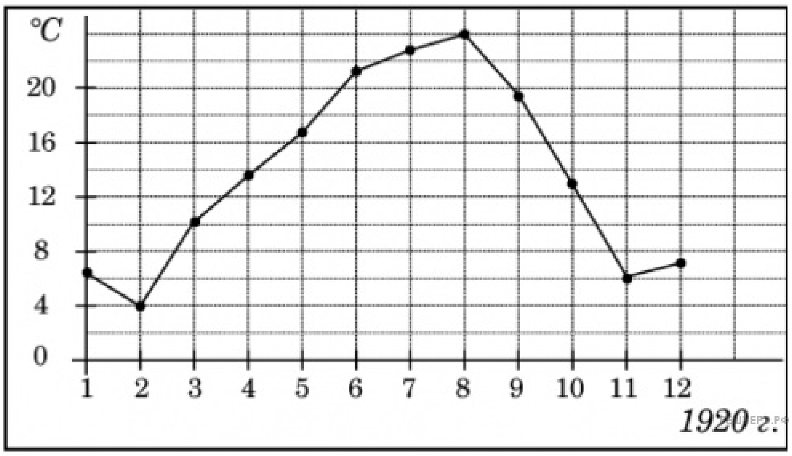
Скидка на покупку составит $150 \cdot 0{,}04 = 6$ рублей. Значит, держатель дисконтной карты заплатит за книгу $150 - 6 = 144$ рублей.

Ответ: 144.

Ответ: 144

2. Задание 2 № 516320

На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какой была наибольшая среднемесячная температура в Сочи в 1920 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение.

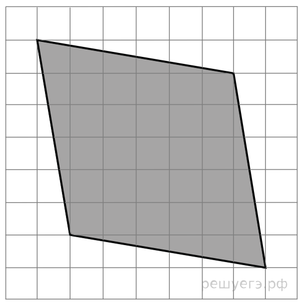
Из графика видно, что наибольшей температура была в августе и составляла 24 градуса Цельсия (см. рисунок).

Ответ: 24.

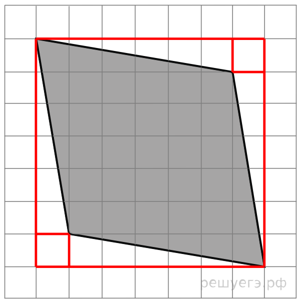
Ответ: 24

3. Задание 3 № 252637

Найдите площадь ромба, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение.



Площадь ромба равна разности площадей большого квадрата, двух маленьких квадратов и четырёх прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного ромба. Поэтому

$$S = 7\cdot 7 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6 - 2\cdot 1\cdot 1 = 35\ \text{см}^2.$$

Примечание.

Наш четырёхугольник — ромб, его площадь равна половине произведения диагоналей. Поэтому она равна 35 см^2.

Ответ: 35

4. Задание 4 № 1006

Маша включает телевизор. Телевизор включается на случайном канале. В это время по девяти каналам из сорока пяти показывают новости. Найдите вероятность того, что Маша попадет на канал, где новости не идут.

Решение.

новости не идут по 45 – 9 = 36 каналам. Тогда вероятность того, что Маша попадет на канал где новости не идут, равна

$$\frac{36}{45} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Ответ: 0,8.

Ответ: 0,8

5. Задание 5 № 13373

Найдите корень уравнения: $\cos\frac{\pi(8x+1)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Решим уравнение:

$$\cos\frac{\pi(8x+1)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi(8x+1)}{6} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n \Leftrightarrow 8x+1 = \pm 1 + 12n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1{,}5n; \\ x = -0{,}25 + 1{,}5n, \end{array}\right.$$

где n — целое число. Значениям $n \geq 1$ соответствуют положительные корни.

Если $n = 0$, то $x = 0$ и $x = -0{,}25$.

Если $n = -1$, то $x = -1{,}5$ и $x = -0{,}25 - 1{,}5 = -1{,}75$.

Значениям $n \leq -2$ соответствуют меньшие значения корней.

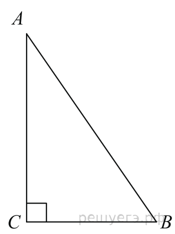
Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число $-0{,}25$.

Ответ: −0,25.

Ответ: -0,25

6. Задание 6 № 4787

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 4$, $\sin A = \frac{3\sqrt{34}}{34}$. Найдите BC.



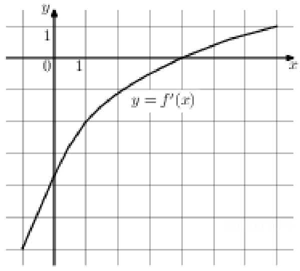
Решение.
Имеем:

$$BC = AC\operatorname{tg}A = \frac{AC\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{4\cdot\frac{3\sqrt{34}}{34}}{\sqrt{1-\frac{9}{34}}} = 4\cdot\frac{3\sqrt{34}}{34}\cdot\frac{\sqrt{34}}{5} = 2,4.$$

Ответ: 2,4.
Ответ: 2,4

7. Задание 7 № 515190

На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y=f(x)$ параллельна прямой $y = 6 - 2x$ или совпадает с ней.



Решение.
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 6 - 2x$ или совпадает с ней, её угловой коэффициент равен −2. Следовательно, мы ищем точку, в которой угловой коэффициент равен −2, а значит, и производная равна −2. Поэтому искомая точка $x = 1.$

Ответ: 1.
Ответ: 1

8. Задание 8 № 27172

Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в 2 раза?
Решение.
Площади подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия. Поэтому, если все ребра увеличены в 2 раза, площадь поверхности увеличится в 4 раза.

Ответ: 4.
Ответ: 4

9. Задание 9 № 26785

Найдите $26\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.
Решение.
Поскольку угол α лежит в четвертой четверти, $\sin\alpha < 0.$ Применим формулу приведения, а затем выразим синус через косинус. Имеем:

$$26\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = 26\sin\alpha = -26\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = -26\cdot\frac{5}{13} = -10.$$

Ответ: −10.
Ответ: -10

10. Задание 10 № 28503

Водолазный колокол, содержащий $\upsilon = 5$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,1$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 11,5$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 34500 Дж.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $\alpha \upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1} \le 34500$ при заданных значениях постоянной $\alpha = 11,5$, температуры воздуха $T = 300$ К, начального давления $p_1 = 1,1$ атм и количества воздуха $\upsilon = 5$ молей:

$$11,5 \cdot 5 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1,1} \le 34500 \Leftrightarrow \log_2 \frac{p_2}{1,1} \le 2 \Leftrightarrow \frac{p_2}{1,1} \le 4 \Leftrightarrow p_2 \le 4,4 \text{ атм.}$$

Ответ: 4,4.

Ответ: 4,4

11. Задание 11 № 116739

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 400 метров, за 39 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Решение.

Скорость поезда равна

$$60 \text{ км/ч} = \frac{60 \cdot 1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = \frac{50}{3} \text{ м/с.}$$

За 39 Всекунд поезд проходит мимо лесополосы, то есть проходит расстояние, равное сумме длин лесополосы и самого поезда, и это расстояние равно

$$\frac{50}{3} \cdot 39 = 650 \text{ м.}$$

Поэтому длина поезда равна $650 - 400 = 250$ метров.

Ответ: 250.

Ответ: 250

12. Задание 12 № 130463

Найдите наибольшее значение функции $y = (2x^2 - 36x + 36)e^x$ на отрезке $[-3;3]$.

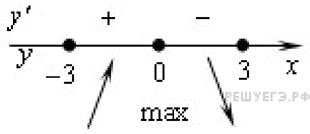
Решение.
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = (2x^2 - 36x + 36)'e^x + (2x^2 - 36x + 36)(e^x)' =$$
$$= (4x - 36)e^x + (2x^2 - 36x + 36)e^x = (2x^2 - 32x)e^x.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} (2x^2 - 32x)e^x = 0, \\ -3 \le x \le 3 \end{cases} \begin{cases} 2x(x - 16) = 0, \\ -3 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 16, \end{array}\right. \\ -3 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 0$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(0) = 36 \cdot e^0 = 36.$$

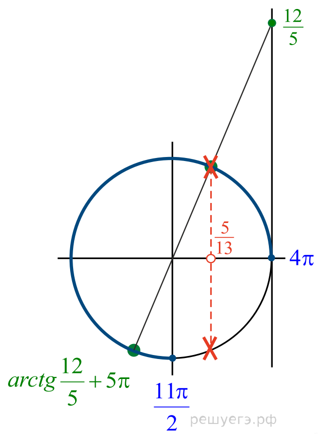
Ответ: 36.
Ответ: 36

13. Задание 13 № 505173

а) Решите уравнение $\dfrac{5\operatorname{tg} x - 12}{13\cos x - 5} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi, \dfrac{11\pi}{2}\right].$

Решение.
а) Решим уравнение:



$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \dfrac{12}{5}, \\ \cos x \ne \dfrac{5}{13}. \end{cases}$$

Из уравнения $\operatorname{tg} x = \dfrac{12}{5}$ получаем $x = \operatorname{arctg}\dfrac{12}{5} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$ Неравенству $\cos x \ne \dfrac{5}{13}$ удовлетворяют корни, изображаемые точками третьей четверти единичной окружности: $x = \operatorname{arctg}\dfrac{12}{5} + \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, лежащие на отрезке $\left[4\pi, \dfrac{11\pi}{2}\right]$. Получим $x = 5\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}.$

Ответ: а) $\left\{\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5} + \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $5\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}.$

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

14. Задание 14 № 514722

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро

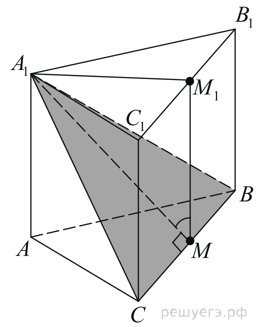
$AA_1 = 8$.

а) Докажите, что плоскость BCA_1 перпендикулярна плоскости проходящей через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1.

Решение.

а) Обозначим середину B_1C_1 за M_1, а середину BC за M. Тогда $CB \perp A_1M_1$, поскольку $B_1C_1 \parallel BC$. Кроме того, $BC \perp AA_1$, поэтому $BC \perp AA_1M_1$. Тогда и $BCA_1 \perp AA_1M_1$.



б) Рассмотрим треугольник A_1MM_1. Заметим что $A_1M \perp BC$ как медиана равнобедренного треугольника CA_1B и $MM_1 \parallel BB_1$, то

$$\angle(A_1CB, C_1B_1BC) = \angle(A_1M, MM_1) = \angle A_1MM_1.$$

Значит $\operatorname{tg}\angle(A_1CB, C_1B_1BC) = \dfrac{A_1M_1}{MM_1} = \dfrac{7\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{8} = \dfrac{21}{16}.$

Ответ: $\frac{21}{16}$..

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, но получен неверный ответ в результате вычислительной ошибки, ИЛИ решение не закончено, ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15. Задание 15 № 511536

Решите неравенство: $x\sqrt{6} - 2x + 10 > 4\sqrt{6}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$x\sqrt{6} - 2x + 10 > 4\sqrt{6} \Leftrightarrow (\sqrt{6}-2)x + 10 - 4\sqrt{6} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{4\sqrt{6}-10}{\sqrt{6}-2} \Leftrightarrow x > -\frac{(\sqrt{6}-2)^2}{\sqrt{6}-2} \Leftrightarrow x > 2-\sqrt{6}.$$

Ответ: $\left(2-\sqrt{6};\ +\infty\right)$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

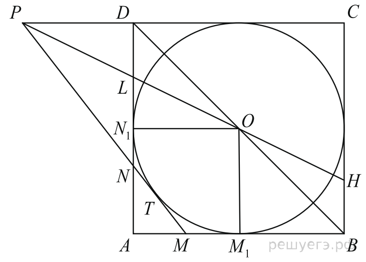
16. Задание 16 № 514372

К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 3$?

Решение.



а) Пусть окружность, вписанная в квадрат, касается его стороны AB в точке M_1, стороны AD — в точке N_1, а прямой MN — в точке T. По свойству касательных $NN_1 = NT$, $MM_1 = MT$ и $AN_1 = AM_1$. Тогда

$$AM + MN + AN = AM + MT + NT + AN = (AM + MM_1) + (NN_1 + AN) = = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AD = AB.$$

б) Положим $AB = 12a$, $TN = NN_1 = x$. Тогда

$$AM = 3a,$$
$$AN = AN_1 - NN - 1 = 6a - x,$$
$$MN = MT + TN = 3a + x.$$

По теореме Пифагора $AM^2 + AN^2 = MN^2$, то есть

$$9a^2 + (6a - x)^2 = (3a + x)^2.$$

Отсюда находим, что $x = 2a$. Тогда $AN = 4a$ и $MN = 5a$. Пусть O — центр окружности, а прямая PO пересекает стороны AD и BC в точках L и H соответственно. Из равенства треугольников DOL и BOH следует, что $DL = BH$, поэтому $\frac{BH}{HC} = \frac{DL}{LA}$. Окружность вписана в угол MPC, значит, PL — биссектриса треугольника DPN, который подобен треугольнику AMN. Используя свойство биссектрисы и подобие, находим:

$$\frac{DL}{LN} = \frac{PD}{PN} = \frac{AM}{MN} = \frac{3}{5},$$

откуда

$$DL = \frac{3}{8}DN.$$

учитывая, что $DN = DA - AN = 12a - 4a = 8a$, находим, что $DL = 3a$, $LA = 9a$.

$$\frac{BH}{HC} = \frac{DL}{LA} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: б) 1 : 3.

Приведем решение пункта б) предложенное нашим читателем Дмитрием.

Часть б) можно решить проще, доказав, что $\Delta OHB = \Delta OMA$. Оттуда сразу следует, что $MA = HB$ при любом положении точки M. Действительно, $OB = OA$, $\angle OAM = \angle OBH = 45°$, а $\angle MPC = \angle TOM_1$ — угол между касательными и соответствующими им радиусами. Далее, PH — биссектриса $\angle MPC$, OM — биссектриса $\angle TOM_1$. Следовательно, $\angle HPC = \angle MOM_1$, $\angle PHC = \angle OMM_1$, $\angle OHB = \angle OMA$, $\angle BOH = \angle AOM$. Треугольники OHB и OMA равны по второму признаку.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

17. Задание 17 № 514530

15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн руб. Условия его

возврата таковы:

− Первого числа месяца долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего месяца, где r целое число.

− Со 2 по 14 число необходимо выплатить часть долга.

− 15 числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии с таблицей

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль
Долг	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее r, при котором сумма выплат будет меньше 1,25 млн руб.

Решение.

Долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1;\ 0,6;\ 0,4;\ 0,3;\ 0,2;\ 0,1;\ 0.$$

Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда долг на первое число каждого месяца равен:

$$k;\ 0,6k;\ 0,4k;\ 0,3k;\ 0,2k;\ 0,1k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k-0,6;\ 0,6k-0,4;\ 0,4k-0,3;$$
$$0,3k-0,2;\ 0,2k-0,1;\ 0,1k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$k(1+0,6+0,4+0,3+0,2+0,1)-(0,6+0,4+0,3+0,2+0,1)=$$
$$(k-1)(1+0,6+0,4+0,3+0,2+0,1)+1=2,6(k-1)+1.$$

По условию, общая сумма выплат будет меньше 1,25 млн рублей, значит,

$$2,6(k-1)+1<1,25 \Leftrightarrow 2,6\cdot\frac{r}{100}+1<1,25 \Leftrightarrow r<9\frac{8}{13}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 9. Значит, искомое число процентов — 9.

Ответ: 9%.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обоснованию	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18. Задание 18 № 513111

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} yx^2+y^2=2y+63-7x^2, \\ x\geq -3, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Решим первое уравнение:

$$yx^2+y^2=2y+63-7x^2 \Leftrightarrow yx^2+7x^2+y^2-2y-63=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y+7)(y+x^2-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-7, \\ y=9-x^2. \end{array}\right.$$

Рассмотрим случай (1): $y=-7$. При любом a получаем одно решение $x=a+7$, для которого неравенство $x\geq -3$ верно только при $a\geq -10$.

Рассмотрим случай (2):

$$y=9-x^2 \Leftrightarrow 9-x^2=a-x \Leftrightarrow x^2-x+(a-9)=0.$$

Так как $D=1-4(a-9)=37-4a,$ то при $a>9,25$ корней нет, при $a=9,25$ получаем один корень $x=0,5,$ при $a<9,25$ получаем два различных корня. У параболы $y=x^2-x+(a-9)$ — ветви вверх, абсцисса вершины равна $x_0=0,5>0.$

Значит, оба корня не меньше -3 при $3+a\geq 0,$ то есть при $-3\leq a<9,25,$ а при $a<-3$ один корень меньше -3, а другой — больше -3.

Соберем сведения о числе решений в случаях (1) и (2) в таблице

a	$a<-10$	$-10\leq a<-3$	$-3\leq a<9{,}25$	$a=9{,}25$	$a>9{,}25$
Число решений (1)	0	1	1	1	1
Число решений (2)	1	1	2	1	0

Остаётся учесть те значения a, при которых решение из случая (1) совпадает с одним из решений случая (2). Тогда $-7=9-x^2 \Leftrightarrow x=\pm 4,$ с учётом $x\geq -3$ из $x+y=a$ получаем, что $x=4$, $a=-3$.

Ответ: $-10\leq a\leq -3,\ a=9,25.$

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но в ответ включены также и одно-два неверных значения.	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра.	2
Задача верно сведена к исследованию совокупности трёх квадратных уравнений относительно a.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

19. Задание 19 № 517778

Последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_6$ состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k-го. Известно, что $M_1=7,\ M_2=6.$

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3=6,4.$

б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3=5?$

в) Найдите наименьшее возможное значение $M_3.$

Решение.

а) Например, последовательность 4; 9; 7; 7; 7; 5 удовлетворяет условию задачи.

б) Если $M_1=7,$ $M_3=5,$ получаем:

$$a_1+a_2+a_4+a_5+a_6=25,\ a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=35,$$

откуда $a_3-a_1=10,$ что невозможно. Значит, не существует такой последовательности, для которой $M_3=5.$

в) Поскольку $M_1=7,$ получаем

$$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=35,$$

а так как $a_3-a_1\leq 9,$ получаем:

$$a_1+a_2+a_4+a_5+a_6\geq 26,$$

то есть $M_3\geq 5{,}2.$

В последовательности 0; 5; 9; 7; 7; 7 имеем: $M_1=7,$ $M_2=6,$ $M_3=5{,}2.$

Ответ: а) например, 4; 9; 7; 7; 7; 5; б) нет; в) 5,2.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Ключ

№ п/п	№ задания	Ответ
1	518946	144
2	516320	24
3	252637	35
4	1006	0,8
5	13373	-0,25
6	4787	2,4
7	515190	1
8	27172	4
9	26785	-10
10	28503	4,4
11	116739	250
12	130463	36