САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР ®

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10-11

К заданиям учебника
Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина и др.

Алгебра
и начала анализа

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

А.П. Щеглова

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ ИЗ УЧЕБНИКА ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

авторов

Ш.А. Алимова,
Ю.М. Колягина,
под научным руководством
А.Н. Тихонова
(М.: Просвещение)

10–11 классы

Москва • «ВАКО» • 2007

УДК 337:167.1:[512+517]
ББК 22.1я721
Щ33

Щеглова А.П.

Щ33 Подробный разбор заданий из учебника по алгебре и началам анализа для 10–11 классов Ш.А. Алимова, Ю.Н. Колягина. – М.: ВАКО, 2007. – 352 с. – (Сам себе репетитор).

ISBN 978-5-94665-528-6

Пособие содержит подробный разбор заданий из учебника по алгебре и началам анализа для 10–11 классов ***Ш.А. Алимова, Ю.Н. Колягина (М.: Просвещение)***. Приводятся основные сведения по каждому разделу, алгоритмы решения типовых задач, ключи, ответы и подробный разбор заданий.

Автор – практикующий педагог с большим стажем подготовки абитуриентов к экзаменам.

УДК 337:167.1:[512+517]
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-94665-528-6

Глава I
Действительные числа

§1. Целые и рациональные числа

1. 1) $\frac{2}{3}=0{,}666...=0,(6)$; 2) $\frac{8}{11}=0{,}7272...=0,(72)$;

3) $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=0{,}6$; 4) $-\frac{3}{4}=-\frac{75}{100}=-0{,}75$;

5) $-8\frac{2}{7}=-\frac{56+2}{7}=-\frac{58}{7}=-8,(285714$; 6) $\frac{13}{99}=0{,}1313...=0,(13)$.

2. Выполнить действие и записать результат в виде десятичной дроби:

1) $\frac{2}{11}+\frac{1}{9}=\frac{18}{99}+\frac{11}{99}=\frac{29}{99}=0,(29)$.

2) $\frac{8}{13}+\frac{2}{3}=\frac{8\cdot 3+2\cdot 13}{3\cdot 13}=\frac{24+26}{39}=\frac{50}{39}=1,(282051)$.

3) $\frac{1}{3}+1{,}25=\frac{1}{3}+\frac{5}{4}=\frac{19}{12}=1{,}58(3)$.

4) $\frac{1}{6}+0{,}33=\frac{1}{6}+\frac{33}{100}=\frac{50+99}{300}=\frac{149}{300}=0{,}49(6)$.

5) $\frac{3}{14}\cdot 1{,}05=\frac{3}{14}\cdot\frac{105}{100}=\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 3}{2\cdot 7\cdot 5\cdot 5\cdot 4}=\frac{9}{40}=\frac{225}{1000}=0{,}225$.

6) $\frac{7}{9}\cdot 1{,}7=\frac{7}{9}\cdot\frac{17}{10}=\frac{119}{90}=1{,}3(2)$.

3. Записать в виде обыкновенной дроби:

1) 0,(6). Решение: пусть $x = 0,(6)$, тогда $10x = 6,(6)$. Вычтем из первого равенства второе, получим: $9x = 6$, $x = 2/3$. Ответ: $x = 2/3$.

2) 1,(55). Решение: пусть $x = 1,(55)$, тогда $100x = 155,(55)$. Вычтем из первого равенства второе, получим: $99x = 154$, $x=\frac{154}{99}=\frac{14}{9}$. Ответ: $x=1\frac{5}{9}$.

3) 0,1(2). Решение: пусть $x = 0,1(2)$, тогда $10x = 1,(2)$; $100x = 12,(2)$. Отсюда: $100x - 10x = 90x = 11$, $x = {}^{11}\!/_{90}$. Ответ: $x = {}^{11}\!/_{90}$;

4) –0,(8). Решение: пусть $x = -0,(8)$, тогда $10x = -8,(8)$. Вычтем из первого равенства второе, получим: $9x = -8$, $x = -{}^{8}\!/_{9}$. Ответ: $x = -{}^{8}\!/_{9}$.

5) –3,(27). Решение: пусть $x = -3,(27)$, тогда $100x = -327,(27)$. Таким образом получаем: $99x = -324$, $x = -\frac{324}{99} = -\frac{36}{11}$. Ответ: $x = -3\frac{3}{11}$.

6) –2,3(82). Решение: $x = -2,3(82)$, тогда $10x = -23,(82)$; $1000x = 2382,(82)$. Отсюда: $1000x - 10x = 990x = -2359$, $x = -\frac{2359}{990} = -2\frac{379}{990}$. Ответ: $-2\frac{379}{990}$.

4. Вычислить:

1) $(20,88:18+45:0,36):(19,59+11,95) = \left(20\frac{22}{25}:18+45:\frac{9}{25}\right):31,54 =$

$= \left(\frac{522}{25}\cdot\frac{1}{18}+45\cdot\frac{25}{9}\right):31\frac{27}{50} = \left(\frac{29}{25}+125\right):\frac{1577}{50} = \frac{3154}{25}\cdot\frac{50}{1577} = 4.$

2) $\frac{7}{36}\cdot 9+8\cdot\frac{11}{32}+\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{18} = \frac{7\cdot 9}{4\cdot 9}+\frac{8\cdot 11}{4\cdot 8}+\frac{9\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 9} = \frac{7}{4}+\frac{11}{4}+\frac{1}{4} = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}.$

5. Вычислить:

1) $\left(3\frac{4}{25}+0,24\right)2,15+\left(5,1625-2\frac{3}{16}\right)\frac{2}{5} = \left(\frac{79}{25}+\frac{24}{100}\right)\cdot\frac{215}{100}+(5,1625-2,1875)\cdot\frac{2}{5} =$

$= \frac{350}{100}\cdot\frac{215}{100}+\frac{2975}{1000}\cdot\frac{2}{5} = \frac{8500}{1000} = 8,5.$

2) $0,364:\frac{7}{25}+\frac{5}{16}:0,125+2\frac{1}{2}\cdot 0,8 = \frac{364\cdot 25}{1000\cdot 7}+\frac{5\cdot 1000}{16\cdot 125}+\frac{5\cdot 8}{2\cdot 10} =$

$= \frac{52}{40}+\frac{5}{2}+2 = \frac{13}{10}+2,5+2 = 1,3+4,5 = 5,8.$

§2. Действительные числа

Основные понятия:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \ge 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

6. Ответы: 1) нет; 2) нет; 3) да; 4) нет (т.к. в дробной части встречается сколь угодно длинная последовательность единиц).

7. $\sqrt{31} \approx 5{,}567764...$ Таким образом, $5{,}5 < \sqrt{31} < 5{,}6$.

8. Какое из равенств $|x| = x$ или $|x| = -x$ является верным, если:

1) $x = 5-\sqrt{7}$. Решение: т.к. $5 > \sqrt{7}$, то $5-\sqrt{7} > 0$, следовательно $|x| = x$.

2) $x = 4-3\sqrt{3}$. Решение: $4 < 3\sqrt{3}$, т.к. $4^2 < \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27$, значит $|x| = -x$.

3) $x = 5-\sqrt{10}$. Решение: $5 > \sqrt{10}$, т.к. $5^2 > 10$, значит $|x| = x$.

9. Выяснить, каким числом (иррациональным или рациональным) является выражение:

1) $\left(\sqrt{8}-3\right)\left(3+2\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{8}-9+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}-6\sqrt{2} = 3\cdot 2\sqrt{2}-9+2\cdot 4-6\sqrt{2} = -1$.

Ответ: рациональное число.

2) $\left(\sqrt{27}-2\right)\left(2-3\sqrt{3}\right) = -\left(2-3\sqrt{3}\right)\left(2-3\sqrt{3}\right) = -\left(2-3\sqrt{3}\right)^2 = -4-27+12\sqrt{3} = 12\sqrt{3}-31$

Ответ: иррациональное число.

3) $\left(\sqrt{50}+4\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = \left(5\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 18$.

Ответ: рациональное число.

4) $\left(5\sqrt{3}+\sqrt{27}\right):\sqrt{3} = \left(5\sqrt{3}+3\sqrt{3}\right):\sqrt{3} = 8\sqrt{3}:\sqrt{3} = 8$.

Ответ: рациональное число.

5) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3} = 8$.

Ответ: рациональное число.

6) $\left(\sqrt{5}-1\right)^2-\left(2\sqrt{5}+1\right)^2 = 5-2\sqrt{5}+1-4\cdot 5-4\sqrt{5}-1 = -15-6\sqrt{5}$.

Ответ: иррациональное число.

10. 1) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{28} = \sqrt{7\cdot 3^2}\cdot\sqrt{2^2\cdot 7} = 3\cdot 2\cdot 7 = 42$;

2) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{2^2\cdot 5}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 10$;

3) $\sqrt{50}:\sqrt{8} = \sqrt{5^2\cdot 2}:\sqrt{2^2\cdot 2} = 5:2 = 2{,}5$;

4) $\sqrt{12}:\sqrt{27} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}$.

11. Сравнить числовые значения выражений:

1) $\sqrt{3{,}9}+\sqrt{8}$ и $\sqrt{1{,}1}+\sqrt{17}$. Решение: $\sqrt{3{,}9} < 2$, $\sqrt{8} < 3$, следовательно $\sqrt{3{,}9}+\sqrt{8} < 5$. С другой стороны, $\sqrt{1{,}1} > 1$, $\sqrt{17} > 4$, значит $\sqrt{1{,}1}+\sqrt{17} > 5$. Ответ: $\sqrt{3{,}9}+\sqrt{8} < \sqrt{1{,}1}+\sqrt{17}$.

2) $\sqrt{11}-\sqrt{2{,}1}$ и $\sqrt{10}-\sqrt{3{,}1}$. Решение: сравним числа $\sqrt{11}+\sqrt{3{,}1}$ и

$\sqrt{10}+\sqrt{2{,}1}$. Очевидно, что $\sqrt{11}+\sqrt{3{,}1}>\sqrt{10}+\sqrt{2{,}1}$, следовательно $\sqrt{11}-\sqrt{2{,}1}>\sqrt{10}-\sqrt{3{,}1}$. Ответ: $\sqrt{11}-\sqrt{2{,}1}>\sqrt{10}-\sqrt{3{,}1}$.

12. Вычислить:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{2}\right)\cdot 2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{2}\right)\cdot 2\sqrt{5}}=\sqrt{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}=\sqrt{10}$.

2) $\sqrt{\left(\sqrt{16-6\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right)\cdot 3}=\sqrt{\left(\sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{7}\right)\cdot 3}=\sqrt{3\cdot 3}=3$.

3) $\sqrt{\left(\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}}\right)\cdot 2+7}=\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}\right)\cdot 2+7}=$
$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\cdot 2+7}=\sqrt{4\sqrt{3}+7}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=2+\sqrt{3}$.

§3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Основные понятия:

Последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n$ называется геометрической прогрессией, если $b_{n+1}=b_n\cdot q\ \ \forall n\in \mathrm{N}$, где $b_n\neq 0, q\neq 0$.

Свойства:

1°. $b_{n+1}=b_1\cdot q^n$;

2°. $b_{n-1}b_{n+1}=b_n^{\,2}$, $b_{n-k}b_{n+k}=b_n^{\,2}, k=1,2,\ldots,n-1$;

3°. Сумма первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n=\begin{cases} nb_1, \text{ если } q=1\\ \dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}, \text{ если } q\neq 1\end{cases}$$

4°. Если $|q|<1$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, причем $S=\dfrac{b_1}{1-q}$.

13. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) $b_n=-5^{2n}$. Решение: $b_n=-5^{2n}=-25^n=(-25)\cdot(25)^{n-1}$, т.е. $b_1=-25$; $q=25$. Ответ: b_n – геометрическая прогрессия.

2) $b_n=2^{3n}$. Решение: $b_n=2^{3n}=8^n=8\cdot 8^{n-1}$, т.е. $b_1=8$, $q=8$.

Ответ: b_n – геометрическая прогрессия.

14. 1) Решение: $b_4 = b_1q^3$, т.е. $88 = b_1 \cdot 2^3$, откуда $b_1 = 11$. Следовательно, $S_5 = \frac{b_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{11(1-32)}{1-2} = 31 \cdot 11 = 341$. Ответ: $S_5 = 341$.

2) Решение: $b_4 = b_1q^3$, т.е. $88 = 11 \cdot q^3$, откуда $q = 2$. Следовательно, $S_5 = \frac{b_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{11(1-32)}{1-2} = 31 \cdot 11 = 341$. Ответ: $S_5 = 341$.

15. Указание: 1) $q = \frac{1}{5}$; 2) $q = \frac{1}{3}$; 3) $q = \frac{1}{3}$; 4) $q = \frac{1}{2}$.

16. 1) $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-20}{40} = -\frac{1}{2}$. $|q| < 1$, значит прогрессия беск.убывающая.

2) $q^4 = \frac{b_{11}}{b_7} = \frac{1}{16}$, т.е. $q = \pm\frac{1}{2}$. $|q| < 1$, значит прогрессия беск. убывающая.

3) $q = \frac{b_7}{b_6} = \frac{-30}{15} = -2$. $|q| > 1$, прогрессия не является беск.убывающей.

4) , т.е. $q = -\frac{1}{3}$. $|q| < 1$, прогрессия беск. убывающая.

17. 1) Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_n = \frac{1}{4^n}$. В данной прогрессии $q = \frac{1}{4}$, $|q| < 1$, значит прогрессия бесконечно убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0$.

2) Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_n = (0{,}2)^n$. $q = 0{,}2$, т.е. $|q| < 1$, значит прогрессия бесконечно убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}2)^n = 0$.

3) Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{7^n}\right) = 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{7^n}$. Прогрессия $b_n = \frac{1}{7^n}$ является бесконечно убывающей, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{7^n}\right) = 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{7^n} = 1 + 0 = 1$.

4) Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\right) = -2 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$. Прогрессия $b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ является бесконечно убывающей, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\right) = -2 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = -2 + 0 = -2$.

18. 1) Решение: $S=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{1/8}{1-\left(-1/3\right)}=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{12}$. Ответ: $S=\dfrac{1}{12}$.

2) Решение: $b_5=b_1q^4$, откуда $b_1=1$. $S=\dfrac{1}{1+1/3}=1{,}5$. Ответ: $S=1{,}5$.

3) Решение: $S=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{9}{1-\left(-1/3\right)}=\dfrac{9}{4/3}=\dfrac{27}{4}=6{,}75$. Ответ: $S=6{,}75$.

4) Решение: $b_4=b_1q^3$, откуда $b_1=-1$. $S=\dfrac{-1}{1-\left(-1/2\right)}=-\dfrac{2}{3}$. Ответ: $S=-\dfrac{2}{3}$.

19. Найти сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

1) $6;\ 1;\ \dfrac{1}{6};\ \ldots$.

Решение: $b_1=6$, $b_2=1$, т.е. $q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{1}{6}$. $S=\dfrac{6}{1-1/6}=\dfrac{36}{5}=7{,}2$. Ответ: 7,2.

2) $-25;\ -5;\ -1;\ \ldots$.

Решение: $b_1=-25$; $b_2=-5$, т.е. $q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{1}{5}$. $S=\dfrac{-25}{1-1/5}=-\dfrac{125}{4}=-31{,}25$.

Ответ: –31,25.

20. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби.

1) 0,(5). Решение: рассмотрим последовательность: $a_1=0{,}5$; $a_2=0{,}05$; $a_3=0{,}005$; ... Таким образом даную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечной убывающей геомстрической прогрессии 0,5; 0,05; 0,005; ..., где $b_1=0{,}5$, а $q=0{,}1$. Следовательно, сумма равна

$S=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{0{,}5}{1-0{,}1}=\dfrac{5}{9}$. Ответ: $0{,}(5)=\dfrac{5}{9}$.

2) 0,(8). Решение: представим дробь в виде бесконечной убывающей геометрической прогрессии: 0,8; 0,08; 0,008; ... (см. п.1). $b_1=0{,}8$, $q=0{,}1$.

Т.е. $S=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{0{,}8}{1-0{,}1}=\dfrac{8}{9}$. Ответ: $0{,}(8)=\dfrac{8}{9}$.

3) 0,(32). Решение: представим дробь в виде бесконечной убывающей геометрической прогрессии: 0,32; 0,0032; 0,000032; ... (см. п.1). $b_1=0{,}32$,

$q=0{,}01$. Т.е. $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{0{,}32}{1-0{,}01}=\frac{32}{99}$. Ответ: $0{,}(32)=\frac{32}{99}$.

4) 0,2(5). Решение: рассмотрим последовательность: $a_1=0{,}2$; $a_2=0{,}2+0{,}05$; $a_2=0{,}2+0{,}05+0{,}005$; $a_2=0{,}2+0{,}05+0{,}005+0{,}0005$, ... Т.е. данную дробь можно представить в виде суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии 0,05; 0,005; ... и числа 0,2. Таким образом $0{,}2(5)=0{,}2+\frac{0{,}05}{1-0{,}1}=\frac{1}{5}+\frac{5}{90}=\frac{23}{90}$. Ответ: $0{,}2(5)=\frac{23}{90}$.

21. 1) Указание: $q=-2$, $|q|>1$. Следовательно, не является.

2) Указание: $q=4$, $|q|>1$. Следовательно, не является.

3) Указание: $b_n=-8\cdot3\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, $q=-\frac{1}{3}$, $|q|<1$. Т.е. b_n является бесконечной убывающей геометрической прогрессией.

4) Указание: $b_n=-3\cdot2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $q=-\frac{1}{2}$, $|q|<1$. Т.е. b_n является бесконечной убывающей геометрической прогрессией.

22. 1) Решение: $b_5=b_1q^4$, откуда $b_1=\sqrt{2}$. $S=\frac{\sqrt{2}}{1-1/2}=2\sqrt{2}$. Ответ: $2\sqrt{2}$.

2) Решение: $b_4=b_1q^3$, откуда $b_1=\sqrt{3}$. $S=\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}/2}=2\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}+6$

23. 1) Решение: $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{b_1}{1-1/5}=30$, отсюда $b_1=30\left(1-1/5\right)=24$. Ответ: 24.

2) Решение: $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{20}{1-q}=30$, отсюда $1-q=20:30=2/3$. Ответ: $1/3$.

24. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-2^n}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2^n}-1\right)=-1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2^n}=1$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}+2}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9\cdot3^n+2}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(9+\frac{2}{3^n}\right)=9+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3^n}=9$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(5^n+1\right)^2}{5^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{2n}+2\cdot5^n+1}{5^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5^n}+\frac{1}{25^n}\right)=1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{5^n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{25^n}=1$.

25. Указание: высота фигуры равна сумме бесконечной убывающей геометрической прогрессии $a+a/2+a/4+\ldots$.

26. В угол, равный 60°, последовательно вписаны окружности, касающиеся друг друга (рис. 1). Радиус первой окружности равен R_1. Найти радиусы $R_2, R_3, \ldots, R_n$ остальных окружностей и показать, что они образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию. Доказать, что сумма $R_1 + 2(R_2 + R_3 + \ldots + R_n + \ldots)$ равна расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.

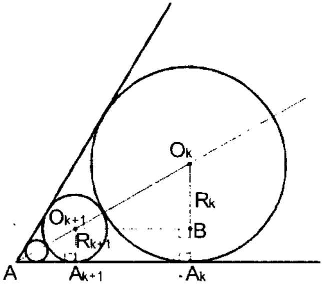

Рис. 1

Решение: рассмотрим два последовательных радиуса R_k и R_{k+1}. В прямоугольной трапеции $A_kO_kO_{k+1}A_{k+1}$ опустим высоту $O_{k+1}B$, тогда в прямоугольном треугольнике $O_{k+1}BO_k$ $\angle O_kO_{k+1}B = 30^\circ$, $O_{k+1}O_k = R_k + R_{k+1}$ и $O_kB = R_k - R_{k+1}$, т.е. $R_k - R_{k+1} = \frac{1}{2}(R_k + R_{k+1})$, откуда $R_{k+1} = \frac{1}{3}R_k$, т.е. R_k образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{3}$. $R_2 + R_3 + \ldots = \frac{{}^1\!/_3 R_1}{1 - {}^1\!/_3} = \frac{R_1}{2}$. Расстояние $A_1O = 2R_1$ (т.к. $\angle A_1AO = 30^\circ$), кроме того, $R_1 + 2(R_2 + R_3 + \ldots) = R_1 + 2\frac{R_1}{2} = 2R_1$, ч.т.д.

§4. Арифметический корень натуральной степени

Свойства ($n, m \in \mathrm{N}$; $n \ge 2$, $m \ge 2$):

1°. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; $a, b \ge 0$; 2°. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $a \ge 0$, $b > 0$;

3°. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$; $a \ge 0$; 4°. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$; $a \ge 0$;

5°. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$; $k \ge 1$, $a \in \mathrm{R}$; 6°. $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$; $a \ge 0$, $k \ge 1$.

27. 1) 1; 0; 4; 0,9; 13; $\frac{1}{17}$. 2) 1; 0; 5; $\frac{1}{3}$; 0,3; 0,4.

3) 0; 1; 2; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; 0,2.

28. 1) $\sqrt[6]{36^3}=\sqrt[6]{\left(6^2\right)^3}=\sqrt[6]{6^6}=6$; 2) $\sqrt[12]{64^2}=\sqrt[12]{\left(2^6\right)^2}=\sqrt[12]{2^{12}}=2$;

3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^4}=\frac{1}{5}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}=\sqrt[8]{\left(15^2\right)^4}=\sqrt[8]{15^8}=15$.

29. 1) $\sqrt[3]{10^6}=\left(\sqrt[3]{10}\right)^6=10^2=100$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}=\sqrt[3]{\left(3^4\right)^3}=3^4=81$;

3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}=\sqrt[4]{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^4}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}=\sqrt[4]{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)^4}=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$.

30. 1) $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$; 2) $\sqrt[15]{-1}=\sqrt[15]{(-1)^{15}}=-1$;

3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}=-\frac{1}{3}$; 4) $\sqrt[5]{-1024}=\sqrt[5]{(-4)^5}=-4$;

5) $\sqrt[3]{-34^3}=\sqrt[3]{(-34)^3}=-34$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}=-\sqrt[7]{8^7}=-8$.

31. Решить уравнение:

1) $x^4=256$. Решение: $x^4=256$; $x=\pm\sqrt[4]{256}=\pm\sqrt[4]{4^4}=\pm4$. Ответ: $x=\pm4$.

2) $x^5=-\frac{1}{32}$. Решение: $x=\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}=\sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}=-\frac{1}{2}$. Ответ: $x=-\frac{1}{2}$.

3) $5x^5=-160$. Решение: $x^5=-32$; $x=\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$. Ответ: $x=-2$.

4) $2x^6=128$. Решение: $x^6=64$; $x=\pm\sqrt[6]{64}=\pm\sqrt[6]{2^6}=\pm2$. Ответ: $x=\pm2$.

32. 1) $\sqrt[3]{-125}+\frac{1}{8}\sqrt[6]{64}=\sqrt[3]{(-5)^3}+\frac{1}{8}\sqrt[6]{2^6}=-5+\frac{1}{8}\cdot2=-4\frac{3}{4}$.

2) $\sqrt[5]{32}-0{,}5\sqrt[3]{-216}=\sqrt[5]{2^5}+0{,}5\sqrt[3]{6^3}=2+3=5$.

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{625}=-\frac{1}{3}\sqrt[4]{3^4}+\sqrt[4]{5^4}=-1+5=4$.

4) $\sqrt[3]{-1000}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{256}=-\sqrt[3]{10^3}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{4^4}=-10-1=-11$.

5) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}+\sqrt[3]{-0{,}001}-\sqrt[4]{0{,}0016}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^5}+\sqrt[3]{(-0{,}1)^3}-\sqrt[4]{0{,}2^4}=\frac{1}{3}-0{,}1-0{,}2=\frac{1}{30}$.

33. 1) $\sqrt[3]{343\cdot0{,}125}=\sqrt[3]{7^3\cdot0{,}5^3}=7\cdot0{,}5=3{,}5$.

2) $\sqrt[3]{512\cdot 216}=\sqrt[3]{8^3\cdot 6^3}=8\cdot 6=48$.

3) $\sqrt[5]{32\cdot 100000}=\sqrt[5]{2^5\cdot 10^5}=2\cdot 10=20$.

34. 1) $\sqrt[3]{5^3\cdot 7^3}=\sqrt[3]{(5\cdot 7)^3}=5\cdot 7=35$.

2) $\sqrt[4]{11^4\cdot 3^4}=\sqrt[4]{(11\cdot 3)^4}=11\cdot 3=33$.

3) $\sqrt[5]{(0,2)^5\cdot 8^5}=\sqrt[5]{(0,2\cdot 8)^5}=0,2\cdot 8=1,6$.

4) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^7\cdot 21^7}=\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\cdot 21\right)^7}=\frac{21}{3}=7$.

35. 1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}=\sqrt[3]{2\cdot 500}=\sqrt[3]{1000}=10$.

2) $\sqrt[3]{0,2}\cdot\sqrt[3]{0,04}=\sqrt[3]{0,2\cdot 0,04}=\sqrt[3]{0,008}=0,2$.

3) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{324\cdot 4}=\sqrt[4]{3^4\cdot 4\cdot 4}=\sqrt[4]{3^4\cdot 2^4}=6$.

4) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{16}=\sqrt[5]{2\cdot 16}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$.

36. 1) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 2^{15}}=\sqrt[5]{(3^2)^5\cdot(2^3)^5}=3^2\cdot 2^3=9\cdot 8=72$.

2) $\sqrt[3]{2^3\cdot 5^6}=\sqrt[3]{2^3\cdot(5^2)^3}=2\cdot 5^2=50$.

3) $\sqrt[4]{3^{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8}=\sqrt[4]{(3^3)^4\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^4}=3^3\cdot\frac{1}{3^2}=3$.

4) $\sqrt[10]{4^{30}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}=\sqrt[10]{4^{30}}\cdot\sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}=\left(\sqrt[10]{4}\right)^{30}\cdot\left(\sqrt[10]{1/2}\right)^{20}=4^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=16$.

37. 1) $\sqrt[3]{64x^3z^6}=\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{z^6}=4xz^2$.

2) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}=\sqrt[4]{a^8}\cdot\sqrt[4]{b^{12}}=a^2b^3$.

3) $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}}=\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{x^{10}}\cdot\sqrt[5]{y^{20}}=2x^2y^4$.

4) $\sqrt[6]{a^{12}b^{18}}=\sqrt[6]{a^{12}}\cdot\sqrt[6]{b^{18}}=a^2b^3$.

38. 1) $\sqrt[3]{2ab^2}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}=\sqrt[3]{2ab^2\cdot 4a^2b}=\sqrt[3]{2^3a^3b^3}=2ab$.

2) $\sqrt[4]{3a^2b^3}\cdot\sqrt[4]{27a^2b}=\sqrt[4]{3a^2b^3\cdot 27a^2b}=\sqrt[4]{3^4a^4b^4}=3ab$.

3) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^3c}{b}}=\sqrt[4]{\frac{ab}{c}\cdot\frac{a^3c}{b}}=\sqrt[4]{a^4}=a$.

4) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2ab}}=\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2\cdot 2ab}}=\sqrt[3]{\frac{8}{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{b^3}}=\frac{2}{b}$.

39. 1) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}=\sqrt[3]{\frac{4^3}{5^3}}=\frac{4}{5}$. 2) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\sqrt[4]{\frac{2^4}{3^4}}=\frac{2}{3}$.

3) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}}=\frac{3}{2}$. 4) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}=\sqrt[5]{\frac{243}{32}}=\frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}}=\frac{3}{2}$.

40. 1) $\sqrt[4]{324}:\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{\frac{324}{4}}=\sqrt[4]{81}=3$.

2) $\sqrt[3]{128}:\sqrt[3]{2000}=\sqrt[3]{\frac{128}{2000}}=\sqrt[3]{\frac{64}{1000}}=\frac{4}{10}=0{,}4$.

3) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=2$. 4) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}=\sqrt[5]{\frac{256}{8}}=\sqrt[5]{32}=2$.

5) $\left(\sqrt{25}-\sqrt{45}\right):\sqrt{5}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}-\sqrt{9}=\sqrt{5}-3$.

6) $\left(\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}\right):\sqrt[3]{5}=\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}-1=\sqrt[3]{\frac{625}{5}}-1=\sqrt[3]{125}-1=4$.

41. 1) $\sqrt[5]{a^6b^7}:\sqrt[5]{ab^2}=\sqrt[5]{\frac{a^6b^7}{ab^2}}=ab$. 2) $\sqrt[3]{81x^4y}:\sqrt[3]{3xy}=\sqrt[3]{\frac{81x^4y}{3xy}}=3x$.

3) $\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}}:\sqrt[3]{\frac{y}{9x^2}}=\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}\cdot\frac{9x^2}{y}}=\frac{3x}{y}$. 4) $\sqrt[4]{\frac{2b}{a^3}}:\sqrt[4]{\frac{a}{8b^3}}=\sqrt[4]{\frac{2b}{a^3}\cdot\frac{8b^3}{a}}=\frac{2b}{a}$.

42. 1) $\left(\sqrt[6]{7^3}\right)^2=\sqrt[6]{7^6}=7$. 2) $\left(\sqrt[6]{9}\right)^{-3}=\left(\sqrt[6]{3^2}\right)^{-3}=\sqrt[6]{3^{-6}}=\sqrt[6]{\frac{1}{3^6}}=\frac{1}{3}$.

3) $\left(\sqrt[10]{32}\right)^2=\sqrt[10]{\left(2^5\right)^2}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$. 4) $\left(\sqrt[8]{16}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\sqrt[8]{16}\right)^4}=\frac{1}{\sqrt[8]{16^4}}=\frac{1}{\sqrt[8]{4^8}}=0{,}25$

43. 1) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt[6]{729}=\sqrt[6]{3^6}=3$. 2) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}=\sqrt[10]{1024}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$.

3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{3^7}=\sqrt[9]{9}\cdot\sqrt[9]{3^7}=\sqrt[9]{9\cdot 3^7}=\sqrt[9]{3^9}=3$.

4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5^5}=\sqrt[12]{5^2}\cdot\sqrt[12]{5^{10}}=\sqrt[12]{5^{12}}=5$.

44. 1) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^6=x^2$. 2) $\left(\sqrt[3]{y^2}\right)^3=y^2$.

3) $\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\right)^6=a^3b^2$. 4) $\left(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^3}\right)^{12}=\left(a^2\right)^4\cdot\left(b^3\right)^3=a^8b^9$.

5) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6=\left(\sqrt[6]{a^2b}\right)^6=a^2b$. 6) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}}\right)^4=\left(\sqrt[12]{27a^3}\right)^4=\sqrt[3]{27a^3}=3a$

45. При каких x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$. Решение: корень четной степени существует только у неотрицательных чисел, т.е. $2x-3\ge 0$. Отсюда $x\ge 3/2$. Ответ: $x\ge 3/2$.

2) $\sqrt[8]{x+3}$. Решение: корень четной степени существует только у неотрицательных чисел, т.е. $x+3\ge 0$. Отсюда $x\ge 3$. Ответ: $x\ge 3$.

3) $\sqrt[6]{2x^2-x-1}$. Решение: корень четной степени существует только у неотрицательных чисел, т.е. $2x^2-x-1\ge 0$, $(2x+1)(x-1)\ge 0$. Отсюда $x\le -0{,}5$, $x\ge 1$. Ответ: $x\le -0{,}5$, $x\ge 1$.

4) $\sqrt[4]{\dfrac{2-3x}{2x-7}}$. Решение: корень четной степени существует только у неотрицательных чисел, т.е. $\dfrac{2-3x}{2x-7}\ge 0$. Т.е. $\begin{cases}2-3x\ge 0\\2x-7>0\end{cases}$ или $\begin{cases}2-3x\le 0\\2x-7<0\end{cases}$. Первая система решений не имеет, из второй системы получаем: $2/3\le x<2$.

Ответ: $2/3\le x<2$.

46. 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}=\sqrt{\left(9+\sqrt{17}\right)\left(9-\sqrt{17}\right)}=\sqrt{81-17}=\sqrt{64}=8$.

2) $\left(\sqrt{3+\sqrt5}-\sqrt{3-\sqrt5}\right)^2=3+\sqrt5-2\sqrt{3+\sqrt5}\cdot\sqrt{3-\sqrt5}+3-\sqrt5=6-2\sqrt{9-5}=2$.

3) $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2=5+\sqrt{21}+2\sqrt{5^2-\left(\sqrt{21}\right)^2}+5-\sqrt{21}=10+2\sqrt{25-21}=14$

47. 1) $\dfrac{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}=\sqrt[3]{\dfrac{49\cdot 112}{250}}=\sqrt[3]{\dfrac{49\cdot 7\cdot 8}{125}}=\dfrac{7\cdot 2}{5}=2{,}8$.

2) $\dfrac{\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{\dfrac{54\cdot 120}{5}}=\sqrt[4]{2\cdot 27\cdot 3\cdot 8}=2\cdot 3=6$.

3) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[6]{27^2}-\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{27}-\sqrt[6]{64}=2+3-2=3$.

4) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{256}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}+\sqrt[4]{18\cdot\frac{9}{2}}-\sqrt{16}=\frac{3}{2}+3-4=0{,}5$.

5) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}=\sqrt[3]{\left(11-\sqrt{57}\right)\left(11+\sqrt{57}\right)}=\sqrt[3]{121-57}=\sqrt[3]{64}=4$.

6) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}=\sqrt[4]{\left(17-\sqrt{33}\right)\left(17+\sqrt{33}\right)}=\sqrt[4]{17^2-33}=\sqrt[4]{289-33}=4$.

48. 1) $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}\cdot\sqrt[3]{27b}=\sqrt[3]{2ab\cdot4a^2b\cdot27b}=\sqrt[3]{2^3a^3b^3\cdot3^3}=6ab$.

2) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{b^5c^2}=\sqrt[4]{abc\cdot a^3b^2c\cdot b^5c^2}=\sqrt[4]{a^4b^8c^4}=ab^2c$.

49. 1) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}}+\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}\right)^3=\sqrt[3]{a^6}+\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^3=a^2+a^2=2a^2$.

2) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3+2\left(\sqrt[4]{\sqrt{x}}\right)^8=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+2\left(\sqrt[8]{x}\right)^8=x+2x=3x$.

3) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}}-\left(\sqrt[5]{xy^2}\right)^5=\sqrt[6]{x^6y^{12}}-xy^2=xy^2-xy^2=0$.

4) $\left(\left(\sqrt[5]{a\sqrt[5]{a}}\right)^5-\sqrt[5]{a}\right):\sqrt[10]{a^2}=\left(a\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{a}\right):\sqrt[5]{a}=a-1$.

50. 1) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}=\frac{\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{\left(3^2\right)^2}}{\sqrt[6]{3}}=\sqrt[6]{\frac{3^3\cdot3^4}{3}}=\sqrt[6]{3^6}=3$.

2) $\frac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}=\frac{\sqrt[12]{7^4}\cdot\sqrt[12]{\left(7^3\right)^3}}{\sqrt[12]{7}}=\sqrt[12]{7^{4+9-1}}=\sqrt[12]{7^{12}}=7$.

3) $\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{8}=$

$=\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{8}=3-2=1$.

51. Упростить: 1) $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ при а) $x\ge2$; б) $x<2$.

Решение: $\sqrt[3]{(x-2)^3}=x-2$, т.к. корень нечетной степени. Ответ: а), б) $x-2$

2) $\sqrt{(3-x)^6}$ при а) $x\le3$; б) $x>3$.

Решение: $\sqrt{(3-x)^6}=\left|(3-x)^3\right|=\begin{cases}(3-x)^3 & \text{при } x\le3\\ (x-3)^3 & \text{при } x>3\end{cases}$. Ответ: а) $(3-x)^3$ б) $(x-3)^3$.

3) $\sqrt[4]{(x+6)^4}+\sqrt{(x-3)^2}$, если $-1<x<2$.

Решение: $\sqrt[4]{(x+6)^4}+\sqrt{(x-3)^2}=|x+6|+|x-3|=x+6-x+3=9$, поскольку

$x+6>0$, $x-3<0$ при $-1<x<2$. Ответ: 9.

4) $\sqrt[6]{(2x+1)^6}-\sqrt[4]{(4+x)^4}$, если $-3<x<-1$.

Решение: $\sqrt[6]{(2x+1)^6}-\sqrt[4]{(4+x)^4}=|2x+1|-|4+x|=-2x-1-4-x=-3x-5$,

т.к. $2x+1<0$, $4+x>0$ при $-3<x<-1$. Ответ: $-3x-5$.

52. Сравнить значения выражений:

1) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{30}$ и $\sqrt[3]{63}$. Решение: $\sqrt{3}+\sqrt[3]{30}>\sqrt{1}+\sqrt[3]{27}=4$, а $\sqrt[3]{63}<\sqrt[3]{64}=4$,

т.е. $\sqrt{3}+\sqrt[3]{30}>\sqrt[3]{63}$. Ответ: $\sqrt{3}+\sqrt[3]{30}>\sqrt[3]{63}$.

2) Указание: сравните каждое число с числом 6.

53. Доказать, что:

1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=2$. Решение: преобразуем левую часть:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=2, \text{ ч.т.д.}$$

2) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$. Решение: преобразуем левую часть:

$$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\frac{72+32\sqrt{5}}{8}}+\sqrt[3]{\frac{72-32\sqrt{5}}{8}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{72+32\sqrt{5}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{5}\right)^3}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{5}\right)^3}=3, \text{ ч.т.д.}$$

54. 1) $$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-\left(\sqrt[4]{b}\right)^2}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2+\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=$$

$$=\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\frac{\sqrt[4]{a}\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{b}.$$

2) Указание: $a\pm b=\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$.

3) Указание: $a+b=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$.

§5. Степень с рациональным и действительным показателем

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \text{ при } a\ge 0,\ n\ge 2,\ m\in Z.$$

Свойства ($a>0$, $n\ge 2$, $m\in Z$, $p,q\in R$):

1°. $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mk}{nk}}$; 2°. $a^pa^q=a^{p+q}$;

3°. $a^p:a^q=a^{p-q}$; 4°. $\left(a^p\right)^q=a^{pq}$;

5°. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$ $(b>0)$; 6°. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ $(b>0)$;

7°. $a>1, p<q \Rightarrow a^p < a^q$; 8°. $0<a<1, p<q \Rightarrow a^p > a^q$;

9°. $a^p > 0$ для $\forall a>0$, $\forall p$;

57. 1) $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$. 2) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

3) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = 2^2 = 4$. 4) $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = 3^3 = 27$.

5) $16^{-0,75} = 16^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{16}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. 6) $9^{-1,5} = 9^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

58. 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}} = 2^{\frac{4}{5}+\frac{11}{5}} = 2^3 = 8$. 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}} = 5^{\frac{2}{7}+\frac{5}{7}} = 5^1 = 5$.

3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 9^{\frac{3}{6}} = 3$. 4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}} = 4^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

5) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4} = 8^{-\frac{4}{12}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$.

59. 1) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{9^2 \cdot 27^2} = \sqrt[5]{3^{10}} = 9$. 2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2 \cdot 49^2} = \sqrt[3]{7^6} = 49$.

3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{144^3 \cdot 9^3} = \sqrt[4]{(12^2)^3 : (3^2)^3} = \sqrt[4]{(4^2)^3} = 2^3 = 8$.

4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{150}{6}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = 125$.

60. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = (2^{-4})^{-\frac{3}{4}} + (2^{-3})^{-\frac{4}{3}} = 2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$.

2) $(0{,}04)^{-1,5} - (0{,}125)^{-\frac{2}{3}} = (0{,}2^2)^{-\frac{3}{2}} - (0{,}5^3)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{10}{2}\right)^3 - \left(\frac{10}{5}\right)^2 = 5^3 - 2^2 = 121$.

3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}} = 8^{\frac{9}{7}-\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}+\frac{4}{5}} = 8^1 - 3^2 = -1$.

4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0{,}2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4} = 5^2 + (0{,}2)^{-3} = 25 + 5^3 = 25 + 125 = 150$.

61. 1) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} = \sqrt{a} = \sqrt{0{,}09} = 0{,}3$. 2) $\sqrt{b} : \sqrt[6]{b} = \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{27} = 3$.

3) $\frac{\sqrt{b}\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}} = b = 1{,}3$. 4) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5} = a = 2{,}7$.

62. 1) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$. 2) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = b$.

3) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{6}}$. 4) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a} = a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = a$.

5) $x^{1,7} \cdot x^{2,8} : \sqrt{x^5} = x^{1,7+2,8-5/2} = x^2$. 6) $y^{-3,8} : y^{-2,3} \cdot \sqrt[3]{y} = y^{-\frac{19}{5}+\frac{23}{10}+\frac{1}{3}} = y^{-\frac{7}{6}}$.

63. 1) $x^{1/2} + x = x^{1/2}(1 + x^{1/2})$.

2) $(ab)^{1/3} + (ac)^{1/3} = a^{1/3}b^{1/3} + a^{1/3}c^{1/3} = a^{1/3}(b^{1/3} + c^{1/3})$.

3) $y^{3/4} - y^{1/3} = y^{1/3}\left(y^{3/4-1/3} - 1\right) = y^{1/3}\left(y^{5/12} - 1\right)$.

4) Указание: вынесите за скобки $3x^{1/2}y^{1/2}$.

64. 1) $a^{1/2} - b^{1/2} = \left(a^{1/4}\right)^2 - \left(b^{1/4}\right)^2 = \left(a^{1/4} - b^{1/4}\right)\left(a^{1/4} + b^{1/4}\right)$.

2) $y^{2/3} - 1 = \left(y^{1/3}\right)^2 - 1^2 = \left(y^{1/3} - 1\right)\left(y^{1/3} + 1\right)$.

3) $a^{1/3} - b^{1/3} = \left(a^{1/6}\right)^2 - \left(b^{1/6}\right)^2 = \left(a^{1/6} - b^{1/6}\right)\left(a^{1/6} + b^{1/6}\right)$.

4) $x - y = \left(x^{1/2}\right)^2 - \left(y^{1/2}\right)^2 = \left(x^{1/2} - y^{1/2}\right)\left(x^{1/2} + y^{1/2}\right)$.

5) $4a^{1/2} - b^{1/2} = \left(2a^{1/4}\right)^2 - \left(b^{1/4}\right)^2 = \left(2a^{1/4} - b^{1/4}\right)\left(2a^{1/4} + b^{1/4}\right)$.

6) $0{,}01m^{1/6} - n^{1/6} = \left(0{,}1m^{1/12}\right)^2 - \left(n^{1/12}\right)^2 = \left(0{,}1m^{1/12} - n^{1/12}\right)\left(0{,}1m^{1/12} + n^{1/12}\right)$.

65. 1) Указание: $a - x = \left(a^{1/3}\right)^3 - \left(x^{1/3}\right)^3$.

2) Указание: $x^{3/2} - y^{3/2} = \left(x^{1/2}\right)^3 - \left(y^{1/2}\right)^3$.

3) Указание: $a^{1/2} - b^{1/2} = \left(a^{1/6}\right)^3 - \left(b^{1/6}\right)^3$.

4) Указание: $27a + c^{1/2} = \left(3a^{1/3}\right)^3 + \left(c^{1/6}\right)^3$.

66. 1) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{1/4} - b^{1/4}} = \dfrac{a^{1/2} - b^{1/2}}{a^{1/4} - b^{1/4}} = \dfrac{\left(a^{1/4}\right)^2 - \left(b^{1/4}\right)^2}{a^{1/4} - b^{1/4}} = \dfrac{\left(a^{1/4} - b^{1/4}\right)\left(a^{1/4} + b^{1/4}\right)}{a^{1/4} - b^{1/4}} = a^{1/4} + b^{1/4}$

2) Указание: $m+2\sqrt{mn}+n=\left(m^{1/2}+n^{1/2}\right)^2$.

3) Указание: $c-2c^{1/2}+1=\left(\sqrt{c}-1\right)^2$.

67. $\frac{c^{3/2}}{c^{1/2}+b^{1/2}}-\frac{cb^{1/2}}{b^{1/2}-c^{1/2}}+\frac{2c^2-4cb}{c-b}=\frac{c^{3/2}\left(c^{1/2}-b^{1/2}\right)-cb^{1/2}\left(b^{1/2}+c^{1/2}\right)+2c^2-4cb}{c-b}=$

$=\frac{c^2-c^{3/2}b^{1/2}+c^{3/2}b^{1/2}+cb+2c^2-4cb}{c-b}=\frac{3c^2-3cb}{c-b}=\frac{3c(c-b)}{c-b}=3c$.

68. 1) $2^{\sqrt{5}}\cdot 2^{-\sqrt{5}}=2^{\sqrt{5}-\sqrt{5}}=1$.

2) $3^{2\sqrt{2}}:9^{\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}}=1$.

3) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}=5^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=5^3=125$.

4) $\left(0{,}5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}=0{,}5^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.

69. 1) Указание: $8^{\sqrt{5}}=2^{3\sqrt{5}}$.

2) Указание: $9^{\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}}$.

3) $\left(5^{1+\sqrt{2}}\right)^{1-\sqrt{2}}=5^{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=5^{1-2}=1/5$.

4) $\left(5^{1-\sqrt{5}}\right)^{1+\sqrt{5}}-\left(\sqrt{5}\right)^0=5^{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}-1=5^{1-5}-1=5^{-4}-1=-\frac{624}{625}$.

70. 1) Указание: $4^{\sqrt{2}}=2^{2\sqrt{2}}$.

2) Указание: $27^{\sqrt{3}}=3^{3\sqrt{3}}$.

3) $9^{1+\sqrt{3}}\cdot 3^{1-\sqrt{3}}\cdot 3^{-2-\sqrt{3}}=3^{2(1+\sqrt{3})}\cdot 3^{1-\sqrt{3}}\cdot 3^{-2-\sqrt{3}}=3^{2+2\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}}=3$.

4) $4^{3+\sqrt{2}}\cdot 2^{1-\sqrt{2}}\cdot 2^{-4-\sqrt{2}}=2^{2(3+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}-4-\sqrt{2}}=2^3=8$.

71. 1) Указание: $10^{2+\sqrt{7}}=2^{2+\sqrt{7}}\cdot 5^{2+\sqrt{7}}$.

2) Указание: $6^{3+\sqrt{5}}=3^{3+\sqrt{5}}\cdot 2^{3+\sqrt{5}}$.

3) Указание: $25^{1+\sqrt{2}}=5^{2+2\sqrt{2}}$.

4) Указание: $4^{\sqrt{3}-1}=2^{2\sqrt{3}-2}$.

72. Выяснить, какое из чисел больше.

1) $3^{\sqrt{71}}$ или $3^{\sqrt{69}}$. Решение: $\sqrt{71}>\sqrt{69}$; $3>1$, следовательно $3^{\sqrt{71}}>3^{\sqrt{69}}$.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$. Решение: $\sqrt{3}>\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}<1$, значит $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

3) $4^{-\sqrt{3}}$ или $4^{-\sqrt{2}}$. Решение: $-\sqrt{3}<-\sqrt{2}$; $4>1$, следовательно $4^{-\sqrt{3}}<4^{-\sqrt{2}}$.

4) Указание: $\sqrt{3}>1{,}7$.

5) Указание: $1{,}4 < \sqrt{2}$.

6) Указание: $\pi > 3{,}14$.

73. 1) 2^{-2}. Решение: $2^{-2} = \frac{1}{4} < 1$. Ответ: $2^{-2} < 1$.

2) $(0{,}013)^{-1}$. Решение: $(0{,}013)^{-1} = \frac{1000}{13} > 1$. Ответ: $(0{,}013)^{-1} > 1$.

3) $\left(\frac{2}{7}\right)^5$. Решение: $\left(\frac{2}{7}\right)^5 < \left(\frac{7}{7}\right)^5 = 1$. Ответ: $\left(\frac{2}{7}\right)^5 < 1$.

4) $27^{1,5}$. Решение: $27^{1,5} > 1^{1,5} = 1$. Ответ: $27^{1,5} > 1$.

5) $2^{-\sqrt{5}}$. Решение: $2^{-\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}} < \left(\frac{1}{2}\right) < 1$. Ответ: $2^{-\sqrt{5}} < 1$.

6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$. Решение: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^1 < 1$. Ответ: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} < 1$.

7) Указание: $\frac{\pi}{4} < 1$ и $\sqrt{5} - 2 > 0$. 8) Указание: $\frac{1}{3} < 1$ и $\sqrt{8} - 3 > 0$.

74. 1) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = a$.

2) $a^{\sqrt{3}-1} \cdot a^{\sqrt{3}+1} = a^{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1} = a^{2\sqrt{3}}$.

3) $\left(b^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} : b^2 = b^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} : b^2 = b^{3-2} = b$.

75. 1) Указание: сравните числа $2^{1/3}$ и $3^{1/3}$, аналогично 72 п.1).

2) Указание: сравните числа $5^{1/4}$ и $7^{1/4}$, аналогично 72 п.1).

76. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 + \sqrt[4]{810000} - \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = 8 + 30 - \frac{3}{2} = 36{,}5$

2) $(0{,}001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{1000}}{1} - 2^{-2+6\cdot\frac{2}{3}} - 2^{3\left(-\frac{4}{3}\right)} = 10 - 2^2 - 2^{-4} = 5\frac{15}{16}$.

3) $27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3\cdot 2}{3}} - \frac{1}{2^2} + \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = 9 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = 9\frac{5}{12}$.

77. 1) $\left(a^4\right)^{-3/4} \cdot \left(b^{-2/3}\right)^{-6} = a^{-3}b^4 = \frac{b^4}{a^3}$. 2) $\left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}} = \frac{a^{6\cdot 4:12}}{b^{(-3)\cdot 4:12}} = a^2 b$.

78. 1) Указание: вынесите за скобку $a^{-1/3}$ в числителе и $a^{-1/4}$ в знаменателе, аналогично 2).

2) $\dfrac{b^{1/5}\left(\sqrt[5]{b^4}-\sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{2/3}\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}}\right)}=\dfrac{b^{1/5}\left(b^{4/5}-b^{-1/5}\right)}{b^{2/3}\left(b^{1/3}-b^{-2/3}\right)}=\dfrac{b^{1/5}b^{-1/5}(b-1)}{b^{2/3}b^{-2/3}(b-1)}=1$.

3) $\dfrac{a^{5/3}b^{-1}-a^{-1/3}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{a^{-1/3}b^{-1}\left(a^2-b\right)}{a^{2/3}-b^{2/3}}=\dfrac{\left(a^2-b\right)}{a^{1/3}b\left(a^{2/3}-b^{2/3}\right)}=\dfrac{\left(a^2-b\right)}{ab-a^{1/3}b^{5/3}}$.

4) Указание: вынесите за скобку $a^{1/3}b^{1/3}$ в числителе.

79. 1) $\left(2^{5/3}\cdot3^{-1/3}-3^{5/3}\cdot2^{-1/3}\right)\cdot\sqrt[3]{6}=\left(2^{5/3}\cdot3^{-1/3}-3^{5/3}\cdot2^{-1/3}\right)\cdot3^{1/3}\cdot2^{1/3}=2^2-3^2=-5$.

2) Указание: $\sqrt[4]{1000}=2^{3/4}\cdot5^{3/4}$, аналогично 1).

80. 1) $a^{1/9}\cdot\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}}=a^{1/9}\left(aa^{1/3}\right)^{1/6}=a^{1/9}\left(a^{4/3}\right)^{1/6}=a^{1/9}a^{2/9}=\sqrt[3]{a}$.

2) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}=b^{\frac{1}{12}}\sqrt[12]{b^4b}=\sqrt[12]{b^4b\cdot b}=\sqrt{b}$.

3) $\left(\sqrt[3]{ab^{-2}}+(ab)^{-\frac{1}{6}}\right)\sqrt[6]{ab^4}=\left(a^{\frac{2}{6}}b^{-\frac{4}{6}}+a^{-\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}}\right)a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{3}{6}}b^0+a^0b^{\frac{3}{6}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

81. 1) Указание: $\left(1-2\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\dfrac{b}{a}\right)=\left(\dfrac{b^{1/2}}{a^{1/2}}-1\right)^2=\dfrac{\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)^2}{a}$.

2) Указание: $\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}+\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)=\dfrac{\left(a^{1/3}+b^{1/3}\right)^2}{a^{1/3}b^{1/3}}$.

3) $\dfrac{a^{1/4}-a^{9/4}}{a^{1/4}-a^{5/4}}-\dfrac{b^{-1/2}-b^{3/2}}{b^{1/2}+b^{-1/2}}=\dfrac{a^{1/4}\left(1-a^2\right)}{a^{1/4}(1-a)}-\dfrac{b^{-1/2}\left(1-b^2\right)}{b^{-1/2}(b+1)}=(1+a)-(1-b)=a+b$.

4) $\dfrac{\sqrt{a}-a^{-1/2}b}{1-\sqrt{a^{-1}b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-a^{-1/3}b}{\sqrt[6]{a}+a^{-1/3}\sqrt{b}}=\dfrac{a^{1/2}-a^{-1/2}b}{1-a^{-1/2}b^{1/2}}-\dfrac{a^{2/3}-a^{-1/3}b}{a^{1/6}+a^{-1/3}b^{1/2}}=$

$=\dfrac{a^{-1/2}(a-b)}{a^{-1/2}\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)}-\dfrac{a^{-1/3}(a-b)}{a^{-1/3}\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)}=\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)-\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)=2\sqrt{b}$

82. 1) Указание: сократите дробь на $(nm)^{\sqrt{3}}$.

2) Указание: сократите дробь на $(xy)^{\sqrt{7}}$.

3), 4) Указание: воспользуйтесь формулой разности квадратов.

83. 1) $\left(a^{1+\sqrt{2}}\right)^{1-\sqrt{2}}=a^{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=a^{1-2}=\frac{1}{a}$.

2) Указание: $\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}{-4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

3) $\left(a^{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}\right)^{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$. Решение: по формуле суммы кубов получаем:

$\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)^3=5$, значит $\left(a^{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}\right)^{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}=a^5$.

4) Указание: воспользуйтесь формулой разности кубов.

84. 1) $5^{2x}=5^4$. Решение: $2x=4$, $x=2$. Ответ: $x=2$.

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$. Решение: $2x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$. Ответ: $x=-\frac{1}{2}$.

3) $9^x=3^{2\sqrt{2}}$. Решение: $9^x=3^{2x}$, т.е. $2x=2\sqrt{2}$; $x=\sqrt{2}$. Ответ: $x=\sqrt{2}$.

4) $16^x=2^{8\pi}$. Решение: $16^x=2^{4x}$, т.е. $2^{4x}=2^{8\pi}$; $4x=8\pi$; $x=2\pi$.

85. 1) $7^{x\sqrt{3}}=\sqrt{7}$. Решение: $\sqrt{7}=7^{\frac{1}{2}}$, т.е. $x\sqrt{3}=\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Ответ: $x=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

2) $25^{x\sqrt{2}}=5\sqrt{5}$. Решение: $5^{2x\sqrt{2}}=5^{\frac{3}{2}}$, т.е. $2x\sqrt{2}=\frac{3}{2}$; $x=\frac{3}{4\sqrt{2}}$.

3) $\left(\sqrt{2}\right)^x=2\sqrt{2}$. Решение: $\left(\sqrt{2}\right)^x=2^{x/2}$, $2\sqrt{2}=2^{3/2}$, т.е. $2^{x/2}=2^{3/2}$, $x=3$.

4) $\left(\sqrt{3}\right)^{3x}=3\sqrt{3}$. Решение: $3^{\frac{3}{2}x}=3^{\frac{3}{2}}$, т.е. $\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}$, $x=1$. Ответ: $x=1$.

86. 1) Указание: возведите оба числа в 15-ю степень.

2) Указание: возведите оба числа в 12-ю степень.

3) Указание: возведите оба числа в 6-ю степень.

4) Указание: возведите оба числа в 20-ю степень.

87. 1), 2), 3) аналогично 4).

4) $$\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{a-b}{a^{2/3}+\sqrt[3]{ab}+b^{2/3}}=\frac{a^{2/3}-b^{2/3}}{a^{1/3}-b^{1/3}}-\frac{a-b}{a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}}=$$

$$=\frac{\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)\left(a^{1/3}+b^{1/3}\right)}{a^{1/3}-b^{1/3}}-\frac{\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)\left(a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}\right)}{a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}}=$$

$$=\left(a^{1/3}+b^{1/3}\right)-\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)=2b^{1/3}=2\sqrt[3]{b}.$$

88. 1), 2) Указание: воспользуйтесь формулами суммы и разности кубов.

3) $\frac{a^{2/3}+b^{2/3}}{a-b}-\frac{1}{a^{1/3}-b^{1/3}}=\frac{\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)-\left(a^{2/3}-a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}\right)}{a-b}=\frac{a^{1/3}b^{1/3}}{a-b}=\frac{\sqrt[3]{ab}}{b-a}$

4) Указание: воспользуйтесь формулой суммы кубов, см. п.3).

89. 1) Указание: воспользуйтесь формулами суммы и разности кубов и формулой разности квадратов.

2) Указание: воспользуйтесь формулами суммы и разности кубов в знаменателе.

3) $\left(\frac{3x^{2/3}+5x^{1/3}}{x+1}+\frac{1}{x^{1/3}+1}\right):\left(4x^{1/3}+4+\frac{1}{x^{1/3}}\right)=$

$=\frac{\left(3x^{2/3}+5x^{1/3}\right)+\left(x^{2/3}-x^{1/3}+1\right)}{x+1}\cdot\frac{x^{1/3}}{4x^{2/3}+4x^{1/3}+1}=\frac{x^{1/3}}{x+1}=\frac{\sqrt[3]{x}}{x+1}.$

90. Искомая сумма вычисляется по формуле сложных процентов (см. задачу 5 §5): $S=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{t}=5000\cdot\left(1+\frac{2}{100}\right)^{3}=5306{,}04$. Ответ: 5306 руб. 04 коп.

91. Искомая сумма вычисляется по формуле сложных процентов (см. задачу 5 §5): $S=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{t}=200\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^{2\frac{7}{12}}=215{,}87$. Ответ: 2158 руб. 70 коп.

Упражнения к главе I

92. 1) $\left(0{,}645:0{,}3-1\frac{107}{180}\right)\left(4:6{,}25-1:5+\frac{1}{7}\cdot1{,}96\right)=\left(\frac{0{,}645\cdot10}{3}-\frac{287}{180}\right)\left(\frac{400}{625}-\frac{1}{5}+\frac{196}{700}\right)=$

$=\left(\frac{2{,}15\cdot180-287}{180}\right)(0{,}64-0{,}2+0{,}28)=\frac{387-287}{180}\cdot1{,}12=\frac{28}{45}.$

2) $\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-0{,}108)=0{,}125:0{,}125+\frac{3}{12}:0{,}25=$

$1+\frac{1}{4}\cdot\frac{100}{25}=1+1=2.$

93. См. задачу 2 §1 или задачу 4 §3.

96. 1), 2) аналогично 3).

3) $27^{2/3}+9^{-1}=\left(3^{3}\right)^{2/3}+1/9=9\,1/9.$

4), 5) аналогично 6).

6) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-2/3}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=\left(\frac{64}{27}\right)^{-2/3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=\left(\frac{3^{3}}{4^{3}}\right)^{2/3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=\left(\frac{3}{4}\right)^{4}=\frac{81}{256}.$

97. 1) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{2\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$. 2) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{6\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\frac{3}{4}\cdot\frac{27}{4}}=\frac{3}{2}$.

3) $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}=\sqrt[4]{\frac{25\cdot5}{8}\cdot\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$. 4) $\sqrt[3]{11\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{3\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{45}{4}\cdot\frac{3}{10}}=\frac{3}{2}$.

5) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2=\left(\sqrt{\sqrt[3]{27}}\right)^2=\sqrt[3]{27}=3$. 6) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{16}}\right)^3=\sqrt{16}=4$.

98. 1) Указание: $2^{-1}<1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}>1$.

2) Указание: $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}>2$, $32^{1/5}=2$.

99. 1) Указание: $6/11<0{,}88<1$. 2) Указание: $0{,}41<5/12<1$.

3) Указание: $1<4{,}09<4\,3/25$. 4) Указание: $11/12<12/13<1$.

100. 1) $\frac{a^{1\frac{1}{2}}a^{-0,5}}{a^{\frac{2}{3}}}=a^{1\frac{1}{2}-0,5-\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{3}}$. 2) $\frac{a^{-3}a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}=a^{-3+\frac{7}{3}-\frac{1}{3}}=a^{-1}$.

3) $\left(a^{2,5}\right)^2\sqrt[5]{a}=a^{2,5\cdot2+\frac{1}{5}}=a^{5\frac{1}{5}}$. 4) $\sqrt[7]{a^2}\left(a^{3/14}\right)^2=a^{\frac{2}{7}+\frac{6}{14}}=a^{\frac{5}{7}}$.

101. Аналогично задаче 69.

102. 1) Указание: сравните $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{7}}$ и $\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{2}{7}}$.

2) Указание: сравните $\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{3}{5}}$ и $\left(\frac{1}{42}\right)^{\frac{3}{5}}$.

103. 1) $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$. Решение: $2x=1/5$; $x=0{,}1$. Ответ: $x=0{,}1$.

2) $3^x=27$. Решение: $27=3^3$, т.е. $3^x=3^3$; $x=3$. Ответ: $x=3$.

3) $7^{3x}=7^{10}$. Решение: $3x=10$; $x=10/3=3\,1/3$. Ответ: $x=3\,1/3$.

4) $2^{2x+1}=32$. Решение: $32=2^5$, т.е. $2^{2x+1}=2^5$; $2x+1=5$. Ответ: $x=2$.

5) $4^{2+x}=1$. Решение: $1=4^0$, т.е. $4^{2+x}=4^0$; $2+x=0$, $x=-2$. Ответ: $x=-2$

104. 1) $\frac{y-16y^{1/2}}{5y^{1/4}+20}=\frac{y^{1/2}\left(y^{1/2}-16\right)}{5\left(y^{1/4}+4\right)}=\frac{y^{1/2}\left(y^{1/4}-4\right)\left(y^{1/4}+4\right)}{5\left(y^{1/4}+4\right)}=\frac{y^{1/2}\left(y^{1/4}-4\right)}{5}$.

2) Указание: воспользуйтесь формулой разности квадратов в числителе.

105. Упростить:

1) $\dfrac{ab^{3/2}-b^{1/2}}{a^{1/2}b^{1/2}-1}=\dfrac{b^{1/2}(ab-1)}{a^{1/2}b^{1/2}-1}=b^{1/2}\left(a^{1/2}b^{1/2}+1\right)=b\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

2) Указание: воспользуйтесь формулой разности квадратов в знаменателе первой дроби.

106. 1) Указание: $S_2=b_1+b_2$, откуда $b_1=243$.

2) Указание: $S_2=b_1+b_2$, откуда $b_1=34$.

3) Указание: $b_1+b_2=b_1(1+q)$; $b_1-b_3=b_1(1-q^2)$, поделите одно равенство на другое, получится $1-q=\dfrac{12}{13}$, откуда $q=\dfrac{1}{13}$.

4) Указание: $b_2+b_4=b_1(1+q^2)$; $b_2-b_4=b_1(1-q^2)$, поделите одно равенство на другое, получится $\dfrac{1-q^2}{1+q^2}=\dfrac{15}{17}$, откуда $q^2=\dfrac{1}{16}$, $q=\pm\dfrac{1}{4}$.

107. 1) Указание: $a=1{,}10(209)$, тогда $100a=110,(209)$ и $100000a=110209,(209)$, откуда $99900a=110099$.

2) Аналогично 1).

108. Найдите сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии с положительными членами, если сумма первых трех ее членов равна 39, а сумма их обратных величин равна $^{13}/_{27}$.

По условию: $\begin{cases} b_1+b_2+b_3=39 \\ \dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\dfrac{1}{b_3}=\dfrac{13}{27} \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} b_1(1+q+q^2)=39 \\ \dfrac{1}{b_1}\left(1+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q^2}\right)=\dfrac{13}{27} \end{cases}$

Поделим первое равенство на второе, получим:

$b_1^2\cdot\dfrac{1+q+q^2}{1+{}^1\!/_q+{}^1\!/_{q^2}}=81$; $b_1^2\cdot q^2=81$, откуда $b_1q=9$ ($b_1q=b_2>0$). Подставим $q=\dfrac{9}{b_1}$ в первое уравнение, получим $b_1\cdot\left(1+\dfrac{9}{b_1}+\dfrac{81}{b_1^2}\right)=39$, откуда $b_1=15\pm12$. Если $b_1=27$, то $q={}^1\!/_3$ и $S=\dfrac{27}{1-{}^1\!/_3}=\dfrac{81}{2}=40{,}5$. Если $b_1=3$, то $q=3>1$ (не удовлетворяет условию). Ответ: $S=40{,}5$.

109. Указание: $43\pm30\sqrt{2}=\left(5\pm3\sqrt{2}\right)^2$.

110. Указание: $34-24\sqrt{2}=\left(4-3\sqrt{2}\right)^2$.

111. Сравнить числа a и b, если:

1) $a=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{5}{3+2\sqrt{2}}$, $b=\frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$. Решение:

$$a=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{5}{3+2\sqrt{2}}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}+\frac{5\left(3-2\sqrt{2}\right)}{9-8}=\sqrt{5}+\sqrt{3}+15-10\sqrt{2},$$

$$b=\frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}=\frac{2\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)}{8-5}=\frac{2\sqrt{8}+2\sqrt{5}}{3}.$$

Т.е. необходимо сравнить числа $\sqrt{5}+\sqrt{3}+15-10\sqrt{2}$ и $\frac{2\sqrt{8}+2\sqrt{5}}{3}$.

Домножим оба числа на 3 и сравним: $3\sqrt{5}+3\sqrt{3}+45-30\sqrt{2}$ и $2\sqrt{8}+2\sqrt{5}$; т.е. необходимо сравнить $45+\sqrt{5}+3\sqrt{3}$ и $34\sqrt{2}$. Но $45+\sqrt{5}+3\sqrt{3}>$ $>45+2+\sqrt{27}>47+\sqrt{25}=52$, а $34\sqrt{2}<34\cdot1{,}8=51{,}2$, т.е. $a>b$.

2) $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $b=\sqrt{10}$. Решение: возведем оба числа в квадрат, получим $a^2=5+2\sqrt{6}$, $b^2=10$. Т.е. необходимо сравнить $2\sqrt{6}$ и 5.

$2\sqrt{6}=\sqrt{24}<\sqrt{25}=5$, следовательно $a^2<b^2$, т.к. $a>1$ и $b>1$ (очевидно), то из того, что $a^2<b^2$ следует $a<b$. Ответ: $a<b$.

3) $a=5-\sqrt{15}$, $b=\sqrt{17}-3$. Решение: сравним числа $5+3$ и $\sqrt{17}+\sqrt{15}$.

Возведем оба числа в квадрат (см. п.2) и сравним числа 32 и $2\sqrt{17\cdot15}$.

$\sqrt{16^2}>\sqrt{17\cdot15}$, поэтому $32=2\sqrt{16^2}>2\sqrt{17\cdot15}$, т.е. $a>b$. Ответ: $a>b$.

4) $a=\sqrt{13}-\sqrt{12}$, $b=\sqrt{12}-\sqrt{11}$. Решение:

$$a=\sqrt{13}-\sqrt{12}=\frac{\left(\sqrt{13}-\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{12}\right)}{\sqrt{13}+\sqrt{12}}=\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{12}},\text{аналогично } b=\frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}},$$

но $\sqrt{13}+\sqrt{12}>\sqrt{12}+\sqrt{11}$, следовательно $\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{12}}<\frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$, т.е. $a<b$. Ответ: $a<b$.

112. 1) $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2-3}=-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

2) $\frac{\sqrt{5}}{5+\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}\left(5-\sqrt{10}\right)}{\left(5+\sqrt{10}\right)\left(5-\sqrt{10}\right)}=\frac{5\sqrt{5}-\sqrt{50}}{25-10}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$.

3) Указание: домножьте числитель и знаменатель на $\sqrt[3]{2}$.

4) Указание: домножьте числитель и знаменатель на $\sqrt[4]{3}$.

5) Указание: домножьте числитель и знаменатель на $\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$ и дважды воспользуйтесь формулой разности квадратов.

6) Указание: домножьте числитель и знаменатель на $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$ и воспользуйтесь формулой суммы кубов.

7) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}}{\left(\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\right)\left(\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\right)}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+3}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=$

$=\frac{\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$.

8) Указание: домножьте числитель и знаменатель на $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$ и воспользуйтесь формулой разности кубов.

113. Указание: воспользуйтесь формулами разности и суммы кубов.

114. 1) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=\frac{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\frac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=\sqrt[4]{y}$.

2) Указание: воспользуйтесь формулами суммы и разности кубов.

3) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}+\sqrt[3]{y}=\frac{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[4]{x}$.

4) Указание: $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)$.

115. 1), 2), 4) аналогично 3).

3) $\frac{a^{2/3}-b^{2/3}}{a^{1/3}+b^{1/3}}\cdot\frac{a^{2/3}+\sqrt[3]{ab}+b^{2/3}}{a-b}=$

$$=\frac{\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)\left(a^{1/3}+b^{1/3}\right)}{a^{1/3}+b^{1/3}}\cdot\frac{a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}}{\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)\left(a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}\right)}=1.$$

116. 1) Указание: $a^2-4+3a^{-2}=\left(a-a^{-1}\right)\left(a-3a^{-1}\right)$.

$$2)\ \left(\frac{4}{(a+b)^{-2}}-\left(\frac{a-b}{a^3+b^3}\right)^{-1}\right)\cdot(ab)^{-1}=\left((a+b)^2-\frac{a^3+b^3}{a-b}\right)\cdot\frac{1}{ab}=$$

$$=\frac{(a+b)^2(a-b)-(a^3+b^3)}{(a-b)ab}=\frac{-2b^3-ab^2+a^2b}{(a-b)ab}=\frac{-2b^2-ab+a^2}{(a-b)a}=$$

$$=\frac{-2b^2-2ab+ab+a^2}{(a-b)a}=\frac{(a-b)(a-2b)}{(a-b)a}=\frac{a-2b}{a}=1-2\frac{b}{a}.$$

117. 1) $$\left(\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2+\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}{a+\sqrt{ab}}\right)^5\sqrt[3]{a^{10}\sqrt{a}}=$$

$$=\left(\frac{a^{1/2}+2a^{1/4}b^{1/4}+b^{1/2}+a^{1/2}-2a^{1/4}b^{1/4}+b^{1/2}}{a^{1/2}\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)}\right)^5\left(a^{\frac{21}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{2}{a^{1/2}}\right)^5\cdot a^{7/2}=32a.$$

2) Указание: приведите к общему знаменателю.

3) $$\left(\frac{a^{3/2}-b^{3/2}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{\frac{ab\sqrt[3]{a}+ab^{4/3}}{a^{1/3}+b^{1/3}}}\right)\cdot\frac{1}{a+b}=$$

$$=\left(\frac{\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)\left(a+a^{1/2}b^{1/2}+b\right)}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\sqrt{\frac{ab\left(a^{1/3}+b^{1/3}\right)}{a^{1/3}+b^{1/3}}}\right)\cdot\frac{1}{a+b}=$$

$$=\left(a+a^{1/2}b^{1/2}+b-\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{1}{a+b}=1.$$

118. Доказать, что $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$.

Т.к. $7\pm5\sqrt{2}=\left(1\pm\sqrt{2}\right)^3$, то $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)=2$, ч.т.д.

Глава II
Степенная функция

§6. Степенная функция, ее свойства и график

119. 1) $y = x^6$. Определена при $x \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$.

2) $y = x^5$. Определена при $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$.

3) $y = x^{\frac{1}{2}}$. Определена при $x \geq 0$, $y \geq 0$.

4) $y = x^{-2}$. Определена при $x \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$, $y > 0$.

5) $y = x^{-3}$. Определена при $x \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$, $y \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$.

6) $y = x^{\frac{1}{3}}$. Определена при $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$.

120. Указание: при $p > 0$ функция является возрастающей, при $p < 0$ – убывающей.

121. 1) См. рис. 2; 2) См. рис. 2.
3) См. рис. 3. 4) См. рис. 3.

122. 1) $4{,}1^{2{,}7} > 4{,}1^1 > 1^1$; 2) $0{,}2^{0{,}3} < 0{,}2^1 < 1^1$;

3) $0{,}7^{9{,}1} < 1^{9{,}1} = 1$; 4) $\left(\sqrt{3}\right)^{0{,}2} = 3^{0{,}1} > 3^0 = 1$.

123. Указание: см. рис. 4.

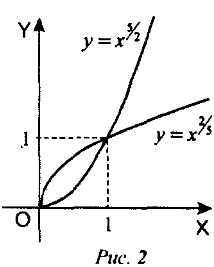

Рис. 2

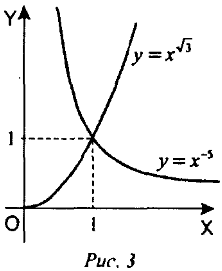

Рис. 3

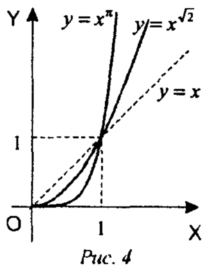

Рис. 4

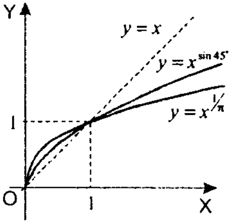

Рис. 5

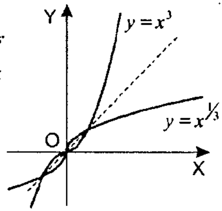

Рис. 6

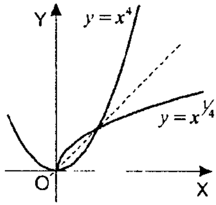

Рис. 7

124. Указание: см. рис. 5.

125. 1) $3{,}1^{7,2}$ и $4{,}3^{7,2}$. Решение: т.к. $3{,}1 < 4{,}3$, то $3{,}1^{7,2} < 4{,}3^{7,2}$.

2) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$. Решение: т.к. $\frac{10}{11} < \frac{12}{11}$, то $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3} < \left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$.

3) $0{,}3^{0,3}$ и $0{,}2^{0,3}$. Решение: т.к. $0{,}3 > 0{,}2$, и $0{,}3 > 0$, то $0{,}3^{0,3} > 0{,}2^{0,3}$.

4) $2{,}5^{-3,1}$ и $2{,}6^{-3,1}$. Решение: т.к. $2{,}5 < 2{,}6$ и $-3{,}1 < 0$, то $2{,}5^{-3,1} > 2{,}6^{-3,1}$.

5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$. Решение: т.к. $\frac{7}{9} < \frac{8}{10}$ и $-2 < 0$, то $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2} > \left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$.

6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{3}{4}}$ и $\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$. Решение: т.к. $\frac{14}{15} < \frac{15}{16}$ и $\frac{3}{4} > 0$, то $\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$.

7) $\left(4\sqrt{3}\right)^{2/5}$ и $\left(3\sqrt{4}\right)^{2/5}$. Решение: т.к. $4\sqrt{3} > 3\sqrt{4}$; $\frac{2}{5} > 0$, то $\left(4\sqrt{3}\right)^{2/5} > \left(3\sqrt{4}\right)^{2/5}$

8) $\left(2\sqrt[3]{6}\right)^{-0,2}$ и $\left(6\sqrt[3]{2}\right)^{-0,2}$. Решение: т.к. $2\sqrt[3]{6} < 6\sqrt[3]{2}$ и $-0{,}2 < 0$, то $\left(2\sqrt[3]{6}\right)^{-0,2} > \left(6\sqrt[3]{2}\right)^{-0,2}$.

126. 1) $y = x^3$ ($x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$); $y = x^{\frac{1}{3}}$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$). См. рис. 6.

2) $y = x^4$ ($x \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$); $y = x^{\frac{1}{4}}$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$). См. рис. 7.

3), 4) аналогично 1), 2).

127. Указание: $1 - \pi < 1 - \sqrt{2} < 0$.

128. 1) $y = x^{\pi} + 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 1$). Указание: сдвиньте график функции $y = x^{\pi}$ на одну единицу вверх.

2) $y = x^{1/\pi} - 1$ ($x \geq 0$, $y \geq -1$). Указание: сдвиньте график функции $y = x^{1/\pi}$ на одну единицу вниз.

3) $y=(x-2)^{\pi}$ ($x\ge 2$, $y\ge 0$). Указание: сдвиньте график функции $y=x^{\pi}$ на две единицы вправо.

4) $y=(x+1)^{-\sqrt{2}}$ ($x>-1$, $y>0$). Указание: сдвиньте график функции $y=x^{-\sqrt{2}}$ на одну единицу влево.

5) $y=(x-2)^{-2}$ ($x\in \mathbf{R}\backslash\{2\}$, $y>0$). Указание: сдвиньте график функции $y=x^{-2}$ на две единицы вправо.

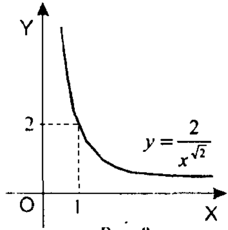

Рис. 8

6) $y=\dfrac{2}{x^{\sqrt{2}}}$ ($x>0$, $y>0$). См. рис. 8.

129. 1) См. рис. 9; 2) См. рис. 10.
3) См. рис. 11. 4) См. рис. 12.
5) См. рис. 13. 6) См. рис. 14.

130. Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y=\sqrt[5]{x}$ и $y=x^{3/5}$. Решение: первая функция определена при $x\in\mathbf{R}$, а вторая только при $x\ge 0$, таким образом пересечения могут быть только при $x\ge 0$. Решим уравнение $x^{1/5}=x^{3/5}$. Возведя в 5-ую степень, получим $x=x^3$, $x^3-x=0$, $x(x-1)(x+1)=0$, т.е. $x=0$, $x=1$, $x=-1$ (посторонний корень). Точки пересечения (0; 0) и (1; 1). Ответ: (0; 0), (1; 1).

2) Аналогично 1).

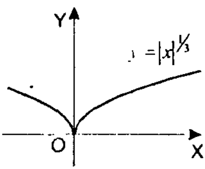

Рис. 9

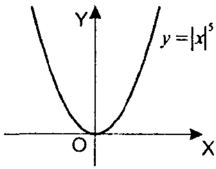

Рис. 10

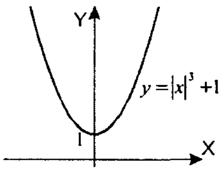

Рис. 11

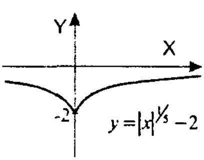

Рис. 12

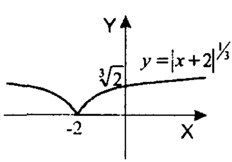

Рис. 13

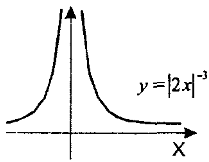

Рис. 14

§7. Взаимно обратные функции

Теорема 1

Функция обратима тогда и только тогда, когда она принимает каждое свое значение ровно один раз.

Теорема 2

Монотонная функция является обратнмой.

Теорема 3

Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$.

131. 1), 3), 4), 6) обратимы по теореме 1.
2) и 5) не обратимы по теореме 1.

132. 1) $y = 2x - 1$. Решение: выразим x через y, получим: $x = \frac{y+1}{2}$, т.е. $y = \frac{x+1}{2}$ – функция, обратная к данной.

2) $y = -5x + 4$. Решение: выразим x через y, получим: $x = \frac{4-y}{5}$, т.е. $y = \frac{4-x}{5}$ – функция, обратная к данной.

3) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$. Решение: выразим x через y, получим: $x = 3y + 2$, т.е. $y = 3x + 2$ – функция, обратная к данной.

4) $y = \frac{3x-1}{2}$. Решение: выразим x через y, получим: $x = \frac{2y+1}{3}$, т.е. $y = \frac{2x+1}{3}$ – функция, обратная к данной.

5) $y = x^3 + 1$. Решение: выразим x через y, получим: $x^3 = y - 1$, $x = \sqrt[3]{y-1}$, т.е. $y = \sqrt[3]{x-1}$ – функция, обратная к данной.

6) $y = x^3 - 3$. Решение: выразим x через y, получим: $x = \sqrt[3]{y+3}$, т.е. $y = \sqrt[3]{x+3}$ – функция, обратная к данной.

133. Указание: область определения обратной функции совпадает с областью значений данной, а область значений обратной функции совпадает с областью определения данной.

134. 1) См. рис. 15. 2) См. рис. 16.
3) Аналогично 1). 4) См. рис. 17.

135. 1) $y = -x^3$ и $y = -\sqrt[3]{x}$. Решение: область определения и область значе-

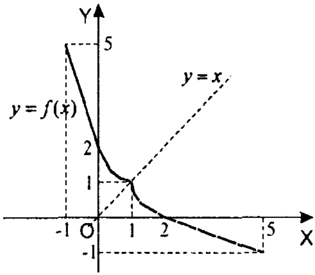

Рис. 15

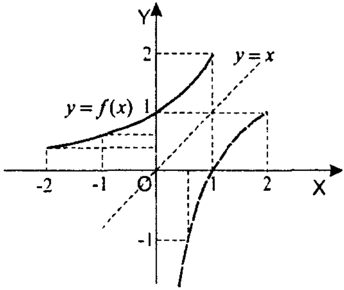

Рис. 16

ний обоих функций равна **R**. $y=-x^3 \Rightarrow x^3=-y \Rightarrow x=\sqrt[3]{-y}=-\sqrt[3]{y}$, т.е. функция $y=-\sqrt[3]{x}$ является обратной к функции $y=-x^3$. Ответ: Да.

2) $y=-x^5$ и $y=\sqrt[5]{x}$. Решение: по теореме 3, если точка $(1;-1)$ принадлежит графику функции $y=-x^5$, то точка $(-1;1)$ должна принадлежать графику функции $y=\sqrt[5]{x}$, а это не так. Ответ: Нет.

3) $y=x^{-3}$ и $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Решение: области определения и области значений обеих функций – множество $\mathbf{R}|\{0\}$. $y=x^{-3} \Leftrightarrow x^3=\dfrac{1}{y} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$, т.е. функция $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ является обратной к функции $y=x^{-3}$. Ответ: Да.

4) $y=\sqrt[5]{x^3}$ и $y=x\sqrt[3]{x^2}$. Решение: $y=\sqrt[5]{x^3} \Leftrightarrow x^3=y^5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y^5}=y\sqrt[3]{y^2}$, т.е функция $y=x\sqrt[3]{x^2}$ является обратной к функции $y=\sqrt[5]{x^3}$.

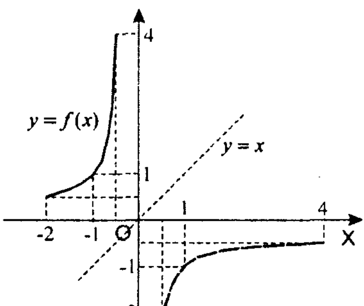

Рис. 17

136. 1) $y=-x^{1/2}$. Решение: функция определена при $x \geq 0$, при этом $y \le 0$. $x^{1/2} = -y$; $x = (-y)^2$, то есть $y = (-x)^2$ при $x \le 0$ является обратной функцией. Ответ: $y = x^2$, $x \le 0$.

2) $y = -x^{3/5}$. Решение: область определения и множество значений функции – все множество **R**. $y = -x^{3/5} \Leftrightarrow x = -y^{5/3}$, т.е. функция $y = -x^{5/3}$ является обратной к данной. Ответ: $y = -x^{5/3}$.

3) $y = x^{3/2}$. Решение: область определения и множество значений функции: $y \ge 0$, $x \ge 0$. $y = x^{3/2} \Leftrightarrow x = y^{2/3}$, т.е. функция $y = x^{2/3}$ является обратной к данной при $x \ge 0$. Ответ: $y = x^{2/3}$, $x \ge 0$.

4) $y = -x^{1/3}$. Решение: область определения и множество значений функции – все множество **R**. $y = -x^{1/3} \Leftrightarrow x = -y^3$, т.е. функция $y = -x^3$ является обратной к данной.

137. 4) См. рис. 18; 5) См. рис. 19.
6) См. рис. 20; 7) См. рис. 21.
8) См. рис. 22.

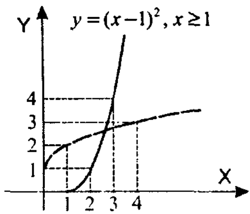

Рис. 18

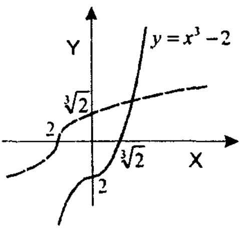

Рис. 19

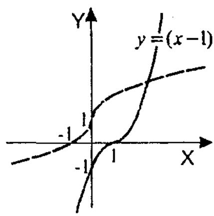

Рис. 20

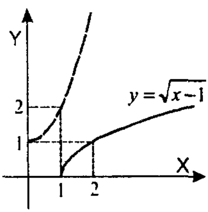

Рис. 21

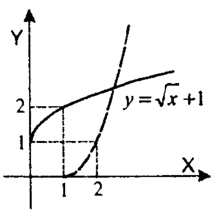

Рис. 22

§8. Равносильные уравнения и неравенства

Определение

Уравнения (неравенства), имеющие одинаковое множество корней (решений), называются *равносильными*.

138. 1) $(x+7)\cdot 3=2x+14$. Решение: $3x+21=2x+14$; $x=-7$. Ответ: $x=-7$.

2) $x^2+\frac{1}{x^2-4}=4+\frac{1}{x^2-4}$. Решение О.О.У. – $x\neq\pm2$. Домножим обе части уравнения на x^2-4, получим: $x^2(x^2-4)+1=4(x^2-4)+1$; $x^2=4$, $x=\pm2$ – не удовлетворяют О.О.У. Ответ: решений нет.

3) $\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{1-2x}{x^2-1}$. Решение: О.О.У. – $x\neq\pm1$. Домножим обе части уравнения на x^2-1, получим $x-2=1-2x$; $3x=3$, $x=1$ (не удовлетворяет О.О.У.). Ответ: решений нет.

4) $\frac{5x-15}{(x-3)(x+2)}=\frac{2}{x+2}$. Решение: О.О.У. – $x\neq3, x\neq-2$. Домножим обе части уравнения на $(x-3)(x+2)$, получим: $5x-15=2(x-3)$; $3x=9$, $x=3$ (не удовлетворяет условию $x\neq3$). Ответ: решений нет.

139. 1) $3x-7=5x+5$ и $2x+12=0$. Решение: уравнения равносильны, т.к. оба имеют один корень $x=-6$.

2) $\frac{1}{5}(2x-1)=1$ и $\frac{3x-1}{8}=1$. Решение: уравнения равносильны, т.к. оба имеют один корень $x=3$.

3) x^2-3x+2 и x^2+3x+2. Решение: корни первого уравнения 1 и 2, а корни второго уравнения –1 и –2, т.е. уравнения не равносильны. Ответ: нет.

4) Указание: $x=5$ не является корнем второго уравнения.

5) Указание: $x=-1$ не является корнем второго уравнения.

6) Указание: оба уравнения не имеют корней.

140. 1), 2) Равносильны.

3) Указание: первое неравенство равносильно неравенству $(x-5)(x+1)<0$.

4) Указание: подставьте в неравенства $x=-2$.

141. 1) Указание: корни второго уравнения $x=3$ и $x=2$, следовательно второе уравнение является следствием первого.

2) Указание: корни второго уравнения $x=1$ и $x=2$.

142. 1) $\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x-1}=\frac{4x}{x^2-1}$. Решение: О.О.У – $x\neq\pm1$. Домножим обе части на $x^2-1\neq 0$, тогда $x(x-1)+2x(x+1)=4x$, $3x^2-3x=0$, $3x(x-1)=0$, откуда $x=0$ и $x=1$ – посторонний корень. Ответ: $x=0$.

2) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{2}{x}=\frac{1}{x-2}$. Решение: О.О.У – $x\neq 2, x\neq 0$. Домножим обе части на $(x-2)\cdot x$, получим: $(x-1)x-2(x-2)=x$; $x^2-4x+4=0$. Откуда $x=2$, что не удовлетворяет условию $x\neq 2$. Ответ: решений нет.

3) Указание: $x=5$ – корень, если $x\neq 5$, то можно сократить обе части на $x-5$.

4) Указание: сократите обе части на $x^2+1\neq 0$ при всех x.

143. 1) $\frac{x+3}{2+x^2}<3$. Решение: $\frac{x+3}{2+x^2}-3=\frac{x+3-6-3x^2}{2+x^2}=\frac{-3x^2+x-3}{2+x^2}$,

т.е. $\frac{3x^2-x+3}{2+x^2}>0$. $3x^2-x+3>0$ при всех $x\in\mathbf{R}$ (т.к. $D<0$), значит неравенство выполняется при всех x. Ответ: $x\in\mathbf{R}$.

2) $\frac{x-2}{5-x}>1$. Решение: перепишем неравенство в виде: $\frac{x-2}{5-x}-1>0$; $\frac{x-2-5+x}{5-x}>0$; $\frac{2x-7}{5-x}>0$. Т.е. неравенство равносильно системе: $\begin{cases}2x-7>0\\5-x>0\end{cases}$ либо $\begin{cases}2x-7<0\\5-x<0\end{cases}$. Из первой системы $3{,}5<x<5$, вторая система решений не имеет. Ответ: $3{,}5<x<5$.

144. 1) Указание: уравнение $|2x-1|=3$ равносильно совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l}2x-1=3\\2x-1=-3.\end{array}\right.$

2) Указание: домножьте обе части первого уравнения на 6.

145. 1)–4) Уравнения равносильны.

146. 1) Уравнения $|x|=\sqrt{5}$ и $\sqrt{x^2}=\sqrt{5}$ равносильны.

2) Указание: оба уравнения не имеют корней.

147. Указание: О.О.У – $x\neq\pm\frac{1}{3}$, домножьте обе части на $9x^2-1\neq 0$, аналогично задаче 142 п.1).

148. 1) Указание: О.О.У – $x\neq\pm 1$, домножьте обе части на x^2-1, аналогично задаче 142 п.1).

2) Указание: О.О.У – $x \neq \pm 2$, домножьте обе части на x^2-4, аналогично задаче 142 п.1).

149. 1) $x^3-3x^2+2x-6>2x^3-x^2+4x-2$. Решение:

$x^3-3x^2+2x-6-(2x^3-x^2+4x-2)=x^3+2x^2+2x+4$, т.е. исходное неравенство равносильно неравенству $x^3+2x^2+2x+4>0$; $x^2(x+2)+2(x+2)>0$, $(x^2+2)(x+2)>0$, т.к. $x^2+2>0$, то $x+2>0$, $x>-2$. Ответ: $x>-2$.

2) $x^3-3x^2-4x+12>-3x^3+x^2+12x-4$. Решение:

$x^3-3x^2-4x+12-(-3x^3+x^2+12x-4)=4x^3-4x^2-16x+16=$

$=4(x^2(x-1)-4(x-1))=4(x^2-4)(x-1)=4(x-2)(x+2)(x-1)$. Т.е. исходное неравенство равносильно неравенству $4(x-2)(x+2)(x-1)>0$. Решая его, получаем $x>2$ и $-2<x<1$. Ответ: $-2<x<1$, $x>2$.

150. 1) $(x-3)^{x^2-x-2}=1$. Решение: данное уравнение равносильно совокупности $x-3=1$ или $x^2-x-2=0$ и $x-3\neq 0$. Из первого уравнения получаем $x=4$, из второго $x=-1$ и $x=2$. Ответ: $x=-1$, $x=2$, $x=4$.

2) $(x^2-x-1)^{x^2-1}=1$. Решение: данное уравнение равносильно совокупности $x^2-x-1=1$ или $\begin{cases} x^2-1=0 \\ x^2-x-1\neq 0 \end{cases}$, откуда $x=\pm 1$ или $x=2$.

Ответ: $x=\pm 1$, $x=2$.

3) $(x+3)^{x^2-4}=(x+3)^{-3x}$. Решение: $x=-3$ – корень. При $x\neq -3$ разделим обе части уравнения на $(x+3)^{-3x}$, получим $(x+3)^{x^2+3x-4}=1$. Откуда $x+3=1$ или $x^2+3x-4=0$ и $x+3\neq 0$, т.е. $x=-2$, $x=1$, $x=4$.

Ответ: $x=-3$, $x=-2$, $x=1$, $x=4$.

4) Аналогично 3).

§9. Иррациональные уравнения

152. 1) $\sqrt{x+1}=3$. Решение: возведем обе части в квадрат: $x+1=9$, $x=8$.

2) $\sqrt{x-2}=5$. Решение: возведем обе части в квадрат: $x-2=25$, $x=27$.

3) $\sqrt{4+x}=\sqrt{2x-1}$. Решение: возведем обе части в квадрат: $4+x=2x-1$, $x=5$.

153. Указание: возведите обе части уравнения в куб.

154. 1) $x+1=\sqrt{1-x}$. Решение: О.О.У – $x\le 1$. Правая часть неотрицательна, поэтому $x+1\ge 0$, т.е. $x\ge -1$. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим: $x^2+2x+1=1-x$; $x^2+3x=0$, откуда $x=0$ и $x=-3$ (не удовлетворяет условию $x\ge -1$). Ответ: $x=0$.

2) $x=1+\sqrt{x+11}$. Решение: О.О.У – $x\ge 11$. Перепишем уравнение в виде $x-1=\sqrt{x+11}$. Правая часть неотрицательна, поэтому $x-1\ge 0$, т.е. $x\ge 1$. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим $x^2-2x+1=x+11$; $x^2-3x-10=0$, $x_1=5$, $x_2=-2$ – не удовлетворяет условию $x\ge 1$. Ответ: $x=5$.

3), 4) Указание: возведите обе части уравнения в квадрат.

155. 1) $\sqrt{x}-x=-12$. Решение: О.О.У – $x\ge 0$. Перепишем уравнение в виде: $\sqrt{x}=x-12$. Т.к. левая часть уравнения не отрицательна, то $x\ge 12$. Возведем в квадрат: $x=x^2-24x+144$; $x^2-25x+144=0$. Отсюда $x=16$ и $x=9$ (не удовлетворяет условию $x\ge 12$). Ответ: $x=16$.

2) Указание: перепешите уравнение в виде $\sqrt{x}=x-2$, возведите в квадрат.

3) Аналогично 4).

4) $\sqrt{6+x-x^2}=1-x$. Решение: О.О.У – $6+x-x^2\ge 0$, т.е. $-2\le x\le 3$. Т.к. левая часть неотрицательна, то $1-x\ge 0$, т.е. $x\le 1$. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим $6+x-x^2=1-2x+x^2$, $2x^2-3x-5=0$, откуда $x=-1$ и $x=\dfrac{5}{2}$ – не удовлетворяет условию $x\le 1$. Ответ: $x=-1$.

156. 1) Аналогично 4).

2) Аналогично 3).

3) $\sqrt{15+x}+\sqrt{3+x}=6$. Решение: О.О.У – $\begin{cases}15+x\ge 0\\ 3+x\ge 0\end{cases}$, т.е. $x\ge -3$. Т.к. обе части уравнения неотрицательны, возведем их в квадрат, получим:

$18+2x+2\sqrt{x^2+18x+45}=36$; $\sqrt{x^2+18x+45}=9-x$. Т.к. левая часть неотрицательна, то $x\le 9$. Возведем еще раз обе части уравнения в квадрат, получим $x^2+18x+45=81-18x+x^2$, $36x=36$, $x=1$. Ответ: $x=1$.

4) $\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}=1$. Решение: О.О.У – $\begin{cases}3-2x\ge 0\\ 1-x\ge 0\end{cases}$, т.е. $x\le 1$. Перепише уравнение в виде: $\sqrt{3-2x}=1+\sqrt{1-x}$, т.к. обе части уравнения неотрица-

тельны, возведем в квадрат, получим: $3-2x=2-x+2\sqrt{1-x}$, $1-x=2\sqrt{1-x}$. Левая часть неотрицательна, возведем в квадрат еще раз, получим: $(1-x)^2=4(1-x)$, откуда $x=1$ и $x=-3$. Ответ: $x=1$, $x=-3$.

157. 1) $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^3+x^2}=0$. Решение $\sqrt{x^2+2}\geq 0$, $\sqrt{x^3+x^2}\geq 0$, следовательно равенство возможно только если $x^2+2=0$ и $x^3+x^2=0$. Но $x^2+2\geq 2$, следовательно решений нет. Ответ: решений нет.

2) Указание: возведите уравнение в куб.

158. 1) $\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}=2$. Решение: О.О.У $-5\leq x\leq 5$. Т.к. правая часть неотрицательна, то $\sqrt{5-x}\geq\sqrt{5+x}$, т.е. $5-x\geq 5+x$, $x\leq 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим $10-2\sqrt{25-x^2}=4$, $\sqrt{25-x^2}=3$, откуда $x=-4$ и $x=4$ (не удовлетворяет условию $x\leq 0$). Ответ: $x=-4$.

2) $\sqrt{12+x}-\sqrt{1-x}=1$. Решение: О.О.У $-12\leq x\leq 1$. Т.к. правая часть неотрицательна, то $\sqrt{12+x}\geq\sqrt{1-x}$, т.е. $12+x\geq 1-x$, $x\geq -5{,}5$. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим $12+2x-2\sqrt{(12+x)(1-x)}=0$; $\sqrt{12-11x-x^2}=6$, откуда $x^2+11x+24=0$, $x=-3$ и $x=-8$ (не удовлетворяет условию $x\geq -5{,}5$). Ответ: $x=-3$.

3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=0$. Решение: т.к. значение квадратного корня неотрицательно, то равенство верно только при $x-2=x+6=0$, что неверно. Ответ: решений нет.

4) Аналогично 1), 2).

159. 1) $\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x}=\sqrt{x+4}$. Решение: О.О.У $-4\leq x\leq \frac{1}{2}$. Перепишем уравнение в виде: $\sqrt{1-2x}=\sqrt{13+x}+\sqrt{x+4}$. Обе части неотрицательны, возведем в квадрат: $1-2x=2x+17+2\sqrt{x^2+17x+52}$; $-8-2x=\sqrt{x^2+17x+52}$. При $x\leq -4$ (т.е. $-8-2x\geq 0$) возведем обе части уравнения в квадрат, получим: $64+32x+4x^2=x^2+17x+52$; $3x^2+15x+12=0$; $x^2+5x+4=0$. Т.е. $x=-1$ (посторонний корень) и $x=-4$. Ответ: $x=-4$.

2) Аналогично 1).

160. 1), 2) Указание: возведите обе части уравнения в куб.

3) Указание: при $x\geq 0$ возведите обе части уравнения в квадрат.

4) Указание: возведите обе части уравнения в квадрат.

161. 1) $\sqrt[3]{x^3-2}=x-2$. Решение: О.О.У – $x\in\mathbf{R}$. Возведем уравнение в куб, получим $x^3-2=x^3-6x^2+12x-8$; $6x^2-12x+6=0$, $6(x-1)^2=0$, $x=1$. Ответ: $x=1$.

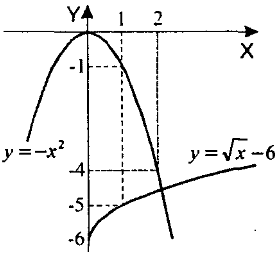

Рис. 23

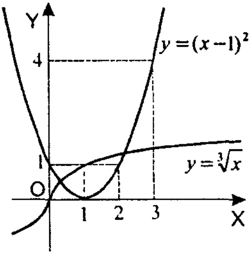

Рис. 24

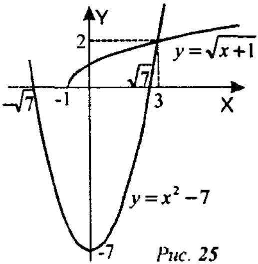

Рис. 25

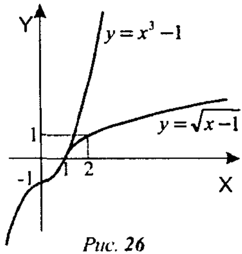

Рис. 26

2) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2$. Решение: возведем уравнение в куб, получим: $x^3-5x^2+16x-5=x^3-8-6x^2+12x$; $x^2+4x+3=0$, отсюда $x=-1$ и $x=-3$. Ответ: $x=-1$, $x=-3$.

162. 1) Один корень (см. рис. 23); 2) Два корня (см. рис. 24);
3) Один корень (см. рис. 25); 4) Один корень (см. рис. 26).

163. 1) $\sqrt{4x+2\sqrt{3x^2+4}}=x+2$. Решение: при $x\geq-2$ возведем в квадрат, получим: $2\sqrt{3x^2+4}=x^2+4$. Возведем в квадрат еще раз: $4(3x^2+4)=(x^2+4)^2$; $x^4-4x^2=0$, отсюда $x=0$ и $x=\pm2$. Ответ: $x=0$, $x=-2$, $x=2$.

2) $3-x=\sqrt{9-\sqrt{36x^2-5x^4}}$. Решение: при $x\leq3$ возведем обе части уравнения в квадрат: $9-6x+x^2=9-\sqrt{36x^2-5x^4}$; $\sqrt{36x^2-5x^4}=6x-x^2$. $6x-x^2\geq0$ при $0\leq x\leq6$, с учетом условия $x\leq3$ получим $0\leq x\leq3$. Возведем в квадрат еще раз: $36x^2-5x^4=36x^2-12x^3+x^4$; $6x^4-12x^3=0$; $6x^3(x-2)=0$, откуда $x=2$, $x=0$. Оба корня удовлетворяют области определения уравнения. Ответ: $x=0$, $x=2$.

3) $\sqrt{x^2+3x+12}-\sqrt{x^2+3x}=2$. Решение: домножим обе части уравнения

на $\sqrt{x^2+3x+12}+\sqrt{x^2+3x}$, получим:

$(x^2+3x+12)-(x^2+3x)=2\left(\sqrt{x^2+3x+12}+\sqrt{x^2+3x}\right)$;

$\sqrt{x^2+3x+12}+\sqrt{x^2+3x}=6$. Сложим данное уравнение с исходным:

$2\sqrt{x^2+3x+12}=8$; $\sqrt{x^2+3x+12}=4$; $x^2+3x+12=16$; $x^2+3x-4=0$,

$x=1$, $x=-4$. Оба корня удовлетворяют О.О.У. Ответ: $x=-4$, $x=1$.

4) Аналогично 3).

164. 1) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-2}=a$. Решение: О.О.У – $x\geq 2$. При $a<0$ решений нет, при $a\geq 0$ возведем обе части уравнения в квадрат, получим $(x+1)(x-2)=a^2$,

$x^2-x-(2+a^2)=0$, $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{9+4a^2}}{2}$. Так как $\sqrt{9+4a^2}\geq 3$, то

$x_1=\dfrac{1+\sqrt{9+4a^2}}{2}\geq\dfrac{1+3}{2}=2$, т.е. удовлетворяет области определения, а

$x_2=\dfrac{1-\sqrt{9+4a^2}}{2}\leq\dfrac{1-3}{2}=-1$ – не удовлетворяет области определения

уравнения. Ответ: при $a<0$ корней нет, при $a\geq 0$ $x=\dfrac{1+\sqrt{9+4a^2}}{2}$.

2) Аналогично 1).

§10. Иррациональные неравенства

Свойства:

1. $a,b\geq 0,\ p\geq 0,\ a>b\Rightarrow a^p>b^p$.

2. $a,b\leq 0,\ p\geq 0,\ a>b\Rightarrow a^p<b^p$.

165. 1) $\begin{cases}3-x\leq 2\\2x+1\leq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\2x\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\x\leq 1{,}5\end{cases}\Leftrightarrow 1\leq x\leq 1{,}5$. Ответ: $1\leq x\leq 1{,}5$.

2) $\begin{cases}x^2-1\geq 0\\x>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\geq 1\\x>2\end{cases}\Leftrightarrow x>2$. Ответ: $x>2$.

3) Указание: первое неравенство равносильно $-3\leq x\leq 3$.

166. 1) $\sqrt{x}>2$. Решение: О.О.Н. $x\geq 0$. $(\sqrt{x})^2>2^2$; $x>4$. Ответ: $x>4$.

2) $\sqrt{x}<3$. Решение: О.О.Н. $x\geq 0$. Значит $0\leq x<3^2$. Ответ: $0\leq x<9$.

3) $\sqrt[3]{x}\geq 1$. Решение: О.О.Н. $x\geq 0$. $(\sqrt[3]{x})^3\geq 1$; $x\geq 1$. Ответ: $x\geq 1$.

4), 5) Аналогично 6).

6) $\sqrt{2x}\leq 2$. Решение: О.О.Н. $x\geq 0$. Обе части неравенства положитель-

ны, можно возвести в квадрат, получим: $2x \le 4$, $x \le 2$. Ответ: $0 \le x \le 2$

167. 1) $\sqrt{x-2} > 3$. Решение: ООН $x \ge 2$. Т.к. обе части неравенства положительны, возведем в квадрат, получим $x-2>9$, $x>11$. Ответ: $x>11$.

2) $\sqrt{x-2}<1$. Решение: ООН $x \ge 2$. $x-2<1$; $x<3$. С учетом ООН $2 \le x < 3$

3) $\sqrt{3-x}<5$. Решение: ООН $x \le 3$. $3-x<25$; $x>-22$. С учетом ООН $-22<x\le 3$.

4) $\sqrt{4-x}>3$. Решение: ООН $x \le 4$. $4-x>9$. С учетом ООН $x<-5$

5)–8) Аналогично 1)–4).

168. 1) $\sqrt{x^2-1}>1$. Решение: ООН $x \ge 1$ или $x \le -1$. Т.к. обе части неравенства положительны, возведем в квадрат, получим $x^2-1>1$, $x^2>2$, т.е. $x>\sqrt{2}$ или $x<-\sqrt{2}$. Ответ: $x>\sqrt{2}$, $x<-\sqrt{2}$.

2) Аналогично 4).

3) Аналогично 1).

4) $\sqrt{25-x^2}<4$. Решение: область определения неравенства $-5 \le x \le 5$. Т.к. обе части неравенства положительны, возведем в квадрат, получим $25-x^2<16$, $x^2>9$, т.е. $x>3$ или $x<-3$. С учетом области определения получаем $-5 \le x < -3$, $3<x\le 5$. Ответ: $-5 \le x<-3$, $3<x\le 5$.

169. 1) $\sqrt{2x^2+3x-2}>0$. Решение: неравенство выполнено, если $2x^2+3x-2>0$, т.е. $(x+2)(2x-1)>0$. Ответ: $x<-2$, $x>0{,}5$.

2), 5), 6) Указание: неравенство выполнено при всех допустимых x.

3) $\sqrt{6x-x^2}<\sqrt{5}$. Решение: область определения неравенства $0 \le x \le 6$. Т.к. обе части неравенства неотрицательны, возведем в квадрат, получим: $6x-x^2<5$; $x^2-6x+5>0$; $(x-1)(x-5)>0$, т.е. $x>5$ или $x<1$. С учетом области определения находим $0 \le x<1$, $5<x\le 6$.

Ответ: $0 \le x < 1$, $5<x\le 6$.

4) Аналогично 3).

170. 1), 2), 3), 6) Указание: с учетом области определения возведите неравенства в квадрат.

4) $\sqrt{3x-2}>x-2$. Решение: ООН $x \ge \frac{2}{3}$. Если $x-2<0$, то неравенство выполнено, т.е. $\frac{2}{3} \le x < 2$ является решением неравенства. Если $x-2 \ge 0$, возведем обе части неравенства в квадрат, получим: $3x-2>x^2-4x+4$; $x^2-7x+6<0$, $1<x<6$. С учетом области определения и условия $x \ge 2$ получаем $2 \le x < 6$. Объединяя решения, получим

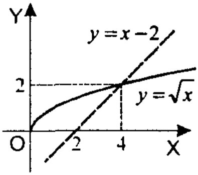

Рис. 27

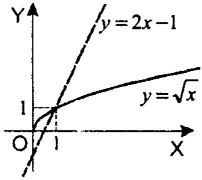

Рис. 28

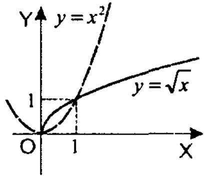

Рис. 29

$2/3 \le x < 6$. Ответ: $2/3 \le x < 6$.

5) Аналогично 4).

171. 1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\sqrt{x-1}$. Решение: область определения неравенства $x \ge 1$. Перепишем неравенство в виде $\sqrt{x+1}<\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$. Т.к. обе части неравенства неотрицательны, возведем в квадрат: $x+1<2x-1+2\sqrt{x^2-x}$; $2-x<2\sqrt{x^2-x}$. При $x>2$ данное неравенство выполнено, т.к. $2-x<0$. При $1 \le x \le 2$ возведем обе части неравенства в квадрат еще раз, получим: $x^2-4x+4<4x^2-4x$, $3x^2>4$, откуда $x<-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (не удовлетворяет области определения) и $x>\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Объединяя полученные ответы, находим $x>\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

2) Аналогично 1).

172. 4) См. рис. 27.

173. 3) См. рис. 28; 4) См. рис. 29.

174. 1) $\sqrt{x-1}<a$. Решение: область определения неравенства $x \ge 1$.

При $a \le 0$, очевидно, решений нет.

При $a>0$ возведем обе части неравенства в квадрат, получим $x-1<a^2$, т.е. $x<a^2+1$. С учетом области определения $1 \le x < a^2+1$.

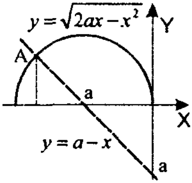

Рис. 30

Ответ: при $a \le 0$ решений нет, при $a>0$ $1 \le x < a^2+1$.

2) $\sqrt{2ax-x^2} \ge a-x$, если $a \le 0$. Решение: I способ – аналогично 1).

II способ – графически. Рассмотрим график функции $y=\sqrt{2ax-x^2}$; $y^2=2ax-x^2$; $y^2+(x-a)^2=a^2$. Это уравнение верхней полуокружности (т.к. $y \ge 0$) с центром в точке (a; 0) и радиусом $|a|$ (см. рис. 30).

Координаты точки A легко найти из геометрических соображений: $A=\left(a+\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{|a|\sqrt{2}}{2}\right)$. Т.е. решение $a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\le x\le 0$. Ответ: при $a=0$ $x=0$, при $a<0$ $a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\le x\le 0$.

Упражнения к главе II

177. 1) $0{,}3^{\pi}<0{,}3^{3{,}1415}<3^{2/3}<3^{0{,}5}$;

2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}<\sqrt{2^{\pi}}<1{,}9^{\pi}<\pi^{\pi}$;

3) $5^{-2{,}1}<5^{-2}<5^{-0{,}7}<5^{\frac{1}{3}}$;

4) $\pi^{-\frac{2}{3}}<\sqrt{2}^{-\frac{2}{3}}<1{,}3^{-\frac{2}{3}}<0{,}5^{-\frac{2}{3}}$.

178. 1) См. рис. 31.

2) См. рис. 32.

179. 1) $y=\sqrt[3]{1-x}$. Область определения $x\in\mathbf{R}$.

2) $y=\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{5}}$. Решение: $2-x^2\ge 0$, т.е. $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$.

3) $y=\left(3x^2+1\right)^{-2}$. Решение: $3x^2+1\ne 0$, что верно при всех $x\in\mathbf{R}$.

4) $y=\sqrt{x^2-x-2}$. Решение: $x^2-x-2\ge 0$, т.е. $x\le -1$ и $x\ge 2$.

180. 1) $y=0{,}5x+3$. Выразим x через y: $x=2y-6$, т.е. обратная функция $y=2x-6$. Область определения и множество значений – множество $\mathbf{R}$.

2) $y=\frac{2}{x-3}$. Выразим x через y: $x=\frac{2}{y}+3$, т.е. обратная функция $y=\frac{2}{x}+3$. Область определения $x\in\mathbf{R}|\{0\}$, множество значений – $y\in\mathbf{R}|\{3\}$.

3) $y=(x+2)^3$. Выразим x через y: $x=\sqrt[3]{y}-2$, т.е. обратная функция

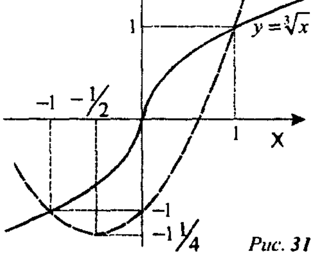

Рис. 31

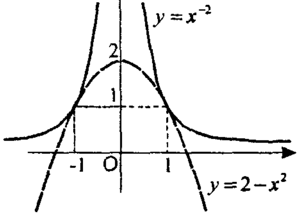

Рис. 32

$y=\sqrt[3]{x}-2$. Область определения и множество значений – множество **R**.

4) $y=x^3-1$. Выразим x через y: $x=\sqrt[3]{y+1}$, т.е. обратная функция $y=\sqrt[3]{x+1}$. Область определения и множество значеиий – множество **R**.

181. См. задачу 134.

182. 1)–2) Ответ: данные уравнения равносильны.

183. 1), 2), 5), 6) Указание: при x, удовлствворяющих области определения уравнения, возведнте обе части уравнения в квадрат.

3), 4) Указаиие: при x, удовлствворяющих области определения и $x\geq 0$, возведите обе части уравиения в квадрат.

185. 1), 2) Функции взаимообратные.

3), 4) Функции не являются взаимообратными.

186. 1) $y=2+\sqrt{x+2}$. Решеиие: область определения данной функции $x\geq -2$, множество значений $y\geq 2$. Т.е. область определения обратной функции $x\geq 2$, множество значений $y\geq -2$. Кроме того, $y-2=\sqrt{x+2}$; $(y-2)^2=x+2$, $x=(y-2)^2-2$, т.е. обратная функция $y=(x-2)^2-2$ при $x\geq 2$. Ответ: $y=(x-2)^2-2$ при $x\geq 2$.

2) $y=2-\sqrt{x+4}$. Решение: выразим x через y: $x=(2-y)^2-4$; $x=y^2-4y$. Обратиая функция $y=x^2-4x$. ООФ $x\leq 2$, множество значений $y\geq -4$.

3) $y=\sqrt{3-x}-1$. Решение: выразим x через y: $x=3-(y+1)^2$; $x=-y^2-2y+2$ Т.е. обратная функция $y=-x^2-2x+2$. ООФ $x\geq -1$, мн.знач. $y\leq 3$.

4) $y=\sqrt{1-x}+3$. Решение: выразим x через y: $x=1-(y-3)^2$; $x=-y^2+6y-8$. Т.е. обратная функция $y=-x^2+6x-8$. ООФ $x\geq 3$, мн.знач. $y\leq 1$.

187. Указание: преобразуйте уравнение $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$ и возведите в квадрат, аналогнчно задаче 159.

188. 1) $\sqrt{x+4}-3\sqrt[4]{x+4}+2=0$. Решение: О.О.У. $x\geq -4$. Сделаем замену $u=\sqrt[4]{x+4}$, тогда $u^2-3u+2=0$, т.е. $u=1$ или $u=2$; $\sqrt[4]{x+4}=1$ или $\sqrt[4]{x+4}=2$, откуда $x=-3$, $x=12$. Ответ: $x=-3$, $x=12$.

2) $\sqrt{x-3}=3\sqrt[4]{x-3}+4$. Решение: О.О.У. $x\geq 3$. Сделаем замену $u=\sqrt[4]{x-3}$, тогда $u^2-3u-4=0$, т.е. $u=4$ или $u=-1$; $\sqrt[4]{x-3}=4$ или $\sqrt[4]{x-3}=-1$ (что невозможно), откуда $x=259$. Ответ: $x=259$.

3) аналогично 1).

4) Указание: сделайте замену $u=\sqrt{x^2+3x}\ge 0$, тогда $u^2+u-2=0$.

5) $\dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}=2$. Решение: О.О.У. $-3\le x\le 3$, $x\ne 0$. Сделаем замену $\sqrt{3-x}=u\ge 0$, $\sqrt{3+x}=v\ge 0$. Тогда $\dfrac{u+v}{u-v}=2$, кроме того, $u^2+v^2=6$. Из первого уравнения $u=3v$, тогда $10v^2=6$, $v^2=3/5$, т.е. $3+x=3/5$, $x=-2{,}4$. Ответ: $x=-2{,}4$.

6) $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}}=1$. Решение: О.О.У. $x\ge -2$. Заметим, что $x+6-4\sqrt{x+2}=\left(\sqrt{x+2}-2\right)^2$; $11+x-6\sqrt{x+2}=\left(\sqrt{x+2}-3\right)^2$; $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}}=\left|\sqrt{x+2}-2\right|+\left|\sqrt{x+2}-3\right|$. Если $-2\le x<2$ тогда $2-\sqrt{x+2}+3-\sqrt{x+2}=1$, $2=\sqrt{x+2}$, $x=2$ – не удовлетворяет условию $-2\le x<2$. Если $2\le x<7$, тогда $\sqrt{x+2}-2+3-\sqrt{x+2}=1$ – верное равенство, т.е. $2\le x<7$ – решение. Если же $x\ge 7$, тогда $\sqrt{x+2}-2+\sqrt{x+2}-3=1$, $\sqrt{x+2}=3$, $x=7$. Ответ: $2\le x\le 7$.

189. 1) $\sqrt{x+1}<x-1$. Решение: О.О.Н. $x\ge -1$. При $x<1$ неравенство не верно, при $x\ge 1$ обе части неравенства неотрицательны, можно возвести в квадрат. Тогда $x+1<x^2-2x+1$; $x^2-3x>0$, откуда $x>3$ или $x<0$ (не удовлетворяет условию $x\ge 1$). Ответ: $x>3$.

2) $\sqrt{1-x}>x+1$. Решение: О.О.Н. $x\le 1$. При $x\le -1$ неравенство выполнено. При $-1\le x\le 1$ обе части неравенства неотрицательны, возведем в квадрат, получим: $x^2+3x<0$. Отсюда $-3<x<0$, с учетом условия $-1\le x\le 1$ получаем $-1\le x<0$. Объединяя оба ответа, окончательно получим $x<0$. Ответ: $x<0$.

3) $\sqrt{3x-2}>x-2$. Решение: О.О.Н. $x\ge\dfrac{2}{3}$. При $\dfrac{2}{3}\le x<2$ неравенство выполнено. При $x\ge 2$ обе части неравенства неотрицательны, возведем в квадрат. Получим $3x-2>x^2-4x+4$; $x^2-7x+6<0$; $1<x<6$, с учетом условия $x\ge 2$, получаем $2\le x<6$. Объединим оба ответа, окончательно получим $2/3\le x<6$. Ответ: $2/3\le x<6$.

4) $\sqrt{2x+1}\le x+1$. Решение: О.О.Н. $x\ge -0{,}5$. При $x\ge -0{,}5$ обе части неравенства неотрицательны, возведем в квадрат, получим:

$2x+1 \le x^2+2x+1$; $x^2 \ge 0$, что верно при любых x. Таким образом решением неравенства является вся О.О.Н. Ответ: $x \ge -0,5$.

190. 1) Указание: решите неравенство $x^2-13x+40 \le 0$ с учетом области определения.

2) Указание: при $x<-4$ неравенство верно, при $x>-4$ возведите обе части неравенства в квадрат.

3) Указание: возведите обе части неравенства в квадрат.

4) $\sqrt{3-x} < \sqrt{7+x}+\sqrt{10+x}$. Решение: область определения неравенства $-7 \le x \le 3$. Заметим, что функция $y=\sqrt{3-x}$ убывает (строго), а функция $y=\sqrt{7+x}+\sqrt{10+x}$ возрастает (строго). Следовательно графики пересекаются в единственной точке (см. рис. 33). Ее легко угадать – (–6; 3). Значит неравенство верно при $-6<x\le 3$.

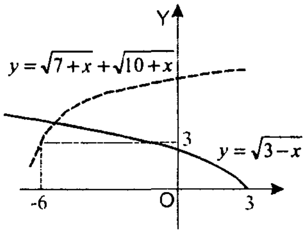

Рис. 33

Ответ: $-6<x\le 3$.

191. При различных значениях a решить неравенство:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}<a$. Решение: область определения неравенства $x \ge 6$. При $a \le 0$ неравенство не выполнено, при $a>0$ возведем обе части в квадрат, получим: $2x-8+2\sqrt{x^2-8x+12}<a^2$; $\sqrt{x^2-8x+12}<-x+4+a^2/2$. При $x \ge 4+a^2/2$ неравенство не выполнено, при $x<4+a^2/2$ можно возвести обе части в квадрат. Тогда $x^2-8x+12<x^2-(8+a^2)x+\left(4+a^2/2\right)^2$;

$a^2x<\left(4+a^2/2\right)^2-12$. Т.к. $a^2>0$, то $x<\dfrac{4+4a^2+a^4/4}{a^2}$; $x<\dfrac{16+16a^2+a^4}{4a^2}$.

С учетом области определения $x \ge 6$. Осталось выяснить, когда условие $x<4+a^2/2$ не противоречит условию $x \ge 6$. Очевидно, при $x>2$. При таких a $6 \le x < 4/a^2+4+a^2/4<4+a^2/2$.

Ответ: при $a \le 2$ решений нет, при $a>2$ $6 \le x < 4/a^2+4+a^2/4$.

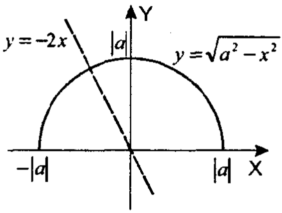

Рис. 34

2) $2x+\sqrt{a^2-x^2}>0$. Решение: область определения неравенства $|x|\le|a|$.

I способ – аналитический. Перепишем неравенство в виде $\sqrt{a^2-x^2}>-2x$, при $x\ge 0$ неравенство верно, при $x<0$ возведем в квадрат, получим $a^2-x^2>4x^2$, $5x^2<a^2$, откуда $\frac{-|a|}{\sqrt{5}}<x<0$. Совмещая оба ответа и область опрсделення, окончательно получаем $\frac{-|a|}{\sqrt{5}}<x\le|a|$. При $a>0$ – решение нет (промежуток вырожден).

II способ – графический (см. рис. 34). Точка пересечений графиков

$y=\sqrt{a^2-x^2}$ (полуокружность) и

$y=-2x$ легко находится из геометрических соображений.

Ответ: при $a\ne 0$ $\frac{-|a|}{\sqrt{5}}<x\le|a|$, при $a=0$ решений нет.

Глава III
Показательная функция

§11. Показательная функция, ее свойства и график

Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$.

Свойства: ($a > 0, b > 0$, x, x_1, x_2 – действительные числа)

1°. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$;

2°. $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$;

3°. $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1x_2}$;

4°. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

5°. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

6°. $a^x > 0$;

7°. $a^x > 1$, если $a > 1, x > 0$;

8°. $a^{x_1} < a^{x_2}$, если $a > 1, x_1 < x_2$;

9°. $a^{x_1} > a^{x_2}$, если $0 < a < 1, x_1 < x_2$.

195. 1) $1{,}7^3 > 1$;

2) $0{,}3^2 < 1$;

3) $3{,}2^{1{,}5} < 3{,}2^{1{,}6}$;

4) $0{,}2^{-3} < 0{,}2^{-2}$;

5) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\dfrac{1}{5}\right)^{1{,}4}$;

6) $3^{\pi} > 3^{3{,}14}$.

196. 1) $(0{,}1)^{\sqrt{2}} < 1$, т.к. $0{,}1 < 1$, $\sqrt{2} > 0$;

2) $(3{,}5)^{0{,}1} > 1$, т.к. $3{,}5 > 1$, $0{,}1 > 0$;

3) $\pi^{-2{,}7} < 1$, т.к. $\pi > 1$, $-2{,}7 < 0$;

4) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1{,}2} > 1$, т.к. $\dfrac{\sqrt{5}}{5} < 1$, $-1{,}2 < 0$.

197. 1) $y = 2^x$ и $y = 8$. Решение: необходимо решить уравнение: $2^x = 8$. Т.к. $8 = 2^3$, то $x = 3$. Ответ: $x = 3$.

2) $y=3^x$ и $y=\frac{1}{3}$. Решение: необходимо решить уравнение: $3^x=\frac{1}{3}$. Т.к. $3=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, то $x=-1$. Ответ: $x=-1$.

3) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y=\frac{1}{16}$. Решение: необходимо решить уравнение: $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{16}$. Т.к. $\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{4}\right)^2$, то $x=2$. Ответ: $x=2$.

4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y=9$. Решение: необходимо решить уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$. Т.к. $9=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, то $x=-2$. Ответ: $x=-2$.

199. 1) функция возрастает; 2) функция возрастает; 3) функция убывает; 4) функция возрастает.

200. 1) $x<0$; 2) $x>0$; 3) $x>1$; 4) $x<-1$.

201. 1) Указание: данный график получается из графика $y=3^x$ сдвигом на 2 единицы вниз.

2) Указание: даный график получается из графика $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ сдвигом на 3 единицы вверх.

3) См. рис. 35.

4) См. рис. 35.

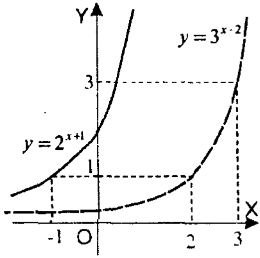

Рис. 35

202. Доказать, что графики функций $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат. Решение: для симметрии необходимо и достаточно выполнение условия: точка (x_0, y_0) принадлежит графику первой функции тогда и только тогда, когда точка $(-x_0, y_0)$ принадлежит графику второй функции. Но $2^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$, т.е. данное условие выполнено.

203. Указание: на отрезке [−1; 2] функция возрастает (строго).

204. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y=2^{|x|}$ на отрезке [−1; 1]. Решение: данная функция симметрична относительно оси орди-

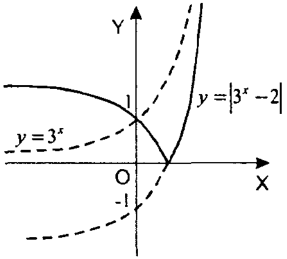

Рис. 36

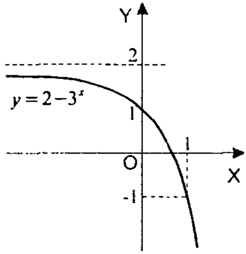

Рис. 37

нат, следовательно достаточно рассмотреть функцию $y = 2^{|x|}$ только на отрезке $[0;\ 1]$. На этом отрезке она совпадает с функцией $y=2^x$, которая возрастает (строго). Следовательно минимальное значение $y(0)=1$, а максимальное $y(1)=y(-1)=2$. Ответ: 1 и 2.

205. 1), 2) Указание: график функции $y=f(|x|)$ получается из графика функции $y=f(x), x \geq 0$ отражением относительно оси OY.
3) См. рис. 36; 4) См. рис. 37.

206. $T=1; t_1=1{,}5; t_2=3{,}5; m_0=250$. Решение: по формуле $m=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{T}}$ получаем: $m(t_1)=250\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1{,}5}{1}}\approx 88{,}42$; $m(t_2)=250\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3{,}5}{1}}\approx 22{,}12$.

207. Решение: $t=5, a=4$, где а – прирост в процентах, тогда по формуле $m(t)=\left(1+\frac{a}{100}\right)^t\cdot 4\cdot 10^5$ получаем: $m(5)=(1+0{,}04)^5\cdot 4\cdot 10^5\approx 4{,}87\cdot 10^5$.

§12. Показательные уравнения

208. 1) $4^{x-1}=1$. Решение: $1=4^0$, т.е. $4^{x-1}=4^0$, откуда $x-1=0$, $x=1$.

2) $0{,}3^{3x-2}=1$. Решение: $1=0{,}3^0$, т.е. $0{,}3^{3x-2}=0{,}3^0$, откуда $3x-2=0$, $x=\frac{2}{3}$.

3) $2^{2x}=2^{4\sqrt{3}}$. Решение: $2x=4\sqrt{3}$, откуда $x=2\sqrt{3}$.

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$. Решение: $3^{-3x}=3^2$, откуда $-3x=2$, $x=-\frac{2}{3}$.

209. 1) $27^x=\frac{1}{3}$. Решение: т.к. $27^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x}$, то $-3x=1$, $x=-\frac{1}{3}$. Ответ: $x=-\frac{1}{3}$

2) $400^x=\frac{1}{20}$. Решение: т.к. $400^x=\left(\frac{1}{20}\right)^{-2x}$, то $-2x=1$, $x=-\frac{1}{2}$. Ответ: $-\frac{1}{2}$

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=25$. Решение: т.к. $25=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$, то $x=-2$. Ответ: $x=-2$.

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$. Решение: т.к. $\frac{1}{81}=\left(\frac{1}{3}\right)^4$, то $x=4$. Ответ: $x=4$.

210. 1) $3\cdot 9^x=81$. Решение: уравнение равносильно $3\cdot 3^{2x}=3^4$, т.е. $3^{2x+1}=3^4$. Отсюда $2x+1=4$, $x=1{,}5$. Отвтет: $x=1{,}5$.

2) $2\cdot 4^x=64$. Решение: уравнение равносильно $2\cdot 2^{2x}=2^6$, т.е. $2^{2x+1}=2^6$. Отсюда $2x+1=6$, $x=2{,}5$. Ответ: $x=2{,}5$.

3) $3^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^{x-2}=1$. Решение: уравнение равносильно $3^{x+\frac{1}{2}+x-2}=3^0$. Отсюда $x+\frac{1}{2}+x-2=0$, $x=\frac{3}{4}$. Ответ: $x=\frac{3}{4}$.

4) $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=2$. Решение: $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=0{,}5^{x+7+1-2x}=0{,}5^{8-x}$, $2=0{,}5^{-1}$, поэтому $8-x=-1$, откуда $x=9$. Ответ: $x=9$.

5) $0{,}6^x\cdot 0{,}6^3=\frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$. Решение: уравнение равносильно $0{,}6^{3+x}=0{,}6^{2x-5}$. Отсюда $3+x=2x-5$, $x=8$. Ответ: $x=8$.

6) $6^{3x}\cdot\frac{1}{6}=6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$. Решение: $6^{3x}\cdot\frac{1}{6}=6^{3x}\cdot 6^{-1}=6^{3x-1}$, $6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}=6\cdot 6^{-2x}=6^{1-2x}$, т.е. $6^{3x-1}=6^{1-2x}$. Т.к. показательная функция – взаимно однозначная, то $3x-1=1-2x$, т.е. $x=0{,}4$. Ответ: $x=0{,}4$.

211. 1) $3^{2x-1}+3^{2x}=108$. Решение: $3^{2x-1}(1+3)=108$; $3^{2x-1}=27$; $3^{2x-1}=3^3$. Отсюда: $2x-1=3$, $x=2$. Ответ: $x=2$.

2) $2^{3x+2}-2^{3x-2}=30$. Решение: $2^{3x-2}\left(2^4-1\right)=30$; $2^{3x-2}=2$. Отсюда: $3x-2=1$, $x=1$. Ответ: $x=1$.

3) $2^{x+1}+2^{x-1}+2^x=28$. Решение: $2^{x-1}\left(2^2+1+2\right)=28$; $2^{x-1}=4$; $2^{x-1}=2^2$. Отсюда: $x-1=2$, $x=3$. Ответ: $x=3$.

4) $3^{x-1}-3^x+3^{x+1}=63$. Решение: $3^{x-1}-3^x+3^{x+1}=3^{x-1}(1-3+9)=7\cdot 3^{x-1}$, т.е. $7\cdot 3^{x-1}=63$; $3^{x-1}=9$; $x-1=2$, откуда $x=3$. Ответ: $x=3$.

212. 1) $5^x = 8^x$. Решение: так как $5^x > 0$, то разделим обе части на 5^x, получим: $1 = \frac{8^x}{5^x} = \left(\frac{8}{5}\right)^x$, откуда $x = 0$. Ответ: $x = 0$.

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Решение: домножим обе части на 2^x, получим: $1 = \frac{2^x}{3^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, откуда $x = 0$. Ответ: $x = 0$.

3) $3^x = 5^{2x}$. Решение: так как $5^{2x} > 0$, то разделим обе части на 5^{2x}, получим: $\frac{3^x}{5^{2x}} = \frac{3^x}{25^x} = \left(\frac{3}{25}\right)^x = 1$, откуда $x = 0$. Ответ: $x = 0$.

4) $4^x = 3^{\frac{x}{2}}$. Решение: возведем обе части в квадрат, получим $4^{2x} = 3^x$. Разделим на 3^x, получим: $\left(\frac{4^2}{3}\right)^x = 1$, откуда $x = 0$. Ответ: $x = 0$.

213. 1) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$. Решение: заменим $u = 3^x$, тогда $u^2 - 4u + 3 = 0$. Откуда $u = 3$ или $u = 1$. Т.е. $3^x = 3$, $x = 1$ или $3^x = 1$, $x = 0$. Ответ: $x = 1$, $x = 0$

2) $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$. Решение: заменим $u = 4^x$, тогда $u^2 - 17u + 16 = 0$; $u = 16$ или $u = 1$. Т.е. $4^x = 16$, $x = 2$ или $4^x = 1$, $x = 0$. Ответ: $x = 2$, $x = 0$.

3) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$. Решение: заменим $u = 5^x$, тогда $u^2 - 6u + 5 = 0$. Откуда $u = 5$ или $u = 1$. Т.е. $5^x = 5$, $x = 1$ или $5^x = 1$, $x = 0$. Ответ: $x = 1$, $x = 0$

4) $64^x - 8^x - 56 = 0$. Решение: заменим $u = 8^x$, тогда $u^2 - u - 56 = 0$. Откуда $u = 8$ и $u = -7$. Т.е. $8^x = 8$, $x = 1$ или $8^x = -7$, т.е. корней нет. Ответ: $x = 1$

214. 1) $3^{x^2+x-12} = 1$. Решение: $3^{x^2+x-12} = 3^0$, т.е. $x^2 + x - 12 = 0$. Откуда $x = 3$, $x = -4$. Ответ: $x = 3$, $x = -4$.

2) $2^{x^2-7x+10} = 1$. Решение: $2^{x^2-7x+10} = 2^0$, т.е. $x^2 - 7x + 10 = 0$. Откуда $x = 5$, $x = 2$. Ответ: $x = 5$, $x = 2$.

3) $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 4$. Решение: $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 2^2$, т.е. $\frac{x-1}{x-2} = 2$; $x - 1 = 2x - 4$, $x \neq 2$. Откуда $x = 3$. Ответ: $x = 3$.

4) $0{,}5^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x+1}}$. Решение: $2^{-\frac{1}{x}} = 2^{\frac{2}{x+1}}$, т.е. $-\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$; $-x - 1 = 2x, x \neq -1$, $x \neq 0$. Откуда $x = -\frac{1}{3}$. Ответ: $x = -\frac{1}{3}$.

215. 1) $0{,}3^{x^3-x^2+x-1}=1$. Решение: данное уравнение равносильно уравнению $x^3-x^2+x-1=0$, т.е. $(x^2+1)(x-1)=0$, которое имеет единственный корень $x=1$. Ответ: $x=1$.

2) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3}=1$. Решение: уравнение равносильно $-x^2-2x+3=0$, откуда $x=-3$ и $x=1$. Ответ: $x=-3$, $x=1$.

3) Указание: $5{,}1\sqrt{5{,}1}=5{,}1^{\frac{3}{2}}$, аналогично 1).

4) Указание: $100^{x^2-1}=10^{2(x^2-1)}$, аналогично 1).

216. Указание:

1) $\sqrt[3]{100}=10^{\frac{1}{3}}$;

2) $\sqrt[5]{10000}=10^{\frac{4}{5}}$;

3) $225=15^{2}$;

4) $\frac{1}{\sqrt[4]{10000}}=10^{-1}$;

5) $\left(\sqrt{10}\right)^x=10^{\frac{x}{2}}$

6) $100^{x^2-1}=10^{2x^2-2}$.

217. 1) Указание: данное уравнение равносильно уравнению $x^2-\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}$.

2) $5^{0{,}1x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-0{,}06}=5^{x^2}$. Решение: преобразуем уравнение $5^{0{,}1x+0{,}06}=5^{x^2}$, тогда $0{,}1x+0{,}06=x^2$; $50x^2-5x-3=0$. Отсюда $x=0{,}3$, $x=-0{,}2$. Ответ: $x=0{,}3$, $x=-0{,}2$.

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$. Решение: О.О.У. $x\le 1$. Преобразуем уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$, тогда $\sqrt{1-x}=2x+1$. При $2x+1\ge 0$ возведем в квадрат, получим $1-x=4x^2+4x+1$; $4x^2+5x=0$. Т.е. $x=0$ и $x=-5/4$ (не удовлетворяет условию $2x+1\ge 0$). Ответ: $x=0$.

4) $0{,}7^{\sqrt{x+12}}\cdot 0{,}7^{-2}=0{,}7^{\sqrt{x}}$. Решение: О.О.У. $x\ge 0$. Преобразуем уравнение к виду $0{,}7^{\sqrt{x+12}-2}=0{,}7^{\sqrt{x}}$, тогда $\sqrt{x+12}-2=\sqrt{x}$; $\sqrt{x+12}=2+\sqrt{x}$. Т.к. обе части положительны, возведем в квадрат, получим $x+12=x+4\sqrt{x}+4$, т.е. $\sqrt{x}=2$, $x=4$. Ответ: $x=4$.

218. 1) Указание: $7^x-7^{x-1}=7^{x-1}\cdot(7-1)$.

2) Указание: $3^{2y-1}+3^{2y-2}-3^{2y-4}=3^{2y-4}\cdot(3^3+3^2-1)$.

3) Указание: $5^{3x}+3\cdot5^{3x-2}=5^{3x-2}\cdot(5^2+3)$.

4) Указание: $2^{x+1}+3\cdot2^{x-1}-5\cdot2^x=2^{x-1}\cdot(2^2+3-5\cdot2)$.

219. 1) $7^{x-2}=3^{2-x}$. Решение: разделим уравнение на $3^{2-x}>0$, получим: $\frac{7^{x-2}}{3^{2-x}}=1$; $(7\cdot3)^{x-2}=1$, т.е. $x-2=0$, $x=2$. Ответ: $x=2$.

2) $2^{x-3}=3^{3-x}$. Решение: разделим уравнение на $3^{3-x}>0$, получим: $\frac{2^{x-3}}{3^{3-x}}=1$; $(2\cdot3)^{x-3}=1$, т.е. $x-3=0$, $x=3$. Ответ: $x=3$.

3) $3^{\frac{x+2}{4}}=5^{x+2}$. Решение: т.к обе части уравнения положительны, возведем в четвертую степень и разделим на $5^{4(x+2)}>0$, получим: $\frac{3^{x+2}}{5^{4(x+2)}}=1$; $\left(\frac{3}{5^4}\right)^{x+2}=1$, т.е. $x+2=0$, $x=-2$. Ответ: $x=-2$.

4) $4^{\frac{x-3}{2}}=3^{2(x-3)}$. Решение: разделим обе части уравнения на $3^{2(x-3)}>0$, получим: $1=\frac{4^{\frac{x-3}{2}}}{3^{2(x-3)}}=\frac{\left(\sqrt{4}\right)^{x-3}}{\left(3^2\right)^{x-3}}=\frac{2^{x-3}}{9^{x-3}}=\left(\frac{2}{9}\right)^{x-3}$, т.е. $x-3=0$. Ответ: $x=3$.

220. Указание: так как показательная функция взаимно однозначная, то равенства выполнены, если равны показатели степени.

221. 1)–3) Аналогично 4).

4). $3^{|x|}=3^{|2-x|-1}$.

Решение: так как показательная функция взаимно однозначная, то $|x|=|2-x|-1$. Рассмотрим три случая: а) $x<0$, тогда $-x=2-x-1$, т.е. 0=1, значит в этом случае корней нет; б) $0\le x<2$, тогда $x=2-x-1$, т.е. $x=0{,}5$; в) $x\ge2$, тогда $x=x-2-1$, т.е. 0=–3, значит в этом случае корней также нет. Ответ: $x=0{,}5$.

222. 1) $3^{x+3}+3^x=7^{x+1}+5\cdot7^x$. Решение: вынесем общие множители за скобку $3^x(3^3+1)=7^x(7+5)$; $3^x\cdot28=7^x\cdot12$; $3^x\cdot7=7^x\cdot3$; $3^{x-1}=7^{x-1}$. Разделим обе части на $7^{x-1}>0$, получим $\left(\frac{3}{7}\right)^{x-1}=1$; $x-1=0$, $x=1$. Ответ: $x=1$.

2) Указание: уравнение равносильно $3^{x+4}-3^{x+3}=5^{x+4}-3\cdot5^{x+3}$;
$3^{x+3}(3-1)=5^{x+3}(5-3)$; $3^{x+3}=5^{x+3}$.

3) $2^{8-x}+7^{3-x}=7^{4-x}+2^{3-x}\cdot11$. Решение: преобразуем данное уравнение: $2^{8-x}-2^{3-x}\cdot11=7^{4-x}-7^{3-x}$; $32\cdot2^{3-x}-11\cdot2^{3-x}=7\cdot7^{3-x}-7^{3-x}$; $21\cdot2^{3-x}=6\cdot7^{3-x}$.

Тогда $\left(\frac{2}{7}\right)^{3-x}=\frac{2}{7}$, т.е. $3-x=1$, $x=2$. Ответ: $x=2$.

4) $2^{x+1}+2^{x-1}-3^{x-1}=3^{x-2}-2^{x-3}+2\cdot3^{x-3}$. Решение: преобразуем уравнение: $(16+4+1)\cdot2^{x-3}=(3+9+2)\cdot3^{x-3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3}=\frac{2}{3}$. Т.е. $x-3=1$, $x=4$.

Ответ: $x=4$.

223. 1)–4) Указание: соответствующей заменой сведите уравнение к квадратному. См. задачу 6 §12 учебника.

5) Аналогично 6).

6) $5^{3x+1}+34\cdot5^{2x}-7\cdot5^{x}=0$. Решение: сделаем замену $5^{x}=u>0$, тогда $5u^3+34u^2-7u=0$. То есть $u(5u-1)(u+7)=0$, откуда $u=\frac{1}{5}$ и $u=0$, $u=-7$ (не удовлетворяют $u>0$). Тогда $5^{x}=\frac{1}{5}$, $x=-1$. Ответ: $x=-1$.

224. При каких значениях x сумма чисел 2^{x-1}, 2^{x-4} и 2^{x-2} равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии 6,5; 3,25; 1,625; ...?
Решение: данная геометрическая прогрессия имеет знаменатель 0,5, следовательно ее сумма равна $\frac{6{,}5}{1-0{,}5}=13$. Т.е. необходимо решить уравнение $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-4}=13$. $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-4}=(8+4+1)\cdot2^{x-4}$, откуда $2^{x-4}=1$, т.е. $x=4$. Ответ: $x=4$.

225. 1), 2) Указание: см. задачу 212 п. 3).

3) Указание: преобразуйте уравнение к виду $6^{x}=6^{2x^2}$.

4) Указание: преобразуйте уравнение к виду $3^{-2\sqrt{x-1}}=3^{-3}$.

226. 1) $4\cdot9^{x}-13\cdot6^{x}+9\cdot4^{x}=0$.

Решение: разделим обе части уравнения на $4^{x}\neq0$, получим:
$4\cdot\frac{9^x}{4^x}-13\cdot\frac{6^x}{4^x}+9=0$. Преобразуем полученное уравнение:
$4\cdot\frac{3^{2x}}{2^{2x}}-13\cdot\frac{3^x\cdot2^x}{2^{2x}}+9=0$; $4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+9=0$.

Сделаем замену $\left(\frac{3}{2}\right)^x = u > 0$, тогда $4u^2 - 13u + 9 = 0$, т.е. $u = 1$ и $u = \frac{9}{4}$. Отсюда находим решения $x = 0$ и $x = 2$. Ответ: $x = 0$, $x = 2$.

2) Указание: разделите обе части уравнения на 16^x и сделайте замену $u = \left(\frac{3}{4}\right)^x$. Аналогично 1).

227. 1) $4^x + 25^x = 29$. Решение: так как функции $y = 4^x$ и $y = 25^x$ строго возрастают, то и функция $y = 4^x + 25^x$ строго возрастает, а значит, принимает каждое свое значение ровно один раз.

2) Аналогично 1).

§13. Показательные неравенства

228. 1)–5) Аналогично 6).

6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \le \frac{1}{9}$. Решение: по свойству 9 (§12) данное неравенство равносильно неравенству $x - 1 \ge 2$, т.е. $x \ge 3$. Ответ: $x \ge 3$.

229. См. задачу 3 §13 учебника.

230. 1) См. рис. 38. 2) Аналогично 1).

3) См. рис. 39. 4) Аналогично 3).

231. 1)–3) Аналогично 4).

4) $\left(2\frac{2}{3}\right)^{6x^2+x} \le 7\frac{1}{9}$. Решение: преобразуем неравенство к виду $\left(\frac{8}{3}\right)^{6x^2+x} \le \frac{64}{9}$, тогда по свойству 8° (§11) данное неравенство равносильно $6x^2 + x \le 2$, .откуда $-\frac{2}{3} \le x \le \frac{1}{2}$. Ответ: $-\frac{2}{3} \le x \le \frac{1}{2}$.

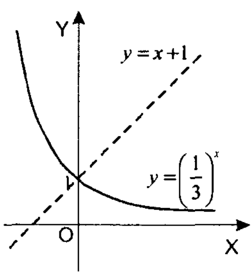

Рис. 38

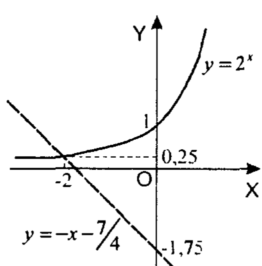

Рис. 39

232. 1) $3^{x+2}+3^{x-1}<28$. Решение: $3^{x+2}+3^{x-1}=3^{x-1}(3^3+1)=28\cdot 3^{x-1}$, т.е. неравенство равносильно $28\cdot 3^{x-1}<28$; $3^{x-1}<1$. Т.е. $x-1<0$, $x<1$. Ответ: $x<1$.

2) $2^{x-1}+2^{x+3}>17$. Решение: $2^{x-1}+2^{x+3}=2^{x-1}(1+2^4)=17\cdot 2^{x-1}$, т.е. неравенство равносильно: $17\cdot 2^{x-1}>17$; $2^{x-1}>1$. Т.е. $x-1>0$, $x>1$. Ответ: $x>1$.

3) $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}\ge 448$. Решение: $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}=2^{2x-3}(4+2+1)$; т.е. $2^{2x-3}\ge 64$; $2x-3\ge 6$, $x\ge 4{,}5$. Ответ: $x\ge 4{,}5$.

4) Указание: неравенство равносильно $5^{3x-3}\cdot 624\le 624$.

233. 1) Указание: сделайте замену $u=3^x$, тогда $u^2-u-6>0$.

2) Указание: сделайте замену $u=2^x$, тогда $u^2-u<12$.

3) Указание: сделайте замену $u=5^x$, тогда $5u^2+4u-1>0$.

4) Указание: сделайте замену $u=3^x$, тогда $3u^2-11u<4$.

234. 1) $y=\sqrt{25^x-5^x}$. Решение: необходимо $25^x-5^x\ge 0$. Сделаем замену $5^x=u>0$, тогда $u^2-u\ge 0$, откуда $u\le 0$ (не удовлетворяет условию $u>0$) или $u\ge 1$, т.е. $5^x\ge 1$, $x\ge 0$. Ответ: $x\ge 0$.

2) $y=\sqrt{4^x-1}$. Решение: $4^x-1\ge 0$; $4^x\ge 1$. Т.е. $x\ge 0$. Ответ: $x\ge 0$.

235. При каких значениях x значения функции $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ больше значений функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+12$? Решение: необходимо решить неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^x+12$. Сделаем замену $\left(\frac{1}{2}\right)^x=u>0$, тогда $u^2-u-12>0$, т.е. $u>4$ или $u<-3$ (не удовлетворяет условию $u>0$). Тогда $\left(\frac{1}{2}\right)^x>4$, по свойству 9 (§11) $x<-2$. Ответ: $x<-2$.

236. 1) Аналогично 2); 2) См. рис. 40; 3) Аналогично 4); 4) См. рис. 41.

237. 1) См. рис. 42; 2) См. рис. 43; 3) См. рис. 44; 4) См. рис. 45.

238. 1) $11^{\sqrt{x+6}}>11^x$. Решение: ООН $x\ge -6$. Таким образом, $\sqrt{x+6}>x$. При $x<0$ неравенство верно на всей ООН При $x>0$ возведем обе части неравенства в квадрат, получим: $x+6>x^2$; $x^2-x-6<0$, $-2<x<3$. Объединяя оба ответа, получаем $-6\le x<3$. Ответ: $-6\le x<3$.

2) $0{,}3^{\sqrt{30-x}}>0{,}3^x$. Решение: ООН $x\le 30$. По свойству 9 (§11) $\sqrt{30-x}<x$. При $x<0$ неравенство не выполнено, при $x\ge 0$ можно возвести обе части неравенства в квадрат, получим $30-x<x^2$. Откуда $6<x\le 30$ (с учетом ООН) или $x<-5$ (не удовлетворяет условию $x\ge 0$). Ответ: $6<x\le 30$.

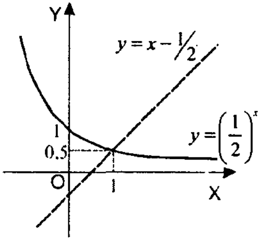

Рис. 40

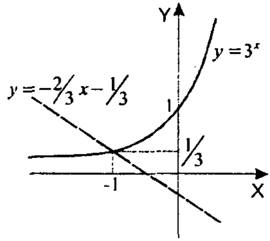

Рис. 41

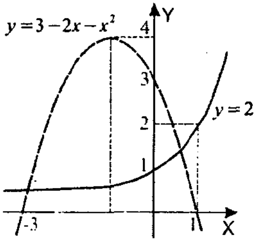

Рис. 42

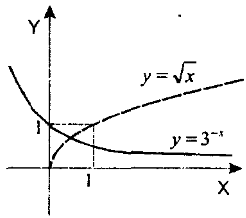

Рис. 43

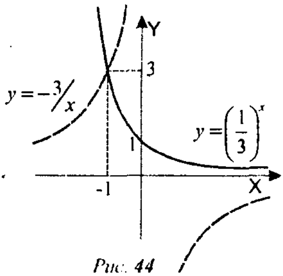

Рис. 44

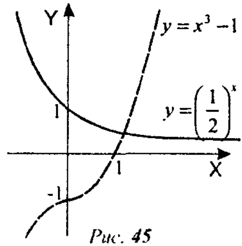

Рис. 45

239. 1) Указание: сделайте замену $u = \left(\frac{2}{5}\right)^x$.

2) Указание: преобразуйте неравенство к виду $0{,}2^{-2+4x-x(3-x)} > 1$.

3) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$. Решение: О.О.Н. $4^x \neq 3^x$, т.е. $x \neq 0$. Преобразуем неравенство: $\frac{4^x - 4 \cdot 4^x + 4 \cdot 3^x}{4^x - 3^x} < 0$. Разделим числитель и знаменатель на $3^x \neq 0$,

получим $\dfrac{-3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x+4}{\left(\frac{4}{3}\right)^x-1}<0$. Сделаем замену $\left(\frac{4}{3}\right)^x=u>0$, тогда $\dfrac{4-3u}{u-1}<0$,

т.е. $u>\dfrac{4}{3}$ или $0<u<1$. Откуда находим $x>1$ или $x<0$.

4) Указание: преобразуйте неравенство к виду $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3(x^2-1)-5}$.

§14. Системы показательных уравнений и неравенств

240. 1) $\begin{cases}2x-y=1\\5^{x+y}=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\5^{x+y}=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\5^{x+2x-1}=5^2\end{cases}$

Решение: из первого уравнения выразим y и подставим во второе уравнение системы, откуда $3x-1=2$, т.е. $x=1, y=1$. Ответ: (1; 1).

2) $\begin{cases}x-y=2\\3^{x^2+y}=\frac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-2\\3^{x^2+y}=\frac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-2\\3^{x^2+x-2}=3^{-2}\end{cases}$

Решение: из первого уравнения выразим y, подставим во второе, откуда $x^2+x-2=-2$, т.е. $x_1=0, y_1=-2$; $x_2=-1, y_2=-3$. Ответ: $(-1;-3)$, $(-2;0)$.

3) $\begin{cases}x+y=1\\2^{x-y}=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\2^{x-1+x}=2^3\end{cases}\Leftrightarrow x-1+x=3$, т.е. $2x=4$, $x=2, y=-1$.

Ответ: $(2;-1)$.

4) $\begin{cases}x+2y=3\\3^{x-y}=81\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-2y\\3^{3-2y-y}=3^4\end{cases}\Leftrightarrow 3-3y=4$, т.е. $y=\frac{1}{3}, x=2\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(2\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

241. 1) $\begin{cases}4^x\cdot2^y=32\\3^{8x+1}=3^{3y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{2x+y}=2^5\\3^{8x+1}=3^{3y}\end{cases}$, тогда $\begin{cases}2x+y=5\\8x+1=3y\end{cases}$

Решая систему, получаем ответ (1; 3). Ответ: (1; 3).

2) $\begin{cases}3^{3x-2y}=81\\3^{6x}\cdot3^y=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{3x-2y}=3^4\\3^{6x+y}=3^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=4\\6x+y=3\end{cases}$, т.е. $x=\frac{2}{3}, y=-1$.

242. Указание: сложите уравнения системы.

243. 1) Указание: домножьте второе уравнение на 5 и сложите с первым.

2) Аналогично 3).

3) $\begin{cases} 16^y - 16^x = 24, \\ 16^{x+y} = 256. \end{cases}$

Решение: заменим $16^x = u, 16^y = v$, тогда $\begin{cases} v - u = 24 \\ uv = 265 \end{cases}$. Тогда по теореме Виета находим решения: (8; 32) и (–32; –8). Из первой пары решений получаем $x = \dfrac{3}{4}, y = \dfrac{5}{4}$, вторая пара решений не дает. Ответ: $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{4}\right)$.

4) Указание: сделайте замену переменных $3^x = u$ и $2^{x+y} = v$.

5) Указание: перемножьте уравнения системы, получиться $15^{x+y} = 225$.

6) Указание: перемножьте уравнения системы, получиться $6^{x+y} = 36$.

244. 1) Аналогично 2)

2) $\begin{cases} 0{,}3^{10x^2-47x} = 0{,}3^{-10x-7} \\ 3{,}7^{x^2} < 3{,}7^4 \end{cases}$ Решение: данная система равносильна системе:

$\begin{cases} 10x^2 - 47x = -10x - 7 \\ x^2 < 4 \end{cases}$ Из первого уравнения находим $x_1 = 3{,}5$ и $x_2 = 0{,}2$.

Первый корень не удовлетворяет неравенству, а второй – удовлетворяет.

Ответ: $x_2 = 0{,}2$.

245. 1) аналогично 2).

2) $\begin{cases} (0{,}2^y)^x = 0{,}008 \\ 0{,}4^y = 0{,}4^{3{,}5-x} \\ 2^x \cdot 0{,}5^y < 1 \end{cases}$ Решение: данная система равносильна: $\begin{cases} xy = 3 \\ y = 3{,}5 - x \\ y - x > 0 \end{cases}$

Решая систему, из первого и второго уравнения находим решения (2; 1,5) и (1,5; 2), из них неравенству удовлетворяет только второе. Ответ: (1,5; 2).

Упражнения к главе III

246–247. Указание: воспользуйтесь свойствами показательной функции.

249. В каком промежутке находятся значения функции при $x \in [-1;2]$:

1) $y = 5^x$. Решение: по свойству показательной функции эта функция возрастает и принимает все свои значения между минимальным и максимальным. Минимальное значение $y(-1) = 0{,}2$, максимальное значение $y(2) = 25$. Ответ: [0,2; 25].

2) Аналогично 1).

250. 1) $1{,}5^{5x-7}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$. Данное уравнение равносильно $\left(\frac{2}{3}\right)^{7-5x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$, т.е. $7-5x=x+1$; $6x=6$, $x=1$. Ответ: $x=1$.

2) $0{,}75^{2x-3}=\left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$. Данное уравнение равносильно $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3}=\left(\frac{3}{4}\right)^{x-5}$, т.е. $2x-3=x-5$; $x=-2$. Ответ: $x=-2$.

3) $5^{x^2-5x-6}=1$. Таким образом $x^2-5x-6=0$. Отсюда $x=-1$ и $x=6$. Ответ: $x=-1$, $x=6$.

4) Аналогично 3).

251. 1) $2^x+2^{x-3}=18$. Решение: $2^{x-3}\left(2^3+1\right)=18$; $2^{x-3}=2$. Отсюда $x-3=1$. Ответ: $x=4$.

2) Указание: данное уравнение равносильно $3^x\left(1+4\cdot 3\right)=13$; $3^x=1$.

3) Указание: данное уравнение равносильно $3^{x-1}\left(2\cdot 3^2-6-3\right)=9$; $3^{x-1}=1$.

4) Указание: уравнение равносильно $5^{x-1}\left(5^2+3-6\cdot 5\right)=-10$; $5^{x-1}=5$.

252. 1) $5^{2x}-5^x-600=0$. Решение: заменим $u=5^x$, тогда $u^2-u-600=0$. Отсюда $u=-24$ (посторонний корень) и $u=25$. Т.е. $5^x=25$, $x=2$. Ответ: $x=2$.

2) Указание: замените $u=3^x$, тогда $u^2-u-6=0$.

3) Указание: замените $u=3^{x-1}$, тогда $3u+u^2-810=0$.

4) $4^x+2^{x+1}-80=0$. Решение: сделаем замену переменной $2^x=u>0$, тогда уравнение примет вид $u^2+2u-80=0$. По теореме Виета его корни $u_1=-10$ (не удовлетворяет условию $u>0$) и $u_2=8$, откуда $x=3$. Ответ: $x=3$.

253. Аналогично задачам 228, 229.

254. Аналогично задаче 236.

Проверь себя!

1. Указание: $\left(\frac{1}{5}\right)^x=5^{-x}$, графики симметричны относительно оси OY.

2. Указание: 1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}>\left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$, так как $\frac{1}{5}<1$; 2) $5^{-0,2}>5^{-1,2}$, так как 5>1.

3. Указание: преобразуйте данные уравнения к виду: 1) $3^{x-1}=3^{3(x-1)}$;

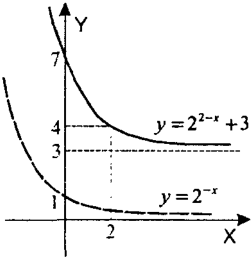

Рис. 46

2) $0{,}2^{x^2+4x-5}=0{,}2^0$; 3) $3\cdot2^{x+1}=12$; 4) сделайте замену $2^x=u$.

4. Указание: данное неравенство равносильно 1) $x-2>2$; 2) $x^2-2\le2$.

255. Указание: покажите, что $y(n)=2\cdot y(n-1)$ для $n=1,2,3,\ldots$.

256. Указание: воспользуйтесь формулой $P(n)=a\cdot(1+p\cdot100)^n$.

257. 3) См. рис. 46.

258. 1) Аналогично 2).

2) $16\sqrt{0{,}25^{5-\frac{x}{4}}}=2^{\sqrt{x+1}}$. Решение: О.О.У. $x\ge-1$. Преобразуем левую часть:

$$16\sqrt{0{,}25^{5-\frac{x}{4}}}=2^4\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{5-\frac{x}{4}}}=2^4\sqrt{2^{-2\left(5-\frac{x}{4}\right)}}=2^4\cdot2^{\frac{x}{4}-5}=2^{\frac{x}{4}-1}.$$ Тогда $2^{\frac{x}{4}-1}=2^{\sqrt{x+1}}$,

т.е. $x-4=4\sqrt{x+1}$. При $x\ge4$ левая часть неотрицательна, возведем в квадрат, получим $x^2-8x+16=16x+16$, откуда $x=0$ (не удовлетворяет условию $x\ge4$) и $x=24$. Ответ: $x=24$.

259. 1)–3) Аналогично 4)

4) $5\cdot4^{x-1}-16^x+0{,}25\cdot2^{2x+2}+7=0$. Решение: преобразуем левую часть уравнения: $5\cdot4^{x-1}-16^x+0{,}25\cdot2^{2x+2}+7=\frac{5}{4}\cdot4^x-4^{2x}+4^x+7$ и сделаем замену переменной $4^x=u>0$. Тогда $-u^2+2{,}25u+7=0$, откуда $u_1=4$ и $u_2=-1{,}75$ (не удовлетворяет условию $u>0$). Т.е. $4^x=4$, $x=1$.

Ответ: $x=1$.

260. 1) $2^{x+4}+2^{x+2}=5^{x+1}+3\cdot5^x$. Решение: разделим обе части уравнения на $5^x\ne0$, получим: $16\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x+4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x=5+3$, $20\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x=8$, $\left(\frac{2}{5}\right)^x=\frac{2}{5}$, т.е. $x=1$. Ответ: $x=1$.

2)–4) Аналогично 1).

261. 1) Аналогично 2)

2) $2^{x^2}\cdot5^{x^2}<10^{-3}(10^{3-x})^2$. Решение: преобразуем неравенство $10^{x^2}<10^{3-2x}$, тогда $x^2<3-2x$, откуда $-3<x<1$. Ответ: $-3<x<1$.

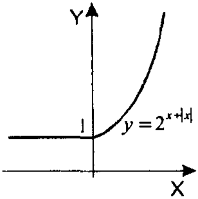

Рис. 47

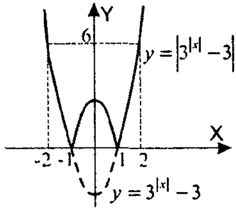

Рис. 48

3) Указание: сделайте замену переменной $2^x=u>0$, тогда $\frac{u(u^2-2u+8)}{2}<u^3$.

4) Указание: сделайте замену переменной $3^x=u>0$, тогда $\frac{1}{u+5}\le\frac{1}{3u-1}$.

262. Аналогично задаче 243.

263. 1) См. рис. 47. Указание: $y=\begin{cases}2^{2x}, x\ge 0\\ 1, x<0\end{cases}$.

2) См. рис. 48.

264. Аналогично задаче 226.

265. Решить неравенство:

1)–3) Аналогично 4).

4) $5^{|x+4|}<25^{|x|}$. Решение: преобразуем неравенство: $5^{|x+4|}<5^{2|x|}$, тогда $|x+4|<2|x|$. Т.к. обе части неравенства неотрицательны, можно возвести в квадрат. Получим $(x+4)^2<4x^2$, откуда $x<-\frac{4}{3}$ или $x>4$.

Ответ: $x<-\frac{4}{3}$, $x>4$.

IV глава
Логарифмическая функция

§15. Логарифмы

Основное логарифмическое тождество:

$a^{\log_a b} = b$, $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

266. Указаннс: $\frac{1}{243} = 3^{-5}$; $9\sqrt[4]{3} = 3^{2\frac{1}{4}}$.

267. 1) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$; 2) $\log_2 64 = \log_2 2^5 = 5$;

3) $\log_2 2 = \log_2 2^1 = 1$; 4) $\log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$.

268. 1) $\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$; 2) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$;

3) $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; 4) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}$.

269. 1) $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$; 2) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$;

3) $\log_3 3 = \log_3 3^1 = 1$; 4) $\log_3 1 = \log_3 3^0 = 0$.

270. 1) $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$; 2) $\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$;

3) $\log_3 \sqrt[4]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$; 4) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}$.

271. 1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$;

3) $\log_{0,5} 0{,}125 = \log_{0,5} (0{,}5)^3 = 3$; 4) $\log_{0,5} \frac{1}{2} = \log_{0,5} 0{,}5^1 = 1$;

5) $\log_{0,5} 1 = \log_{0,5} 0{,}5^0 = 0$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$.

272. 1) $\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$; 2) $\log_6 216 = \log_6 6^3 = 3$;

3) $\log_4 \frac{1}{16} = \log_4 4^{-2} = -2$; 4) $\log_5 \frac{1}{125} = \log_5 5^{-3} = -3$.

273. 1) $\log_{\frac{1}{5}} 125 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = -3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = -3$;

3) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{3} = 3$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 36 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = -2$.

274. 1) $3^{\log_3 18}$. Решение: по основному логарифмическому тождеству $3^{\log_3 18} = 18$. Ответ: 18.

2) $5^{\log_5 16} = 16$; 3) $10^{\log_{10} 2} = 2$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6} = 6$.

275. 1) $3^{5\log_3 2}$. Решение: $3^{5\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^5 = 2^5 = 32$. Ответ: 32.

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2} = 2^6 = 64$; 3) $0{,}3^{2\log_{0,3} 6} = 6^2 = 36$; 4) $7^{\frac{1}{2}\log_7 9} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$.

276. 1) $8^{\log_2 5} = 2^{3\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^3 = 5^3 = 125$;

2) $9^{\log_3 12} = 3^{2\log_3 12} = \left(3^{\log_3 12}\right)^2 = 12^2 = 144$;

3) $16^{\log_4 7} = 4^{2\log_4 7} = \left(4^{\log_4 7}\right)^2 = 7^2 = 49$;

4) $0{,}125^{\log_{0,5} 1} = 0{,}5^{3\log_{0,5} 1} = \left(0{,}5^{\log_{0,5} 1}\right)^3 = 1^3 = 1$.

277. 1) $\log_6 x = 3$. Решение: по основному логарифмическому тождеству $x = 6^3$, $x = 216$. Ответ: $x = 216$.

2) $\log_5 x = 4$. Решение: $x = 5^4 = 125$. Ответ: $x = 125$.

3) $\log_2(5 - x) = 3$. Решение: $5 - x = 2^3 = 8$, $x = 5 - 8$. Ответ: $x = -3$.

4) $\log_3(x + 2) = 3$. Решение: $x + 2 = 3^3 = 9$, $x = 9 - 2$. Ответ: $x = 7$.

5) $\log_{\frac{1}{6}}(0{,}5 + x) = -1$. Решение: $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = 0{,}5 + x$, т.е. $x + 0{,}5 = 6$. Ответ: $x = 5{,}5$.

278. 1) $\log_{\frac{1}{2}}(4 - x)$. Решение: необходимо $4 - x > 0$, т.е. $x < 4$. Ответ: $x < 4$.

2) $\log_{0,2}(7 - x)$. Решение: необходимо $7 - x > 0$, т.е. $x < 7$. Ответ: $x < 7$.

3) $\log_6 \frac{1}{1-2x}$. Решение: необходимо $\frac{1}{1-2x} > 0$, т.е. $1 - 2x > 0$. Ответ: $x < 0{,}5$

4) $\log_8 \frac{5}{2x-1}$. Решение: необходимо $\frac{5}{2x-1} > 0$, т.е. $2x - 1 > 0$. Ответ: $x > 0{,}5$

5) $\log_{\frac{1}{4}}(-x^2)$. Решение: необходимо $-x^2>0$, т.е. $x^2<0$, что не возможно ни при каком значении x. Ответ: решений нет.

6) $\log_{0,7}\left(-2x^3\right)$. Решение: $-2x^3>0$; $x^3<0$, т.е. $x<0$. Ответ: $x<0$.

279. 1) $\log_2\sqrt[4]{2}=\log_2 2^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$; 2) $\log_3\frac{1}{3\sqrt{3}}=\log_3 3^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}$;

3) $\log_{0,5}\frac{1}{\sqrt{32}}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$; 4) $\log_7\frac{\sqrt[3]{7}}{49}=\log_7\left(7^{\frac{1}{3}}\cdot7^{-2}\right)=\frac{1}{3}-2=-1\frac{2}{3}$

280. 1) $9^{2\log_3 5}=3^{4\log_3 5}=\left(3^{\log_3 5}\right)^4=5^4=625$;

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\log_3 4}=3^{-2\cdot\frac{1}{2}\log_3 4}=\left(3^{\log_3 4}\right)^{-1}=4^{-1}=\frac{1}{4}$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5\log_2 3}=2^{-2\cdot(-5\log_2 3)}=\left(2^{\log_2 3}\right)^{10}=3^{10}=59049$;

4) $27^{-4\log_{\frac{1}{3}}5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3\left(-4\log_{\frac{1}{3}}5\right)}=\left(\frac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{3}}5}\right)^{12}=5^{12}$;

5) $10^{3-\log_{10}5}=1000\cdot10^{-\log_{10}5}=1000\cdot5^{-1}=200$;

6) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}}3}=\frac{1}{7}\cdot\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\frac{1}{7}}3}\right)^2=\frac{1}{7}\cdot3^2=\frac{9}{7}$.

281. 1) $\log_2\log_3 81=\log_2\log_3 3^4=\log_2 4=\log_2 2^2=2$;

2) $\log_3\log_2 8=\log_3\log_2 2^3=\log_3 3=1$;

3) $2\log_{27}\log_{10}1000=2\log_{27}\log_{10}10^3=2\log_{27}3=2\log_{27}27^{\frac{1}{3}}=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

4) $\frac{1}{3}\log_9\log_2 8=\frac{1}{3}\log_9\log_2 2^3=\frac{1}{3}\log_9 3=\frac{1}{3}\log_9 9^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$;

5) $3\log_2\log_4 16=3\log_2\log_4 4^2=3\log_2 2=3$.

282. 1) $\log_x 27=3$. Решение: О.О.У. $x>0, x\neq1$. По основному логарифмическому тождеству имеем: $x^3=27$, $x=3$. Ответ: $x=3$.

2) $\log_x\frac{1}{7}=-1$. Решение: О.О.У. $x>0, x\neq1$. $x^{-1}=\frac{1}{7}$, $x=7$. Ответ: $x=7$.

3) $\log_x\sqrt{5}=-4$. Решение: О.О.У. $x>0, x\neq1$. $x^{-4}=\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}=\left(5^{-4\cdot\frac{1}{2}}\right)^{-4}$.

Т.к. функция $y=x^{-4}$ взаимно однозначная, то $x=5^{-2}=\frac{1}{25}$. Ответ: $x=\frac{1}{25}$.

283. 1) $\log_6(49-x^2)$. Решение: необходимо $49-x^2>0$, т.е. $x^2<49$. Т.е. $-7<x<7$. Ответ: $-7<x<7$.

2) $\log_7(x^2+x-6)$. Решение: необходимо $x^2+x-6>0$. Т.е. $x<-3$ и $x>2$. Ответ: $x<-3$, $x>2$.

3) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x+7)$. Решение: необходимо $x^2+2x+7>0$, что верно при любом x.

284. 1) $\log_3(1-x^3)$. Решение: необходимо $1-x^3>0$, т.е. $x^3<1$. Т.к. $y=x^3$ взаимно однозначная возрастающая функция, то $x<1$. Ответ: $x<1$.

2) Аналогично 1).

3) $\log_{\frac{1}{4}}(x^3+x^2-6x)$. Решение: необходимо $x^3+x^2-6x>0$, то есть:

$x(x^2+x-6)=x(x+3)(x-2)>0$. Решая данное неравенство методом интервалов, находим $x>2$ или $-3<x<0$. Ответ: $x>2$, $-3<x<0$.

4) Аналогично 3).

285. 1) $2^x=5$. Решение: по определению $x=\log_2 5$. Ответ: $x=\log_2 5$.

2) $1{,}2^x=4$. Решение: по определению $x=\log_{1,2}4$. Ответ: $x=\log_{1,2}4$.

3) $4^{2x+3}=5$. Решение: $2x+3=\log_4 5$; $x=\frac{\log_4 5-3}{2}$. Ответ: $x=\frac{\log_4 5-3}{2}$.

4) $7^{1-2x}=2$. Решение: $1-2x=\log_7 2$; $x=\frac{1-\log_7 2}{2}$. Ответ: $x=\frac{1-\log_7 2}{2}$.

286. 1) $7^{2x}+7^x-12=0$. Решение: заменим $u=7^x$, тогда $u^2+u-12=0$. Откуда $u=-4$ и $u=3$. Т.е. $-4=7^x$ (решений нет) и $3=7^x$. Ответ: $x=\log_7 3$.

2) Указание: сделайте замену $u=3^x$, тогда $u^2-u-12=0$.

3) $8^{x+1}-8^{2x-1}=30$. Решение: введем новое неизвестное $y=8^x$. Тогда исходное уравнение примет вид: $8y-\frac{1}{8}y^2=30$; $y^2-64y+240=0$, откуда $y_1=60$, $y_2=4$. Т.е. $8^x=60$ или $8^x=4$. Тогда $x=\log_8 60$ или $x=\log_8 4=\frac{2}{3}$. Ответ: $x=\log_8 60$, $x=\frac{2}{3}$.

4) Указание: сделайте замену $u=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, тогда $u^2-5u+6=0$.

287. 1) $(3^x+2^x)(3^x+3\cdot 2^x)=8\cdot 6^x$. Решение: разделим обе части уравнения на $6^x\neq 0$. Получим: $\frac{(3^x+2^x)}{3^x}\cdot\frac{(3^x+3\cdot 2^x)}{2^x}=8$, $\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x+3\right)=8$.

Введем новое неизвестное $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x>0$, тогда уравнение примет вид: $(1+y)\left(3+\frac{1}{y}\right)=8$; $4+3y+\frac{1}{y}=8$. Домножим уравнение на $y\neq 0$, получим $3y^2-4y+1=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=\frac{1}{3}$. Т.е. $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$ или $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{1}{3}$, тогда $x=0$ или $x=\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}$. Ответ: $x=0$, $x=\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}$.

2) Указание: раскройте скобки: $6\cdot 15^x+5\cdot 3^{2x}-6\cdot 5^{2x}-5\cdot 15^x=8\cdot 15^x$; $5\cdot 3^{2x}-6\cdot 5^{2x}=7\cdot 15^x$ и разделите уравнение на 3^{2x}: $5-6\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}=7\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^x$.

Далее сделайте замену $u=\left(\frac{5}{3}\right)^x$, тогда $6u^2+7u-5=0$.

288. 1) $\log_x(2x-1)$. Решение: необходимо $\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\\ 2x-1>0\end{cases}$, отсюда: $x>1/2$, $x\neq 1$. Ответ: $1/2<x<1$, $x>1$.

2) $\log_{x-1}(x+1)$. Решение: необходимо $\begin{cases}x-1>0\\ x-1\neq 1\\ x+1>0\end{cases}$, откуда: $x>1$, $x\neq 2$.

Ответ: $x>1$, $x\neq 2$.

289. Решение: введем новое неизвестное $y=3^x>0$, тогда уравнение примет вид $y^2+a(1-a)y-a^3=0$. По теореме Виета корни этого уравнения $y_1=a^2$ и $y_2=-a$. При $a<0$ $y_{1,2}>0$, следовательно $3^x=a^2$ и $3^x=-a$, т.е. $x=\log_3 a^2, x=\log_3(-a)$. Заметим, что эти корни совпадают при $a=-1$. При $a=0$ $y_{1,2}=0$, т.е. решений нет. При $a>0$ $y_1>0$, а $y_2<0$, т.е. $x=\log_3 a^2$. Ответ: при $a<0$, $a\neq -1$ $x=\log_3 a^2, x=\log_3(-a)$; при $a=0$ решений нет; при $a>0$ и $a=-1$ $x=\log_3 a^2$.

§16. Свойства логарифмов

Свойства: ($a>0, a\neq 1; b>0, c>0$)

1°. $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$; 2°. $\log_a b-\log_a c=\log_a \frac{b}{c}$;

3°. $\log_a b^p = p\log_a b$; 4°. $\log_{a^p} b=\frac{1}{p}\log_a b$.

290. 1) $\log_{10}5+\log_{10}2=\log_{10}10=1$; 2) $\log_{10}8+\log_{10}125=\log_{10}1000=3$;

3) $\log_{12}2+\log_{12}72=\log_{12}144=2$; 4) $\log_3 6+\log_3\frac{3}{2}=\log_3 9=2$.

291. 1) $\log_2 15-\log_2\frac{15}{16}=\log_2\left(15:\frac{15}{16}\right)=\log_2 16=4$;

2) $\log_5 75-\log_5 3=\log_5(75:3)=\log_5 25=2$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}54-\log_{\frac{1}{3}}2=\log_{\frac{1}{3}}(54:2)=\log_{\frac{1}{3}}27=-3$;

4) $\log_8\frac{1}{16}-\log_8 32=\log_8\left(\frac{1}{16}:32\right)=\log_8\frac{1}{8^3}=-3$.

292. 1) $\log_{13}\sqrt[5]{169}=\log_{13}13^{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}$; 2) $\log_{11}\sqrt[3]{121}=\log_{11}11^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{243}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{4}}=-\frac{5}{4}$; 4) $\log_2\frac{1}{\sqrt[6]{128}}=\log_2 2^{-\frac{7}{6}}=-\frac{7}{6}$.

293. 1) $\log_8 12-\log_8 15+\log_8 20=\log_8(12:15\cdot 20)=\log_8 16=\log_8 8^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}$;

2) $\log_9 15+\log_9 18-\log_9 10=\log_9(15\cdot 18:10)=\log_9 27=\log_9 9^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$;

3) $\frac{1}{2}\log_7 36-\log_7 14-3\log_7\sqrt[3]{21}=\log_7\left(36^{\frac{1}{2}}:14:\left(\sqrt[3]{21}\right)^3\right)=$

$=\log_7\frac{6}{14\cdot 21}=\log_7 7^{-2}=-2$;

4) $2\log_{\frac{1}{3}}6-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}400+3\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{45}=\log_{\frac{1}{3}}6^2-\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{400}+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{45}\right)^3=$

$=\log_{\frac{1}{3}}36-\log_{\frac{1}{3}}20+\log_{\frac{1}{3}}45=\log_{\frac{1}{3}}(36:20\cdot 45)=\log_{\frac{1}{3}}81=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=-4.$

294. 1) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}=\frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^4}=\frac{3\log_3 2}{4\log_3 2}=\frac{3}{4}$;

2) $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}=\frac{\log_5 3^3}{\log_5 3^2}=\frac{3\log_5 3}{2\log_5 3}=\frac{3}{2}$;

3) $\frac{\log_5 36-\log_5 12}{\log_5 9}=\frac{\log_5(36:12)}{\log_5 3^2}=\frac{\log_5 3}{2\log_5 3}=\frac{1}{2}$;

4) $\frac{\log_7 8}{\log_7 15-\log_7 30}=\frac{\log_7 2^3}{\log_7(15:30)}=\frac{3\log_7 2}{\log_7 2^{-1}}=-3$.

295. Вычислить $\log_a x$, если $\log_a b=3$, $\log_a c=-2$.

1) $x=a^3b^2\sqrt{c}$. $\log_a x=\log_a a^3b^2\sqrt{c}=\log_a a^3+\log_a b^2+\log_a\sqrt{c}=3+6-1=8$.

2) $x=\frac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}$. $\log_a x=\log_a\frac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}=\log_a a^4+\log_a b^{\frac{1}{3}}-\log_a c^3=4+1+6=11$.

296. 1) $\frac{\log_2 24-\frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18-\frac{1}{3}\log_3 72}=\frac{\log_2\frac{24}{\sqrt{72}}}{\log_3\frac{18}{\sqrt[3]{72}}}=\frac{\log_2\frac{24}{6\sqrt{2}}}{\log_3\frac{18}{2\sqrt[3]{9}}}=\frac{\log_2 2\sqrt{2}}{\log_3 3\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2}:\frac{4}{3}=\frac{9}{8}$;

2) $\frac{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}=\frac{\log_7\left(14:\sqrt[3]{56}\right)}{\log_6\left(30:\sqrt{150}\right)}=\frac{\log_7 7^{\frac{2}{3}}}{\log_6 6^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}:\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$;

3) $\frac{\log_2 4+\log_2\sqrt{10}}{\log_2 20+3\log_2 2}=\frac{\log_2\left(4\cdot\sqrt{10}\right)}{\log_2(20\cdot 8)}=\frac{\log_2\left(4\cdot\sqrt{10}\right)}{\log_2\left(4\cdot\sqrt{10}\right)^2}=\frac{\log_2\left(4\cdot\sqrt{10}\right)}{2\log_2\left(4\cdot\sqrt{10}\right)}=\frac{1}{2}$;

4) $\frac{3\log_7 2-\frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2+\frac{1}{3}\log_5 27}=\frac{3\log_7 2-3\log_7 2}{4\log_5 2+\frac{1}{3}\log_5 27}=\frac{0}{4\log_5 2+\frac{1}{3}\log_5 27}=0$.

297. Найти x по данному его логарифму $(a>0,\ b>0)$:

1) $\log_3 x=4\log_3 a+7\log_3 b$. Решение: $\log_3 x=4\log_3 a+7\log_3 b=\log_3 a^4b^7$, откуда $x=a^4b^7$. Ответ: $x=a^4b^7$.

2) Указание: $\log_5 x=\log_5\frac{a^2}{b^3}$.

3) Указание: $\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[5]{b}}$

4) Указание: $\log_{\frac{2}{3}} x = \log_{\frac{2}{3}} \sqrt[4]{a}\sqrt[7]{b^4}$.

298. 1) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 8^{\log_2 3} = 6^{2\log_6 5} + 10 : 10^{\log_{10} 2} - 2^{3\log_2 3} = 25 + 5 - 27 = 3$

2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2} = \left(3 : 9^{\log_9 4} + 125^{\frac{2}{3}\log_{125} 8}\right)\cdot 7^{2\log_7 2} = 4\left(\frac{3}{4} + \sqrt[3]{8^2}\right) = 19$

3) $16^{1+\log_4 5} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 5} = 16\cdot 4^{2\log_4 5} + 2^{\log_2 3}\cdot 8^{\frac{2}{3}\cdot 3\log_8 5} = 16\cdot 25 + 3\cdot 25 = 475$

4) $72\cdot\left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}\right) = 72\cdot\left(49^{\log_7 \frac{\sqrt{9}}{6}} + 5^{-2\log_5 4}\right) =$

$= 72\cdot\left(\left(7^{\log_7 \frac{1}{2}}\right)^2 + \left(5^{\log_5 4}\right)^{-2}\right) = 72\cdot\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = \frac{72\cdot 5}{16} = 22{,}5$

299. $a^{\log_{a^p} b} = \left(a^{p\log_{a^p} b}\right)^{\frac{1}{p}} = b^{\frac{1}{p}} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{p}\log_a b}$. Т.е. $\log_a p^b = \frac{1}{p}\log_a b$, ч.т.д.

1) $\log_{36} 2 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}} 3 = \frac{1}{2}\log_6 2 + \frac{1}{2}\log_6 3 = \log_6 \sqrt{2\cdot 3} = \frac{1}{2}$;

2) $2\log_{25} 30 + \log_{0,2} 6 = \log_5 30 - \log_5 6 = \log_5 30 : 6 = 1$.

300. Выразить через a и b:

1) $\log_{\sqrt{3}} 50$, если $\log_3 15 = a, \log_3 10 = b$. Решение: $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2\log_3 50 =$

$= 2(\log_3 10 + (\log_3 5 + \log_3 3) - 1) = 2(\log_3 10 + \log_3 15 - 1) = 2(b + a - 1)$.

2) Указание: $\log_4 1250 = \frac{1}{2}\log_2(2\cdot 5^4)$.

§17. Десятичные и натуральные логарифмы

Основные понятия

Формула перехода: $\log_a b = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$, где $a, b, c > 0;\ a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$.

Частные случаи: $\log_a b = \dfrac{\ln a}{\ln b}$; $\log_a b = \dfrac{\lg a}{\lg b}$; $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

303. 1) $\log_7 25 = \dfrac{\lg 25}{\lg 7}$; 2) $\log_5 8 = \dfrac{\lg 8}{\lg 5}$;

3) $\log_9 0{,}75 = \dfrac{\lg 0{,}75}{\lg 9}$; 4) $\log_{0{,}75} 1{,}13 = \dfrac{\lg 1{,}13}{\lg 0{,}75}$.

304. Указание: воспользуйтесь формулой перехода, аналогично задаче 303.

305. Указание: воспользуйтесь формулой перехода, в которой $c = 7$.

306. 1) Указание: $\frac{\lg 625}{\lg 25} = \log_{25} 625 = 2$.

2) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4 \cdot \log_2 3) = -\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \log_2 3\right) = -\frac{1}{2}\log_2 2 = -\frac{1}{2}$.

307. Решить уравнение:

1) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$. Решение: О.О.У. $x > 0$.

$2\log_5 3 + 4\log_{25} 2 = \log_5 9 + 2\log_5 2 = \log_5 36$. Т.е. $\log_5 x = \log_5 36$, откуда $x = 36$. Ответ: $x = 36$.

2) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Преобразуем уравнение:

$\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 x + 2\log_2 x = \log_2 x^3$; $\quad 9 = \log_2 2^9 = \log_2 512$. Т.е.

$\log_2 x^3 = \log_2 512$, откуда $x^3 = 512$, $x = 8$. Ответ: $x = 8$.

3) Аналогично 1).

4)–6) Аналогично 2).

308. Указание: $\log_{49} 28 = \frac{1}{2}\log_7(2^2 \cdot 7) = \log_7 2 + \frac{1}{2}\log_7 7$.

309. Указание: $\log_{15} 30 = \frac{\lg 15}{\lg 30} = \frac{\lg 3 + \lg 5}{\lg 3 + \lg 10}$.

310. Указание: $\log_{24} 72 = \frac{\log_6 24}{\log_6 72} = \frac{\log_6 6 + \log_6 2^2}{\log_6 6^2 + \log_6 2}$.

311. Указание: $\log_{36} 9 = \log_{36}\frac{36}{4} = \log_{36} 36 - \log_{36} 8^{\frac{2}{3}}$.

312. 1) $\frac{\log_3 216}{\log_8 3} - \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} = \log_3 216 \cdot \log_3 8 - \log_3 24 \cdot \log_3 72 =$

$= \log_3(3^3 \cdot 2^3) \cdot \log_3 2^3 - \log_3(2^3 \cdot 3) \cdot \log_3(2^3 \cdot 3^2) =$

$= (3 + 3\log_3 2) \cdot 3\log_3 2 - (3\log_3 2 + 1)(3\log_3 2 + 2) = -2$.

2) Аналогично 1).

313. 1) $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Заменим $u = \log_2 x$, тогда

$u^2 - 3u - 4 = 0$, т.е. $u_1 = -1$, $u_2 = 4$. Откуда $x_1 = 1/2$, $x_2 = 16$.

2) Указание: замените $u = \log_4 x$, тогда $8u^2 + 3u - 1 = 0$.

3) Указание: замените $u = \log_3 x$, тогда $u^2 + 5/2\, u - 1{,}5 = 0$.

4) $\log_3^2 x - 15\log_{27} x + 6 = 0$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Заменим $u = \log_3 x$, тогда $u^2 - 5u + 6 = 0$, т.е. $u_1 = 2$, $u_2 = 3$. Откуда $x = 9$ и $x = 27$.

314. 1) $\dfrac{\log_5 2}{\log_5 6} + \dfrac{\log_4 3}{\log_4 6} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$.

2) Аналогично 1).

3) $\dfrac{2\log_2 3}{\log_4 9} = \dfrac{2\log_2 3}{2\cdot 0{,}5\cdot \log_2 3} = 2$.

315. Пусть x – первоначальное количество жителей, y – количество жителей через n лет. Тогда $y = (1{,}08)^n \cdot x$, откуда $2x = (1{,}08)^n \cdot x$, т.е. $2 = (1{,}08)^n$, значит $n = \log_{1{,}08} 2 \approx 9{,}006$. Ответ: 9 лет.

316. Аналогично задаче 315.

§18. Логарифмическая функция, ее свойства и график

Основные свойства:

1. Функция $y = \log_a x$ – взаимно однозначная;
2. Область определения $x > 0$;
3. Множество значений – **R**.
4. Функция $y = \log_a x$ возрастает если $a > 1$, убывает если $0 < a < 1$.
5. Функция $y = \log_a x$ имеет корень $x = 1$.
6. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ взаимно обратны.

318. 1) $\log_3 \dfrac{6}{5}$ и $\log_3 \dfrac{5}{6}$. Решение: т.к. 3 > 1, то функция $y = \log_3 x$ возрастает, следовательно $\log_3 \dfrac{6}{5} > \log_3 \dfrac{5}{6}$.

2)–4) Аналогично 1).

319–320. Указание: воспользуйтесь свойством монотонности логарифмической функции.

321. 4) Указание: $e \approx 2{,}71$.

322–323. См. рис. 49.

324. См. §18 учебника.

325. 1), 4) Аналогично 3).

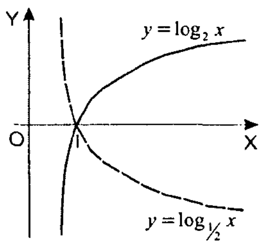

Рис. 49

2) $\log_{\frac{1}{5}} x \le \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$. Решение: О.О.Н. $x > 0$. Так как $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ убывающая функция, то неравенство равносильно неравенству $x \ge \frac{1}{8}$. Ответ: $x \ge \frac{1}{8}$.

3) $\lg x < \lg 4$. Решение: О.О.Н. $x > 0$. Так как $y = \lg x$ возрастающая функция, то неравенство равносильно неравенству $x < 4$, с учетом области определения $0 < x < 4$. Ответ: $0 < x < 4$.

326. Аналогично задаче 325.

327. 1) $\log_5(5x-1) = 2$. Решение: $2 = \log_5 5^2 = \log_5 25$, т.е. $\log_5(5x-1) = \log_5 25$, откуда $5x-1 = 25$, $x = 4{,}8$. Ответ: $x = 4{,}8$.

2)–6) Аналогично 1).

328. 1)–3) Аналогично 4).

4) $y = \log_{\sqrt{2}}\left(4 - x^2\right)$. Решение: так как логарифмическая функция определена только при положительных значениях аргумента, необходимо $4 - x^2 > 0$, откуда $-2 < x < 2$. Ответ: $-2 < x < 2$.

329. Докажите, что функция $y = \log_2\left(x^2 - 1\right)$ возрастает на промежутке $x > 1$.

Решение: данная функция определена при $x > 1$ и справедливо тождество: $\log_2\left(x^2 - 1\right) = \log_2(x+1) + \log_2(x-1)$. Ф-ции $y = \log_2(x+1)$ и $y = \log_2(x-1)$ возрастают, значит и исходная функция возрастает, как сумма двух возрастающих функций.

330. 1) $\frac{1}{2} + \lg 3$ и $\lg 19 - \lg 2$. Решение: сравним числа $\frac{1}{2} + \lg 3 + \lg 2 = \lg 6\sqrt{10}$ и $\lg 19$. Так как $6\sqrt{10} < 19$, то первое число меньше.

2) Указание: сравните числа $\sqrt{5\sqrt{7}}$ и $\frac{5+\sqrt{7}}{2}$.

3) Аналогично 1).

4) $\lg\lg\lg 50$ и $\lg^3 50$. Решение: $\lg 50 = 1 + \lg 5$, значит $1 < 1 + \lg 5 < 2$. Тогда $\lg\lg\lg 50 < \lg\lg 2 < \lg 1 < 0$, а $\lg^3 50 > 1$, т.е. первое число меньше.

331. 1) $\log_8\left(x^2 - 3x - 4\right)$. Решение: функция определена при $x^2 - 3x - 4 > 0$, т.е. при $x < -1$ или $x > 4$. Ответ: $x < -1$, $x > 4$.

2)–4) Аналогично 1).

5) Аналогично 6).

6) $\log_3\left(3^{x-1} - 9\right)$. Решение: данная функция определена при $3^{x-1} - 9 > 0$ т.е. $3^{x-1} > 3^2$, откуда $x > 3$. Ответ: $x > 3$.

332. 1) Указание: график получается из графика функции $y = \log_3 x$ сдвигом на одну единицу вправо.

2) Указание: график получается из графика функции $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ сдвигом на одну единицу влево.

3) Указание: график получается из графика функции $y = \log_3 x$ сдвигом на одну единицу вверх.

4) Указание: график получается из графика функции $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ сдвигом на одну единицу вниз.

5) Указание: график получается из графика функции $y = \log_3 x$ сдвигом на одну единицу вправо и на одну единицу вверх.

333. 1) См. рис. 50; 2) См. Рис. 51; 3) См. рис 52; 4) См. рис 53.

334. 1) См. рис. 54; 2) См. рис. 55.
3) См. рис 56; 4) См. рис 57.

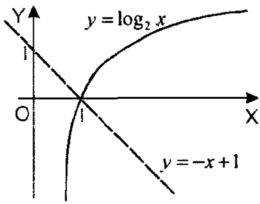

Рис. 50

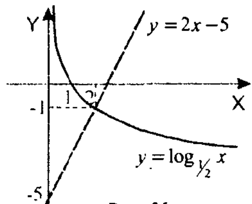

Рис. 51

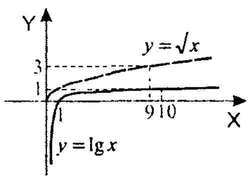

Рис. 52

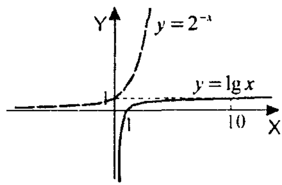

Рис. 53

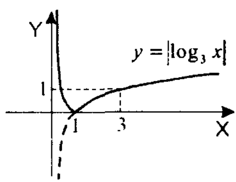

Рис. 54

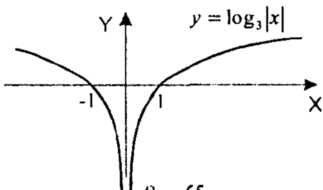

Рис. 55

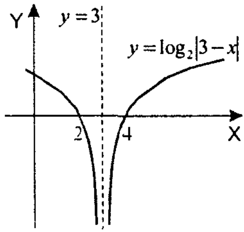

Рис. 56

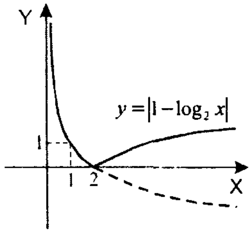

Рис. 57

335. 1) Указание: решите систему неравенств: $\begin{cases} \left||3-x|\right| > 0 \\ \left||x^3-8|\right| > 0. \end{cases}$

2) Указание: решите систему неравенств: $\begin{cases} \sqrt{x+1} > 0 \\ 1-8x^3 > 0. \end{cases}$

§19. Логарифмические уравнения

336. 1) второе уравнение следует из первого;

2) уравнения равносильны;

3) второе уравнение следует из первого;

4) $\log_8 x + \log_8(x-2) = 1$ и $\log_8 x(x-2) = 1$.

Решение: найдем корни второго уравнения, оно равносильно уравнению $x(x-2)=8$, откуда $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. Второй корень не удовлетворяет области определения первого уравнения, поэтому второе уравнение следует из первого. Ответ: второе уравнение следует из первого.

337. 1) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$. Решение: О.О.У. $x>5$. Тогда $\log_2(x-5)(x+2)=\log_2 8$; $x^2-3x-18=0$, откуда $x=-3$ (не удовлетворяет О.О.У.) и $x=6$. Ответ: $x=6$.

2) Указание: на своей О.О. уравнение равносильно $(x-2)(x+6)=3^2$.

3) Указание: на своей О.О. уравнение равносильно $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)=1$.

4) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=0$. Решение: О.О.У. $x>1$. Тогда $\lg(x-1)+\lg(x+1)=\lg\left(x^2-1\right)$, т.е. $x^2-1=1$, откуда $x=\sqrt{2}$ и $x=-\sqrt{2}$ – не удовлетворяет области определения. Ответ: $x=\sqrt{2}$.

338. 1), 2) Аналогично 3).

3) $\log_3\left(x^3-x\right)-\log_3 x=\log_3 3$. Решение: О.О.У. $\begin{cases} x^3-x>0 \\ x>0 \end{cases}$, откуда $x>1$.

Тогда $\log_3(x^3-x)-\log_3 x=\log_3\frac{x^3-x}{x}=\log_3(x^2-1)$, т.е. $x^2-1=3$. Тогда $x=2$ и $x=-2$ – не удовлетворяет области определения. Ответ: $x=2$.

339. 1) $\frac{1}{2}\lg(x^2+x-5)=\lg 5x+\lg\frac{1}{5x}$. Решение: О.О.У. искать достаточно сложно, поэтому выполним преобразования, а потом сделаем проверку.

Тогда $\lg\sqrt{x^2+x-5}=\lg\left(5x\cdot\frac{1}{5x}\right)=\lg 1$, т.е. $\sqrt{x^2+x-5}=1$, $x^2+x-5=1$, откуда $x=-3$ и $x=2$. Проверка показывает, что только второй корень удовлетворяет уравнению. Ответ: $x=2$.

2) Указание: уравнение равносильно $\lg\sqrt{x^2-4x-1}=\lg 2$. Аналогично 1).

340. 1) $\log_3(5x+3)=\log_3(7x+5)$. Решение: О.О.У. $\begin{cases}5x+3>0\\7x+5>0\end{cases}$, т.е. $x>-\frac{3}{5}$.

Тогда уравнение равносильно $5x+3=7x+5$, $x=-1$ (не удовлетворяет О.О.). Ответ: корней нет.

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(6x+8)$. Решение: О.О.У. $\begin{cases}3x-1>0\\6x+8>0\end{cases}$, т.е. $x>\frac{1}{3}$.

В этом случае под знаком логарифма стоят положительные числа и уравнение равносильно уравнению $3x-1=6x+8$, откуда $x=-3$ – не удовлетворяет О.О. Ответ: корней нет.

341. 1) $\log_7(x-1)\log_7 x=\log_7 x$. Решение: О.О.У. $x>1$. Перенесем все в правую часть и преобразуем: $\log_7(x-1)\log_7 x-\log_7 x=\log_7 x(\log_7(x-1)-1)=0$, откуда $\log_7 x=0$ или $\log_7(x-1)=1$. Тогда $x=1$ (не удовлетворяет области определения) или $x=8$. Ответ: $x=8$.

2), 3) Аналогично 1).

4) $\log_{\sqrt{3}}(x-2)\log_5 x=2\log_3(x-2)$. Решение: О.О.У. $x>2$. Перенесем все в правую часть и преобразуем, получим:

$\log_{\sqrt{3}}(x-2)\log_5 x-2\log_3(x-2)=\log_{\sqrt{3}}(x-2)\log_5 x-\log_{\sqrt{3}}(x-2)=$

$=\log_{\sqrt{3}}(x-2)(\log_5 x-1)$. Тогда $\log_{\sqrt{3}}(x-2)=0$ или $\log_5 x=1$. Из первого уравнения получаем $x=3$, а из второго – $x=5$. Ответ: $x=3$, $x=5$.

342. 1) Аналогично 2).

2) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2\\x^2y-2y+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3 xy=2\\y(x^2-2)+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=9\\9x-18/x+9=0\end{cases}$

Решение: область определения системы $x>0, y>0$. Решая систему, получаем $x=-2$ (не удовлетворяет О.О.) и $x=1$, тогда $y=9$. Ответ: (1; 9).

343. 1) Аналогично 2).

2) $\log_4 x^2 = 3$. Решение: О.О.У. $x^2 > 0$, т.е. $x \neq 0$. Тогда $x^2 = 4^3$, откуда $x = \pm 8$. Ответ: $x = \pm 8$.

3) $\log_3 x^3 = 0$. Решение: О.О.У. $x^3 > 0$, т.е. $x > 0$. Тогда $x^3 = 1$, откуда $x = 1$. Ответ: $x = 1$.

4) Аналогично 3).

344. 1) $\log_4 (x+2)(x+3) + \log_4 \dfrac{x-2}{x+3} = 2$. Решение: О.О.У. $\begin{cases}(x+2)(x+3) > 0 \\ \dfrac{x-2}{x+3} > 0\end{cases}$,

т.е. $x > 2$ или $x < -3$. Уравнение равносильно $\log_4\left((x+2)(x+3)\dfrac{x-2}{x+3}\right) = 2$,

откуда $(x+2)(x-2) = 4^2$, $x^2 - 4 = 16$, $x^2 = 20$, т.е. $x_1 = -2\sqrt{5}$ и $x_2 = 2\sqrt{5}$.

Оба корня удовлетворяют области определения. Ответ: $x = \pm 2\sqrt{5}$.

2)–4) аналогично 1).

345. 1) $2^{3\lg x} \cdot 5^{\lg x} = 1600$. Решение: область определения уравнени $x > 0$. Тогда $2^{3\lg x} \cdot 5^{\lg x} = 8^{\lg x} \cdot 5^{\lg x} = 40^{\lg x}$, т.е. $40^{\lg x} = 40^2$, откуда $\lg x = 2$, $x = 100$. Ответ: $x = 100$.

2) Аналогично 1).

3), 4) Указание: сделайте замену $\lg x = u$.

346. Ответ: 1), 2) равносильны.

347. 1) $\begin{cases}\lg x - \lg y = 7 \\ \lg x + \lg y = 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\lg x = 12 \\ 2\lg y = -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 10^6 \\ y = 10^{-1}\end{cases}$

Решение: О.О.С. $x > 0, y > 0$. Сложите уравнения системы, затем вычтите из второго уравнения первое. Ответ: $(10^6; 10^{-1})$.

2) $\begin{cases}\log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_2 \dfrac{1}{y} = 4 \\ xy = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 xy - \dfrac{3}{2}\log_2 y = 4 \\ xy = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 y = -2 \\ xy = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = \dfrac{1}{4} \\ x = 8\end{cases}$

Решение: О.О.С. $x > 0, y > 0$. Прибавьте к первому уравнению $\log_2 y$ (получим $\log_2 xy$) и тут же отнимите (получим $-\dfrac{3}{2}\log_2 y$). Далее подставьте $xy = 2$ в первое уравнение. Ответ: $\left(8; \dfrac{1}{4}\right)$.

348. Указание: область определения уравнений $x>0, x\neq 1$. Тогда

$\log_x a=\dfrac{1}{\log_a x}$. В 1), 2) $a=2$, в 3) и 4) $a=3$. Сделайте замену $u=\log_a x$.

349. 1) $\log_{x^2} 9+\log_{\sqrt{x}} 4=2$. Решение: область определения уравнения $x>0$, $x\neq 1$. Преобразуем уравнение:

$$\log_{x^2} 9+\log_{\sqrt{x}} 4=\frac{1}{2}\log_x 9+2\log_x 4=\log_x \sqrt{9}+\log_x 4^2=\log_x(3\cdot 16)=\log_x 48.$$

Т.е. $\log_x 48=2$, откуда $48=x^2$, $x=\pm 4\sqrt{3}$ (отрицательный корень не удовлетворяет области определения уравнения). Ответ: $x=4\sqrt{3}$.

2) Аналогично 1).

350. 1) Аналогично 2).

2) $\lg\left(2^x+x+4\right)=x-x\lg 5$. Решение: перепишем уравнение в виде: $\lg\left(2^x+x+4\right)+x\lg 5=x$, тогда: $\lg\left(2^x+x+4\right)+x\lg 5=\lg\left(2^x+x+4\right)+\lg 5^x=$ $=\lg 5^x(2^x+x+4)$; $x=\lg 10^x$, т.е. $\lg 5^x(2^x+x+4)=\lg 10^x$. Отсюда

$5^x(2^x+x+4)=10^x$. Т.к. $5^x\neq 0$, то $2^x+x+4=2^x$, и $x=-4$. Проверка показывает, что этот корень удовлетворяет исходному уравнению. Ответ: $x=-4$.

351. 1) Указание: сделайте замену $\lg(x+1)=u, \lg(x-1)=v$, тогда уравнение примет вид $u^2=uv+2v^2$, $(u-2v)(u+v)=0$. Т.е. $\lg(x+1)=2\lg(x-1)$ или $\lg(x+1)=-\lg(x-1)$. Дальше аналогично задачам 338, 339. См. также 2).

2) $2\log_5(4-x)\cdot\log_{2x}(4-x)=3\log_5(4-x)-\log_5 2x$. Решение: область определения уравнения: $\begin{cases}4-x>0\\2x>0\\2x\neq 1\end{cases}$, т.е. $0<x<4, x\neq 0{,}5$.

Преобразуем уравнение: $2\log_5(4-x)\cdot\log_{2x}(4-x)=2\log_5(4-x)\cdot\dfrac{\log_5(4-x)}{\log_5 2x}$,

т.е. $2\log_5(4-x)\cdot\dfrac{\log_5(4-x)}{\log_5 2x}=3\log_5(x-4)-\log_5 2x$. Домножим уравнение на $\log_5 2x\neq 0$, получим: $2\log_5^2(4-x)=3\log_5(4-x)\cdot\log_5 2x-\log_5^2 2x$. Заменим $\log_5(4-x)=u$, $\log_5 2x=v$, тогда уравнение примет вид

$2u^2 = 3uv - v^2$, $(2u - v)(u - v) = 0$. Т.е. $2\log_5(4-x) = \log_5 2x$ или $\log_5(4-x) = \log_5 2x$. Из первого уравнения находим $(4-x)^2 = 2x$, $x = 2$ и $x = 8$ (не удовлетворяет области определения). Из второго уравнения $4 - x = 2x$, $x = 4/3$. Ответ: $x = 2$, $x = 4/3$.

352. 1) Указание: $\log_x 25 = \dfrac{2}{\log_5 x}$. Замените $u = \log_5 x$. Аналогично 2).

2) $\sqrt{2\log_2^2 x + 3\log_2 x - 5} = \log_2 2x$. Решение: уравнение имеет смысл только при $x > 0$. Сделаем замену $\log_2 x = u$. Тогда $\sqrt{2u^2 + 3u - 5} = u + 1$. Подкоренное выражение неотрицательно при $u \ge 1$ или при $u \le -2{,}5$. При $u \ge -1$ правая часть неотрицательна, возведем в квадрат. Получим $2u^3 + 3u - 5 = (u+1)^2$, $u^2 + u - 6 = 0$, $u_1 = -3$ (не удовлетворяет условию $u \ge -1$) и $u_2 = 2$. Т.е. $\log_2 x = 2$, $x = 4$. Ответ: $x = 4$.

353. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $5\log_5 x + \log_a x - 4\log_{25} x = a$ имеет корни.

Решение: О.О.У. $x > 0$, кроме того, $a > 0, a \ne 1$. Преобразуем уравнение:

$$5\log_5 x + \log_a x - 4\log_{25} x = 5\log_5 x + \frac{\log_5 x}{\log_5 a} - 2\log_5 x.$$ Заменим $\log_5 x = u$,

тогда уравнение примет вид: $5u + \dfrac{1}{\log_5 a}u - 2u = a$, $\left(3 + \dfrac{1}{\log_5 a}\right)u = a$.

Последнее уравнение имеет решения при $\log_5 a \ne -\dfrac{1}{3}$, т.е. при $a \ne \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$. В остальных случаях уравнение разрешимо относительно u, а значит исходное уравнение разрешимо относительно x, т.к. множество значений функции $y = \log_5 x$ – вся вещественная прямая. Ответ: $a > 0, a \ne \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}, a \ne 1$.

§20. Логарифмические неравенства

354. Указание: 1) $3x - 2 > 0$; 2) $7 - 5x > 0$; 3) $x^2 - 2 > 0$; 4) $4 - x^2 > 0$.

355. 1)–5) Аналогично 6).

6) $\log_{2/3}(2 - 5x) < -2$. Решение: область определения неравенства $x < 0{,}4$. Т.к. $\dfrac{2}{3} < 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $2 - 5x > \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$, т.е. $5x < -0{,}25$, $x < -0{,}05$. Ответ: $x < -0{,}05$.

356. 1) Указание: $\lg 8+1=\lg 80$;

2) Указание: $2-\lg 4=\lg 25$;

3) Указание: решите систему неравенств: $\begin{cases} x-4<2 \\ x-4>0. \end{cases}$

4) Указание: решите систему неравенств: $\begin{cases} 3x-5<x+1 \\ 3x-5>0 \\ x+1>0. \end{cases}$

357. Указание: аналогично задаче 2 §20 учебника.

358. Указание: 1) $x^2-4x+3>0$; 2) $\frac{3x+2}{1-x}>0$.

3) $y=\sqrt{\lg x+\lg(x+2)}$. Решение: необходимо, чтобы выполнялась система неравенств: $\begin{cases} x>0 \\ x+2>0 \\ \lg x+\lg(x+2)\geq 0. \end{cases}$

При $x>0$ $\lg x+\lg(x+2)=\lg x(x+2)\geq 0$, т.е. $x(x+2)\geq 1$, откуда $x\geq -1+\sqrt{2}$ или $x\leq -1-\sqrt{2}$ (не удовлетворяет О.О.). Ответ: $x\leq -1+\sqrt{2}$.

4) Аналогично 3).

359. 1)–3) Аналогично 4).

4) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$. Решение: О.О.Н. $x>-1$. Преобразуем н-во:

$\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>0$, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x+3}{x+1}>0$, т.е. $\frac{2x+3}{x+1}<1$; $\frac{x+2}{x+1}<0$, $-2<x<-1$. С учетом О.О. получаем, что корней нет. Ответ: корней нет.

360. 1) Указание: данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x^2-4x+3>0 \\ x^2-4x+3<8 \end{cases}$. См. также задачу 3 §20 учебника, задачу 361.

2)–4) Аналогично 1).

361. 1) $\lg(x^2-8x+13)>0$. Решение: неравенство равносильно системе: $\begin{cases} x^2-8x+13>0 \\ x^2-8x+13>1 \end{cases}$. Заметим, что первое неравенство является следствием второго, поэтому достаточно решить только второе. $x^2-8x+12>0$, $(x-6)(x-2)>0$, откуда $x>6$ или $x<2$. Ответ: $x>6$, $x<2$.

2) Аналогично 1).

3) Аналогично 4).

4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6)\geq -3$. Решение: неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}x^2-5x-6>0\\ x^2-5x-6\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\end{cases},\ \begin{cases}x^2-5x-6>0\\ x^2-5x-6\leq 8\end{cases},\ \begin{cases}x^2-5x-6>0\\ x^2-5x-14\leq 0\end{cases},\ \begin{cases}(x-6)(x+1)>0\\ (x-7)(x+2)\leq 0\end{cases}.$$

Решения первого неравенства $x>6$ или $x<-1$, второго – $-2\leq x\leq 7$. Окончательно получаем $6<x\leq 7$ или $-2\leq x<-1$. Ответ: $6<x\leq 7$, $-2\leq x<-1$.

362. 1) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2 x^2>0$. Решение: О.О.Н.: $\begin{cases}x^2>0\\ \log_2 x^2>0\end{cases}$, получаем $|x|>1$.

Тогда исходное неравенство равносильно неравенству $\log_2 x^2<1$, т.е. $x^2<2$, $|x|<\sqrt{2}$. С учетом области определения $1<|x|<\sqrt{2}$. Ответ: $1<|x|<\sqrt{2}$.

2) Аналогично 1).

363. Указание: 1) $\log_{0,2}a=-\log_5 a$; 2) $\log_{0,1}a=-\lg a$.

364. Указание: сделайте замену 1) $\log_{0,2}x=u$; 2) $\log_{0,1}x=u$.

365. 1) Указание: сделайте замену $\lg x=u$.

2) $\log_3(2-3^{-x})<x+1-\log_3 4$. Решение: область определения неравенства $2-3^{-x}>0$, т.е. $x>\log_3\frac{1}{2}$. Преобразуем неравенство:

$$\log_3(2-3^{-x})<\log_3\frac{3^{x+1}}{4},\ \log_3(2-3^{-x})-\log_3\frac{3^{x+1}}{4}<0,\ \log_3\frac{4(2-3^{-x})}{3^{x+1}}<0,$$

откуда $\frac{4(2-3^{-x})}{3^{x+1}}<1$. Сделаем замену $3^x=u>0$, тогда $\frac{4\left(2-{}^1\!/_u\right)}{3u}<1$.

Домножим на $3u^2>0$, получим $4(2u-1)<3u^2$. Откуда $u>2$ или $u<\frac{2}{3}$, $3^x>2$ или $3^x<\frac{2}{3}$, $x>\log_3 2$ или $x<\log_3\frac{2}{3}$. С учетом О.О. $\log_3\frac{1}{2}<x<\log_3\frac{2}{3}$ или $x>\log_3 2$. Ответ: $\log_3\frac{1}{2}<x<\log_3\frac{2}{3}$, $x>\log_3 2$.

3) $\log_{x^2-3}(4x+7)>0$. Решение: О.О.Н. $\begin{cases}4x+7>0\\ x^2-3>0\\ x^2-3\neq 1\end{cases}$,

откуда $-1{,}75<x<-\sqrt{3}$ или $x>\sqrt{3}, x\neq 2$.

Тогда, если $x^2-3>1$, то данное неравенство равносильно неравенству $4x+7>1$, а если $0<x^2-3<1$, то $4x+7<1$. В первом случае получаем систему: $\begin{cases}x>2\\ 4x+7>1\end{cases}$, откуда $x>2$. Во втором случае: $\begin{cases}-2<x<2\\ 4x+7<1\end{cases}$, т.е. $x<-1{,}5$, с учетом области определения $-1{,}75<x<-1{,}5$.

Ответ: $x>2$, $-1{,}75<x<-1{,}5$.

4) Указание: рассмотрите два случая: $\frac{x-1}{5x-6}>1$, $0<\frac{x-1}{5x-6}<1$ (см. п.3)

366. $\frac{2}{3^x-1}\leq\frac{7}{9^x-2}$. Решение: сделаем замену $3^x=u>0$, тогда неравенство примет вид $\frac{2}{u-1}\leq\frac{7}{u^2-2}$, область определения которого $u\neq 1, u\neq\pm\sqrt{2}$.

Перенесем все в левую часть и преобразуем, получим неравенство $\frac{2u^2-7u+3}{(u-1)(u^2-2)}\leq 0$, решая которое методом интервалов, получим $u<-\sqrt{2}$ (не удовлетворяет условию $u>0$), $0{,}5\leq u<1$, $\sqrt{2}<u\leq 3$. Т.е. $0{,}5\leq 3^x<1$, $\sqrt{2}<3^x\leq 3$. Откуда $\log_3 0{,}5\leq x<0$ или $\log_3\sqrt{2}<x\leq 1$.

Ответ: $\log_3 0{,}5\leq x<0$, $\log_3\sqrt{2}<x\leq 1$.

367. $4^x\left(\sqrt{16^{1-x}-1}+2\right)<4\left|4^x-1\right|$. Решение: сделаем замену $4^x=u>0$, тогда неравенство примет вид $u\left(\sqrt{\frac{16}{u^2}-1}+2\right)<4|u-1|$,

$u\left(\sqrt{\frac{16}{u^2}-1}+2\right)=u\left(\sqrt{\frac{16-u^2}{u^2}}+2\right)=u\left(\frac{\sqrt{16-u^2}}{u}+2\right)=\sqrt{16-u^2}+2u$ (второе равенство справедливо т.к. $u > 0$). Таким образом, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{16-u^2}+2u<4|u-1|$, область определения которого $0<u\le 4$. Рассмотрим два случая.

Первый: $0<u<1$, тогда $\sqrt{16-u^2}+2u<4(1-u)$, $\sqrt{16-u^2}<4-6u$. Если $4-6u<0$, то неравенство, очевидно, не выполнено; при $4-6u\ge 0$ возведем обе части неравенства в квадрат. Получим $16-u^2<36u^2-48u+16$, $37u^2-48u>0$, откуда $u<0$ или $u>\frac{48}{37}$. С учетом всех ограничений в этом случае решений нет.

Второй случай: $1\le u\le 4$, тогда $\sqrt{16-u^2}+2u<4(u-1)$, $\sqrt{16-u^2}<2u-4$. Если $2u-4<0$, то неравенство, очевидно, не выполнено; при $2u-4\ge 0$ возведем обе части неравенства в квадрат. Получим $16-u^2<4u^2-16u+16$, $5u^2-16u>0$, откуда $u<0$ или $u>3{,}2$. С учетом всех ограничений окончательный ответ $3{,}2<u\le 4$. Т.е. $3{,}2<4^x\le 4$, $\log_4 3{,}2<x\le 1$.

Ответ: $\log_4 3{,}2<x\le 1$.

Упражнения к главе IV

368. 1) $\log_{15}225=\log_{15}15^2=2$; 2) $\log_4 256=\log_4 4^4=4$;

3) $\log_3\frac{1}{243}=\log_3 3^{-5}=-5$; 4) $\log_7\frac{1}{343}=\log_7 7^{-3}=-3$.

369. 1) $\log_{\frac{1}{4}}64=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}=-3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}81=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=-4$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=3$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{64}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=6$.

370. 1) $\log_{11}1=\log_{11}1^0=0$; 2) $\log_7 7=1$;

3) $\log_{16}64=\log_{16}16^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$; 4) $\log_{27}9=\log_{27}27^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$.

371. 1) $(0{,}1)^{-\lg 0{,}3}=10^{\lg 0{,}3}=0{,}3$; 2) $10^{-\lg 4}=10^{\lg\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$;

3) $5^{-\log_5 3}=5^{\log_5\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_6 4}=6^{\log_6 4}=4$.

372. 1) $4\log_{\frac{1}{2}}3-\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}27-2\log_{\frac{1}{2}}6=\log_{\frac{1}{2}}3^4-\log_{\frac{1}{2}}27^{\frac{2}{3}}-\log_{\frac{1}{2}}6^2=$

$=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3^4}{3^2\cdot 36}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=2$.

2) $\frac{2}{3}\lg 0{,}001+\lg\sqrt[3]{1000}-\frac{3}{5}\lg\sqrt{10000}=\frac{2}{3}\lg 10^{-3}+\lg 10-\frac{3}{5}\lg 10^2=-2+1-\frac{6}{5}=-2\frac{1}{5}$.

373. Указание: перейдите к логарифмам с натуральным (десятичным) основанием.

374. Указание: $\log_4 x=-\log_{\frac{1}{4}}x$, таким образом графики симметричны относительно оси OX.

375. Указание: 2) $\sqrt{5}>1$; 3) $\frac{1}{e}<1$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}<1$.

376. 1) См. рис. 58; 2) См. рис. 59.

377. 1) $y=\log_7(5-2x)$. Решение: необходимо, чтобы $5-2x>0$, отсюда $x<2{,}5$

2) $y=\log_2(x^2-2x)$. Решение: необходимо $x^2-2x>0$, отсюда $x<0$, $x>2$.

378. 1) $\log_{\frac{1}{2}}(7-8x)=-2$. Решение: О.О.У. $x<\frac{7}{8}$. Тогда $\log_{\frac{1}{2}}(7-8x)=\log_{\frac{1}{2}}4$;

$7-8x=4$, $x=\frac{3}{8}$. Ответ: $x=\frac{3}{8}$.

2) $\lg(x^2-2)=\lg x$. Решение: О.О.У. $\begin{cases}x^2-2>0\\ x>0\end{cases}$, откуда $x>\sqrt{2}$.

Тогда данное уравнение равносильно $x^2-2=x$, которое имеет корни $x=-1$ (не удовлетворяет О.О.) и $x=2$. Ответ: $x=2$.

379. 1) $\lg(x^2-2x)=\lg 30-1$. Решение: $\lg 30-1=\lg\frac{30}{10}=\lg 3$, тогда $x^2-2x=3$, т.е.. $x=3$ и $x=-1$. Ответ: $x=3$, $x=-1$.

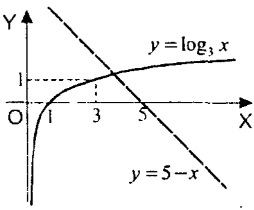

Рис. 58

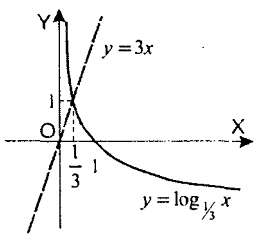

Рис. 59

2) $\log_3(2x^2+x)=\log_3 6-\log_3 2$. Решение: $\log_3 6-\log_3 2=\log_3 3$, тогда $2x^2+x=3$. Отсюда $x=1$ и $x=-1{,}5$. Ответ: $x=1$, $x=-1{,}5$.

3) Указание: сделайте замену $u=\lg x$.

4) Указание: сделайте замену $u=\log_2 x$.

380. 1) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$. Решение: О.О.У. $x>3$. Тогда уравнение равносильно $\log_2(x-2)(x-3)=1$, т.е. $(x-2)(x-3)=2$, откуда $x=4$ и $x=1$ (не удовлетворяет О.О.). Ответ: $x=4$.

2) $\log_3(5-x)+\log_3(-1-x)=3$. Решение: О.О.У. $x<-1$. Тогда уравнение равносильно $\log_3(5-x)(-1-x)=\log_3 3^3$, т.е. $(5-x)(-1-x)=27$, откуда $x=8$ (не удовлетворяет О.О.) и $x=-4$. Ответ: $x=-4$.

3) Указание: на О.О. уравнение равносильно $(x-2)x=3$.

4) Указание: на О.О. уравнение равносильно $(x-1)(x+4)=6$.

381. 1) $\log_2(x-5)\le 2$. Решение: О.О.Н. $x>5$. Тогда неравенство равносильно $x-5\le 4$, $x\le 9$. Совмещая с О.О., получаем $5<x\le 9$. Ответ: $5<x\le 9$.

2) $\log_3(7-x)>1$. Решение: О.О.Н. $x<7$. Тогда неравенство равносильно $7-x>3$, $x<4$. Ответ: $x<4$.

3) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)>-2$. Решение: О.О.Н. $x>-0{,}5$. Тогда $2x+1<4$, $x<1{,}5$. Совмещая с О.О., получим $-0{,}5<x<1{,}5$. Ответ: $-0{,}5<x<1{,}5$.

4) Указание: на О.О. неравенство равносильно $3-5x>8$.

382. 1) $\log_3(5-4x)<\log_3(x-1)$. Решение: О.О.Н. $1<x<1\frac{1}{4}$. Тогда неравенство равносильно $5-4x<x-1$; $5x>6$, $x>1\frac{1}{5}$. Совмещая с О.О., получаем $1\frac{1}{5}<x<1\frac{1}{4}$. Ответ: $1\frac{1}{5}<x<1\frac{1}{4}$.

2) $\log_{0,3}(2x+5)\le\log_{0,3}(x+1)$. Решение: О.О.Н. $x>-1$. Так как $0{,}3<1$, то данное неравенство равносильно неравенству $2x+5\ge x+1$, $x\ge -4$. С учетом О.О. получаем $x>-1$. Ответ: $x>-1$.

383. 1) $\lg(x^2+2x+2)<1$. Решение: область определения неравенства x – любое вещественное число. Так как $10>1$, исходное неравенство равносильно неравенству $x^2+2x+2<10$, откуда $-4<x<2$. Ответ: $-4<x<2$.

Проверь себя!

1. 1) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$; 2) $\lg 0{,}01 = \lg 10^{-2} = -2$;

3) $2^{\log_2 3} = 3$; 4) $3^{2\log_3 7} = 3^{\log_3 49} = 49$;

5) $\log_2 68 - \log_2 17 = \log_2 68:17 = \log_2 4 = 2$.

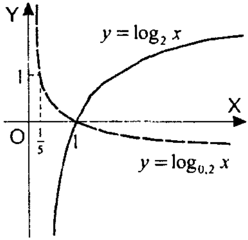

Рис. 60

2. См. рис. 60.

3. $\log_{0,2} 3 < \log_{0,2} 2{,}5$ т.к. $0{,}2 < 1$;

$\log_2 0{,}7 < \log_2 1{,}2$ т.к. $2 > 1$.

4. 1) Указание: на О.О. данное уравнение равносильно $3x + 1 = 25$;

2) Указание: на О.О. данное уравнение равносильно $x(x+2) = 3$;

3) Указание: на О.О. данное уравнение равносильно $x^2 - 6x + 9 = 3(x+3)$.

5. $$\begin{cases} \ln x - \ln y = \ln 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \dfrac{x}{y} = \ln 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 3y - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 5 \end{cases}.$$

6. 1) Указание: на О.О. данное неравенство равносильно $x - 1 \le 9$.

2) Указание: на О.О. данное неравенство равносильно $2 - x < 5$.

384. 1) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{-\frac{4}{3}} = 2\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{8}{3}$;

2) $\log_{\sqrt{5}} \dfrac{1}{25\sqrt[4]{5}} = \log_{\sqrt{5}} \left(\sqrt{5}\right)^{-4-\frac{1}{2}} = -4{,}5$;

3) $2^{2-\log_2 5} = \dfrac{2^2}{2^{\log_2 5}} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$;

4) $3{,}6^{\log_{3,6} 10 + 1} = 3{,}6 \cdot 10 = 36$;

5) $2\log_5 \sqrt{5} + 3\log_2 8 = 2\cdot\dfrac{1}{2}\log_5 5 + 3\cdot 3\log_2 2 = 1 + 9 = 10$;

6) $\log_2 \log_2 \log_2 2^{16} = \log_2 \log_2 16 = \log_2(4\log_2 2) = \log_2 4 = 2$.

385. 1) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{2}$. Решение: рассмотрим отношение этих чисел:

$\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\right)\Big/\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}\right)=\frac{\log_2 3}{\log_3 2}=\frac{1}{\log_3^2 2}>1$, т.к. $\log_3 2<1$. Т.е. первое число больше. Ответ: $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$.

2) $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{9}}9}$ и $\sqrt{8}$. Решение: преобразуем первое число:
$2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{9}}9}=\left(2^{\log_2 5}\right)^2\cdot 2^{\log_{\frac{1}{9}}9}=25\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{2}$. Т.е. необходимо сравнить $\frac{25}{2}$ и $\sqrt{8}$. Домножим оба числа на 2 и сравним числа 25 и $2\sqrt{8}$. Возведем в квадрат, получим 125>32, следовательно, первое число больше. Ответ: $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{9}}9}>\sqrt{8}$.

386. Указание: $\log_{30}64=\frac{\lg 64}{\lg 30}=\frac{6\lg 2}{1+\lg 3}=\frac{6(1-\lg 5)}{1+\lg 3}$.

387. Указание: $\log_{36}15=\frac{\lg 15}{\lg 36}=\frac{\lg 5+\lg 3}{2\lg 3+2\lg 2}=\frac{\lg 5+\lg 3}{2\lg 3+2(1-\lg 5)}$.

388. 1) Указание: так как 8 < 10, то необходимо $x>1$.

2) Указание: так как $\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$, то необходимо $0<x<1$.

389. 1) См. рис. 61.

2) См. рис. 62.

390. 1) $3^{4x}=10$. Решение: по определению логарифма $4x=\log_3 10$, откуда $x=\log_3\sqrt[4]{10}$. Ответ: $x=\log_3\sqrt[4]{10}$.

2) $2^{3x}=3$. Решение: $3x=\log_2 3$, откуда $x=\log_2\sqrt[3]{3}$. Ответ: $x=\log_2\sqrt[3]{3}$.

3) $1{,}3^{3x-2}=3$. Решение: $3x-2=\log_{1,3}3$; $3x=\log_{1,3}3+2$. Ответ: $x=\frac{\log_{1,3}3+2}{3}$.

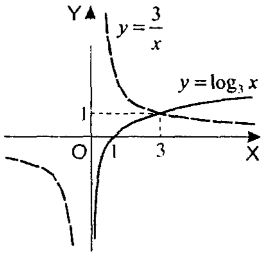

Рис. 61

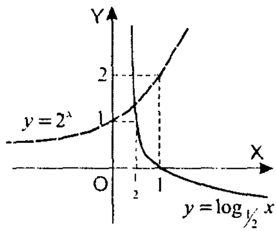

Рис. 62

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5+4x}=1{,}5$. Решение: по определению логарифма $5+4x=\log_{\frac{1}{3}}1{,}5$,

откуда $x=\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}1{,}5-5}{4}=\dfrac{-6+\log_3 2}{4}$. Ответ: $x=\dfrac{-6+\log_3 2}{4}$.

5) Указание: сделайте замену $u=4^x$, тогда $u^2-4u-14=0$.

6) $25^x+2\cdot5^x-15=0$. Решение: сделаем замену $5^x=u>0$, тогда $u^2+2u-15=0$. Откуда $u=-5$ (не удовлетворяет условию $u>0$) или $u=3$. Т.е. $5^x=3$, $x=\log_5 3$. Ответ: $x=\log_5 3$.

391. 1) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\frac{11}{12}$. Решение: О.О.У. $x>0$. Преобразуем левую часть: $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{3}\log_3 x=\frac{11}{6}\log_3 x$.

Т.е. $\log_3 x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\sqrt{3}$. Ответ: $x=\sqrt{3}$.

2) $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x=6$. Решение: О.О.У. $x>0$. Преобразуем левую часть: $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x=\log_3 x+2\log_3 x-\log_3 x=2\log_3 x$, то есть

$2\log_3 x=6$; $\log_3 x=3$, откуда $x=27$. Ответ: $x=27$.

3) $\log_3 x\cdot\log_2 x=4\log_3 2$. Решение: О.О.У. $x>0$. Преобразуем левую часть, получим: $\log_3 x\cdot\log_2 x=\log_3 x\cdot\dfrac{\log_3 x}{\log_3 2}=\dfrac{\log_3^2 x}{\log_3 2}$. Т.е. $\log_3^2 x=4\log_3^2 2$,

$\log_3 x=\pm2\log_3 2$, откуда $\log_3 x=\log_3 4$ или $\log_3 x=\log_3\frac{1}{4}$. Окончательно получаем $x=4$ или $x=\frac{1}{4}$. Ответ: $x=4$, $x=\frac{1}{4}$.

4) $\log_5 x\cdot\log_3 x=9\log_5 3$. Решение: О.О.У. $x>0$. Преобразуем левую часть: $\log_5 x\cdot\log_3 x=\dfrac{\log_5 x\cdot\log_5 x}{\log_5 3}=\dfrac{\log_5{}^2 x}{\log_5 3}$. Т.е. $\log_5{}^2 x=9\log_5{}^2 3=\log_5{}^2 3^3$,

отсюда $x=27$ или $x=\frac{1}{27}$. Ответ: $x=27$, $x=\frac{1}{27}$.

392. 1) $\log_3(2-x^2)-\log_3(-x)=0$. Решение: $\log_3\dfrac{(2-x^2)}{-x}=1$; $\dfrac{(2-x^2)}{-x}=3$;

$x^2-x-2=0$. Т.е. $x=-1$ и $x=2$ (посторонний корень). Ответ: $x=-1$.

2) $\log_5(x^2-12)-\log_5(-x)=0$. Решение: $\log_5\frac{(x^2-12)}{-x}=0$; $\frac{(x^2-12)}{-x}=1$; $x^2+x-12=0$. Т.е. $x=3$ (посторонний корень) и $x=-4$. Ответ: $x=-4$.

3) $\log_2\sqrt{x-3}+\log_2\sqrt{3x-7}=2$. Решение: О.О.У. $x>3$. Тогда

$\log_2\sqrt{x-3}+\log_2\sqrt{3x-7}=\frac{1}{2}\log_2(x-3)(3x-7)$, т.е. $(x-3)(3x-7)=16$;

$3x^2-16x+5=0$. Тогда $x=\frac{1}{3}$ (не удовлетворяет ОО) и $x=5$. Ответ: $x=5$.

4) $\lg(x+6)-\lg\sqrt{2x-3}=\lg 4$. Решение: О.О.У. $x>1{,}5$. Преобразуем уравнение: $\lg\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}=\lg 4$. Т.е. $\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}=4$, $x+6=4\sqrt{2x-3}$. С учетом О.О. обе части уравнения неотрицательны, поэтому можно возвести в квадрат: $x^2+12x+36=32x-48$, $x^2-20x+84=0$, откуда $x=6$ или $x=14$. Ответ: $x=6$, $x=14$.

393. 1) Указание: уравнение равносильно $\log_2 x^2+\log_2 x^2+\frac{1}{6}\log_2 x^2=13$, т.е. $\log_2 x^2=6$.

2) Указание: ур-е равносильно $-\log_2(x+2)-\log_2(x-3)=-\frac{2}{2}\log_2(-4x-8)$; $(x+2)(x-3)=-4x-8$.

394. 1) $\log_{\frac{1}{x}}5+\log_{\frac{1}{x^2}}12+\frac{1}{2}\log_x 3=1$. Решение: О.О.У. $x>0, x\neq 1$. Тогда:

$\log_{\frac{1}{x}}5+\log_{\frac{1}{x^2}}12+\frac{1}{2}\log_x 3=-\log_x 5-\frac{1}{2}\log_x 12+\frac{1}{2}\log_x 3=\log_x\left(\frac{5\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)$,

т.е. $\log_x\left(\frac{5\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)=1$, откуда $x=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=2{,}5$. Ответ: $x=2{,}5$.

2) Указание: уравнение равносильно $\log_x\sqrt{7}+\log_x 9-\log_x\sqrt{28}=\log_x x$, т.е. $\frac{\sqrt{7}\cdot 9}{\sqrt{28}}=x$.

395. 1) $\log_2\frac{2}{x-1}=\log_2 x$. Решение: О.О.У. $\begin{cases}\frac{2}{x-1}>0\\ x>0\end{cases}$, откуда $x>1$. Тогда уравнение равносильно $\frac{2}{x-1}=x$, $x^2-x-2=0$. Т.е. $x=-1$ (не удовлетворяет О.О.) и $x = 2$. Ответ: $x = 2$.

2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{10}{7-x} = \log_{\frac{1}{2}} x$. Решение: О.О.У. $\begin{cases} \frac{10}{7-x} > 0 \\ x > 0 \end{cases}$, откуда $0 < x < 7$. Тогда уравнение равносильно $\frac{10}{7-x} = x$; $x^2 - 7x + 10 = 0$. Т.е. $x = 2$ и $x = 5$. Ответ: $x = 2$, $x = 5$.

3) $\lg \frac{x+8}{x-1} = \lg x$. Решение: О.О.У. $\begin{cases} \frac{x+8}{x-1} > 0 \\ x > 0 \end{cases}$, откуда $x > 1$. Тогда уравнение равносильно $\frac{x+8}{x-1} = x$; $x^2 - 2x - 8 = 0$. Т.е. $x = 4$ и $x = -2$ (не удовлетворяет О.О.). Ответ: $x = 4$.

4) $\lg \frac{x-4}{x-2} = \lg x$. Решение: О.О.У. $\begin{cases} \frac{x-4}{x-2} > 0 \\ x > 0 \end{cases}$, откуда $0 < x < 2$ или $x > 4$.

Тогда уравнение равносильно $\frac{x-4}{x-2} = x$, $\frac{x-4-x(x-2)}{x-2} = 0$, $\frac{-x^2+3x-4}{x-2} = 0$, откуда получаем, что корней нет. Ответ: корней нет.

396. 1) $\log_{\sqrt{6}}(x-4) + \log_{\sqrt{6}}(x+1) \le 2$. Решение: О.О.Н. $x > 4$. Тогда данное неравенство равносильно $\log_{\sqrt{6}}(x-4)(x+1) \le \log_{\sqrt{6}} 6$; $(x-4)(x+1) \le 6$; $x^2 - 3x - 10 \le 0$. Отсюда $-2 \le x \le 5$. С учетом О.О. получаем $4 < x \le 5$. Ответ: $4 < x \le 5$.

2) Указание: на ОО неравенство равносильно $\log_{3\sqrt{2}}(x-5)(x+12) \le \log_{3\sqrt{2}} 18$; $(x-5)(x+12) \le 18$; $x^2 + 7x - 78 \le 0$.

3) Указание: на О.О. данное неравенство равносильно $\log_3 \frac{8x^2+x}{x^3} > \log_3 9$; $\frac{8x^2+x}{x^3} > 9$; $9x^3 - 8x^2 - x < 0$; $x(9x^2 - 8x - 1) < 0$.

4) Указание: на О.О. данное неравенство равносильно $\log_2 \frac{x(x-3)}{4} > 0$; $x(x-3) > 4$; $x^2 - 3x - 4 > 0$.

5) Указание: на О.О. данное неравенство равносильно $\log_{\frac{1}{5}} \frac{x-10}{x+2} \ge \log_{\frac{1}{5}} 5$;

$\frac{x-10}{x+2} \le 5$; $4x \ge -20$.

6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+10)+\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+4) > -2$. Решение: О.О.Н. $x > -4$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+10)(x+4) > -2$.

Т.к. $\frac{1}{\sqrt{7}} < 1$, то необходимо $(x+10)(x+4) < 7$, $x^2+14x+33 < 0$, откуда $-11 < x < -3$. С учетом О.О. окончательно получаем: $-4 < x < -3$.

Ответ: $-4 < x < -3$.

397. 1) $4\log_4 x - 33\log_x 4 \le 1$. Решение: область определения неравенства $x > 0, x \ne 1$. Тогда $4\log_4 x - 33\log_x 4 = 4\log_4 x - 33\cdot\frac{1}{\log_4 x}$. Сделаем замену $u = \log_4 x$, получим $4u - \frac{33}{u} \le 1$, $\frac{4u^2-u-33}{u} \le 0$, откуда $u \le \frac{1-\sqrt{397}}{8}$ или $0 < u \le \frac{1+\sqrt{397}}{8}$. Тогда $0 < \log_4 x \le \frac{1+\sqrt{397}}{8}$, $1 < x \le 4^{\frac{1+\sqrt{397}}{8}}$.

Ответ: $1 < x \le 4^{\frac{1+\sqrt{397}}{8}}$.

2) Аналогично 1).

398. Доказать, что если последовательность положительных чисел является геометрической прогрессией, то их логарифмы по одному основанию образуют геометрическую прогрессию.

Решение: обозначим эти три числа b_1, b_2, b_3. Тогда по свойству геометрической прогрессии $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$. Прологарифмируем это равенство, получим $\log_a b_2^2 = \log_a(b_1 b_3)$, $2\log_a b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_3$, $\log_a b_2 = \frac{\log_a b_1 + \log_a b_3}{2}$, т.е. $\log_a b_1$, $\log_a b_2$ и $\log_a b_3$ образуют арифметическую прогрессию (по свойству арифметической прогрессии).

399. Найти три последовательных члена геометрической прогрессии, если их сумма равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3.

Решение: обозначим эти три числа b_1, qb_1, q^2b_1. Тогда:

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2)=62 \\ \lg b_1 + \lg(qb_1) + \lg(q^2b_1) = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=62 \\ 3\lg b_1 + 3\lg q = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=62 \\ \lg b_1 + \lg q = 1 \end{cases};$$

$\begin{cases} b_1(1+q+q^2)=62 \\ \lg(b_1q)=1 \end{cases}$; $\begin{cases} b_1(1+q+q^2)=62 \\ b_1q=10 \end{cases}$

Откуда $\frac{1+q+q^2}{q}=\frac{62}{10}$, $q=5$ или $q=\frac{1}{5}$. В первом случае $b_1=2$, во втором $b_1=50$. Ответ: 2, 10, 50 или 50, 10, 2.

400. 1) $y=\frac{1}{\log_2 x}$. Решение: О.О.Ф. $x>0, x\neq 1$. При $0<x<1$ $y=\log_2 x<0$ и является возрастающей функцией, следовательно $y=\frac{1}{\log_2 x}<0$ и убывает. Аналогично при $x>1$ $y=\frac{1}{\log_2 x}>0$ и убывает (см. рис. 63).

2) Аналогично 1). См. рис. 64.

401. 1) $x^{\lg 9}+9^{\lg x}=6$. Решение: О.О.У. $x>0$. Рассмотрим $\lg\left(9^{\lg x}\right)=\lg x\cdot\lg 9=\lg 9\cdot\lg x=\lg\left(x^{\lg 9}\right)$, откуда $x^{\lg 9}=9^{\lg x}$, т.е. уравнение равносильно уравнению $2\cdot 9^{\lg x}=6$, $3^{2\lg x}=3$, $2\lg x=1$, $x=\sqrt{10}$.

Ответ: $x=\sqrt{10}$.

2) $x^{3\lg^3 x-\frac{2}{3}\lg x}=100\sqrt[3]{10}$. Решение: О.О.У. $x>0$. Возьмем логарифм по основанию 10 от обеих частей уравнения. Получим:

$\left(3\lg^3 x-\frac{2}{3}\lg x\right)\lg x=\lg\left(100\sqrt[3]{10}\right)$. Сделаем замену $\lg x=u$, тогда

$\left(3u^3-\frac{2}{3}u\right)u=2\frac{1}{3}$, $9u^4-2u^2-7=0$. Это уравнение квадратное относи-

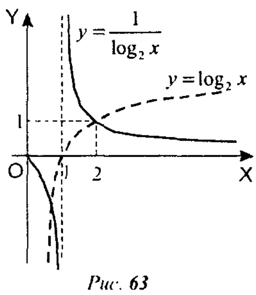

Рис. 63

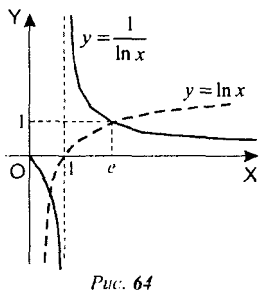

Рис. 64

тельно u^2, его корни $u^2=1$ и $u^2=-\frac{7}{9}$ (посторонний корень). Тогда $\lg x=\pm 1$, $x=10$ или $x=0{,}1$. Ответ: $x=10$, $x=0{,}1$.

402. Аналогично задаче 348.

403. 1) $\log_2(2^x-5)-\log_2(2^x-2)=2-x$. Решение: преобразуем уравнение

$\log_2(2^x-5)-\log_2(2^x-2)=\log_2\frac{2^x-5}{2^x-2}$, $2-x=\log_2 2^{2-x}$. То есть

$\log_2\frac{2^x-5}{2^x-2}=\log_2 2^{2-x}$, $\frac{2^x-5}{2^x-2}=2^{2-x}$. Сделаем замену $2^x=u>0$, тогда

$\frac{u-5}{u-2}=\frac{4}{u}$, $\frac{u^2-5u-4u+8}{(u-2)u}=0$, т.е. $u^2-9u+8=0$, откуда $u=1$ и $u=8$.

Тогда $2^x=1$ или $2^x=8$, $x=0$ или $x=3$. Проверка показывает, что первый корень является посторонним. Ответ: $x=3$.

2) Аналогично 4).

3) Аналогично 1).

4) $\log_{3x+7}(5x+3)=2-\log_{5x+3}(3x+7)$. Решение: область определения уравнения $\begin{cases}5x+3>0,\ 5x+3\neq 1\\ 3x+7>0,\ 3x+7\neq 1\end{cases}$, $x>-0{,}6,\ x\neq -0{,}4$.

Тогда $\log_{3x+7}(5x+3)=2-\frac{1}{\log_{3x+7}(5x+3)}$. Заменим $\log_{3x+7}(5x+3)=u$, тогда $u=2-\frac{1}{u}$, $\frac{u^2-2u+1}{u}=0$, $u=1$. Т.е. $\log_{3x+7}(5x+3)=1$; $3x+7=5x+3$, $x=2$. Ответ: $x=2$.

404. 1) $\log_{1/3}\left(2^{x+2}-4^x\right)\geq -2$. Решение: данное неравенство равносильно

$0<2^{x+2}-4^x\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$. Сделаем замену $2^x=u>0$, тогда: $\begin{cases}4u-u^2>0\\ 4u-u^2\leq 9,\\ u>0.\end{cases}$

тогда $0<u<4$, $0<2^x<4$, $x<2$. Ответ: $x<2$.

2) Аналогично 1).

405. $\log_2 x\cdot\log_2(x-3)+1=\log_2(x^2-3x)$. Решение: О.О.У. $\begin{cases}x>0\\ x-3>0\\ x^2-3x>0\end{cases}$, т.е.

$x>3$. Тогда $\log_2(x^2-3x)=\log_2 x+\log_2(x-3)$, откуда следует, что $\log_2 x\cdot\log_2(x-3)+1=\log_2 x+\log_2(x-3)$, $(\log_2 x-1)(\log_2(x-3)-1)=0$, т.е. $\log_2 x=1$ или $\log_2(x-3)=1$. Из первого уравнения получаем $x=2$ (не удовлетворяет О.О.), из второго уравнения – $x=5$.

Ответ: $x=5$.

406. $\dfrac{1}{\log_a x-1}+\dfrac{1}{\log_a x^2+1}<-\dfrac{3}{2}$. Решение: О.О.Н. $\begin{cases} x>0 \\ \log_a x\neq 1 \\ \log_a x\neq -0{,}5 \end{cases}$, т.е. $x>0, x\neq a, x\neq a^{-0,5}$. Сделаем замену $u=\log_a x$, тогда $\dfrac{1}{u-1}+\dfrac{1}{2u+1}<-\dfrac{3}{2}$.

$\dfrac{2(2u+1)+2(u-1)+3(2u+1)(u-1)}{2(u-1)(2u+1)}<0$, $\dfrac{3(2u^2+u-1)}{2(u-1)(2u+1)}<0$, $\dfrac{3(2u-1)(u+1)}{2(u-1)(2u+1)}<0$.

Решая методом интервалов, получим $-1<u<-0{,}5$ или $0{,}5<u<1$, т.е. $-1<\log_a x<-0{,}5$ или $0{,}5<\log_a x<1$.

Если $0<a<1$, то получаем $a^{-0,5}<x<a^{-1}$, $a<x<a^{0,5}$.

Если $a>1$, то получаем $a^{-1}<x<a^{-0,5}$, $a^{0,5}<x<a$.

Ответ: при $0<a<1$ $a^{-0,5}<x<a^{-1}$, $a<x<a^{0,5}$,

при $a>1$ $a^{-1}<x<a^{-0,5}$, $a^{0,5}<x<a$.

Глава V
Тригонометрические формулы

§21. Радианная мера угла

Формулы перехода:

α рад $= \left(\dfrac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^{\circ}$; $\alpha^{\circ} = \dfrac{\pi}{180}\cdot\alpha$ рад;

1 рад $\approx 57{,}3^{\circ}$.

Основные геометрические формулы:

$l = aR$, где l – длина дуги, R – радиус окружности, α – центральный угол в радианах;

$S = \dfrac{aR^2}{2}$, где S – площадь кругового сектора, R – радиус окружности, α – центральный угол в радианах.

407. 1) $40' = \dfrac{\pi}{180}\cdot 40 = \dfrac{2\pi}{9}$; 2) $120^{\circ} = \dfrac{\pi}{180}\cdot 120 = \dfrac{2\pi}{3}$;

3) $150^{\circ} = \dfrac{\pi}{180}\cdot 150 = \dfrac{5\pi}{6}$; 4) $75 = \dfrac{\pi}{180}\cdot 75 = \dfrac{5\pi}{12}$;

5) $32^{\circ} = \dfrac{\pi}{180}\cdot 32 = \dfrac{8\pi}{45}$; 6) $140^{\circ} = \dfrac{\pi}{180}\cdot 140 = \dfrac{7\pi}{9}$.

408. 1) $\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{180\cdot\pi}{6\cdot\pi} = 30^{\circ}$; 2) $\dfrac{\pi}{9} = \dfrac{180\cdot\pi}{9\cdot\pi} = 20^{\circ}$;

3) $\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{180\cdot 3\pi}{4\cdot\pi} = 135^{\circ}$; 4) $2 = \dfrac{180\cdot 2}{\pi} = \left(\dfrac{360}{\pi}\right)^{\circ}$;

5) $3 = \dfrac{180\cdot 3}{\pi} = \left(\dfrac{540}{\pi}\right)^{\circ}$; 6) $0{,}36 = \left(\dfrac{180\cdot 0{,}36}{\pi}\right)^{\circ} = \left(\dfrac{64{,}8}{\pi}\right)^{\circ}$;

409. Ответы: а) $60^{\circ} = \dfrac{\pi}{3}$; б) $45^{\circ} = \dfrac{\pi}{4}$ и $90^{\circ} = \dfrac{\pi}{2}$; в) $90^{\circ} = \dfrac{\pi}{2}$; г) $120^{\circ} = \dfrac{2\pi}{3}$.

410. Решение: по формуле $R = \frac{l}{\alpha} = \frac{0,36}{0,9} = 0,4$. Ответ: 0,4 м.

411. Решение: по формуле $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{0,03}{0,015} = 2$ рад. Ответ: 2 рад.

412. Решение: по формуле $S = \frac{\alpha R^2}{2} = \frac{3\pi}{8} \cdot 1^2$ см^2. Ответ: $\frac{3\pi}{8}$ см^2.

413. Решение: по формуле $\alpha = \frac{2S}{R^2} = \frac{2 \cdot 0,000625}{0,000625} = 2$. Ответ: 2 рад.

414. $0,5^\circ = \frac{\pi}{360}$; $36^\circ = \frac{\pi}{5}$; $159^\circ = \frac{159\pi}{180}$; $108^\circ = \frac{3\pi}{5}$;

$\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$; $\frac{3\pi}{10} = 54^\circ$; $2,5 = \left(\frac{450}{\pi}\right)^\circ$; $1,8 = \left(\frac{324}{\pi}\right)^\circ$.

415. См. табл. 1.

Таблица 1

Угол, °	30	36	$\frac{90}{\pi}$	$\frac{720}{\pi}$	$\frac{360}{\pi}$	$\frac{180}{\pi}$
Угол, рад	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1}{2}$	4	2	1
Радиус, см	2	$\frac{10}{\pi}$	10	5	5	10
Длина дуги, см	$\frac{\pi}{3}$	2	5	20	10	10
Площадь сектора, см^2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{10}{\pi}$	25	50	25	50

§22. Поворот точки вокруг начала координат

416. Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1;0) на угол:

1), 2) Аналогично 3).

3) $-6,5\pi$. Решение: $-6,5\pi = -3 \cdot 2\pi - \pi/2$, поэтому поворот этой точки на $-6,5\pi$ совпадает с поворотом этой точки на $-\pi/2$, т.е. в точку (0;–1).

4) $\pi/4$. Решение: см. рис. 65. Из геометрических соображений длина отрезка OA равна

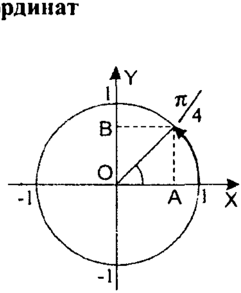

Рис. 65

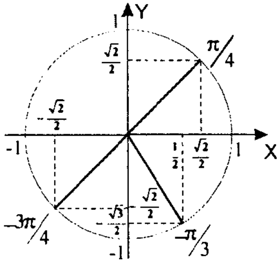

Рис. 66

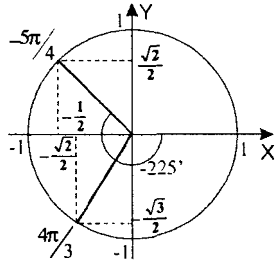

Рис. 67

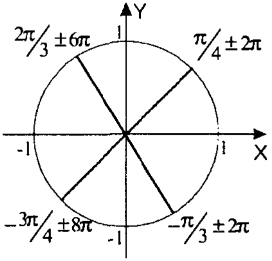

Рис. 68

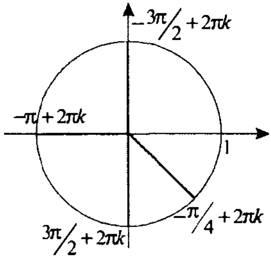

Рис. 69

длине отрезка OB и равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Т.е. получим точку $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5) Аналогично 3).

6) Указание: $-45^\circ = -\frac{\pi}{4}$, аналогично 4).

417. 1)–3) См. рис. 66. 4)–6) См. рис. 67.

418. См. рис. 68.

419. См. рис 69.

420. Ответы: 1) $(-1; 0)$; 2) $(0; 1)$; 3) $(0; 1)$;

4) $(-1; 0)$; 5) $(-1; 0)$; 6) $(-1; 0)$.

421. 1) $(0; 1)$; 2) $(0; 1)$; 3) $(0; -1)$; 4) $(0; -1)$

422. 1), 2) Указание: рассмотрите два случая ($+\pi$ и $-\pi$).

3), 4) Указание: рассмотрите отдельно случай четного и нечетного k.

423. См. рис. 70, k – целое число.

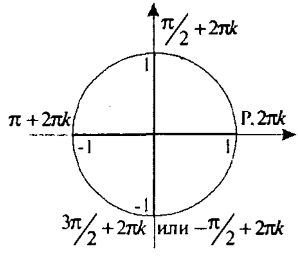

Рис. 70

424. Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом из точки P (1; 0) на угол:

1) Решение: т.к. $0<1<\frac{\pi}{2}$, то точка P лежит на единичной окружности в первой четверти. Ответ: I четверть.

2) Указание: $\frac{\pi}{2}<2{,}25<\pi$, аналогично 1).

3) Указание: $\pi<2{,}25<\frac{3\pi}{2}$, аналогично 1).

4) Указание: $\frac{3\pi}{2}<2{,}25<2\pi$, аналогично 1).

425. Найти число x, где $0\le x<2\pi$ и натуральное число k, такое, чтобы выполнялось равенство $a=x+2\pi k$, если:

1) Решение: $a=9{,}8\pi=1{,}8\pi+8\pi=1{,}8\pi+4\cdot 2\pi$, откуда $x=1{,}8\pi$, $k=4$.

2) Решение: $a=7\frac{1}{3}\pi=1\frac{1}{3}\pi+6\pi=1\frac{1}{3}\pi+3\cdot 2\pi$, откуда $x=\frac{4\pi}{3}$, $k=3$.

3) Решение: $a=\frac{11}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi+4\pi=\frac{3}{2}\pi+2\cdot 2\pi$, откуда $x=\frac{3\pi}{2}$, $k=2$.

4) Решение: $a=\frac{17}{3}\pi=\frac{5\pi}{3}+4\pi=\frac{5\pi}{3}+2\cdot 2\pi$, откуда $x=\frac{5\pi}{3}$, $k=2$.

426. Указание: 1) $4{,}5\pi=4\pi+\frac{\pi}{2}$; 2) $5{,}5\pi=6\pi-\frac{\pi}{2}$; 4) $-7\pi=-8\pi+\pi$.

427. 1) Указание: $-\frac{3\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}+2\pi(k-1)$, см. рис 70.

2) Указание: $\frac{5\pi}{2}+2\pi k=-\frac{\pi}{2}+2\pi(k+2)$, см. рис 70.

3) Указание: $\frac{7\pi}{2}+2\pi k=\frac{3\pi}{2}+2\pi(k+2)$, см. рис 70.

4) Указание: $-\frac{9\pi}{2}+2\pi k=-\frac{\pi}{2}+2\pi(k-4)$, см. рис 70.

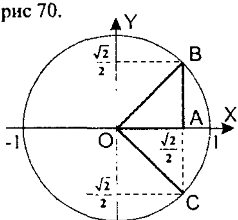

Рис. 71

428. 1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Решение: рассмотрим треугольник AOB (см. рис 71). Длина стороны AO равна длине AB и равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Т.е треугольник AOB прямоугольный равнобедренный, $\angle AOB=45^\circ=\pi/4$. Т.е. $\angle AOC=-\pi/4$. Значит все такие углы имеют вид $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, где k – целое число.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, где k – целое число.

2)–4) Аналогично 1).

§23. Определение синуса, косинуса и тангенса угла

Определение:

sin α – ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) на угол α вокруг начала координат;

cos α – абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) на угол α вокруг начала координат.

$\sin\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\pi k, k\in\mathbf{Z}$; $\quad\cos\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbf{Z}$;

$\sin\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbf{Z}$; $\quad\cos\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=2\pi k, k\in\mathbf{Z}$;

$\sin\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbf{Z}$; $\quad\cos\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=\pi+2\pi k, k\in\mathbf{Z}$.

$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

429. См. рис. 72.

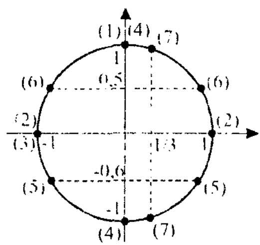

Рис. 72

430. 1) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}=1+(-1)=0$;

2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=-1+0=-1$;

3) $\sin\pi-\cos\pi=0-(-1)=1$;

4) $\sin 0-\cos 2\pi=0-1=-1$;

5) $\sin\pi+\sin 1{,}5\pi=\sin\pi+\sin\frac{3\pi}{2}=0+(-1)=-1$;

6) $\sin 0+\cos 2\pi=0+1=1$.

431. 1) $\beta=3\pi$. $\sin\beta=\sin 3\pi=\sin(\pi+2\pi)=\sin\pi=0$, $\cos\beta=\cos\pi=-1$.

2) $\beta=4\pi$. $\sin\beta=\sin 4\pi=\sin(0+2\cdot 2\pi)=\sin 0=0$, $\cos\beta=\cos 0=1$.

3) $\beta=3{,}5\pi$. $\sin\beta=\sin 3{,}5\pi=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2\pi\right)=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$, $\cos\beta=\cos\frac{3}{2}\pi=0$.

4) $\beta=\frac{5}{2}\pi$. $\sin\beta=\sin\frac{5}{2}\pi=\sin\left(\frac{1}{2}\pi+2\pi\right)=\sin\frac{1}{2}\pi=1$, $\cos\beta=\cos\frac{1}{2}\pi=0$.

5) $\beta=\pi k, k\in\mathbf{Z}$. Решение: если $k=2n$, то $\sin\beta=\sin 2\pi n=0$ и $\cos\beta=$ $=\cos 2\pi n=1$. Если же $k=2n+1$, то $\sin\beta=\sin(2\pi n+\pi)=\sin\pi=0$, а $\cos\beta=\cos(2\pi n+\pi)=\cos\pi=-1$. Ответ: 0 и $(-1)^k$.

6) Аналогично 5).

432. 1) $\sin 3\pi-\cos\frac{3\pi}{2}=\sin\pi-\cos\frac{3\pi}{2}=0-0=0$. Ответ: 0.

2) $\cos 0-\cos 3\pi+\cos 3{,}5\pi=\cos 0-\cos\pi+\cos\frac{3}{2}\pi=1+1+0=2$. Ответ: 0.

3) $\sin\pi k+\cos 2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$. Решение: если k четное, то $\sin\pi k+\cos 2\pi k=\sin 0+\cos 0=0+1=1$; если k нечетное, то $\sin\pi k+\cos 2\pi k=\sin\pi+\cos 0=0+1=1$. Ответ: 1.

4) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}-\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}$. Решение: точка $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ совпадает с точкой $\frac{\pi}{2}$ при четном k и с точкой $-\frac{\pi}{2}$ при нечетном k. Поэтому:

$\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}-\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}=0-\sin\left(2\pi k+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$. Ответ: -1.

433. 1) $\operatorname{tg}\pi+\cos\pi=\frac{\sin\pi}{\cos\pi}+\cos\pi=\frac{0}{-1}+(-1)=-1$;

2) $\operatorname{tg}0^\circ-\operatorname{tg}180^\circ=\operatorname{tg}0-\operatorname{tg}\pi=\frac{\sin 0}{\cos 0}-\frac{\sin\pi}{\cos\pi}=\frac{0}{1}-\frac{0}{-1}=0$;

3) $\operatorname{tg}\pi+\sin\pi=\frac{\sin\pi}{\cos\pi}+\sin\pi=\frac{0}{-1}+0=0$;

4) $\cos\pi-\operatorname{tg}2\pi=\cos\pi-\frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi}=-1-\frac{0}{1}=-1$.

434. 1) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=1{,}5$;

2) $5\sin\frac{\pi}{4}+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-5\cos\frac{\pi}{4}-10\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=5\frac{\sqrt{2}}{2}+3-5\frac{\sqrt{2}}{2}-10=-7$;

3) $\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right):\cos\frac{\pi}{6}=\left(2\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right):\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

4) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=-\frac{1}{4}$.

435. 1) $2\sin x=0$. Решение: исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x=0$, откуда $x=\pi k, k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pi k, k\in\mathbf{Z}$.

2) $\frac{1}{2}\cos x = 0$. Решение: $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3) $\cos x - 1 = 0$. Решение: $\cos x = 1$, т.е. $x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

4) $1 - \sin x = 0$. Решение: $\sin x = 1$, отсюда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

436. Указание: $\sin x$ и $\cos x$ могут принимать любые значения из промежутка $[-1;\ 1]$, и только их.

437. 1) $2\sin\alpha + \sqrt{2}\cos\alpha = 2\sin\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + 1$;

2) $0{,}5\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha = 0{,}5\cos\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} = 0{,}5\frac{1}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -1\frac{1}{4}$

3) $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha = \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$;

4) $\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{3} = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

438. 1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$;

2) $2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 6 - 3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$;

3) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{2}{3}$;

4) $2\cos^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12}$.

439. 1) $\sin x = -1$. Решение: $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$

2) $\cos x = -1$. Решение: $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $\sin 3x = 0$. Решение: $3x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, т.е. $x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$

4) $\cos 0{,}5x = 0$. Решение: $0{,}5x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, т.е. $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

5) $\sin\left(\frac{x}{2}+6\pi\right)=1$. Решение: $\frac{x}{2}+6\pi=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbf{Z}$, т.е. $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k-6\pi$, откуда $x=\pi+2\cdot 2\pi(k-3)$, $k\in\mathbf{Z}$. Но если k «пробегает» все множество $\mathbf{Z}$, то и $k-3$ «пробегает» все $\mathbf{Z}$. Поэтому $x=\pi+4\pi k, k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\pi+4\pi k, k\in\mathbf{Z}$.

6) Аналогично 5).

§24. Знаки синуса, косинуса и тангенса

442. 1) $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Решение: т.к. $0<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$, то точка находится в I четверти.

2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$. II четверть; 3) $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$. III четверть;

4) $\alpha=\frac{7\pi}{6}$. III четверть; 5) $\alpha=-\frac{7\pi}{6}$. II четверть;

6) $\alpha=4{,}8$. IV четверть (см. п.8); 7) $\alpha=-1{,}31$. IV четверть (см. п.8);

8) $\alpha=-2{,}7$. Решение: поворот на угол α совпадает с поворотом на угол $2\pi+\alpha=2\pi-2{,}7$. Т.к. $\pi<2\pi-2{,}7<\frac{3\pi}{2}$, то точка находится в III четверти.

443. 1)–5) Аналогично 6).

6) $\pi-\alpha$. Решение: по условию $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, значит $-\frac{\pi}{2}<-\alpha<0$, откуда $\pi-\frac{\pi}{2}<\pi-\alpha<\pi$, т.е. α – угол II четверти. Ответ: II четверть.

444. 1), 3)–6) Аналогично 2).

2) $\alpha=-\frac{33\pi}{7}$. Решение: $-\frac{33\pi}{7}=-6\pi+\frac{9\pi}{7}$, поэтому знак $\sin\alpha$ совпадает со знаком $\sin\frac{9\pi}{7}$. $\pi<\frac{9\pi}{7}<\frac{3\pi}{2}$, поэтому знак минус. Ответ: минус.

445. Аналогично задаче 444.

446. 1)–5) Аналогично 6).

6) $\alpha=283^\circ$. Решение: $270^\circ<283^\circ<360^\circ$, т.е. α – угол IV четверти, поэтому $\operatorname{tg}\alpha<0$. Ответ: минус.

447. 1), 2) Аналогично 3) и 4).

3) $\frac{7\pi}{4}<\alpha<2\pi$. Решение: $\frac{3\pi}{2}<\frac{7\pi}{4}<\alpha<2\pi$, т.е. α – угол IV четверти, поэтому $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$ и $\operatorname{tg}\alpha<0$. Ответ: минус, плюс, минус.

4) $2\pi < \alpha < 2{,}5\pi$. Решение: синус, косинус и тангенс α совпадают с синусом, косинусом и тангенсом $\alpha - 2\pi$, причем $0 < \alpha - 2\pi < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ положительны. Ответ: плюс, плюс, плюс.

448. Указание: аналогично задаче 447. Ответы: 1) $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$; 3) $\frac{\pi}{2} < 2\pi - 3{,}4 < \pi$; 4) $\frac{3\pi}{2} < 2\pi - 1{,}3 < 2\pi$.

449. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Решение: т.к. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0$, поэтому $0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}$, значит $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0$. Ответ: знак плюс.

2)–4) Аналогично 1).

450. Указание: аналогично задаче 447. 1) $\pi < \alpha - 2\pi < \frac{4\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$;

2) $\frac{\pi}{2} < \alpha - 2\pi < \frac{3\pi}{4} < \pi$.

451. Указание: знаки синуса и косинуса совпадают в I и III четвертях и различны во II и IV четвертях.

452. 1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$. Решение: $\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4} < \pi$, поэтому $\sin\frac{2\pi}{3} > 0$ и $\sin\frac{3\pi}{4} > 0$, значит $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4} > 0$. Ответ: плюс.

2), 3) Аналогично 1).

453. 1) $\sin 0{,}7$ и $\sin 4$. Решение: $\sin 0{,}7 > 0$, т.к. $0 < 0{,}7 < \frac{\pi}{2}$. А $\sin 4 < 0$, т.к. $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$. Поэтому $\sin 0{,}7 > \sin 4$. Ответ: $\sin 0{,}7 > \sin 4$.

2) Аналогично 1).

454. 1) $\sin(5\pi + x) = 1$. Решение: $5\pi + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2k - 5)$. Заметим, что когда k «пробегает» все целые числа, $2k - 5$ «пробегает» все целые нечетные числа. Поэтому получаем ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2k + 1), k \in \mathbf{Z}$.

2)–4) Аналогично 1).

455. 1) $\sin\alpha + \cos\alpha = -1{,}4$. Решение: т.к. $-1 \le \sin\alpha; \cos\alpha \le 1$, то равенство возможно только если $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha < 0$, т.е. α точка третьей четверти. Ответ: III четверть.

2) Указание: аналогично 1), необходимо $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$.

§25. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

откуда: $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$$

откуда: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ (при $\alpha\neq\dfrac{\pi k}{2},k\in\mathbf{Z}$)

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\ \text{(при } \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in\mathbf{Z}\text{)}$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\ \text{(при } \alpha\neq\pi k,k\in\mathbf{Z}\text{)}$$

456. Аналогично задаче 336.

457. 1) Решение: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{9}\neq1$. Ответ: нет, не могут.

2) Решение: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{16}{25}+\dfrac{9}{25}=1$. Ответ: да, могут.

3) Решение: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{3}{25}+\dfrac{23}{25}\neq1$. Ответ: нет, не могут.

4) Решение: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0{,}04+0{,}64\neq1$. Ответ: нет, не могут..

458. 1) $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Решение: по условию α – точка II четверти, там синус положительный. Значит $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\dfrac{4}{5}$.

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4/5}{-3/5}=-\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\dfrac{3}{4}$. Ответ: $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$.

2) Аналогично 1).

459. Аналогично задаче 458.

460. Указание: при фиксированном значении синуса (косинуса), не равного ±1 , косинус (синус) может принимать два значения.

461. 1) $\sin\alpha=\dfrac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{24}}$. Решение: $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{25}}=\pm\dfrac{\sqrt{24}}{5}$.

Если $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{24}}{5}$, то $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{24}}$, значит, такие равенства могут выполняться одновременно. Ответ: да.

2) Аналогично 1).

462. Указание: т.к. α - угол прямоугольного треугольника, то $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.
Аналогично задаче 458.

463. 1) $\frac{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{0{,}5+2}{0{,}5-2}=-\frac{25}{15}=-\frac{5}{3}$;

2) $$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\mathrm{tg}\alpha-1}{\mathrm{tg}\alpha+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3};$$

3) $$\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\sin\alpha-5\cos\alpha}=\frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{3\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{5\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{2\mathrm{tg}\alpha+3}{3\mathrm{tg}\alpha-5}=\frac{4+3}{6-5}=7;$$

4) $$\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha\right)}{\frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)}=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha+2}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}=\frac{4+2}{4-1}=2;$$

464. 1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\sin\alpha\cos\alpha$, откуда

$1+2\sin\alpha\cos\alpha=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)=-\frac{3}{8}$. Ответ: $-\frac{3}{8}$.

2) Указание: $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)=$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)$, воспользуйтесь результатом п.1).

§26. Тригонометрические тождества

465. 1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$. Решение: преобразуем левую часть:
$(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$, ч.т.д.

2) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=\cos^2\alpha$. Решение: преобразуем левую часть:
$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$, ч.т.д.

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha$. Решение: преобразуем левую часть:

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=\mathrm{tg}^2\alpha\text{, ч.т.д.}$$

4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\alpha$. Решение: преобразуем левую часть:

$$\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=\mathrm{ctg}^2\alpha\text{, ч.т.д.}$$

5) $\frac{1}{1+tg^2\alpha}+\sin^2\alpha=1$. Решение: т.к. $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2}$, то получаем основное тригонометрическое тождество: $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, ч.т.д.

6) Указание: воспользуйтесь формулой $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

466. 1) $\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha-2\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-2\sin\alpha=\sin\alpha-2\sin\alpha=-\sin\alpha$;

2) $\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=\cos\alpha-\cos\alpha=0$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1+\cos\alpha}=1-\cos\alpha$;

4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{1-\sin\alpha}=1+\sin\alpha$.

467. 1) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}=\frac{-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-\mathrm{tg}^2\alpha=-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}=-1$.

2) $\cos^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha=1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$.

3) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=1+\mathrm{tg}^2\alpha-1=\mathrm{tg}^2\alpha=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$.

4) $\cos^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha=1+(\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha)^2=2$.

468. 1) $(1-\sin^2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)=1$. Решение: воспользуемся формулой

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=1/\cos^2\alpha$, тогда $(1-\sin^2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)=\cos^2\alpha\cdot 1/\cos^2\alpha=1$, ч.т.д.

2) Указание: воспользуйтесь формулой $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

469. 1) $(1+\mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha-1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha-1=1-1=0$.

2) $1-\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)=1-\sin^2\alpha\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}=1-1=0$.

3) $1+\mathrm{tg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$.

4) $$\frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\sin^2\alpha}}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha.$$

470. 1) $(1-\cos 2\alpha)(1+\cos 2\alpha)=1-\cos^2 2\alpha=\sin^2 2\alpha$, ч.т.д.

2) $\dfrac{\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha-1}{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{1-\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}=-\dfrac{1}{1+\sin\alpha}$, ч.т.д.

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot 1$, ч.т.д.

4) $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=$

$=\sin^4\alpha-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, ч.т.д.

5) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\cos\alpha+1}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=$

$=\dfrac{2+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$, ч.т.д.

6) Решение: необходимо доказать, что $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=0$

$\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha-(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha-1+\cos^2\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=0$, ч.т.д.

7) $\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, ч.т.д.

8) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$. Решение: рассмотрим разность

$\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$

$=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$, ч.т.д.

471. Решение: $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha$,

таким образом, $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1-0{,}6^2}{2}=0{,}5-0{,}18=0{,}32$.

472. Аналогично задаче 464.

473. Указание: возведите исходное равенство в квадрат и воспользуйтесь тем, что $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$.

474. 1) $2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Решение: т.к. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, то $2\sin x=0$, $\sin x=0$. Откуда $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) $2\sin^2 x+3\cos^2 x-2=0$. Решение: преобразуем левую часть уравнения $2\sin^2 x+3\cos^2 x-2=2(\sin^2 x+\cos^2 x)+\cos^2 x-2=\cos^2 x$, т.е. $\cos^2 x=0$,

$\cos x=0$. Откуда $x=\pi/2+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pi/2+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

3) Указание: уравнение равносильно $3(\cos^2 x+\sin^2 x)-3=2\sin x$, откуда $2\sin x=0$.

4) Указание: рассмотрите разность левой и правой части и преобразуйте к виду $\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x+1=0$, откуда $\sin x=1$.

§27. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$.

Формулы перехода:

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$;

$\mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$; $\mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$.

475. 1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=-\frac{7}{4}$;

2) $\dfrac{1+\mathrm{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1+\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}}{1+\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1+3}=\dfrac{1}{3}$;

3) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{4}=$

$=-2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}=\frac{-3\sqrt{3}+1}{2}$;

4) $\cos(-\pi)+\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=$

$\cos\pi-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=-1-0-1-1=-3$;

5) $\dfrac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{2}{2\cos\frac{\pi}{4}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$;

6) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+3+7{,}5\,\mathrm{tg}(-\pi)+\frac{1}{8}\cos\frac{3}{2}\pi=-1+3-0+0=2$.

476. 1) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha=-\mathrm{tg}\alpha\cos\alpha+\sin\alpha=-\sin\alpha+\sin\alpha=0$;

2) $\cos\alpha-\mathrm{ctg}\alpha(-\sin\alpha)=\cos\alpha+\cos\alpha=2\cos\alpha$;

3) $\dfrac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos\alpha+\sin\alpha}$;

4) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1+1=2$.

477. 1) $\dfrac{2-\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{2-\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}}{2\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=4$.

2) $\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}+2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+4\cos\frac{3}{2}\pi=\frac{1}{2}$.

478. 1) $\dfrac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}=\dfrac{-\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=$

$=\dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$.

2) $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}=\dfrac{1-\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=-2\cos\alpha$.

479. 1) $\cos\alpha\sin(6\pi-\alpha)\cdot\left(1+\operatorname{ctg}^2(-\alpha)\right)=\cos\alpha\sin(-\alpha)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)=$

$=-\cos\alpha\sin\alpha\cdot\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}(-\alpha)$, ч.т.д.

2) $\dfrac{1-\sin^2(-\alpha)}{\cos(4\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\sin(\alpha-2\pi)}{1-\cos^2(-\alpha)}=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$,
ч.т.д.

480. 1) Указание: данное уравнение равносильно $\sin x=-1$;

2) Указание: данное уравнение равносильно $\cos 2x=0$;

3) Указание: данное уравнение равносильно $\cos 2x=1$;

4) Указание: данное уравнение равносильно $\sin 2x=0$;

5) $\cos^2(-x)+\sin(-x)=2-\sin^2 x$. Решение:

$\cos^2(-x)+\sin(-x)-2+\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x-\sin x-2=-\sin x-1$, т.е.

$-\sin x-1=0$, $\sin x=-1$, откуда $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$. Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

6) $1-\sin^2(-x)+\cos(4\pi-x)=\cos(x-2\pi)$. Решение:

$1-\sin^2(-x)+\cos(4\pi-x)=1-\sin^2 x+\cos x$, $\cos(x-2\pi)=\cos x$. То есть

$1-\sin^2 x+\cos x=\cos x$, $1-\sin^2 x=0$, $\cos^2 x=0$ откуда $\cos x=0$,

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

§28. Формулы сложения

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}; \qquad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}.$$

481. 1) $\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = \cos 90^\circ \cos 45^\circ - \sin 90^\circ \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = \cos 90^\circ \cos 30^\circ - \sin 90^\circ \sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$;

3) $\cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ) = \cos 90^\circ \cos 60^\circ - \sin 90^\circ \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = \cos 180^\circ \cos 60^\circ - \sin 180^\circ \sin 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

482. 1) $\cos 57^\circ 30' \cos 27^\circ 30' + \sin 57^\circ 30' \sin 27^\circ 30' = \cos(57^\circ 30' - 27^\circ 30') = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos 19^\circ 30' \cos 25^\circ 30' + \sin 19^\circ 30' \sin 25^\circ 30' = \cos(19^\circ 30' + 25^\circ 30') = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{11\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9} = \cos\left(\frac{7\pi}{9} + \frac{11\pi}{9}\right) = \cos 2\pi = 1$;

4) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} = \cos\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \cos\pi = -1$.

483. 1) Решение: т.к. α – точка I четверти, то $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2\cdot 3} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - 3}{6}$. Ответ: $\frac{\sqrt{6} - 3}{6}$.

2) Решение: т.к. α – точка II четверти, то $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{3\cdot 2} + \frac{2(\sqrt{2})^2}{3\cdot 2} = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$. Ответ: $\frac{4 - \sqrt{2}}{6}$.

484. 1) $\cos 3\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin 3\alpha = \cos(3\alpha + \alpha) = \cos 4\alpha$.

2) $\cos 5\beta \cos 2\beta + \sin 5\beta \sin 2\beta = \cos(5\beta - 2\beta) = \cos 3\beta$.

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7} + \alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7} + \alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14} - \alpha\right) =$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)+\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)=$

$$=\cos\left(\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)-\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)\right)=\cos\pi=-1.$$

485. 1) $\sin 73^\circ\cos 17^\circ+\cos 73^\circ\sin 17^\circ=\sin(73^\circ+17^\circ)=\sin 90^\circ=1$;

2) $\sin 73^\circ\cos 13^\circ-\cos 73^\circ\sin 13^\circ=\sin(73^\circ-13^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$;

4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos 7\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

486. 1) Решение: т.к. α – точка III четверти, то $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{4}{5}$.

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{4\sqrt{3}}{5\cdot 2}-\frac{3}{5\cdot 2}=-\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$. Ответ: $-\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$.

2) Решение: т.к. α – точка II четверти, то $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{\sqrt{7}}{3}$.

$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{14}}{2\cdot 3}-\frac{2}{2\cdot 3}=-\frac{\sqrt{14}+2}{6}$. Ответ: $-\frac{\sqrt{14}+2}{6}$

487. 1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)=\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos\beta=$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta=\cos\alpha\sin\beta$;

2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)=-\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=-\sin\alpha\cos\beta$

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)=\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha\right)\times$

$\times\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos\beta-\cos\frac{\pi}{2}\sin\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\sin\beta$.

4) $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)=\sin(\alpha+\beta)-\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha\right)\times$

$\times\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta$.

488. Решение: т.к. α – точка IV четверти, то $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5}$. Аналогично $\cos\beta=\frac{15}{17}$. Т.е. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4\cdot15}{5\cdot17}+\frac{3\cdot8}{5\cdot17}=\frac{84}{85}$,

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{17}-\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{36}{85}$. Ответ: $\frac{84}{85}$, $\frac{36}{85}$.

489. Аналогично задаче 488.

490. Решение: аналогично задаче 488 найдем $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\sin\beta=-\frac{15}{17}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta=-\frac{15}{8}$. Тогда $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{-\frac{4}{3}-\frac{15}{8}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{15}{8}}=\frac{77}{36}$.

Ответ: $\frac{77}{36}$.

491. 1) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=2\sin\alpha\sin\beta$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)\times$

$\times\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha=\frac{2}{4}(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha=$

$=\frac{1}{2}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\cos^2\alpha$.

3) $\cos3\alpha+\sin\alpha\sin2\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)+\sin\alpha\sin2\alpha=$

$=\cos\alpha\cos2\alpha-\sin\alpha\sin2\alpha+\sin\alpha\sin2\alpha=\cos\alpha\cos2\alpha$

4) $\cos2\alpha-\cos\alpha\cos3\alpha=\cos2\alpha-(\cos\alpha\cos3\alpha+\sin\alpha\sin3\alpha)+\sin\alpha\sin3\alpha=$
$=\cos2\alpha-\cos2\alpha+\sin\alpha\sin3\alpha=\sin\alpha\sin3\alpha$.

492. 1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$, ч.т.д.

2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}=\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+1}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-1}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$, ч.т.д.

3) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$, ч.т.д.

4) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\mathrm{ctg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\alpha$, ч.т.д.

5) Решение: преобразуем правую часть: $\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))=$

$=\frac{1}{2}((\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta))=\cos\alpha\cos\beta$, ч.т.д.

6) $\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))=\frac{1}{2}(\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta)=\sin\alpha\sin\beta$.

493. 1) $\dfrac{\mathrm{tg}\,29^\circ+\mathrm{tg}\,31^\circ}{1-\mathrm{tg}\,29^\circ\,\mathrm{tg}\,31^\circ}=\mathrm{tg}(29^\circ+31^\circ)=\mathrm{tg}\,60^\circ=\sqrt{3}$;

2) $\dfrac{\mathrm{tg}\frac{7\pi}{16}-\mathrm{tg}\frac{3\pi}{16}}{1-\mathrm{tg}\frac{7\pi}{16}\mathrm{tg}\frac{3\pi}{16}}=\mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{16}-\frac{3\pi}{16}\right)=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$;

3) $\dfrac{1+\mathrm{tg}10^\circ\,\mathrm{tg}55^\circ}{\mathrm{tg}55^\circ-\mathrm{tg}10^\circ}=(\mathrm{tg}(55^\circ-10^\circ))^{-1}=\mathrm{ctg}(45^\circ)=1$;

4) $\dfrac{1-\mathrm{tg}\,13^\circ\,\mathrm{tg}\,17^\circ}{\mathrm{tg}\,17^\circ+\mathrm{tg}\,13^\circ}=(\mathrm{tg}(17^\circ+13^\circ))^{-1}=(\mathrm{tg}\,30^\circ)^{-1}=\sqrt{3}$.

494. 1) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}=\left(-\frac{3}{4}+\frac{12}{5}\right):\left(1+\frac{3}{4}\cdot\frac{12}{5}\right)=\frac{33}{56}$;

2) $\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=(\mathrm{tg}(\alpha-\beta))^{-1}=\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}\right)^{-1}=\left(1-\frac{3}{4}\right):\left(\frac{3}{4}+1\right)=\frac{1}{7}$.

495. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}=\dfrac{\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)-\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)+\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)}=$

$=\dfrac{\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3}\mathrm{tg}\,\alpha$.

496. 1) $\sin\alpha\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin3\alpha$;

2) $\sin5\beta\cos3\beta-\sin3\beta\cos5\beta=\sin(5\beta-3\beta)=\sin2\beta$.

497. 1) $\cos6x\cos5x+\sin6x\sin5x=-1$. Решение: преобразуем левую часть:

$\cos 6x\cos 5x+\sin 6x\sin 5x=\cos(6x-5x)=\cos x$. Т.е. $\cos x=-1$, откуда $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Указание: преобразуйте $\cos 3x\cos 5x-\sin 5x\sin 3x=\cos(3x+5x)=\cos 8x$.

3) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos x=1$. Решение: преобразуем левую часть уравнения: $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos x=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)-\cos x=-\sin x$;

$-\sin x=1$, $\sin x=-1$, откуда $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$. Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

4) Указание: преобразуйте левую часть уравнения:

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}.$$

§29. Синус, косинус и тангенс двойного угла

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

498. 1) $\sin 48^\circ=2\sin 24^\circ\cos 24^\circ$; 2) $\cos 164^\circ=\cos^2 82^\circ-\sin^2 82^\circ$;

3) $\mathrm{tg}92^\circ=\frac{2\,\mathrm{tg}46^\circ}{1-\mathrm{tg}^2 46^\circ}$; 4) $\sin\frac{4\pi}{3}=2\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}$;

5) $\sin\frac{5\pi}{3}=\cos^2\frac{5\pi}{6}-\sin^2\frac{5\pi}{6}$.

499. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\beta}{2}\right)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$;

5) $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$; 6) $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

500. 1) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$;

2) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\frac{2\operatorname{tg} 15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

4) $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2 = \cos^2 75^\circ - 2\cos 75^\circ \sin 75^\circ + \sin^2 75^\circ = 1 - \sin 150^\circ = 0{,}5$.

501. 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$;

4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + 2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}\right) = -1$.

502. 1) $2\sin 75^\circ \cos 75^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$;

2) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\frac{6\operatorname{tg} 75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ} = 3\cdot\frac{2\operatorname{tg} 75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75} = 3\operatorname{tg} 150^\circ = \sqrt{3}$;

4) $\frac{\operatorname{tg}^2 22^\circ 30' - 1}{\operatorname{tg} 22^\circ 30'} = -2\cdot\left(\frac{2\operatorname{tg} 22^\circ 30'}{\operatorname{tg}^2 22^\circ 30' - 1}\right)^{-1} = \frac{-2}{\operatorname{tg} 45^\circ} = -2$;

503. 1) Решение: т.к. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$. Поэтому

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$. Ответ: $-\frac{24}{25}$.

2) Аналогично 1).

504. 1) Решение: $\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$, откуда находим

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$. Ответ: $\frac{7}{25}$.

2) Аналогично 1).

505. Указание: подставьте значение тангенса в формулу двойного угла.

506. 1) $2\cos 40^\circ \cos 50^\circ = 2\sin 50^\circ \cos 50^\circ = \sin 100^\circ$;

2) $2\sin 25^\circ \sin 65^\circ = 2\sin 25^\circ \cos 25^\circ = \sin 50^\circ$;

3) $\sin 2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2\sin\alpha\cos\alpha + 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1$;

4) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha$.

507. 1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = 1$;

2) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \dfrac{1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \dfrac{(1-\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha}{(1-\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha} = \dfrac{2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$.

508. 1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 - 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1 = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$;

2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - \sin 2\alpha$;

3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$;

4) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, ч.т.д.

509. 1) Решение: т.к. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + \sin 2\alpha$, тогда $\sin 2\alpha = -\dfrac{3}{4}$. Ответ: $\sin 2\alpha = -\dfrac{3}{4}$.

2) Решение: т.к. $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - \sin 2\alpha$, тогда $\sin 2\alpha = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$. Ответ: $\sin 2\alpha = \dfrac{8}{9}$.

510. 1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} = \dfrac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\sin\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha - 1$

2) $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \sin^2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \sin^2\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha(\sin\alpha - 1)}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)} = -\dfrac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha$.

3) $\operatorname{tg}\alpha(1+\cos 2\alpha) = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(1 + (2\cos^2\alpha - 1)) = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$.

4) $\dfrac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1-(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha - 1)+2\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha =$

$= \dfrac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$, ч.т.д.

5) $\frac{(1-2\cos^2\alpha)(2\sin^2\alpha-1)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{(2\sin\alpha\cos\alpha)^2}=\frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\,2\alpha$.

6) $1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$

$=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\sin\alpha$, ч.т.д.

7) $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=\frac{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+2\cos\alpha)}=\mathrm{tg}\,\alpha$.

511. $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\mathrm{tg}\,\alpha)}=\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}$.

Решение: преобразуем отдельно левую и правую часть. Левая часть:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\mathrm{tg}\,\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}=$$

$$=\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}-\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\cos\alpha\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2(\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

Правая часть: $\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}=\frac{2(\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin 2\alpha}$.

Т.е. левая и правая части совпадают. Что и требовалось доказать.

512. 1) $\sin 2x-2\cos x=0$. Решение: преобразуем левую часть уравнения, получим $2\cos x(\sin x-1)=0$. Т.е. $\cos x=0$ или $\sin x=1$. Первое уравнение является следствием второго (в силу основного тригонометрического тождества), поэтому достаточно решить только первое уравнение. $\cos x=0$, $x=\pi/2+\pi k$. Ответ: $x=\pi/2+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Указание: $\cos 2x+\sin^2 x=\cos^2 x$, т.е. данное уравнение равносильно уравнению $\sin^2 x=0$.

3) Указание: рассмотрим разность: $4\cos x-\sin 2x=2\cos x(2-\sin x)=0$, откуда $\cos x=0$ или $\sin x=2$. Второе уравнение не имеет решений.

4) Указание: рассмотрим разность: $\sin^2 x + \cos 2x = \cos^2 x$.

5) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=0$. Решение: домножим обе части уравнения на 2: $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+1=0$; $\sin x=-1$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$. Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

6) Указание: рассмотрите разность левой и правой части уравнения, тогда $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x$.

§30. Синус, косинус и тангенс половинного угла

Формулы половинного угла:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},\qquad \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\qquad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\qquad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

513. 1) $\sin^2 15^\circ=\frac{1-\cos 30^\circ}{2}$; 2) $2\cos^2\frac{1}{4}=\frac{1+\cos\frac{1}{2}}{2}$;

3) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{2}$; 4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{2}$.

514. 1) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1=2\cdot\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}-1=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(1-\cos 30^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}=1$;

4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos^2 15^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(1+\cos 30^\circ\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=1$.

515. 1) $\sin\frac{\alpha}{2}$. Решение: т.к. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$, поэтому $\sin\frac{\alpha}{2}$ – положительное число. Тогда $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{0,2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2), 3) аналогично 1).

4) Указание: $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$, аналогично 1).

516. Указание: $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, кроме того $0<\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$, поэтому синус, косинус, тангенс и котангенс половинного угла положительные.

517. 1) Решение: $\sin 15^\circ>0$. Поэтому: $\sin 15^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=$

$$=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}=\sqrt{\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{8}}=\frac{\left|1-\sqrt{3}\right|}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

2) Решение: $\cos 15^\circ>0$, т.е. $\cos 15^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3) Решение: $\mathrm{tg}22^\circ30'>0$, поэтому: $\mathrm{tg}22^\circ30'=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}}=$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}}=\frac{\left|2-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1.$$

4) Решение: $\mathrm{ctg}22^\circ30'=\frac{1}{\mathrm{tg}22^\circ30'}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ (см. п.3).

518. 1) $$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\left(1-\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right):\left(\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{2\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

2) $$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\left(\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right):\left(1+\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{2\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

3) $$\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\mathrm{tg}\alpha.$$

4) $$\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}=\frac{2\cos^2 2\alpha}{2\cos 2\alpha\sin 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\mathrm{ctg}\,2\alpha.$$

5) $\dfrac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos\alpha+\sin\alpha}=2\cos\alpha$.

6) $(1-\cos 2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha=2\sin^2\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$.

519. 1) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=2\cdot\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2}=1+\sin\alpha$, ч.т.д.

2) $2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=2\cdot\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2}=1-\sin\alpha$, ч.т.д.

3) $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\dfrac{3-4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1}{3+4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1}=\dfrac{1-2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha}=$

$=\left(\dfrac{\cos 2\alpha-1}{\cos 2\alpha+1}\right)^2=\left(\dfrac{1-2\sin^2\alpha-1}{2\cos^2\alpha-1+1}\right)^2=\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^4=\operatorname{tg}^4\alpha$, ч.т.д.

4) $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha}=\dfrac{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\operatorname{ctg}\alpha$.

520. 1) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{2\sin^2\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha}=1$, ч.т.д.

2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, ч.т.д.

3) Решение: преобразуем левую часть:

$\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

Теперь преобразуем правую часть:

$\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\left(1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right):\left(1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$, ч.т.д.

4) Решение: преобразуем левую часть:

$\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

Правая часть: $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$, ч.т.д.

521. $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}-$

$-\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}=$

$=\left|\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right|-\left|\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right|$. Т.к. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$, поэтому

$0<\sin\frac{\alpha}{2}<\cos\frac{\alpha}{2}$. Т.с. $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=\left|\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right|-\left|\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right|=$

$=\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}$, ч.т.д.

522. $\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}-\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)}{\operatorname{tg}2\alpha\left(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)}=\cos 4\alpha$.

523. 1) Указание: $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$, аналогично 2).

2) $1+\cos x=2\cos\frac{x}{2}$. Решение: преобразуем уравнение:

$1+\cos x-2\cos\frac{x}{2}=0$, $1+2\cos^2\frac{x}{2}-1-2\cos\frac{x}{2}=0$, $2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)=0$. Т.с.

$\cos\frac{x}{2}=0$ или $\cos\frac{x}{2}=1$. Из первого уравнения $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x=\pi+2\pi k$,

$k\in\mathbf{Z}$. Из второго уравнения $\frac{x}{2}=2\pi n$; $x=4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ (эта серия корней содержится в первой). Ответ: $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

3) Указание: $\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\frac{x}{3}\cos\frac{3\pi}{2}-\cos\frac{x}{4}\sin\frac{3\pi}{2}=\cos\frac{x}{4}$. Аналогично 2).

4) Указание: $1+\cos 8x=2\cos^2 4x$. Аналогично 2).

5) $2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=1$. Решение: преобразуем уравнение:

$\left(2\sin^2\frac{x}{2}-1\right)+\frac{1}{2}\sin 2x=0$, $-\cos x+\sin x\cos x=0$, $\cos x(\sin x-1)=0$. Откуда $\cos x = 0$ или $\sin x = 1$. Первое уравнение следует из второго (в силу основного тригонометрического тождества), поэтому достаточно решить только первое уравнение. Тогда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

6) Указание: аналогично 5), $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$, $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$.

§31. Формулы приведения

Формулы приведения синуса:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$; $\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$;

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$; $\qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$;

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$; $\qquad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

Формулы приведения косинуса:

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$; $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$;

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$; $\qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$;

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$; $\qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

Формулы приведения тангенса:

$\mathrm{tg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{tg}\,\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$; $\qquad \mathrm{tg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{tg}\,\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$.

524. 1) Решение: $\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - \alpha)$, откуда $\alpha = 15^\circ$. Ответ: $\alpha = 15^\circ$

2) Решение: $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + \alpha)$, откуда $\alpha = 60^\circ$. Ответ: $\alpha = 60^\circ$.

3) Решение: $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - \alpha)$, откуда $\alpha = 30^\circ$. Ответ: $\alpha = 30^\circ$.

4) Решение: $\cos 310^\circ = \cos(270^\circ + \alpha)$, откуда $\alpha = 40^\circ$. Ответ: $\alpha = 40^\circ$.

5) Решение: $\sin\frac{5\pi}{4} = \sin(\pi + \alpha)$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

6) Решение: $\mathrm{tg}\frac{\pi}{5} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, откуда $\alpha = \frac{3\pi}{10}$. Ответ: $\alpha = \frac{3\pi}{10}$.

7) Решение: $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

8) Решение: $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \alpha$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{6}$ – острый угол. Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

525. 1) $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\mathrm{ctg}\,135^\circ = \mathrm{ctg}(180^\circ - 45^\circ) = \mathrm{ctg}(-45^\circ) = -\mathrm{ctg}\,45^\circ = -1$;

4) $\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$;

5) $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$;

7) $\mathrm{ctg}\,240^\circ = \mathrm{ctg}(180^\circ + 60^\circ) = \mathrm{ctg}\,60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

8) $\sin 315^\circ = \sin(270^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

526. 1) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4} = \mathrm{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$;

2) $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

3) $\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

4) $\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{3} = \mathrm{ctg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

5) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \sin\left(-2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

6) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(-2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

7) $\mathrm{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{tg}\left(-\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

8) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \mathrm{ctg}\left(-2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$.

527. 1) Решение: $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, поэтому:

$$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-\cos\alpha}{-\cos\alpha}=1.$$

2) $$\frac{\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=-1.$$

528. 1) $$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}\cdot\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\operatorname{ctg}(-\alpha)}\cdot\frac{-\operatorname{ctg}\alpha}{-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

2) $$\frac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

529. 1) $\cos 750^\circ=\cos(720^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\sin 1140^\circ=\sin(1080^\circ+60^\circ)=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}405^\circ=\operatorname{tg}(360^\circ+45^\circ)=\operatorname{tg}45^\circ=1$;

4) $\cos 840^\circ=\cos(720^\circ+120^\circ)=\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\dfrac{1}{2}$;

5) $\sin\dfrac{47\pi}{6}=\sin\left(8\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$;

6) $\operatorname{tg}\dfrac{25\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(6\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$;

7) $\operatorname{ctg}\dfrac{27\pi}{4}=\operatorname{ctg}\left(7\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}=-1$;

8) $\cos\dfrac{21\pi}{4}=\cos\left(4\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{5\pi}{4}=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

530. 1) $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \mathrm{ctg}\,1125^\circ =$

$= \cos(720^\circ - 90^\circ) - \sin(1440^\circ + 30^\circ) - \mathrm{ctg}(1080^\circ + 45^\circ) =$

$= \cos(2\cdot 360^\circ - 90^\circ) - \sin(4\cdot 360^\circ + 30^\circ) - \mathrm{ctg}(6\cdot 360^\circ + 45^\circ) =$

$= \cos 90^\circ - \sin 30^\circ - \mathrm{ctg}\,45^\circ = -0{,}5 - 1 = -1{,}5$.

2) $\mathrm{tg}\,1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ = 0 - \sin(540^\circ - 45^\circ) + \cos(900^\circ + 45^\circ) =$

$= -\sin 45^\circ - \cos 45^\circ = -\sqrt{2}$.

3) $3\cos 3660^\circ + \sin(-1560^\circ) + \cos(-450^\circ) = 3\cos(3600^\circ + 60^\circ) -$

$- \sin(-1440^\circ - 120^\circ) + \cos(-360^\circ - 90^\circ) = 3\cos 60^\circ - \sin 120^\circ + \cos 90^\circ =$

$= \frac{3}{2} - \sin(90^\circ + 30^\circ) + 0 = \frac{3}{2} - \cos 30^\circ = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

4) $\cos 4455^\circ - \cos(-945^\circ) + \mathrm{tg}\,1035^\circ - \mathrm{ctg}(-1500^\circ) = \cos(4500^\circ - 45^\circ) -$

$- \cos(-900^\circ - 45^\circ) + \mathrm{tg}(1080^\circ - 45^\circ) - \mathrm{ctg}(-1440^\circ - 60^\circ) =$

$= -\cos 45^\circ + \cos 45^\circ - \mathrm{tg}\,45 - \mathrm{ctg}\,60^\circ = -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$.

531. 1) $\cos\frac{23\pi}{4} - \sin\frac{15\pi}{4} - \mathrm{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}\right) = \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) -$

$- \mathrm{ctg}\left(-6\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}$.

2) $\sin\frac{25\pi}{3} - \cos\left(-\frac{17\pi}{2}\right) - \mathrm{tg}\frac{10\pi}{3} = \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(-8\pi - \frac{\pi}{2}\right) -$

$- \mathrm{tg}\left(4\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{tg}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $\sin(-7\pi) - 2\cos\frac{31\pi}{3} - \mathrm{tg}\frac{7\pi}{4} = 0 - 2\cos\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= -2\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = -1 + 1 = 0$.

4) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \mathrm{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right) = -1 - 2\sin\left(-8\pi - \frac{\pi}{6}\right) -$

$- \mathrm{ctg}\left(-5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -1 - 2\sin\frac{\pi}{6} + \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} = -1 - 1 + 1 = -1$.

532. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=0$, ч.т.д.

2) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=0$, ч.т.д.

3) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=\dfrac{-\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\dfrac{-\operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{ctg}\alpha}=-\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha=-\sin\alpha$, ч.т.д.

533. 1) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)=\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, ч.т.д.

2) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left(2\pi-\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$, ч.т.д.

3) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(-\pi+\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, ч.т.д.

4) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(-2\pi+\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)$, ч.т.д.

534. Решение: обозначим углы треугольника через α,β,γ. Тогда $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, поэтому $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\pi-\gamma)=\sin\gamma$, ч.т.д.

535. 1) Указание: уравнение равносильно $\sin x=1$.

2) Указание: уравнение равносильно $\cos x=-1$.

3) Указание: уравнение равносильно $\cos x=0$.

4) Указание: уравнение равносильно $\cos x=-1$.

5) $\sin(2x+3\pi)\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin 3x\cos 2x=-1$. Решение: преобразуем левую часть уравнения: $\sin(2x+3\pi)\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin 3x\cos 2x=$

$=-\sin 2x\cos 3x-\sin 3x\cos 2x=-\sin(3x+2x)=-\sin 5x$. Т.е. $\sin 5x=1$, откуда $5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$.

6) Аналогично 5).

536. Решение: пусть β – данный угол, тогда существует $k \in \mathbf{Z}$, такое, что $0 < \beta + \frac{\pi k}{2} < \frac{\pi}{2}$. Обозначим $\alpha = \beta + \frac{\pi k}{2}$. Тогда синус, косинус или тангенс β по формулам приведения вычисляется через синус, косинус или тангенс α. Но $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}{\alpha}/{2}}{1-\operatorname{tg}^2{\alpha}/{2}}$.

Т.е. значение синуса, косинуса и тангенса β можно вычислить через значение синуса, косинуса или тангенса $\frac{\alpha}{2}$, причем $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, ч.т.д.

§32. Сумма и разность синусов. Сумма, разность косинусов

Формулы суммы и разности:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

537. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = 2\sin\frac{\frac{\pi}{3}+\alpha+\frac{\pi}{3}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}+\alpha-\frac{\pi}{3}+\alpha}{2} =$

$= 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha$.

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right) = -2\sin\frac{\frac{\pi}{4}-\beta+\frac{\pi}{4}+\beta}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}-\beta-\frac{\pi}{4}-\beta}{2} =$

$= 2\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta = \sqrt{2}\sin\beta$.

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=$

$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}\cdot2\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha$.

4) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$

$=2\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\cdot2\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha$.

538. 1) $\cos105^\circ+\cos75^\circ=2\cos90^\circ\cos15^\circ=0$;

2) $\sin105^\circ-\sin75^\circ=2\sin15^\circ\cos90^\circ=0$;

3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}=2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}$;

4) $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}=-2\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt6}{2}$;

5) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt2}{2}$;

6) $\sin105^\circ-\sin165^\circ=2\sin135^\circ\cos30^\circ=-\frac{\sqrt6}{2}$.

539. 1) $1+2\sin\alpha=2\left(\frac{1}{2}+\sin\alpha\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin\alpha\right)=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$;

2) $1-2\sin\alpha=2\left(\frac{1}{2}-\sin\alpha\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{6}-\sin\alpha\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $1+2\cos\alpha=2\left(\frac{1}{2}+\cos\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\right)=4\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$.

4) Указание: $1=\sin\frac{\pi}{2}$.

540. 1) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\mathrm{tg}2\alpha$, ч.т.д.

2) $\frac{\sin2\alpha+\sin4\alpha}{\cos2\alpha-\cos4\alpha}=\frac{2\sin3\alpha\cos(-\alpha)}{-2\cos3\alpha\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$, ч.т.д.

541. 1) $\frac{2(\cos\alpha+\cos3\alpha)}{2\sin2\alpha+\sin4\alpha}=\frac{4\cos2\alpha\cos(-\alpha)}{\sin2\alpha+\sin2\alpha+\sin4\alpha}=\frac{4\cos2\alpha\cos\alpha}{\sin2\alpha+2\sin3\alpha\cos\alpha}=$

$$\frac{4\cos2\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin3\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos2\alpha}{\sin\alpha+\sin3\alpha}=\frac{2\cos2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}2\alpha}{\cos\alpha}.$$

2) $$\frac{1+\sin\alpha-\cos2\alpha-\sin3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}=\frac{(1-\cos2\alpha)+(\sin\alpha-\sin3\alpha)}{(2\sin^2\alpha-1)+\sin\alpha}=$$

$$\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\frac{\alpha-3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+3\alpha}{2}}{-\cos2\alpha+\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha-\cos2\alpha)}{-\cos2\alpha+\sin\alpha}=-2\sin\alpha.$$

542. 1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin2\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\sin2\alpha=$

$$=\cos2\alpha+\sin2\alpha=\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}\cos2\alpha+\frac{\sqrt2}{2}\sin2\alpha\right)=$$

$$=\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos2\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin2\alpha\right)=\sqrt2\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right),$$ ч.т.д.

2) Указание: $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha$.

3) Указание: аналогично задаче 541 п.2). $1-2\sin^2 2\alpha=\cos4\alpha$.

543. 1) $\cos22^\circ+\cos24^\circ+\cos26^\circ+\cos28^\circ=(\cos22^\circ+\cos28^\circ)+(\cos24^\circ+\cos26^\circ)=$

$2\cos25^\circ\cos3^\circ+2\cos25^\circ\cos1^\circ=2\cos25^\circ(\cos3^\circ+\cos1^\circ)=4\cos25^\circ\cos2^\circ\cos1^\circ$.

2) Указание: $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{6}=\left(\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-\cos\frac{\pi}{6}=$

$2\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{6}=2\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{3}\right)$, воспользуйтесь формулой разности косинусов. Аналогично 1).

544. Указание: $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$.

545. 1) $1-\cos\alpha+\sin\alpha=1-\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)=1-\sqrt2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=$

$$=\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)=2\sqrt2\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=2\sqrt2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

2) Аналогично 1).

3) Аналогично 4).

4) Решение: см. задачу 544: $1+\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$, кроме

того, $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, поэтому

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}(1+\cos\alpha)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

Упражнения к главе V

546. 1), 2) Аналогично задаче 458.

3) Решение: $|\sin\alpha|=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Т.к. $\pi<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha>0$, значит $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Ответ: $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

4) Аналогично 3).

547. 1) $2\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-2=2\sin\alpha\sin\alpha+3\cos^2\alpha-2=\cos^2\alpha$

2) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}=\dfrac{-\sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{-\sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha$.

548. 1) $\sin\dfrac{47\pi}{6}=\sin\left(8\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-0{,}5$.

2)–4) Аналогично 1).

549. 1)–3) Аналогично 4).

4) $\cos(-945^\circ)+\mathrm{tg}1035^\circ=\cos945^\circ+\mathrm{tg}1035^\circ=$

$$=\cos(720^\circ+225^\circ)+\mathrm{tg}(1080^\circ-45^\circ)=\cos225^\circ-\mathrm{tg}45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}-1.$$

550. 1) $\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha.$$

2) Аналогично 1).

551. Указание: воспользуйтесь формулами приведения (см. задачу 532), а затем сложения.

552. Указание: см. задачу 544, представьте тангенс как отношение синуса к косинусу.

553. 1) $2\sin6\alpha\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+3\alpha\right)-\sin6\alpha=\sin6\alpha\left(2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+3\alpha\right)-1\right)=$

$$=\sin6\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}+6\alpha\right)=-\sin^2 6\alpha=-\sin^2\frac{5\pi}{4}=-0{,}5.$$

2) Аналогично 1).

554. Указание: воспользуйтесь формулой косинуса двойного угла.

555. 1) Аналогично 2).

2) Решение: преобразуем правую часть:

$$\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=\frac{1-\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}.$$ Преобразуем левую часть: $$\frac{2\cos2\alpha-\sin4\alpha}{2\cos2\alpha+\sin4\alpha}=\frac{2\cos2\alpha-2\sin2\alpha\cos2\alpha}{2\cos2\alpha+2\sin2\alpha\cos2\alpha}=\frac{1-\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha},$$ ч.т.д.

556. 1) $\sin35^\circ+\sin25^\circ=2\sin30^\circ\cos5^\circ=\cos5^\circ$, ч.т.д.

2) Аналогично 1).

Проверь себя!

1. Указание: аналогично задаче 546, воспользуйтесь формулой $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$.

2. 4) Указание: $\cos^2 \pi/8 - \sin^2 \pi/8 = \cos \pi/4$.

3. 1) Указание: $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos 2\alpha$.

2) Указание: воспользуйтесь формулой разности синусов в числителе.

4. 1) Указание: $\sin(\pi/2 - \alpha)\sin(-\beta) = -\cos\alpha\sin\beta$.

2) Указание: воспользуйтесь формулами приведения.

3) Указание: воспользуйтесь формулой косинуса суммы.

557. $\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)} = \frac{\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{1-\cos4\alpha}{\cos(\pi-(\beta-\alpha))} =$

$$= \frac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{2\sin^2 2\alpha}{-\cos(\beta-\alpha)} = -\frac{8\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = -8\sin\alpha\cos\alpha = -4\sin2\alpha.$$

558. 1) Аналогично 2).

$$2)\ \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt3\sin(2{,}5\pi-2\alpha)}{\cos(4{,}5\pi-2\alpha)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt3\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)} =$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt3\cos2\alpha}{\sin2\alpha+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos2\alpha+\sin\frac{\pi}{6}\sin2\alpha\right)-\sqrt3\cos2\alpha}{\sin2\alpha+2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos2\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\sin2\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\sin2\alpha}{\sqrt3\cos2\alpha} = \frac{\mathrm{tg}2\alpha}{\sqrt3}\text{, ч.т.д.}$$

559. 1) Указание: $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и $\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. В числителе и в знаменателе вынесите за скобки общий множитель.

2) Указание: $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ и $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. В числителе и в знаменателе вынесите за скобки общий множитель.

560. Указание: $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, кроме того $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$.

561. Вычислить значение выражения $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Решение: из условия $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{1}{4}$, откуда $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{8}$.

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\left(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)=$$

$$=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}(1+\sin\alpha\cos\alpha)=\frac{1/2}{3/8}\left(1+\frac{3}{8}\right)=\frac{11}{6}.$$

562. Указание: $\dfrac{4\sin2\alpha+5\cos2\alpha}{2\sin2\alpha-3\cos2\alpha}=\dfrac{8\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha-5\sin^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}=$

$$=\frac{\sin^2\alpha\left(8\operatorname{ctg}\alpha+5\operatorname{ctg}^2\alpha-5\right)}{\sin^2\alpha\left(4\operatorname{ctg}\alpha-3\operatorname{ctg}^2\alpha+3\right)}.$$

563. 1) $\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$. Решение: преобразуем правую часть: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=$

$$=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$$

$$=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta=$$

$$=\sin^2\alpha\left(1-\sin^2\beta\right)+\sin^2\beta\left(1-\sin^2\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin2\alpha\sin2\beta=$$

$\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha+\dfrac{1}{2}\sin2\alpha\sin2\beta$. Преобразуем левую часть:

$$\sin^2(\alpha+\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2=$$

$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta=$$

$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\sin2\alpha\sin2\beta,$$ ч.т.д.

2) Указание: в левой части $\sin\alpha+\sin5\alpha=2\sin3\alpha\cos2\alpha$.

564. Указание: в числителе части $\sin\alpha+\sin5\alpha=2\sin3\alpha\cos2\alpha$, а в знаменателе $\cos\alpha+\cos5\alpha=2\cos3\alpha\cos2\alpha$.

565. Указание: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}=\dfrac{\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha}}{1+3\operatorname{tg}^3\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+3\operatorname{tg}^3\alpha}=\dfrac{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}{1+3\operatorname{tg}^3\alpha}.$

566. Указание: $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+\cos2\alpha\right)$, т.к. справедлива формула $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$.

567. 1) Указание: $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=$

$=((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$.

2) $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha=\frac{1}{32}(\cos^2 4\alpha+14\cos 4\alpha+17)$. Решение:

$\sin^8\alpha+\cos^8\alpha=(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)^2-2\cos^4\alpha\sin^4\alpha=$

$=((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha)^2-\frac{\sin^4 2\alpha}{8}=\left(1-\frac{\sin^2 2\alpha}{2}\right)-\frac{\sin^4 2\alpha}{8}=$

$=1-\sin^2 2\alpha+\frac{\sin^4 2\alpha}{8}$, но $\sin^2 2\alpha=\frac{1-\cos 4\alpha}{2}$, поэтому

$\sin^8\alpha+\cos^8\alpha=1-\frac{1-\cos 4\alpha}{2}+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1-\cos 4\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{32}(\cos^2 4\alpha+14\cos 4\alpha+17)$,

что и требовалось доказать.

Глава VI
Тригонометрические уравнения

§33. Уравнение $\cos x = a$

Основные понятия:

Арккосинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in [0; \pi]$, косинус которого равен a.

Справедлива формула: $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ для любого $a \in [-1; 1]$.

Корни уравнения $\cos x = a$ находятся по формуле $x = \pm\arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

568. 1) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, т.к. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; 2) $\arccos 1 = 0$;

3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; 4) $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$;

5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;

6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

569. 1) $2\arccos 0 + 3\arccos 1 = 2\cdot\frac{\pi}{2} + 3\cdot 0 = \pi$;

2) $3\arccos(-1) - 2\arccos 0 = 3\pi - 2\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$;

3) $12\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 12\cdot\frac{\pi}{6} - 3\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

4) $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\cdot\frac{3\pi}{4} - 6\cdot\frac{2\pi}{3} = 3\pi - 4\pi = -\pi$.

570. 1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\arccos\frac{1}{2}$. Решение: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Т.к.

$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$, то $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} < \arccos\frac{1}{2}$.

2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arccos(-1)$. Решение: $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) < \pi$, $\arccos(-1) = \pi$.

Т.е. $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) < \arccos(-1)$.

3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$. Решение: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$,

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Т.е. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

571. 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение: по формуле $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$,

$k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Решение: $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$,

$k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Решение: $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi k = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

572. 1) $\cos x = \frac{3}{4}$. Решение: $x = \pm\arccos\left(\frac{3}{4}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \pm\arccos\left(\frac{3}{4}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $\cos x = -0{,}3$. Решение: т.к. $-0{,}3 \in [-1; 1]$, то $x = \pm(\pi - \arccos 0{,}3) + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pm(\pi - \arccos 0{,}3) + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) Аналогично 2).

573. 1) $\cos 4x = 1$. Решение: $4x = \pm\arccos 1 + 2\pi k = 2\pi k$; $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $\cos 2x = -1$. Решение: $2x = \pm\arccos(-1) + 2\pi k = \pm\pi + 2\pi k$; $x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi k$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{4} = -1$. Решение: преобразуем уравнение: $\cos\frac{x}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда $\frac{x}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, откуда $x = \pm 3\pi + 8\pi k$. Ответ: $x = \pm 3\pi + 8\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$

4) Аналогично 3).

5) Аналогично 6).

6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Решение: $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, откуда $2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

574. 1) Указание: $\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x = \cos(x + 3x) = \cos 4x$.

2) Указание: $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = \cos(2x - x) = \cos x$.

575. 1), 2) Указание: да, т.к. $\sqrt{6} - 3, \sqrt{7} - 2 \in [-1; 1]$.

3), 4) Указание: нет, т.к. $2 - \sqrt{10}, 1 - \sqrt{5} < -1$.

5) $\operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$. Решение: $3\arccos\frac{1}{2}$, а $\operatorname{tg}\pi$ определен, т.к. $\cos\pi \neq 0$.

Ответ: выражение имеет смысл.

576. 1) Указание: $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x$, т.е. $\cos 4x = 1$, см. задачу 573.

2) $4\cos^2 x = 3$. Решение: $\cos^2 x = \frac{3}{4}$, откуда $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Решая первое уравнение, находим $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, решая втрое, находим $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $k \in \mathbf{Z}$. Эти две серии ответов можно объединить в одну (рис. 73). Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

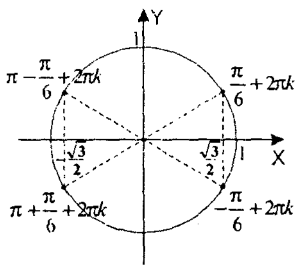

Рис. 73

3) Указание: $2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 1$, откуда $\cos 2x = \frac{1}{2}$, аналогично задаче 573

4) Указание: $2\sqrt{2}\cos^2 x = \sqrt{2}\left(1 + \cos 2x\right)$, откуда $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, аналогично задаче 573.

5), 6), 8) Аналогично 7).

7) $(1+2\cos x)(1-3\cos x)=0$. Решение: данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}1+2\cos x=0\\1-3\cos x=0\end{array}\right.$. Из первого уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Из второго $\cos x=\frac{1}{3}$, $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

577. Аналогично задаче 578.

578. Решение: $4x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. При $k=0$ корни $x=\pm\frac{\pi}{16}$ удовлетворяют условию. При $k\geq 1$ наименьший корень равен $-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{16}$ – уже не удовлетворяет условию. Следовательно в этом случае решений нет. Аналогично в случае $k\leq -1$. Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{16}$.

579. 1) $\arccos(2x-3)=\frac{\pi}{3}$. Решение: $2x-3=\cos\frac{\pi}{3}=0{,}5$, откуда $x=1{,}75$.

Ответ: $x=1{,}75$.

2) $\arccos\frac{x+1}{3}=\frac{2\pi}{3}$. Решение: $x+1=3\cos\frac{2\pi}{3}=3\cdot(-0{,}5)=-1{,}5$, откуда $x=-2{,}5$. Ответ: $x=-2{,}5$.

580. Доказать, что при всех значениях a, таких, что $-1\leq a\leq 1$, выполняется равенство $\cos(\arccos a)=a$.

Решение: пусть $\cos(\arccos a)=x$. Тогда $\arccos a=\arccos x$. Обозначим $\arccos a=b$, тогда $a=\cos b$ и $x=\cos b$. Т.е. $a=x$, ч.т.д.

1) $\cos(\arccos 0{,}2)$. Решение: т.к. $-1\leq 0{,}2\leq 1$, то по доказанной формуле $\cos(\arccos 0{,}2)=0{,}2$. Ответ: $\cos(\arccos 0{,}2)=0{,}2$.

2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$. Решение: т.к. $-1\leq -\frac{2}{3}\leq 1$, то $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)=-\frac{2}{3}$.

3) Указание: по формуле приведения $\cos\left(\pi+\arccos\frac{3}{4}\right)=-\cos\left(\arccos\frac{3}{4}\right)$, аналогично 1).

4) Указание: по формуле приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{1}{3}\right)=\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$, аналогично 1).

5) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$. Решение: по определению $\arccos\frac{4}{5}\in[0;\pi]$, поэтому

$\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)>0$. Тогда по основному тригонометрическому тождеству

$\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{4}{5}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$. Ответ: $\frac{3}{5}$.

6) Указание: аналогично 5), $tg\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)}}{\cos\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)}$.

581. Решение: пусть $\arccos(\cos\alpha)=x$. Тогда, по определению, $\cos\alpha=\cos x$. Обозначим $\cos\alpha=a$. Т.к. $0\le\alpha,x\le\pi$, то это равносильно тому, что $\alpha=\arccos a$ и $x=\arccos a$, т.е. $x=\alpha$, ч.т.д.

1) $5\arccos\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)$. Решение: т.к. $0\le\frac{\pi}{10}\le\pi$, то по доказанной формуле

$5\arccos\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)=5\cdot\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$. Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

2) Аналогично 1).

3) Указание: $\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)=-\cos\frac{\pi}{7}$, аналогично 4).

4) $\arccos(\cos 4)$. Решение: $4>\pi$, поэтому сразу воспользоваться формулой не удастся. Но $\cos 4=\cos(\pi+(4-\pi))=-\cos(4-\pi)$, а $0\le 4-\pi\le\pi$. Т.е. $\arccos(\cos 4)=\arccos(-\cos(4-\pi))=\pi-\arccos(\cos(4-\pi))=\pi-(4-\pi)=2\pi-4$. Ответ: $2\pi-4$.

582. 1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. Решение: по формуле синуса суммы

$\sin\left(\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+$

$$+\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\cdot\sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

Но $\arccos a\in[0;\pi]$, значит $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{1}{3}\right)}=$

$=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, аналогично $\sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{1}{3}$. Тогда

$\sin\left(\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=1$. Ответ: 1.

2) Указание: воспользуйтесь формулой косинуса разности, аналогично 1).

583. Упростить выражение $\cos(2\arccos a)$, если $-1\le a\le 1$. Решение: воспользуемся формулой косинуса двойного угла, тогда $\cos(2\arccos a)=$

$=2\cos^2(\arccos a)-1=2a^2-1$, т.к. справедлива формула из задачи 581.

Ответ: $2a^2-1$.

584. Доказать, что если $-1\le a\le 1$, то $2\arccos\sqrt{\frac{1+a}{2}}=\arccos a$. Решение: возьмем косинус от обеих частей равенства, если получится тождество, то и исходное равенство было верным, т.к. $\arccos a\in[0;\pi]$.

$\cos\left(2\arccos\sqrt{\frac{1+a}{2}}\right)=2\left(\sqrt{\frac{1+a}{2}}\right)^2-1=a$ (воспользовались результатом задачи 583), и $\cos(\arccos a)=a$ (воспользовались результатом задачи 580). Т.е. $\cos\left(2\arccos\sqrt{\frac{1+a}{2}}\right)=\cos(\arccos a)$ и $2\arccos\sqrt{\frac{1+a}{2}}=\arccos a$, ч.т.д

585. Указание: 1) $\arccos 0{,}35\approx 1{,}21$; 2) $\arccos(-0{,}27)\approx 1{,}84$.

§34. Уравнение $\sin x=a$

Основные понятия:

Арксинусом числа $a\in[-1;1]$ называется такое число $\alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, синус которого равен a.

Справедлива формула: $\arcsin(-a)=-\arcsin a$ для любого $a\in[-1;1]$.

Корни уравнения $\sin x=a$ находятся по формуле $x=(-1)^k\arcsin a+\pi k$, $k\in Z$.

586. 1) $\arcsin 0$. Решение: т.к. $\sin 0 = 0$, то $\arcsin 0 = 0$.

2) $\arcsin 1$. Решение: т.к. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ и $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

3) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$. Решение: т.к. $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

4) $\arcsin\frac{1}{2}$. Решение: т.к. $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$, т.к. $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$, т.к. $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

587. 1) $\arcsin 1 - \arcsin(-1) = \arcsin 1 + \arcsin 1 = 2\arcsin 1 = \pi$;

2) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$;

3) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$;

4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$.

588. 1) Указание: первое число положительно, а втрое отрицательно.

2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arcsin(-1)$. Решение: сравним числа $\arcsin\frac{3}{4} = x$ и

.$\arcsin 1 = y$. Тогда по определению $\sin x = \frac{3}{4}$, а $\sin y = 1$. Откуда следует,

что $x < y$. Значит $\arcsin\frac{3}{4} < \arcsin 1$, $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) > \arcsin(-1)$.

589. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Решение: по формуле $x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, т.е. $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$. Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение: по формуле $x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, т.е. $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$. Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Решение: по формуле $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$, т.е. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$. Ответ: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

590. 1) $\sin x = \frac{2}{7}$. Решение: т.к. $\frac{2}{7} \in [-1; 1]$, то уравнение имеет решения $x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{7} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{7} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $\sin x = -\frac{1}{4}$. Решение: $x = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Решение: $x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

591. 1) $\sin 3x = 1$. Решение: по формуле $3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, откуда получаем ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $\sin 2x = -1$. Решение: по формуле $2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, откуда получаем ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3} = -1$. Решение: $\sin\frac{x}{3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{x}{3} = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, откуда получаем ответ: $x = (-1)^{k+1}\frac{3\pi}{4} + 3\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) $2\sin\frac{x}{2} = \sqrt{3}$. Решение: $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{x}{2} = (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, откуда получаем ответ: $x = (-1)^k\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

5) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$. Решение: $x + \frac{3\pi}{4} = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, откуда $x = -\frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = -\frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

6) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Решение: $2x + \frac{\pi}{2} = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, откуда $2x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

592. 1) Указание: преобразуйте уравнение к виду:

$\sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x = 0$, по формуле синуса разности получим $\sin(4x - 2x) = 0$, т.е. $\sin 2x = 0$. Аналогично задаче 591.

2) Указание: преобразуйте уравнение к виду: $\sin(3x - 2x) = 0$, см. 1).

593. 1) $\arcsin\left(\sqrt{5} - 2\right)$. Решение: т.к. $\left|\sqrt{5} - 2\right| \le 1$, то ответ: да, имеет.

2) $\arcsin\left(\sqrt{5} - 3\right)$. Решение: т.к. $\left|\sqrt{5} - 3\right| \le 1$, то ответ: да, имеет.

3) $\arcsin\left(3 - \sqrt{17}\right)$. Решение: т.к. $3 - \sqrt{17} < -1$, то ответ: нет, не имеет.

4) $\arcsin\left(2 - \sqrt{10}\right)$. Решение: т.к. $2 - \sqrt{10} < -1$, то ответ: нет, не имеет.

5) $\operatorname{tg}\left(6\arcsin\frac{1}{2}\right)$. Решение: $6\arcsin\frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{\pi}{6} = \pi$, т.к. $\cos\pi \ne 0$, то $\operatorname{tg}\left(6\arcsin\frac{1}{2}\right)$ существует. Ответ: да.

6) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Решение: $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, т.к. $\cos\pi = 0$, то $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ не существует. Ответ: нет.

594. 1) $1 - 4\sin x \cos x = 0$. Решение: $2\sin 2x = 1$; $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Откуда $2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $\sqrt{3} - 4\sin x \cos x = 0$. Решение: $2\sin 2x = \sqrt{3}$; $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Откуда $2x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $1 + 6\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} = 0$. Решение: по формуле синуса двойного угла $2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} = \sin\frac{x}{2}$, поэтому уравнение равносильно $3\sin\frac{x}{2} = -1$. Откуда $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$, $\frac{x}{2} = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi k$ т.е. $x = (-1)^{k+1} 2\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^{k+1} 2\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

595. 1) $1+\cos 5x\sin 4x=\cos 4x\sin 5x$. Решение: преобразуем уравнение:

$1=\cos 4x\sin 5x-\cos 5x\sin 4x$, $1=\sin(5x-4x)$, $\sin x=1$. Откуда $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$. Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Указание: аналогично 1), $\cos x\sin 2x+\sin x\cos 2x=\sin 3x$.

596. 1) $(4\sin x-3)(2\sin x+1)=0$. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}4\sin x-3=0\\ 2\sin x+1=0\end{array}\right.$, откуда $\sin x=\frac{3}{4}$ или $\sin x=-\frac{1}{2}$. Решая первое уравнение, находим $x=(-1)^k\arcsin\frac{3}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; из второго уравнения $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=(-1)^k\arcsin\frac{3}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

597. Найти все корни уравнения $\sin 2x=\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0;2\pi]$.

Решение: по формуле корней находим $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. При $n\le -1$ будут получаться отрицательные корни, при $n=0,1,2,3$ получим корни $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$ и $\frac{17\pi}{12}$ соответственно, которые удовлетворяю условию. При $n\ge 4$ корни будут больше 2π. Ответ: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$.

598. Указание: аналогично задаче 597. Неравенство равносильно условию $0<x-4\pi<\pi$, т.е. $4\pi<x<5\pi$.

599. Доказать, что $\sin(\arcsin a)=a$ при $-1\le a\le 1$.

Решение: пусть $\sin(\arcsin a)=x$. Тогда, $\arcsin a=\arcsin x$. Обозначим $\arcsin=\alpha$, тогда $a=\sin\alpha$ и $x=\sin\alpha$. Т.е. $a=x$, ч.т.д.

1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7}$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right)=-\frac{1}{5}$;

3) $\sin\left(\pi+\arcsin\frac{3}{4}\right)=-\sin\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}$;

4) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{3}\right)=-\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$;

5) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$. Решение: т.к. $\arcsin\frac{4}{5}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то

$\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$. Ответ: $\frac{3}{5}$.

6) Указание: $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\dfrac{\sin\left(\arcsin\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)}}$, см. 5).

600. Указание: аналогично задаче 581.

1) $7\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)=7\cdot\frac{\pi}{7}=\pi$;   2) $4\arcsin\left(\sin\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{1}{2}=2$;

3) Указание: по формулам приведения $\sin\frac{6\pi}{7}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{7}$.

4) $\arcsin(\sin 5)$. Решение: т.к. $5\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то необходимо воспользоваться формулами приведения. $5-2\pi\approx-1{,}3\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому $\arcsin(\sin 5)=$ $=\arcsin(\sin(5-2\pi))=5-2\pi$. Ответ: $5-2\pi$.

601. 1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$;

2) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$;

3) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

4) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

602. 1) Т.к. $\arccos\in[0;\pi]$, где синус принимает положительные значения:

$\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{2}{3}\right)}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$;

2) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

603. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. Решение: по формуле синуса суммы:

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+$$

$$+\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

Воспользуемся результатами задач 601 и 602, получим:

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{9}+\sqrt{1-\frac{1}{9}}\cdot\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$ Ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

2). Указание: воспользуйтесь формулой косинуса суммы, аналогично 1).

604. 1) $\arcsin\left(\frac{x}{2}-3\right)=\frac{\pi}{6}$. Решение: область определения уравнения

$-1\le\frac{x}{2}-3\le 1$, т.е. $4\le x\le 8$. Тогда по определению $\frac{x}{2}-3=\sin\frac{\pi}{6}$,

$\frac{x}{2}-3=\frac{1}{2}$, откуда $x=7$ – удовлетворяет области определения.

Ответ: $x=7$.

2) Аналогично 1).

605. Доказать, что если $0\le a\le 1$, то $2\arcsin a=\arccos\left(1-2a^2\right)$.

Решение: т.к. $0\le a\le 1$, то $-1\le 1-2a^2\le 1$, значит арккосинус определен.

Кроме того, раз $0\le a\le 1$, то $\arcsin a\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, значит $2\arcsin a\in[0;\pi]$ – совпадает с областью значений арккосинуса. Формула справедлива равносильно тому, что $\cos(2\arcsin a)=\cos\left(\arccos\left(1-2a^2\right)\right)$. Преобразуем левую часть:

$\cos(2\arcsin a)=1-2\cos^2(\arcsin a)=1-2a^2$, согласно результату задачи 580 правая часть также равна $1-2a^2$. Т.е. $\cos(2\arcsin a)=\cos\left(\arccos\left(1-2a^2\right)\right)$, а значит и $2\arcsin a=\arccos\left(1-2a^2\right)$, ч.т.д.

606. Указание: 1) $\arcsin 0{,}65\approx 0{,}708$; 2) $\arcsin(-0{,}31)\approx -0{,}315$.

§35. Уравнение $\operatorname{tg}x = a$

Основные понятия:

Арктангенсом числа $a \in \mathbf{R}$ называется такое число $\alpha \in \left(-\pi/2; \pi/2\right)$, тангенс которого равен a.

Справедлива формула $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg}a$ для любого $a \in [-1; 1]$.

Корни уравнения $\operatorname{tg}x = a$ находятся по формуле $x = \operatorname{arctg}a + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

607. 1) $\operatorname{arctg}0$. Решение: т.к. $\operatorname{tg}0 = 0$ и $0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg}0 = 0$.

2) $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

608. 1) $6\operatorname{arctg}\sqrt{3} - 4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 6\cdot\frac{\pi}{3} + 4\cdot\frac{\pi}{4} = 3\pi$;

2) $2\operatorname{arctg}1 + 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{4} + 3\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$;

3) $5\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 3\cdot\frac{3\pi}{4} = -\frac{5\pi}{3} - \frac{9\pi}{4} = -\frac{47}{12}\pi$.

609. 1) $\operatorname{arctg}(-1)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Решение: $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg}1 = -\frac{\pi}{4}$;

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$. Т.к. $-\frac{\pi}{4} > -\frac{\pi}{3}$, то $\operatorname{arctg}(-1) > \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\arccos\frac{1}{2}$. Решение: $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, следовательно $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \arccos\frac{1}{2}$.

3) $\operatorname{arctg}(-3)$ и $\operatorname{arctg}2$. Решение: $\operatorname{arctg}(-3) = -\operatorname{arctg}3$, но $\operatorname{arctg}3 > 0$, значит $\operatorname{arctg}(-3) < 0$. А $\operatorname{arctg}2 > 0$, следовательно $\operatorname{arctg}(-3) < \operatorname{arctg}2$.

4) $\operatorname{arctg}(-5)$ и $\operatorname{arctg}0$. Решение: $\operatorname{arctg}(-5) < 0$, а $\operatorname{arctg}0 = 0$, следовательно $\operatorname{arctg}(-5) < \operatorname{arctg}0$.

610. 1) $\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Решение: $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi k=\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$. Решение: $x=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi k=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

3) $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$. Решение: $x=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\pi k$, но $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}$, откуда $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

4) $\operatorname{tg}x=-1$. Решение: $x=\operatorname{arctg}(-1)+\pi k=-\operatorname{arctg}1+\pi k=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

5) $\operatorname{tg}x=4$. Решение: $x=\operatorname{arctg}4+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\operatorname{arctg}4+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

6) $\operatorname{tg}x=-5$. Решение: $x=\operatorname{arctg}(-5)+\pi k$, откуда $x=-\operatorname{arctg}5+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=-\operatorname{arctg}5+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

611. 1) $\operatorname{tg}3x=0$. Решение: $3x=\operatorname{arctg}0+\pi k=\pi k$; $x=\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) $1+\operatorname{tg}\frac{x}{3}=0$. Решение: $\operatorname{tg}\frac{x}{3}=-1$; $\frac{x}{3}=\operatorname{arctg}(-1)+\pi k=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, отсюда $x=-\frac{3\pi}{4}+3\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=-\frac{3\pi}{4}+3\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

3) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{x}{6}=0$. Решение: $\operatorname{tg}\frac{x}{6}=-\sqrt{3}$; $\frac{x}{6}=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi k$; $x=-6\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi k$; $x=-6\cdot\frac{\pi}{3}+6\pi k=\pi(6k-2)$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pi(6k-2)$, $k\in\mathbf{Z}$.

612. 1) $(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})=0$. Решение: данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=1\\ \operatorname{tg}x=-\sqrt{3}\end{array}\right.$. Из первого уравнения $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Из второго уравнения $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) $(\sqrt{3}\operatorname{tg} x+1)(\operatorname{tg} x-\sqrt{3})=0$. Решение: данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}\operatorname{tg} x=-1 \\ \operatorname{tg} x=\sqrt{3}\end{array}\right.$. Из первого уравнения $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из второго $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $(\operatorname{tg} x-2)(2\cos x-1)=0$. Решение: данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=2 \\ \cos x=1/2\end{array}\right.$. Из первого уравнения $x=\operatorname{arctg} 2+\pi k$, из второго уравнения $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$. Ответ: $x=\operatorname{arctg} 2+\pi k$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) $(\operatorname{tg} x-4{,}5)(1+2\sin x)=0$. Решение: данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=4{,}5 \\ \sin x=-1/2\end{array}\right.$. Из первого уравнения $x=\operatorname{arctg} 4{,}5+\pi k$, из второго $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. Ответ: $x=\operatorname{arctg} 4{,}5+\pi k$, $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

5), 6) Аналогично 1). См также задачу 611.

613. Найти наименьший положительный и наибольший отрицательный корень уравнения $3\operatorname{tg} x-\sqrt{3}=0$. Решение: преобразуем уравнение $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. При $k=0$ получаем наименьший положительный корень $\frac{\pi}{6}$, при $k=-1$ получаем наибольший отрицательный корень, равный $-\frac{5\pi}{6}$. Ответ: $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$.

614. 1) $\operatorname{arctg}(5x-1)=\frac{\pi}{4}$. Решение: по определению арктангенса $5x-1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, $5x-1=1$, откуда $x=\frac{2}{5}$. Ответ: $x=\frac{2}{5}$.

2) Аналогично 1).

615. Указание: воспользуйтесь определением арктангенса, аналогично задачам 580, 599.

1) $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,2{,}1)=2{,}1$; 2) $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(-0{,}3))=-0{,}3$;

3) $\mathrm{tg}(\pi-\mathrm{arctg}\,7)=\dfrac{\sin(\pi-\mathrm{arctg}\,7)}{\cos(\pi-\mathrm{arctg}\,7)}=\dfrac{\sin(\mathrm{arctg}\,7)}{-\cos(\mathrm{arctg}\,7)}=-\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,7)=-7$.

4) Указание: $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\,6\right)=-\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,6)$.

616. Указание: воспользуйтесь определением арктангенса, аналогично задачам 581, 600.

1) $3\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{7}\right)=3\cdot\dfrac{\pi}{7}=\dfrac{3\pi}{7}$; 2) $4\,\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,0{,}5)=4\cdot 0{,}5=2$;

3) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\dfrac{7\pi}{8}\right)=\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\left(\pi-\dfrac{\pi}{8}\right)\right)=\mathrm{arctg}\left(-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{8}\right)=-\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{8}\right)=-\dfrac{\pi}{8}$;

4) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,13)=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(13-4\pi))=13-4\pi$, т.к. $13-4\pi\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

617. 1) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\dfrac{5\pi}{6}\right)$. Решение: $\mathrm{ctg}\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{3}$, т.е. $\mathrm{arctg}\left(-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$.

2) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\dfrac{3\pi}{4}\right)=\mathrm{arctg}\left(-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$;

3) $\mathrm{arctg}\left(2\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)=\mathrm{arctg}\left(2\cdot\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{arctg}\,1=\dfrac{\pi}{4}$;

4) $\mathrm{arctg}\left(2\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\mathrm{arctg}\left(2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\mathrm{arctg}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$.

618. Доказать, что при любом действительном значении a справедливо равенство $\cos(\mathrm{arctg}\,a)=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. Решение: поскольку $\mathrm{arctg}\,a\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\cos(\mathrm{arctg}\,a)>0$. Из тождества $\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x$ имеем $\cos x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$.

Применим это тождество (с учетом знака), получим $\cos(\mathrm{arctg}\,a)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\,a)}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, ч.т.д.

619. Указание: 1) $\mathrm{arctg}\,9\approx 1{,}46$; 2) $\mathrm{arctg}(-7{,}8)\approx -1{,}44$.

§36. Решение тригонометрических уравнений

620. 1) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$. Решение: уравнение равносильно уравнению $\sin x = \pm\frac{1}{2}$.

Тогда имеются две серии корней $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ и $x = (-1)^k \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Отметим эти корни на единичной окружности (см. рис. 73). Тогда нетрудно видеть, что эти две серии объединяются в одну.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: аналогично 1), две серии решений объединяются в одну – $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ (см. рис. 74).

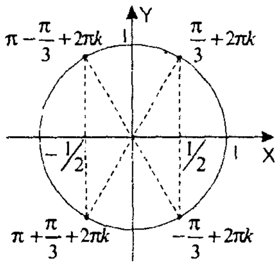

Рис. 74

3) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Решение: данное уравнение – квадратное относительно $\sin x$. Тогда $\sin x = -1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Из первого уравнения $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, из второго $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) Указание: данное уравнение – квадратное относительно, аналогично 3).

621. Указание: воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством и сведите уравнение к квадратному относительно 1), 2) $\sin x$, 3), 4) $\cos x$. См. также задачу 2 §36.

622. 1) Указание: данное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{2}$, аналогично 2).

2) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$. Решение: область определения уравнения $x \neq \frac{\pi k}{2}$. Тогда $\operatorname{tg} x \neq 0$, поэтому на него можно домножить обе части уравнения. Получим $\operatorname{tg}^2 x = 1$, откуда $\operatorname{tg} x = \pm 1$. Из первого уравнения $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; а из второго $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3), 4) Указание: данное уравнение квадратное относительно $\operatorname{tg} x$, аналогично задаче 623 п.1).

623. 1) $1+7\cos^2 x=3\sin 2x$. Решение: т.к. $\cos x=0$, то $\sin 2x=2\sin x\cos x=0$, т.е. уравнение не выполнено. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x\neq 0$ и воспользуемся тождествами $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$ и $\sin 2x=2\sin x\cos x$. Получим: $8+\operatorname{tg}^2 x=6\operatorname{tg} x$. Это уравнение квадратное относительно $\operatorname{tg} x$, тогда $\operatorname{tg} x=4$ или $\operatorname{tg} x=2$. Из первого уравнения $x=\operatorname{arctg}4+\pi k$, а из второго $x=\operatorname{arctg}2+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\operatorname{arctg}4+\pi k$, $x=\operatorname{arctg}2+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Указание: разделите обе части уравнения на $\sin^2 x\neq 0$ и воспользуйтесь тождествами $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{ctg}^2 x$ и $\sin 2x=2\sin x\cos x$. Уравнение сведется к квадратному относительно $\operatorname{ctg} x$.

3) $\cos 2x+\cos^2 x+\sin x\cos x=0$. Решение: $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, поэтому $2\cos^2 x+\sin x\cos x-\sin^2 x=0$, $(\cos x+\sin x)(2\cos x-\sin x)=0$, откуда $\cos x=-\sin x$ или $2\cos x=\sin x$. $\cos x=0$ не является решением ни первого, ни второго уравнения, разделим на $\cos x\neq 0$ обе части каждого из уравнений. Получим $\operatorname{tg} x=-1$ или $\operatorname{tg} x=2$. Откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$ и $x=\operatorname{arctg}2+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\operatorname{arctg}2+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

4) Указание: аналогично 3), $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, таким образом $3\cos^2 x-2\sin^2 x+5\sin x\cos x=0$, $(3\cos x-\sin x)(\cos x+2\sin x)=0$.

624. 1) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=0$. Решение: разделим обе части уравнения на $\sqrt{3+1}=2$, получим $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=0$, $\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x=0$. По формуле косинуса суммы $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$, откуда $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\frac{2\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\frac{2\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Указание: преобразуйте уравнение $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$. Аналогично 1).

3) $\sin x=2\cos x$. Решение: $\cos x=0$ не является решением данного урав-

нения, разделим на $\cos x \neq 0$ обе части уравнения. Получим $\operatorname{tg} x = 2$, откуда $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Замечание: можно было решать так же, как и 1), но получилось бы сложнее.

4) Аналогично 3).

625. Указание: аналогично задаче 624 п.1). См. также задачу 8 из §36. Сведите уравнение к виду:

1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 4) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

626. 1) $\cos x = \cos 3x$. Решение: перенесем все слагаемые в правую часть и воспользуемся формулой разности косинусов, получим $-2\sin 2x \sin x = 0$. Тогда $\sin 2x = 0$ или $\sin x = 0$. Откуда $2x = \pi k$ или $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Заметим, что первая серия корней содержится во второй.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

3) Аналогично 4).

4) $\sin x + \cos 3x = 0$. Решение: $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, теперь по формуле суммы косинусов получаем: $2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x + 3x\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x - 3x\right) = 0$,

$2\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$. Тогда $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$ или $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$.

Из первого ур-ния $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, из второго $-2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

627. 1) Указание: $\cos 3x - \cos 5x = -2\sin(-x)\sin 4x = 2\sin x \sin 4x$, поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $\sin 4x(2\sin x - 1) = 0$. Аналогично задаче 596.

2) Указание: $\sin 7x - \sin x = 2\sin 3x \cos 4x$, поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $\cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0$. Аналогично задаче 596.

3) Указание: $\cos x+\cos 3x=2\cos 2x\cos x$, поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $2\cos 2x(\cos x-2)=0$. Аналогично задаче 596.

4) $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos 4x$. Решение: $\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x$, поэтому $\cos 4x+\cos 2x=0$, $2\cos 3x\cos x=0$, откуда $\cos 3x=0$ или $\cos x=0$. Из первого уравнения $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$, из второго уравнения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Заметим, что вторая серия решений содержится в первой (а именно, при $k=3m+1$ $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi(3m+1)}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi m$). Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

628. 1) $\left(\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right)\left(2\sin\frac{x}{12}+1\right)=0$. Решение: область определения уравнения $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Данное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x-\sqrt{3}=0\\ 2\sin\frac{x}{12}+1=0,\end{array}\right.$$ откуда находим $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$ или $\frac{x}{12}=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Для второй серии решений получаем, что удовлетворяет области уравнения. Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}2\pi+12\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

3) Аналогично 4).

4) $\left(1+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)(\operatorname{tg}x-3)=0$. Решение: область определения уравнения $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Из равенства нулю первого сомножителя находим $x+\frac{\pi}{4}=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, т.е. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi n$. При $n=2k$ получаем $x=2\pi k$, что удовлетворяет области определения, а при $n=2k+1$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi(2k+1)$ не удовлетворяет области определения. Из равенства нулю второго сомножителя находим $x=\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\operatorname{arctg}3+\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

629. 1) Указание: $\sin x = 0$ – решение. Если $\sin x \neq 0$, то разделите обе части уравнения на $\sin^2 x$, получится $\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x} = 1$. Аналогично задаче 610.

2) Указание: $\cos x = 0$ – решение. Если $\cos x \neq 0$, то разделите обе части уравнения на $\cos x$, получится $2\sin x = 1$. Аналогично задаче 589.

3) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$. Решение: преобразуем левую часть уравнения: $\sin 4x + \sin^2 2x = 2\sin 2x \cos 2x + \sin^2 2x = \sin 2x(2\cos 2x + \sin 2x)$, таким образом $\sin 2x = 0$ или $2\cos 2x + \sin 2x = 0$. Из первого уравнения $x = \pi k/2$, $k \in \mathbf{Z}$. Поделим второе уравнение на $\sin 2x \neq 0$, получим $\frac{2}{\operatorname{tg} 2x} = -1$, откуда $x = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}$, $x = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) Указание: аналогично 3), $\sin 2x + \cos^2 x = \cos x(2\sin x + \cos x)$.

630. 1) Указание: перенесите все в левую часть и преобразуйте уравнение:

$$2\sin^2 x - 1 - \frac{1}{3}\sin 4x = 2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} - 1 - \frac{1}{3}\sin 4x = -\cos 2x - \frac{2}{3}\cos 2x \sin 2x =$$

$$= -\cos 2x\left(1 + \frac{2}{3}\sin 2x\right)$$

2) Указание: $2\cos^2 2x - 1 = \cos 4x$. Аналогично задаче 624.

3) Указание: $2\cos^2 2x + 3\cos^2 x = 2\cos^2 2x + 3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$. Домножим на 2 и перенесем все в левую часть. Получим: $4\cos^2 2x + 3\cos 2x - 1 = 0$. Это уравнение квадратное относительно $\cos 2x$, см. задачу 1 §36.

4) Указание: $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$.

631. 1) $2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$. Решение: $2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 2(\sin x + \cos x)^2 - 3(\sin x + \cos x) = 0$. Заменим $u = (\sin x + \cos x)$, тогда $2u^2 - 3u = 0$, откуда $u = 0$ или $u = \frac{3}{2}$. Но $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, поэтому $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ или $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}} > 1$. Второе уравнение не имеет решений, а из первого $x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$. Ответ: $x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Указание: аналогично 1), $\sin 2x+3=2+(\sin x+\cos x)^2$.

3) Указание: аналогично 1), $\sin 2x+4=3+(\sin x+\cos x)^2$.

4) Указание: $\sin 2x+5(\sin x+\cos x+1)=4+(\sin x+\cos x)^2+5(\sin x+\cos x)$, аналогично 1).

632. 1) Указание: $1-\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=1+\cos x-\cos\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$, аналогично задаче 629.

2) Указание: $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$, см. задачу 631.

633. 1) $8\sin x\cos x\cos 2x=1$. Решение: преобразуем левую часть:

$8\sin x\cos x\cos 2x=4\sin 2x\cos 2x=2\sin 4x$. Откуда $\sin 4x=\frac{1}{2}$, тогда

$4x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=(-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Указание: $\sin^4 x=(1-\cos^2 x)^2$, сделайте замену $u=\cos^2 x$.

634. 1) $2\cos^2 2x+3\sin 4x+4\sin^2 2x=0$. Решение: по формуле синуса двойного угла $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x$. Подставим в уравнение и разложим на множители левую часть. Получим: $(\cos 2x+\sin 2x)(\cos 2x+2\sin 2x)=0$,

т.е. $\sin 2x=-\cos 2x$, $\sin 2x=-\frac{1}{2}\cos 2x$. Т.к. $\cos 2x=0$ не является решением, разделим оба уравнения на $\cos 2x$. Получим $\operatorname{tg} 2x=-1$ или

$\operatorname{tg} 2x=-\frac{1}{2}$, откуда $2x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$ или $2x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Указание: $1-\sin x\cos x+2\cos^2 x=\sin^2 x+3\cos^2 x-\sin x\cos x$. Аналогично задаче 5 §36.

3) Указание: $2\sin^2 x=1-\cos 2x$, сделайте замену $u=\cos 2x$. Тогда

$\frac{1}{4}u^3-u=0$, откуда $u=0$ или $u=\pm\frac{1}{2}$.

4) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1 + 4\sin x$. Решение: $\cos^2 3x = 1 - \sin^2 3x$, подставим в уравнение, получим $\sin^2 2x - \cos^2 3x = 4\sin x$. Преобразуем левую часть: $\sin^2 2x - \cos^2 3x = (\sin 2x - \sin 3x)(\sin 2x + \sin 3x) =$

$$= -2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\cdot 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = -\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\left(2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{5x}{2}\right) =$$

$= -\sin x \sin 5x$. Т.е. исходное уравнение равносильно $-\sin x \sin 5x = 4\sin x$, $\sin x(4 + \sin 5x) = 0$, откуда $\sin x = 0$ (второй сомножитель всегда больше нуля); $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

635. 1) Указание: перенесите все в левую часть, тогда по формуле суммы косинусов получится $\cos(2x + x) = 0$.

2) Указание: перенесите все в левую часть, тогда по формуле разности синусов получится $\sin(2x - x) = 0$.

3), 4) Аналогично задаче 12 §36.

636. 1) $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0$. Решение: $\cos x = 0$ не является решением, поэтому разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим:

$4\,\mathrm{tg}^2 x - 5\,\mathrm{tg}\, x - 6 = 0$. Это уравнение квадратное относительно $\mathrm{tg}\, x$. Находим его корни: $\mathrm{tg}\, x = 2$ и $\mathrm{tg}\, x = -\frac{3}{4}$. Т.е. $x = \mathrm{arctg}\, 2 + \pi k$ или

$x = -\mathrm{arctg}\frac{3}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \mathrm{arctg}\, 2 + \pi k$, $x = -\mathrm{arctg}\frac{3}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

3), 4) Указание: аналогично 1), воспользуйтесь формулой $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$.

637. 1) $4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x\cos 2x = 0$. Решение: применим формулу преобразования произведения в сумму, получим:

$4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x\cos 2x = 4\sin 3x + \sin 5x - (\sin 3x - \sin x) =$

$= 3\sin 3x + \sin 5x + \sin x$. По формуле суммы синусов $\sin 5x + \sin x =$ $= 2\sin 3x\cos 2x$, т.е. окончательно $\sin 3x(3 + 2\cos 2x) = 0$. Откуда $\sin 3x = 0$ или $\cos 2x = -\frac{3}{2} < -1$. Из первого уравнения $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$, второе уравнение решений не имеет. Ответ: $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: преобразуйте левую часть уравнения:

$$6\cos 2x \sin x + 7\sin 2x = \sin x(6\cos 2x + 14\cos x) = \sin x(12\cos^2 x + 14\cos x - 6).$$

638. 1) Указание: $\sin^2 3x - \sin^2 x = (\sin 3x - \sin x)(\sin 3x + \sin x) =$

$= 2\sin x \cos 2x \cdot 2\sin 2x \cos x = 2\sin^2 2x \cos 2x$, т.е. уравнение равносильно уравнению $\sin^2 2x = 2\sin^2 2x \cos 2x$.

2) Указание: раскройте скобки и сделайте замену: $u = (\sin x + \cos x) =$

$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, тогда $\cos x \sin x = \frac{(\cos x + \sin x)^2 - 1}{2} = \frac{u^2 - 1}{2}$.

639. 1) Указание: по формуле преобразования произведения в сумму: $\sin x \sin 2x \sin 3x = {}^1\!/_2 \sin 2x(\cos 2x - \cos 4x)$, т.е. ${}^1\!/_2 \sin 2x(\cos 2x - \cos 4x) =$

$= {}^1\!/_2 \sin 2x \cos 2x$.

2) Указание: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

640. 1) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$. Решение: перегруппируем слагаемые: $\cos^2 x - \cos^2 4x = \cos^2 3x - \cos^2 2x$. Получаем: $\cos^2 x - \cos^2 4x =$

$= (\cos x - \cos 4x)(\cos x + \cos 4x) = 2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{5x}{2} \cdot 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{5x}{2} = \sin 3x \sin 5x$,

аналогично $\cos^2 3x - \cos^2 2x = -\sin x \sin 5x$. Т.е. $\sin 5x(\sin x + \sin 5x) = 0$,

$2\sin 5x \sin 3x \cos 2x = 0$, откуда находим три серии корней: $x = \frac{\pi k}{5}$,

$x = \frac{\pi k}{3}$ и $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{\pi k}{5}$, $x = \frac{\pi k}{3}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: по формуле суммы кубов и основному тригонометрическому тождеству $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1 - \frac{3}{2}\sin^2 2x$.

641. 1) Аналогично 2).

2) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}$. Решение: область определения уравнения $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Домножим обе части на $\sin^2 x \neq 0$, получим $\sin^3 x + \sin x = \sin^4 x + 1$, $\sin^3 x + \sin x - \sin^4 x - 1 = 0$. Сделаем замену $u = \sin x$, тогда $u^3 + u - u^4 - 1 = 0$, $-(u-1)^2(u^2 + u + 1) = 0$, что равно-

сильно $u=1$, т.е. $\sin x=1$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

642. 1) $\sin x\sin 5x=1$. Решение: т.к. $-1\le\sin x\le 1$ и $-1\le\sin 5x\le 1$ при любых значениях x, то равенство возможно, только если $\sin x=\sin 5x=1$ или $\sin x=\sin 5x=-1$. Первое равенство выполняется, только если $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, а второе, если $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$. Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

643. 1) $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x$. Решение: равенство возможно только если $\sin x\le 0$, при таких x возведем уравнение в квадрат. Получим:

$5\cos x-\cos 2x=4\sin^2 x$; $5\cos x-2\cos^2 x+1-4(1-\cos^2 x)=0$;

$2\cos^2 x+5\cos x-3=0$. Откуда $\cos x=\frac{1}{2}$ или $\cos x=-3$ (что не возможно). Таким образом $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Но корни $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ не удовлетворяю условию $\sin x\le 0$. Осталось проверить, что вторая серия корней удовлетворяет области определения уравнения:

$$5\cos\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)-\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+4\pi k\right)=5\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=3>0.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

644. 1) Указание: рассмотрите отдельно случаи $\cos x\ge 0$ и $\cos x<0$, аналогично задаче 643.

2) Указание: рассмотрите отдельно случаи $\operatorname{tg}x\ge 0$ и $\operatorname{tg}x<0$, аналогично задаче 643.

645. 1) $\begin{cases}\cos(x+y)=0\\ \cos(x-y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\pi/2+\pi k\\ x-y=2\pi n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\pi/2+\pi k+2\pi n\\ 2y=\pi/2+\pi k-2\pi n\end{cases}$, отсюда

находим: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}+\pi n$, $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}-\pi n$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}-\pi n\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{Z}$.

2) Указание: возведите первое уравнение в квадрат и воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством.

646. Указание: это уравнение сводится к квадратному относительно $\cos x$. Аналогично задаче 647.

647. Найти, при каких значениях a, уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = a$ не имеет корней. Решение: преобразуем уравнение $(1-a)\sin^2 x - \sin x \cos x - (2+a)\cos^2 x = 0$. При $a = 1$ $\cos x = 0$ является решением, следовательно $a \neq 1$. Тогда $\cos x = 0$ не является решением, разделим на $\cos^2 x$. Получим: $(1-a)\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - (2+a) = 0$. Так как тангенс пробегает все вещественные числа, значит если это уравнение (как квадратное относительно тангенса) имеет корни, то и исходное уравнение имеет корни. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы $D < 0$, т.е. $1 + 4(1-a)(2+a) < 0$, $4a^2 + 4a - 9 > 0$, откуда $a > \frac{\sqrt{10}-1}{2}$ или $a < \frac{-1-\sqrt{10}}{2}$. Ответ: $a > \frac{\sqrt{10}-1}{2}$, $a < -\frac{1+\sqrt{10}}{2}$.

§37. Примеры решения простейших тригонометрических неравенств

Основные формулы $(-1 \le \alpha \le 1, k \in Z)$:

$$\cos x \ge \alpha \Leftrightarrow -\arccos\alpha + 2\pi k \le x \le \arccos\alpha + 2\pi k;$$

$$\cos x > \alpha \Leftrightarrow -\arccos\alpha + 2\pi k < x < \arccos\alpha + 2\pi k;$$

$$\cos x \le \alpha \Leftrightarrow \arccos\alpha + 2\pi k \le x \le 2\pi - \arccos\alpha + 2\pi k;$$

$$\cos x < \alpha \Leftrightarrow \arccos\alpha + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos\alpha + 2\pi k.$$

$$\sin x \ge \alpha \Leftrightarrow \arcsin\alpha + 2\pi k \le x \le \pi - \arcsin\alpha + 2\pi k;$$

$$\sin x > \alpha \Leftrightarrow \arcsin\alpha + 2\pi k < x < \pi - \arcsin\alpha + 2\pi k;$$

$$\sin x \le \alpha \Leftrightarrow -\pi - \arcsin\alpha + 2\pi k \le x \le \arcsin\alpha + 2\pi k;$$

$$\sin x < \alpha \Leftrightarrow -\pi - \arcsin\alpha + 2\pi k < x < \arcsin\alpha + 2\pi k.$$

648–650. Указание: воспользуйтесь основными формулами. См. задачу 652.

651. 1) $\sin x \ge -\sqrt{2}$. Решение: т.к. $\sin x \ge -1 > \sqrt{2}$, то неравенство справедливо при всех x. Ответ: $x \in \mathbf{R}$.

2) Указание: $\sin x \le 1$ при всех x.

3) Указание: т.к. $\sin x \ge -1$ при всех x, то $\sin x = -1$.

4) Указание: т.к. $\sin x \le 1$ при всех x, то $\sin x = 1$.

652. 1) $\sqrt{2}\cos 2x \le 1$. Решение: преобразуем неравенство к стандартному виду $\cos 2x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда по формуле:

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi k \le 2x \le 2\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi k, \qquad \frac{\pi}{4} + 2\pi k \le 2x \le \frac{7\pi}{4} + 2\pi k,$$

$k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $\pi/8 + \pi k \le x \le 7\pi/8 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

3) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение: по формуле:

$$-\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k \le x + \frac{\pi}{4} \le \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k,$$

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \text{ откуда } -\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \le x \le 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \le x \le 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) Аналогично 3).

653. 1) $\cos\left(\frac{x}{3} + 2\right) \ge \frac{1}{2}$. Решение: по формуле $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le \frac{x}{3} + 2 \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Домножим это неравенство на 3, получим $-\pi + 6\pi k \le x + 6 \le \pi + 6\pi k$, откуда $-\pi - 6 + 6\pi k \le x \le \pi - 6 + 6\pi k$. Ответ: $-\pi - 6 + 6\pi k \le x \le \pi - 6 + 6\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

654. 1) $\sin^2 x + 2\sin x > 0$. Решение: разложим левую часть на множители: $\sin x(\sin x + 2) > 0$, но $\sin x \ge -1$, т.е. $\sin x + 2 > 0$. Поэтому необходимо и достаточно $\sin x > 0$, откуда $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $\cos^2 x - \cos x < 0$. Решение: разложим на множители, $\cos x(\cos x - 1) < 0$. Т.к. $\cos x \le 1$, то $\cos x - 1 \le 0$. Значит необходимо и достаточно, чтобы $\cos x > 0$ и $\cos x \ne 1$. Откуда $-\pi/2 + 2\pi k < x < \pi/2 + 2\pi k$, $x \ne 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $-\pi/2 + 2\pi k < x < \pi/2 + 2\pi k$, $x \ne 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Упражнения к главе VI

655. 1) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{\pi}{3}+3\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$;

2) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}-4\arcsin 1=\frac{\pi}{4}-4\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{7\pi}{4}$;

3) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$;

4) $\arccos(-1)-\arcsin(-1)=\pi-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}$;

5) $2\operatorname{arctg}1+3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\cdot\frac{\pi}{4}+3\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$;

6) $4\operatorname{arctg}(-1)+3\operatorname{arctg}\sqrt{3}=4\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)+3\cdot\frac{\pi}{3}=0$.

656. 1) $\cos(4-2x)=-\frac{1}{2}$. Решение: $4-2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $2x=4\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, отсюда $x=2\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. Ответ: $x=2\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) $\cos(6+3x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение: $6+3x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; $3x=-6\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, отсюда $x=-2\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi k$. Ответ: $x=-2\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

3) $\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$. Решение: $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $2x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; $2x=\pm\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, отсюда $x=\pm\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=-2\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

4) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)-\sqrt{3}=0$. Решение: $\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\pi}{3}-3x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $3x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2\pi k$, отсюда $x=\pm\frac{\pi}{18}-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{18}-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

657. 1) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$. Решение: $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$; $3x-\frac{\pi}{4}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$; $3x=\frac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, отсюда $x=\frac{\pi}{12}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) $1-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$. Решение: $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=1$; $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$;
$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2\pi k=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, отсюда $x=\frac{\pi}{3}+4\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+4\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

3) $3+4\sin(2x+1)=0$. Решение: $\sin(2x+1)=-\frac{3}{4}$; $2x+1=(-1)^{k+1}\cdot\arcsin\frac{3}{4}+\pi k$;
$x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

4) $5\sin(2x-1)-2=0$. Решение: $\sin(2x-1)=\frac{2}{5}$; $2x-1=(-1)^k\arcsin\frac{2}{5}+\pi k$;
$x=(-1)^k\arcsin\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$. Ответ: $x=(-1)^k\arcsin\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

658. 1) Указание: преобразуйте уравнение: $(1+\sqrt{2}\cos x)(1-2\sin 2x)=0$, откуда $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin 2x=\frac{1}{2}$.

2) Указание: преобразуйте уравнение: $(1-\sqrt{2}\cos x)(1+\sin 4x)=0$, откуда $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin 4x=-1$.

659. Аналогично задаче 611.

660. 1), 2) Указание: уравнение является квадратным относительно $\sin x$. Аналогично задаче 1 §36.
3), 4) Указание: уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Аналогично задаче 1 §36.

661. Аналогично задачам 2 и 3 §36.

662. Аналогично задаче 4 §36.

663. 1) Указание: уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} 2x=3/2$.

2) Указание: уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} 3x=-5/4$.

664. 1) $5\sin x+\cos x=5$. Решение: разделим обе части уравнения на $\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$, получим $\frac{5}{\sqrt{26}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{26}}\cos x=\frac{5}{\sqrt{26}}$. Рассмотрим угол

φ, такой, что $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{26}}$ и $\sin\varphi=\frac{5}{\sqrt{26}}$ (такой угол существует). Тогда

$\cos(x-\varphi)=\frac{5}{\sqrt{26}}$, откуда $x=\pm\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}+\varphi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\pm\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}+\varphi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, где $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\sin\varphi=\frac{5}{\sqrt{26}}$.

2) Аналогично 1).

665. 1) Указание: преобразуйте уравнение:

$$\sin 3x-\sin 5x=2\sin\frac{3x-5x}{2}\cos\frac{3x+5x}{2}=-2\sin x\cos 4x.$$

2) Указание: преобразуйте уравнение: $\cos^2 3x-\cos 3x\cos 5x=$

$$=\cos 3x(\cos 3x-\cos 5x)=-2\cos 3x\sin\frac{3x-5x}{2}\sin\frac{3x+5x}{2}=2\cos 3x\sin x\sin 4x.$$

3) Указание: преобразуйте уравнение аналогично 1) (по формуле разности косинусов).

4) Указание: преобразуйте уравнение аналогично 2) (по формуле разности синусов).

Проверь себя!

1. 1) $\arccos 1+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$.

2. 1) Указание: $\sin 3x\cos x-\sin x\cos 3x=\sin(3x-x)=\sin 2x$.

2), 3) Аналогично задачам 2 и 4 §36.

4) Аналогично задаче 665 п. 1).

5) Указание: $2\sin x+\sin 2x=2\sin x(1+\cos x)$.

666. 1) Указание: $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$, см. задачу 582.

2) Указание: $\arccos {}^1\!/_2={}^\pi\!/_3$.

3) Указание: $\arccos {}^{\sqrt{2}}\!/_2={}^\pi\!/_4$.

667. Указание: 1), 3) $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$; 4) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

668. Аналогично задаче 664.

669. Указание: разделите обе части уравнения на $\cos^2 x\neq 0$, уравнение станет квадратным относительно $\operatorname{tg}x$.

670. 1) Указание: аналогично 2), перенесите все в левую часть и преобразуйте: $1+2\sin x-2\sin x\cos x-2\cos x=(\cos x-\sin x)^2-2(\cos x-\sin x)=$

$$=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\right).$$

2) $1+3\cos x=\sin 2x+3\sin x$. Решение: перенесем все в левую часть и преобразуем: $1+3\cos x-\sin 2x-3\sin x=(\cos x-\sin x)^2+3(\cos x-\sin x)=$

$$=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2}\right).$$ Т.е.

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2}\right)=0$, откуда $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}<-1$ или $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$. Из первого уравнения $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, а второе уравнение не имеет решений. Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$;

671. 1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1+\cos 2x$. Решение:

$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$, тогда по формуле суммы косинусов $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}\cos x=\cos x$. Таким образом $\cos x=1+\cos 2x$, $\cos x=1+2\cos^2 x-1$, $2\cos^2 x-\cos x=0$. Значит $\cos x=0$ или $\cos x=\frac{1}{2}$. Из первого уравнения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, а из второго $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

672. 1) Указание: $\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=$

$=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$.

2) Указание: $\cos^3 x\sin x+\sin^3 x\cos x=\sin x\cos x(\cos^2 x+\sin^2 x)=\frac{1}{2}\sin 2x$.

673. Указание: воспользуйтесь формулами половинного угла:

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \text{ и } \cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}.$$

674. 1) $\sin^2 x - \cos x\cos 3x = \frac{1}{4}$. Решение: преобразуем уравнение:

$$\sin^2 x - \cos x\cos 3x = \frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{1}{2} - \cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x =$$

$= \frac{1}{2} - \cos 2x - \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1)$. Откуда $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$, $\cos 2x = \frac{1}{2}$ или $\cos 2x = -\frac{3}{2} < -1$. Из первого уравнения $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, а второе уравнение не имеет решений. Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x =$

$= 2\sin x\cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x =$

$= 3\sin x - 4\sin^3 x$.

3), 4) Указание: уравнение сводится к квадратному, воспользуйтесь формулами косинуса двойного угла, см. п.5).

5) $5\sin 2x + 4\cos^3 x - 8\cos x = 0$. Решение: преобразуем уравнение: $10\sin x\cos x + 4\cos^3 x - 8\cos x = 0$, $2\cos x(5\sin x + 2\cos^2 x - 4) = 0$, т.е. $\cos x = 0$ или $5\sin x + 2\cos^2 x - 4 = 0$. Из первого уравнения получаем: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Преобразуем второе уравнение, получим: $5\sin x + 2(1 - \sin^2 x) - 4 = 0$, $-2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 2 > 1$. Из первого уравнения $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, а второе уравнение не имеет решений. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

675. 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2} + \sin 2x = \sin 2x(2\cos x + 1)$.

2) Указание: $\cos x - \cos 3x = 2\sin 2x\sin x$, а $\cos 2x - \cos 4x = 2\sin 3x\sin x$. Если перенести все в правую часть и воспользоваться формулой разности синусов, получим: $4\sin x\sin{}^{x}\!/_{2}\cos{}^{5x}\!/_{2} = 0$.

676. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=-\frac{1}{4}$;

3) $\sin\left(\pi-\arcsin\frac{3}{4}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$;

4) $\sin\left(\pi+\arcsin\frac{2}{3}\right)=-\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$.

677. 1) $\mathrm{tg}\left(\pi+\mathrm{arctg}\frac{5}{4}\right)=\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}$;

2) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,2\right)=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,2)=2$.

678. 1) $\frac{\sin 2x}{\sin x}=0$. Решение: О.О.У. $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Тогда $\sin 2x=0$, откуда $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. На рис. 76 видно, что уравнению удовлетворяют корни $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) $\frac{\sin 3x}{\sin x}=0$. Решение: О.О.У. $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Тогда $\sin 3x=0$, откуда $x=\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$. Таким образом, уравнению удовлетворяют только те корни, когда $k\neq 3n$, $n\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$, $k\neq 3n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3) $\frac{\cos 2x}{\cos x}=0$. Решение: О.О.У. $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Тогда $\cos 2x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbf{Z}$. Таким образом, вся серия корней удовлетворяет О.О. Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbf{Z}$.

4) $\frac{\cos 3x}{\cos x}=0$. Решение: О.О.У. $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Тогда $\cos 3x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, $k\in\mathbf{Z}$. Совмещая с О.О., получаем ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\pi k$ или $x=\frac{5\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

5) $\frac{\sin x}{\sin 5x}=0$. Решение: О.О.У. $\sin 5x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$. Тогда

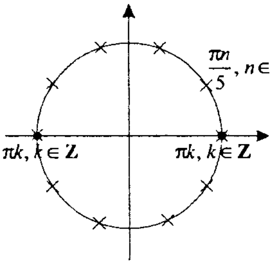

Рис. 75

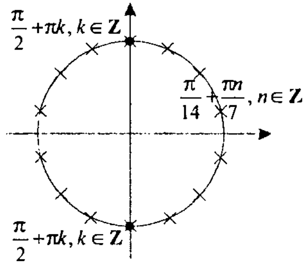

Рис. 76

$\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Но при $n = 5k$ видно, что эти корни не удовлетворяют области определения (см. рис. 75). Ответ: корней нет.

6) $\frac{\cos x}{\cos 7x} = 0$. Решение: О.О.У. $\cos 7x \neq 0$ $\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$. Тогда $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Но при $n = 3 + 7k$ видно, что эти корни не удовлетворяют ОО (см. рис. 76). Ответ: корней нет.

679. 1) $\cos x \sin 5x = -1$. Решение: поскольку $|\cos x| \le 1$, $|\sin 5x| \le 1$, то $\cos x \sin 5x = -1$ только если $\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin 5x = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin 5x = 1 \end{cases}$. Из первой системы $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ и $x = \frac{2\pi n}{5} - \frac{\pi}{10}$, $n \in \mathbf{Z}$. Решения не совпадают ни при каких n, k. Аналогично в случае второй системы. Ответ: решений нет.

2) Аналогично 1).

680. Указание: воспользуйтесь формулами тройного угла: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ и $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Получившееся уравнения разделите на $\cos^3 x$ и воспользуйтесь формулой $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. См. задачу 681.

681. 1) $\sin 2x + \cos 2x = 2\operatorname{tg} x + 1$. Решение: область определения уравнения $\cos x \neq 0$. Левая часть: $\sin 2x + \cos 2x = 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 1 =$

$$= \cos^2 x\left(2\operatorname{tg} x + 2 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\left(2\operatorname{tg} x + 2 - 1 - \operatorname{tg}^2 x\right) = \frac{-\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Сделаем замену $\operatorname{tg} x = u$, тогда уравнение примет вид:

$\dfrac{-u^2+2u+1}{1+u^2} = 2u+1$, $-u^2+2u+1 = 2u^3+u^2+2u+1$, $2u^3+2u^2=0$, откуда $u=0$ или $u=-1$. Возвращаясь к исходной неизвестной, находим $x=\pi k$ или $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pi k$, $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

682. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=\dfrac{3}{2}$. Решение: перенесем все в левую часть и преобразуем: $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x-3/2=$

$=\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\dfrac{1+\cos 4x}{2}+\dfrac{1+\cos 6x}{2}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)=$

$=\dfrac{1}{2}(\cos 4x+2\cos 4x\cos 2x)=\dfrac{1}{2}\cos 4x(2\cos 2x+1)$. Таким образом, получим $\dfrac{1}{2}\cos 4x(2\cos 2x+1)=0$, откуда $\cos 4x=0$ или $\cos 2x=-\dfrac{1}{2}$. Из первого уравнения $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{4}$, а из второго $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{4}$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

683. $\sqrt{-4\cos x\cos^2 x}=\sqrt{7\sin 2x}$. Решение: возведем обе части уравнения в квадрат и преобразуем: $-4\cos x\cos^2 x=14\sin x\cos x$. $\cos x=0$ – решение (причем оно удовлетворяет О.О.), откуда $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Если $\cos x\neq 0$, то $-2\cos^2 x=7\sin x$, $2(\sin^2 x-1)-7\sin x=0$, откуда $\sin x=\dfrac{7-\sqrt{65}}{4}\in[-1;1]$ или $\sin x=\dfrac{7+\sqrt{65}}{4}>1$. Из первого уравнения $x=(-1)^k\arcsin\left(\dfrac{7-\sqrt{65}}{4}\right)+\pi k$. При четных k

$x=\arcsin\left(\dfrac{7-\sqrt{65}}{4}\right)+2\pi n\approx-\arcsin\dfrac{1}{4}+2\pi n$ – угол четвертой четверти, а значит, не удовлетворяет ОО (т.к. его косинус положительный). При нечетных k, $x = -\arcsin\left(\frac{7-\sqrt{65}}{4}\right) + 2\pi n + \pi \approx \pi + \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$ – угол третьей четверти, который удовлетворяет области определения (т.к. его косинус и синус отрицательные).

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \pi + \arcsin\left(\frac{\sqrt{65}-7}{4}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

684. Указание: рассмотрите два случая: косинус больше или меньше нуля. В первом случае в левой части воспользуйтесь формулой разности косинусов, во втором – формулой суммы косинусов.

685. 1) $\begin{cases} \sin y \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin 2x + \sin 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2y = 1 \\ 2\sin(x+y)\cos(x-y) = 0 \end{cases}$, тогда из первого уравнения $y = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, а из второго уравнения $x + y = \pi k$, либо $x - y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Откуда и находим окончательный ответ.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: домножьте первое уравнение на 3 и вычтите из второго, тогда: $\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right) - \left(\cos y + \sqrt{3}\sin y\right) = 2\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(y - \frac{\pi}{3}\right)\right) =$

$= -4\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

686. 1) Указание: если сложить уравнения системы, то после преобразований получится $\sin(x+y) - \sin 2y = 0$, т.е. $2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+3y}{2} = 0$.

2) $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2} \\ \cos x \sin y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pi k \\ x - y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

Решение: сложим уравнение системы, тогда $\sin(x+y) = 0$. Если же от первого уравнения отнять второе, то $\sin(x-y) = 1$. Откуда

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}+\pi n$ и $y=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}-\pi n$. Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}-\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

687. Решение: преобразуем левую часть:

$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$. Таким образом $\sin^2 2x=2(1-a)$. Т.к. $0\le\sin^2 2x\le 1$, то необходимо $0\le 2(1-a)\le 1$, откуда $\frac{1}{2}\le a\le 1$. При таких a справедливо $x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{2-2a}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{2-2a}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, $\frac{1}{2}\le a\le 1$.

688. Указание: используйте тождество: $\sin^{10}x+\cos^{10}x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^5-$ $-\frac{5}{2}\sin^2 2x\left((\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)-5\sin^2 2x(\sin^2 x+\cos^2 x)$. Аналогично задаче 687.

689. $\sin 2x-2a\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1-6a^2=0$.

Решение: сделаем замену $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=u$, тогда:

$\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2-1=u^2-1$, т.е. $u^2-2a\sqrt{2}u-6a^2=0$. Найдем корни этого квадратного трехчлена, $u_1=-a\sqrt{2}$ и $u_2=3a\sqrt{2}$. Т.к. $|u|\le\sqrt{2}$, то если $|a|\le\frac{1}{3}$, то оба уравнения $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-a\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=3a\sqrt{2}$ имеют решения. Т.е. $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos 3a+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{4}\pm(\pi-\arccos a)+2\pi k$. Если $\frac{1}{3}<|a|\le 1$, существует только решение $x=\frac{\pi}{4}\pm(\pi-\arccos a)+2\pi k$, а если $|a|>1$, то решений нет.

Ответ: если $|a| \le \frac{1}{3}$, то $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos 3a + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{4} \pm (\pi - \arccos a) + 2\pi k$;

если $\frac{1}{3} < |a| \le 1$, то $x = \frac{\pi}{4} \pm (\pi - \arccos a) + 2\pi k$; если $|a| > 1$, решений нет.

690. 1) $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0$. Решение: сделаем замену переменных $\sin x = u$, $|u| \le 1$. Тогда $2(1-u^2) + u - 1 < 0$; $2u^2 - u - 1 > 0$; $(u-1)(2u+1) > 0$, откуда $u > 1$ или $u < -\frac{1}{2}$. Первое неравенство не имеет решений, а второе, по формуле из §37, имеет решения $-\pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Глава VII
Тригонометрические функции

§38. Область определения и множество значений тригонометрических функций

Основные понятия:

$y=\sin x$. Множество определения $x\in \mathbf{R}$, множество значений $[-1;\,1]$.

$y=\cos x$. Множество определения $x\in \mathbf{R}$, множество значений $[-1;1]$.

$y=\operatorname{tg} x$. Множество определения $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, множество значений $\mathbf{R}$.

691. 1) $y=\sin 2x$, $x\in\mathbf{R}$. 2) $y=\cos\frac{x}{2}$, $x\in\mathbf{R}$.

3) $y=\cos\frac{1}{x}$. Решение. необходимо, чтобы было определено $\frac{1}{x}$, т.е. $x\neq 0$.

4) $y=\sin\frac{2}{x}$, $x\in\mathbf{R}|\{0\}$.

5) $y=\sin\sqrt{x}$. Решение: $\sqrt{x}\geq 0$, т.е. $x\geq 0$. Ответ: $x\geq 0$.

6) $y=\cos\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. Решение: $\frac{x-1}{x+1}\geq 0$, т.е. $x\geq 1$ и $x<-1$. Ответ: $x\geq 1$, $x<-1$

692. 1) $y=1+\sin x$. Решение: $-1\leq\sin x\leq 1$, $0\leq\sin x+1\leq 2$. Ответ: $0\leq y\leq 2$.

2) $y=1-\cos x$. Решение: $-1\leq\cos x\leq 1$, $0\leq 1-\cos x\leq 2$. Ответ: $0\leq y\leq 2$.

3) $y=2\sin x+3$. Решение: $-2\leq 2\sin x\leq 2$, $1\leq 2\sin x+3\leq 5$.
Ответ: $1\leq y\leq 5$.

4) $y=1-4\cos 2x$. Решение: $-1\leq\cos 2x\leq 1$, $-3\leq 1-4\cos x\leq 5$.
Ответ: $-3\leq y\leq 5$.

5) $y=\sin 2x\cos 2x+2$. Решение: $\sin 2x\cos 2x+2=\frac{1}{2}\sin 4x+2$, но

$-1 \le \sin 4x \le 1$, отсюда $1\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\sin 4x + 2 \le 2\frac{1}{2}$. Ответ: $1\frac{1}{2} \le y \le 2\frac{1}{2}$.

693. 1) $y = \frac{1}{\cos x}$. Решение: необходимо, чтобы было определено выражение $\frac{1}{\cos x}$. Т.е. $\cos x \ne 0$; $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $y = \frac{2}{\sin x}$. Решение: необходимо, чтобы было определено выражение $\frac{2}{\sin x}$. Т.е. $\sin x \ne 0$; $x \ne \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x \ne \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$. Решение: тангенс определен, если аргумент не равен $\frac{\pi}{2} + \pi k$, т.е. $\frac{x}{3} \ne \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x \ne \frac{3\pi}{2} + 3\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x \ne \frac{3\pi}{2} + 3\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) $y = \operatorname{tg} 5x$. Решение: тангенс определен, если аргумент не равен $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, т.е. $5x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x \ne \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x \ne \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$.

694. 1) $y = \sqrt{\sin x + 1}$. Решение: необходимо, чтобы существовал $\sqrt{\sin x + 1}$, т.е. $\sin x + 1 \ge 0$, $\sin x \ge -1$, что верно при любых x. Ответ: $x \in \mathbf{R}$.

2) $y = \sqrt{\cos x - 1}$. Решение: т.к. $\cos x \le 1$, то $\cos x - 1 \le 0$. Поэтому необходимо, чтобы $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $y = \lg \sin x$. Решение: необходимо $\sin x > 0$, т.е. $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$. Ответ: $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) $y = \sqrt{2\cos x - 1}$. Решение: необходимо, чтобы $2\cos x - 1 \ge 0$, $\cos x \ge \frac{1}{2}$, т.е. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

5) $y = \sqrt{1 - 2\sin x}$. Решение: необходимо, чтобы $1 - 2\sin x \ge 0$, $\sin x \le \frac{1}{2}$, т.е. $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k$. Ответ: $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

6) $y = \ln \cos x$. Решение: необходимо $\cos x > 0$, т.е. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

695. 1) Указание: $2\sin^2 x - \sin x = \sin x(2\sin x - 1)$, таким образом необходимо, чтобы $\sin x \neq 1$ и $\sin x \neq \frac{1}{2}$.

2) Указание: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, т.е необходимо, чтобы $\cos 2x \neq 0$.

3) $y = \frac{1}{\sin x - \sin 3x}$. Решение: $\sin x - \sin 3x = -2\sin x \cos 2x \neq 0$, т.е. $\sin x \neq 0$ и $\cos 2x \neq 0$, т.е. $x \neq \pi k$ и $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. Ответ: $x \neq \pi k$, $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) $y = \frac{1}{\cos^3 x + \cos x}$. Решение: $\cos^3 x + \cos x = \cos x(\cos^2 x + 1)$. Поскольку $\cos^2 x + 1 > 0$ при всех x, то необходимо $\cos x \neq 0$, т.е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

696. 1) $y = 2\sin^2 x - \cos x$. Решение: $2\sin^2 x - \cos 2x = 2\sin^2 x - (1 - 2\sin^2 x) = 4\sin^2 x - 1$ но $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, т.е. $-1 \leq 4\sin^2 x - 1 \leq 3$. Ответ: $-1 \leq y \leq 3$.

2) $y = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$. Решение: $1 - 8\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 2x$, но $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$, т.е. $-1 \leq 1 - 2\sin^2 2x \leq 1$. Ответ: $-1 \leq y \leq 1$.

3) $y = \frac{1 + 8\cos^2 x}{4}$. Решение: т.к. $0 \leq \cos^2 x \leq 1$, то $1 \leq 1 + 8\cos^2 x \leq 9$, откуда $\frac{1}{4} \leq \frac{1 + 8\cos^2 x}{4} \leq \frac{9}{4}$. Ответ: $\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{9}{4}$.

4) $y = 10 - 9\sin^2 3x$. Решение: т.к. $0 \leq \sin^2 3x \leq 1$, то $1 \leq 10 - 9\sin^2 3x \leq 10$. Ответ: $1 \leq y \leq 10$.

5) $y = 1 - 2|\cos x|$. Решение: т.к. $0 \leq |\cos x| \leq 1$, то $-1 \leq 1 - 2|\cos x| \leq 1$. Ответ: $-1 \leq y \leq 1$.

6) $y = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Решение: $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Функция синус (от аргумента $t = x + \frac{\pi}{3}$) принимает все значения в промежутке [–1; 1], поэтому $-\sqrt{3} \leq \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \sqrt{3}$.

Ответ: $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$.

697. Решение: $3\cos 2x - 4\sin 2x = 5\left(\frac{3}{5}\cos 2x - \frac{4}{5}\sin 2x\right) =$

$= 5(\cos\varphi\cos 2x - \sin\varphi\sin 2x) = 5\cos(\varphi + 2x)$, где угол φ такой, что

$\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$. Такой угол существует, так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$. Поскольку $-1 \le \cos(\varphi + 2x) \le 1$, то $-5 \le 5\cos(\varphi + 2x) \le 5$.

Ответ: наибольшее значение функции 5, наименьшее значение - 5.

698. Решение: $\sin x - 5\cos x = \sqrt{26}\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\sin x - \frac{5}{\sqrt{26}}\cos x\right) =$

$= \sqrt{26}(\cos\varphi\sin x - \sin\varphi\cos x) = \sqrt{26}\sin(\varphi - x)$, где угол φ такой, что

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{26}}$, $\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{26}}$. Такой угол существует, т.к. $\frac{1}{26} + \frac{25}{26} = 1$. Поскольку $-1 \le \sin(\varphi - x) \le 1$, $-\sqrt{26} \le \sqrt{26}\sin(\varphi - x) \le \sqrt{26}$.

Ответ: наибольшее значение $\sqrt{26}$, наименьшее значение $-\sqrt{26}$.

699. $y = 10\cos^2 x - 6\cos x\sin x + 2\sin^2 x$.

Решение: преобразуем выражение: $10\cos^2 x - 6\cos x\sin x + 2\sin^2 x =$
$= 5(1 + \cos 2x) - 3\sin 2x + (1 - \cos 2x) = 4\cos 2x - 3\sin 2x + 6$. Аналогично задаче 697 получаем $4\cos 2x - 3\sin 2x = \cos(\varphi + 2x)$, где $\cos\varphi = \frac{4}{5}, \sin\varphi = \frac{3}{5}$.
Окончательно $y = \cos(\varphi + 2x) + 6$, откуда $5 \le y \le 7$. Ответ: $5 \le y \le 7$.

§39. Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций

Основные понятия:

Функция $f(x)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$ для любого x из области определения функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$ для любого x из области определения функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \ne 0$, что для любого x из области определения функции $f(x)$.

Число T называется *периодом* функции $f(x)$.

700. 1) $y=\cos 3x$. Решение: $y(-x)=\cos 3(-x)=\cos 3x=y(x)$, т.е. функция четная.

2) $y=2\sin 4x$. Решение: $y(-x)=2\sin(-4x)=-2\sin 4x=-y(x)$, т.е. функция нечетная.

3) $y=\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2 x$. Решение: $y(-x)=\frac{(-x)}{2}\operatorname{tg}^2(-x)=-\frac{x}{2}(-\operatorname{tg}x)^2=-\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2 x=-y(x)$, т.е. функция нечетная.

4) $y=x\cos\frac{x}{2}$. Решение: $y(-x)=-x\cos\left(-\frac{x}{2}\right)=-x\cos\frac{x}{2}=-y(x)$, т.е. функция нечетная.

5) $y=x\sin x$. Решение: $y(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=y(x)$, т.е. функция четная.

6) $y=2\sin^2 x$. Решение: $y(-x)=2\sin^2(-x)=2\sin^2 x=y(x)$, т.е. функция четная.

701. 1) $y=\sin x+x$. Решение: $y(-x)=\sin(-x)+(-x)=-(\sin x+x)=-y(x)$, т.е. функция нечетная.

2) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-x^2$. Решение: поскольку $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$, получаем $y(-x)=\sin(-x)-(-x)^2=-\sin x-x^2$, т.е. функция общего вида.

3) $y=3-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin(\pi-x)$. Решение: т.к. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin(\pi-x)=-\sin^2 x$, то $y(-x)=3+\sin^2(-x)=3+\sin^2 x=y(x)$, т.е. фукнция четная.

4) $y=\frac{1}{2}\cos 2x\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2x\right)+3$. Решение: т.к. $\cos 2x\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2x\right)=-\cos 3x$, то $y(-x)=-\frac{1}{2}\cos(-3x)+3=-\frac{1}{2}\cos 3x+3=y(x)$, т.е. функция четная.

5) $y=\frac{\sin x}{x}+\sin x\cos x$. Решение: $y(-x)=\frac{\sin(-x)}{(-x)}+\sin(-x)\cos(-x)=$
$=\frac{-\sin x}{-x}-\sin x\cos x=\frac{\sin x}{x}-\sin x\cos x$, т.е. функция общего вида.

6) $y=x^2+\frac{1+\cos x}{2}$. Решение: $(-x)^2+\frac{1+\cos(-x)}{2}=x^2+\frac{1+\cos x}{2}$, т.е. функция четная.

702. 1) $y=\cos x-1$. Решение: $y(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)-1=\cos x-1=y(x)$, ч.т.д.

2) $y=\sin x+1$. Решение: $y(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+1=\sin x+1=y(x)$, ч.т.д.

3) $y=3\sin x$. Решение: $y(x+2\pi)=3\sin(x+2\pi)=3\sin x=y(x)$, ч.т.д.

4) $y=\dfrac{\cos x}{2}$. Решение: $y(x+2\pi)=\dfrac{\cos(x+2\pi)}{2}=\dfrac{\cos x}{2}=y(x)$, ч.т.д.

5) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. Решение: $y(x+2\pi)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}+2\pi\right)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=y(x)$.

6) $y=\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Решение: $y(x+2\pi)=\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}+2\pi\right)=\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=y(x)$.

703. 1) $y(x+T)=\sin(2(x+\pi))=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x=y(x)$, ч.т.д.

2) $y(x+T)=\cos\left(\dfrac{x+4\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{x}{2}+2\pi\right)=\cos\dfrac{x}{2}=y(x)$, ч.т.д.

3) $y(x+T)=\mathrm{tg}(2x+\pi)=\mathrm{tg}(2x)=y(x)$, ч.т.д.

4) $y(x+T)=\sin\left(\dfrac{4x}{5}+\dfrac{4\cdot 5}{5\cdot 2}\pi\right)=\sin\left(\dfrac{4x}{5}+2\pi\right)=\sin\dfrac{4x}{5}=y(x)$, ч.т.д.

704. 1) $y(-x)=\dfrac{1-\cos(-x)}{1+\cos(-x)}=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=y(x)$, т.е. функция четная.

2) $y(-x)=\dfrac{\sqrt{\sin^2(-x)}}{1+\cos(-2x)}=\dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{1+\cos 2x}=y(x)$, т.е. функция четная.

3) $y(-x)=\dfrac{\cos(-2x)-(-x)^2}{\sin(-x)}=\dfrac{\cos 2x-x^2}{-\sin x}=-y(x)$, т.е. функция нечетная.

4) $y(-x)=\dfrac{(-x)^3+\sin(-2x)}{\cos(-x)}=\dfrac{-x^3-\sin 2x}{\cos x}=-y(x)$, т.е. функция нечетная.

5) $3^{\cos(-x)}=3^{\cos x}$, т.к. $\cos(-x)=\cos x$, т.е. функция четная.

6) $y(-x)=(-x)|\sin(-x)|\sin^3(-x)=-x|-\sin x|(-\sin x)^3=x|\sin x|\sin^3 x=y(x)$, т.е. функция четная.

705. 1) $y=\cos\dfrac{2}{5}x$. Решение: пусть T – период, тогда $\cos\dfrac{2}{5}(x+T)=\cos\dfrac{2}{5}x$.

Подставим $x=0$, получим $\cos\left(\dfrac{2T}{5}\right)=\cos 0=1$, откуда $\dfrac{2T}{5}=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; $T=5\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Т.к. наименьшее положительное k равно 1, то наименьший положительный период равен 5π. Ответ: $T=5\pi$.

2) $y=\sin\dfrac{3}{2}x$. Решение: пусть T – период, тогда $\sin\dfrac{3}{2}(x+T)=\sin\dfrac{3x}{2}$.

Подставим $x=0$, получим $\sin\left(\dfrac{3T}{2}\right)=\sin 0=0$, откуда $\dfrac{3T}{2}=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$;

$T=\frac{4}{3}\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Т.к. наименьшее положительное k равно 1, то наименьший положительный период равен $\frac{4}{3}\pi$. Ответ: $T=\frac{4}{3}\pi$.

3) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Решение: пусть T – период, тогда $\operatorname{tg}\frac{(x+T)}{2}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Подставим $x=0$, получим $\operatorname{tg}\left(\frac{T}{2}\right)=\operatorname{tg}0=0$, откуда $\frac{T}{2}=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; $T=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Т.к. наименьшее положительное k равно 1, то наименьший положительный период равен 2π. Ответ: $T=2\pi$.

4) $y=|\sin x|$. Решение: пусть T – период, тогда $|\sin(x+T)|=|\sin x|$. Подставим $x=0$, получим $\sin T=0$, откуда $T=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Т.к. наименьшее положительное k равно 1, то наименьший положительный период равен π. Ответ: π.

706. 1) Указание: $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Аналогично задаче 705. Подставьте точку $x=\frac{\pi}{4}$.

2) $y=\sin x+\operatorname{tg}x$. Решение: пусть T – период, тогда $\sin(x+T)+\operatorname{tg}(x+T)=$ $=\sin x+\operatorname{tg}x$. Подставим $x=0$, получим $\sin T+\operatorname{tg}T=0$. $\sin T\left(1+\frac{1}{\cos T}\right)=0$, откуда $T=\pi k$ или $T=-\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Т.к. при k равном 1, число π не является периодом, то проверим $k=2$, откуда наименьший положительный период равен 2π. Ответ: 2π.

707. 1) $y(x)=f(x)+f(-x)$. $y(-x)=f(-x)+f(x)=y(x)$, т.е. функция четная.

2) $y(x)=f(x)-f(-x)$. $y(-x)=f(-x)-f(x)=-(f(x)-f(x))=-y(x)$, т.е. функция нечетная.

Для любой функции $f(x)$ справедливо равенство:

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

§40. Свойства функции $y=\cos x$ и ее график

Свойства:

1°. Область определения – $\mathbf{R}$.

2°. Множество значений – отрезок [–1; 1].

3°. Функция $y=\cos x$ периодическая, наименьший положительный период равен 2π.

4°. Функция $y=\cos x$ четная.

5°. Функция $y=\cos x$ принимает положительные значения на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, отрицательные при $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

6°. Функция $y=\cos x$ возрастает на отрезках $(-\pi+2\pi k;2\pi k)$ и убывает на отрезках $(2\pi k;\pi+2\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$.

710. Указание: воспользуйтесь свойством 6°.

711. 1) $\cos\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$. Решение: т.к. данные числа принадлежат отрезку $(0;\pi)$, где $y=\cos x$ убывает, и $\frac{\pi}{7}<\frac{8\pi}{9}$, то $\cos\frac{\pi}{7}>\cos\frac{8\pi}{9}$.

2) $\cos\frac{8\pi}{7}$ и $\cos\frac{10\pi}{7}$. Решение: т.к. данные числа принадлежат отрезку $(\pi;2\pi)$, где $y=\cos x$ возрастает, и $\frac{8\pi}{7}<\frac{10\pi}{7}$, то $\cos\frac{8\pi}{7}<\cos\frac{10\pi}{7}$.

3) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$. Решение: т.к. данные числа принадлежат отрезку $(-\pi;0)$, где $y=\cos x$ возрастает, и $-\frac{6\pi}{7}<-\frac{\pi}{8}$, то $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)<\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$.

4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$. Решение: данные числа принадлежат отрезку $(-2\pi;-\pi)$, где $y=\cos x$ убывает, то $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)<\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$.

5) $\cos 1$ и $\cos 3$. Решение: числа 1 и 3 принадлежат отрезку $(0;\pi)$, где $y=\cos x$ убывает, поэтому $\cos 1>\cos 3$.

6) $\cos 4$ и $\cos 5$. Решение: числа 4 и 5 принадлежат отрезку $(\pi;2\pi)$, где $y=\cos x$ возрастает, поэтому $\cos 4<\cos 5$.

712. 1) $\cos x=\frac{1}{2}$. Решение: по формуле корней $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Из этих корней подходят только корни $\frac{\pi}{3}$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi$. Ответ: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$.

2) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение: по формуле корней $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Из этих корней подходят только корни $\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$.

3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение: по формуле корней $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Из этих корней подходят корни $\frac{3\pi}{4}$, $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi$. Ответ: $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$.

4) $\cos x=-\frac{1}{2}$. Решение: по формуле корней $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Из этих корней подходят корни $\frac{2\pi}{3}$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi$. Ответ: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$.

713. Аналогично задачам 712, 716.

714. 1) $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{\pi}{5}$. Решение: Т.к. $\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10}$, оба числа принадлежат промежутку $(0;\pi)$, где $y=\cos x$ убывает. Т.е. $\cos\frac{\pi}{5}>\sin\frac{\pi}{5}$.

2) $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$. Решение: Т.к. $\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{5\pi}{14}$, оба числа принадлежат промежутку $(0;\pi)$, где $y=\cos x$ убывает. Т.е. $\sin\frac{\pi}{7}<\cos\frac{\pi}{7}$.

3) $\cos\frac{3\pi}{8}$ и $\sin\frac{3\pi}{8}$. Решение: Т.к. $\sin\frac{3\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}$, оба числа принадлежат промежутку $(0;\pi)$, где $y=\cos x$ убывает. Т.е. $\cos\frac{3\pi}{8}<\sin\frac{3\pi}{8}$.

4) $\sin\frac{3\pi}{5}$ и $\cos\frac{\pi}{5}$. Решение: Т.к. $\sin\frac{3\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{10}$, оба числа принадлежат промежутку $(0;\pi)$, где $y=\cos x$ убывает. Т.е. $\sin\frac{3\pi}{5}>\cos\frac{\pi}{5}$.

5) $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\sin\frac{5\pi}{14}$. Решение: Т.к. $\sin\frac{5\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{7}$, оба числа принадлежат промежутку $(0;\pi)$, где $y=\cos x$ убывает. Т.е. $\cos\frac{\pi}{6}<\sin\frac{5\pi}{14}$.

6) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\sin\frac{3\pi}{10}$. Решение: Т.к. $\sin\frac{3\pi}{10}=\cos\frac{\pi}{5}$, оба числа принадлежат промежутку $(0;\pi)$, где $y=\cos x$ убывает. Т.е. $\cos\frac{\pi}{8}>\sin\frac{3\pi}{10}$.

715. 1) $\cos 2x=\frac{1}{2}$. Решение: по формуле корней $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Из этих корней подходят только корни $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi$. Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$.

2) Аналогично 1).

716. 1) $\cos 2x < \frac{1}{2}$. Решение: по формуле из §37 находим решения этого неравенства $\frac{\pi}{6}+\pi k < x < \frac{5\pi}{6}+\pi k$. Из них подходят только следующие промежутки: $-\frac{\pi}{2} \le x < -\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{6} < x \le \frac{3\pi}{2}$.

2) Аналогично 1).

717. 1) Указание: график функции $y = 1+\cos x$ получается из графика функции $y=\cos x$ сдвигом на одну единицу вверх.

2) Указание: см. рис. 77, свойства функции следуют из вида ее графика.

3) Указание: график функции $y = 3\cos x$ получается из графика функции $y=\cos x$ вертикальным растяжением в три раза, см. рис. 78.

718. 1) См. рис. 79; 2) См. рис. 80.

719. 1) Указание: график функции $y = |\cos x|$ получается из графика функции $y=\cos x$ симметричным отражением относительно оси OX той части графика, где $y<0$. См. рис. 81.

2) Указание: постройте последовательно графики функций $y=\cos(x-1)$, $y=-2\cos(x-1)$, $y=3-2\cos(x-1)$. См. рис. 82.

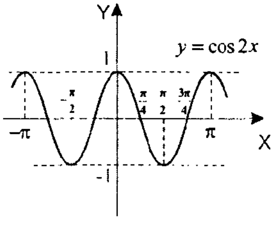

Рис. 77

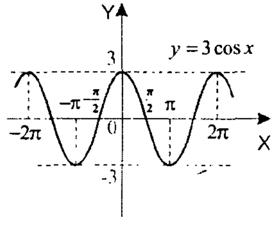

Рис. 78

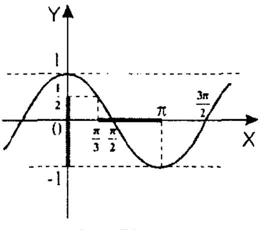

Рис. 79

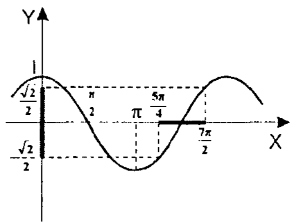

Рис. 80

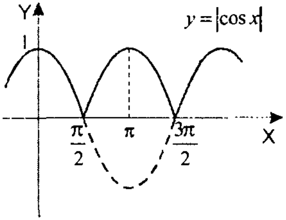

Рис. 81

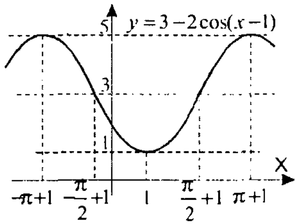

Рис. 82

§41. Свойства функции $y = \sin x$ и ее график

Свойства:

1°. Область определения – **R**.

2°. Множество значений – отрезок $[-1; 1]$.

3°. Функция $y = \sin x$ периодическая, наименьший положительный период равен 2π.

4°. Функция $y = \sin x$ нечетная.

5°. Функция $y = \sin x$ принимает положительные значения на интервалах $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ и отрицательные на интервалах $(2\pi k - \pi; 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$

6°. Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ и убывает на отрезках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

722. Указание: воспользуйтесь свойством 6°.

723. Аналогично задаче 726.

724. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Решение: по формуле корней находим $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из них условию удовлетворяют только корни $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3} - \pi$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi$, $-\frac{\pi}{3} + 3\pi$. Ответ: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$.

2)–4) Аналогично 1).

725. 1), 3), 4) Аналогично 2).

2) $\sin x \geq -\frac{1}{2}$. Решение: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из них усло-

вию удовлетворяют только $0 \le x \le \frac{7\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6} \le x \le 3\pi$.

726. 1) $\sin\frac{\pi}{9}$ и $\cos\frac{\pi}{9}$. Решение: по формуле приведения получаем:

$\cos\frac{\pi}{9} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right) = \sin\frac{7\pi}{18}$. Так как $\frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{18} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, где синус возрастает, и $\frac{\pi}{9} < \frac{7\pi}{18}$, то $\sin\frac{\pi}{9} < \cos\frac{\pi}{9}$.

2)–4) Аналогично 1).

727. Аналогично задачам 715, 724.

728. Аналогично задачам 716, 725.

729. 1) Указание: график функции $y = 1 - \sin x$ получается из графика функции $y = -\sin x$ сдвигом на одну единицу вверх.

2) Указание: график функции $y = 1 + \sin x$ получается из графика функции $y = \sin x$ сдвигом на одну единицу вверх.

3) Указание: см. рис. 83.

4) Указание: см. рис. 84.

730. Указание: решите задачу графически, аналогично задаче 718.

731. 1) Указание: график $y = \sin|x|$ получается из графика $y = \sin x$ симметричным отражением относительно OY части графика при $x \ge 0$ (рис. 85).

2) Указание: график $y = |\sin x|$ получается из графика $y = \sin x$ симметричным отражением относительно OX той части графика, где $y < 0$ (рис. 86).

732. 1) Указание: график $y = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ получается из графика $y = 2\sin t$ сдвигом на $\frac{\pi}{4}$ влево. Воспользуйтесь рисунком 84.

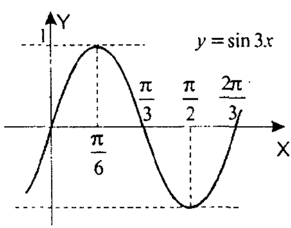

Рис. 83

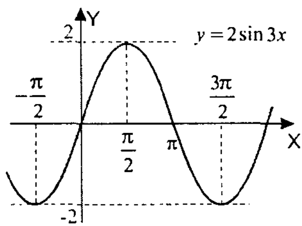

Рис. 84

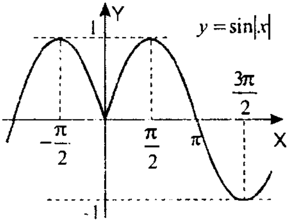

Рис. 85

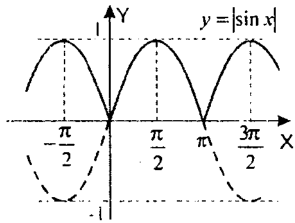

Рис. 86

2) Указание: график $y = \sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$ получается из графика $y = \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$ сжатием вдоль оси OX в два раза (см. рисунок 87).

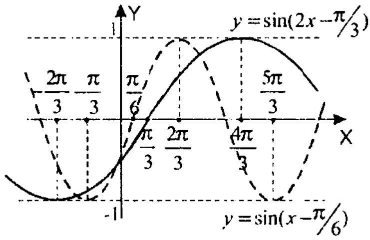

Рис. 87

§42. Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график

Свойства:

1°. Область определения – $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2°. Множество значений – **R**.

3°. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая, наименьший положительный период равен π.

4°. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная.

5°. Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает положительные значения на интервалах $\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ и отрицательные на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

6°. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на отрезках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

735. 1)–3) Аналогично 4).

4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$. Решение: так как тангенс нечетная функция, то

надо сравнить $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ и $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$. Числа $\frac{\pi}{5}$ и $\frac{\pi}{7}$ принадлежат промежутку возрастания ф-цни $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, т.е. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}>\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$, а значит $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)<\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$.

5) Указание: числа 2 и 3 принадлежат промежутку $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$, на котором функция возрастает.

6) Указание: числа 1 и 1,5 принадлежат промежутку $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$, на котором функция возрастает.

736. Указание: найдите корни уравнения по общей формуле, выберите из них те, которые удовлетворяют условию. Аналогично задачам 712, 724 и 739.

737. Аналогично задаче 2 §42.

738. Указание: решите неравенство графически, аналогично задаче 740.

739. Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 3\pi]$.

1) $\operatorname{tg}x=3$. Решение: корни уравнения находятся по формуле $x=\operatorname{arctg}3+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Т.к. по определению $\operatorname{arctg}3\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то подходят только корни $x=\operatorname{arctg}3$, $x=\operatorname{arctg}3+\pi$ и $x=\operatorname{arctg}3+2\pi$.

Ответ: $\operatorname{arctg}3$, $\operatorname{arctg}3+\pi$, $\operatorname{arctg}3+2\pi$.

2) Аналогично 1).

740. 1) $\operatorname{tg}x>4$. Решение: построим графики функций $y=\operatorname{tg}x$ и $y=4$ (см. рис. 88). Эти графики пересекаются в точках вида $x=\operatorname{arctg}4+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Тогда, как видно из рисунка, нам подходят промежутки $\left(\operatorname{arctg}4+\pi k;\pi/2+\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $\left(\operatorname{arctg}4+\pi k;\pi/2+\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

2)–4) Аналогично 1).

741. Указание: решите задачу графически, аналогично задачам 716 и 728.

742. 1) $\operatorname{tg}2x=\sqrt{3}$. Решение: $2x=\pi/3+\pi k$, $x=\pi/6+\pi k/2$, $k\in\mathbf{Z}$. Условию удовлетворяют $x=-\pi/3$, $x=\pi/6$, $x=2\pi/3$. Ответ: $x=-\pi/3$, $x=\pi/6$, $x=2\pi/3$.

2) Указание: из корней $x=-\pi/12+\pi k/3$ условию удовлетворяют только $x=-5\pi/12$, $x=\pi/12$, $x=\pi/4$, $x=7\pi/12$, $x=11\pi/12$.

743. 1) $\operatorname{tg}2x\geq 1$. Решение: по графику функции $y=\operatorname{tg}2x$ (см. рис. 89) находим, что решения, удовлетворяющие условию, имеют вид $-\frac{3\pi}{8}\leq x<-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}\leq x<\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{8}\leq x<\frac{3\pi}{4}$. 2) Аналогично 1).

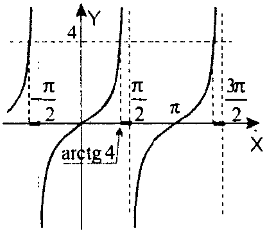

Рис. 88

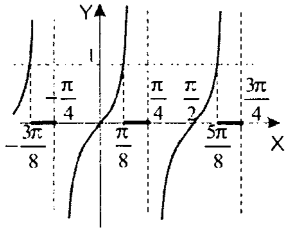

Рис. 89

744. 1) Указание: график $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ получается из графика $y = \operatorname{tg} x$ сдвигом на $\frac{\pi}{4}$ влево. Аналогично 2).

2) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Решение: график $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ получается из графика $y = \operatorname{tg} x$ растяжением в два раза по оси OX. Т.е. свойства этой функции такие: область определения – $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; множество значений – **R**; функция $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ периодическая, наименьший положительный период равен 2π; нечетная, принимает положительные значения на интервалах $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ и отрицательные на интервалах $(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$; возрастает на отрезках $(-\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$. График фукции см. на рис. 90.

745. Указание: воспользуйтесь графиком функции $y = \operatorname{tg} x$.

746. 1) Указание: график $y = \operatorname{tg}|x|$ получается из графика $y = \operatorname{tg} x$ симметричным отражением относительно оси OY части графика при $x \geq 0$.

2) Указание: график $y = |\operatorname{tg} x|$ получается из графика $y = \operatorname{tg} x$ симметричным отражением относительно оси OX той части графика, где $y < 0$.

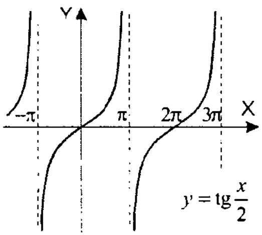

Рис. 90

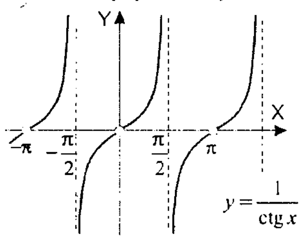

Рис. 91

3) Указание: т.к. $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, то график $y = \operatorname{ctg} x$ получается из графика функции $y = -\operatorname{tg} x$ сдвигом на $\frac{\pi}{2}$ вправо.

4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$. Решение: область определения функции состоит из множества, где определен и не равен нулю $\operatorname{ctg} x$, т.е. $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Т.к. $\frac{1}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg} x$, то на всей области определения график совпадает с графиком функции $y = \operatorname{tg} x$, см. рис. 91.

747. 1) Указание: $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$ при $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. См. рис. 92.

2) Указание: $\sin x \operatorname{ctg} x = \cos x$ при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. См. рис. 93.

748. 1) Указание: $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(3\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\right)$, аналогично 2).

2) $y = \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$. Решение: построим график функции $y = \operatorname{ctg} x$, из него сдвигом на $\frac{\pi}{6}$ единиц влево получается график $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Теперь график $y = \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$ получается из графика $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ сжатием в три раза вдоль оси OX относительно точки $-\frac{\pi}{6}$. См. рис. 94.

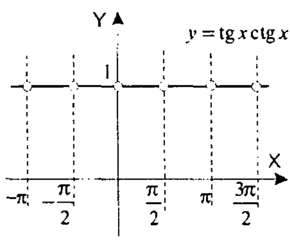

Рис. 92

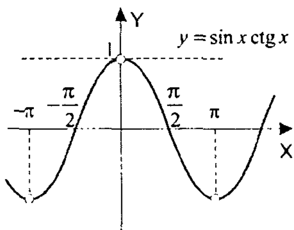

Рис. 93

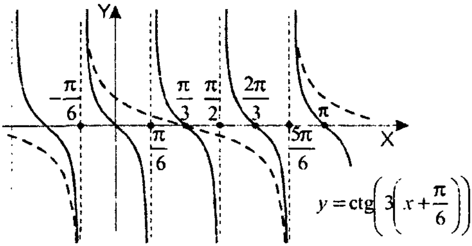

Рис. 94

749. 1) $\mathrm{tg}^2 x<1$. Решение: данное неравенство равносильно неравенству $-1<\mathrm{tg}\,x<1$. По графику функции $y=\mathrm{tg}\,x$, находим решения $-\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) $\mathrm{tg}^2 x\geq 3$. Решение: данное неравенство равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,x\geq\sqrt{3}\\ \mathrm{tg}\,x\leq-\sqrt{3}\end{array}\right.$. По графику функции $y=\mathrm{tg}\,x$, находим решения

$\frac{\pi}{3}+\pi k\leq x<\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $-\frac{\pi}{2}+\pi k<x\leq-\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}+\pi k\leq x<\frac{\pi}{2}+\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+\pi k<x\leq-\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

§43. Обратные тригонометрические функции

y = arcsinx

1°. Область определения – $[-1;\,1]$.

2°. Множество значений – $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3°. Функция $y=\arcsin x$ возрастает.

4°. Функция $y=\arcsin x$ нечетная.

y = arccosx

1°. Область определения – $[-1;\,1]$.

2°. Множество значений – $[0;\pi]$.

3°. Функция $y=\arccos x$ убывает.

$y = \operatorname{arctg} x$

1°. Область определения – **R**.

2°. Множество значений – $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3°. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает.

4°. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ нечетная.

750. 1) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arcsin\frac{2}{\sqrt{10}}$. Решение: т.к. функция $y = \arcsin x$ возрастает и $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{\sqrt{10}}$, поэтому $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} < \arcsin\frac{2}{\sqrt{10}}$.

2) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$. Решение: т.к. функция $y = \arcsin x$ возрастает и $-\frac{2}{3} > -\frac{3}{4}$, поэтому $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) > \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$.

751. 1) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. Решение: т.к. функция $y = \arccos x$ убывает и $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{5}}$, поэтому $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} < \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. Решение: т.к. функция $y = \arccos x$ убывает и $-\frac{4}{5} < -\frac{1}{3}$, поэтому $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) > \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

752. 1) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg} 3\sqrt{2}$. Решение: т.к. функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает и $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$, поэтому $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} < \operatorname{arctg} 3\sqrt{2}$.

2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Решение: т.к. функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает и $-\frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{1}{\sqrt{5}}$, поэтому $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

753. 1) $\arcsin(2 - 3x) = \frac{\pi}{6}$. Решение: т.к. $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то по определению: $2 - 3x = \sin\frac{\pi}{6}$, $2 - 3x = 0{,}5$, $3x = 1{,}5$, откуда $x = 0{,}5$. Ответ: $x = 0{,}5$.

2) $\arcsin(3-2x)=\frac{\pi}{4}$. Решение: т.к. $\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то по определению: $3-2x=\sin\frac{\pi}{4}$, $3-2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=\frac{6-\sqrt{2}}{4}$. Ответ: $x=\frac{6-\sqrt{2}}{4}$.

3) $\arcsin\frac{(x-2)}{4}=-\frac{\pi}{4}$. Решение: т.к. $-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то по определению: $\frac{x-2}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $x-2=-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=2-2\sqrt{2}$. Ответ: $x=2-2\sqrt{2}$.

4) $\arcsin\frac{x+3}{2}=-\frac{\pi}{3}$. Решение: т.к. $-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то по определению: $\frac{x+3}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $x+3=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=-\sqrt{3}-3$. Ответ: $x=-\sqrt{3}-3$.

754. 1), 2), 4) Аналогично 3).

3) $\arccos\frac{x+1}{3}=\frac{2\pi}{3}$. Решение: т.к. $\frac{2\pi}{3}\in[0;\pi]$, то по определению арккосинуса $\frac{x+1}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}$, $\frac{x+1}{3}=-0,5$, $x=-2,5$. Ответ: $x=-2,5$.

755. 1) $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{4}=\frac{\pi}{3}$. Решение: так как $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, то по определению $\frac{1-x}{4}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $\frac{1-x}{4}=\sqrt{3}$, $1-x=4\sqrt{3}$, т.е. $x=1-4\sqrt{3}$. Ответ: $x=1-4\sqrt{3}$.

2)–4) Аналогично 1).

756. 1) $y=\arcsin\frac{x-3}{2}$. Решение: по определению арксинуса необходимо, чтобы $-1\le\frac{x-3}{2}\le 1$, откуда $-2\le x-3\le 2$, $1\le x\le 5$. Ответ: $1\le x\le 5$.

2) $y=\arccos(2-3x)$. Решение: по определению арккосинуса необходимо, чтобы $-1\le 2-3x\le 1$, откуда $\frac{1}{3}\le x\le 1$. Ответ: $\frac{1}{3}\le x\le 1$.

3) $y=\arccos(2\sqrt{x}-3)$. Решение: по определению арксинуса необходимо, чтобы $-1\le 2\sqrt{x}-3\le 1$, кроме того, по определению квадратного корня $x\ge 0$. Тогда $2\le 2\sqrt{x}\le 4$, $1\le\sqrt{x}\le 2$, откуда $1\le x\le 4$. Ответ: $1\le x\le 4$.

4) $y=\arcsin\frac{2x^2-5}{3}$. Решение: по определению арксинуса необходимо,

чтобы $-1 \le \frac{2x^2-5}{3} \le 1$, откуда $-3 \le 2x^2-5 \le 3$, $2 \le 2x^2 \le 8$, $1 \le x^2 \le 4$, откуда $1 \le x \le 2$ или $-2 \le x \le -1$. Ответ: $1 \le x \le 2$, $-2 \le x \le -1$.

757. Решение: необходимо показать, что точка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ является серединой отрезка между точками $(x; y(x))$ и $(-x; y(-x))$. Таким образом, нам нужно доказать тождество $\frac{\pi}{2} = \frac{y(x)+y(-x)}{2}$, $\pi = \arccos x + \arccos(-x)$. Отсюда следует, что $\pi - \arccos x = \arccos(-x)$, а это истинное тождество.

Упражнения к главе VII

758. 1) Указание: область определения – **R**.

2) Указание: область определения совпадает с областью определения тангенса.

3) Указание: необходимо $\sin x \ge 0$.

4) Указание: необходимо $\cos x \ge 0$.

5) $y = \frac{2x}{2\sin x - 1}$. Решение: необходимо $2\sin x - 1 \ne 0$, т.е. $\sin x \ne \frac{1}{2}$, откуда $x \ne (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x \ne (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

6) Указание: необходимо $2\sin^2 x - \sin x \ne 0$, откуда $\sin x \ne 0$ и $\sin x \ne \frac{1}{2}$. Аналогично 5).

759. 1) Указание: $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$.

2) Указание: $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$.

3) Указание: $3 - 2\sin^2 x = 2 + \cos 2x$.

4) Указание: $2\cos^2 x + 5 = \cos 2x - 6$.

5) Указание: $\cos 3x \sin x - \sin 3x \cos x + 4 = \sin(-2x) + 4 = 4 - \sin 2x$.

6) Указание: $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x - 3 = \cos x - 3$.

760. 1) $y = x^2 + \cos x$. Решение: $y(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = y(x)$, т.е. функция четная.

2) $y = x^3 - \sin x$. Решение: $y(-x) = (-x)^3 - \sin(-x) = -(x^3 - \sin x) = -y(x)$, т.е. функция нечетная.

3) $y = (1 - x^2)\cos x$. Решение: $y(-x) = (1 - (-x)^2)\cos(-x) = (1 - x^2)\cos x = y(x)$,

т.е. функция четная.

4) $y=(1+\sin x)\sin x$. Решение: $y(-x)=(1+\sin(-x))\sin(-x)=-(1-\sin x)\sin x$, т.е. функция общего вида.

761. 1) $y=\cos 7x$. Решение: пусть T – период, тогда $\cos 7x=\cos 7(x+T)$, подставим в это тождество $x=0$. Тогда $1=\cos 0=\cos 7T$, откуда $7T=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Т.к. наименьшее положительное k равно 1, то наименьший положительный период равен $\frac{2\pi}{7}$. Ответ: $\frac{2\pi}{7}$.

2) $y=\sin\frac{x}{7}$. Решение: пусть T – период, тогда $\sin\frac{x}{7}=\sin\frac{(x+T)}{7}$, подставим в это тождество $x=\frac{7\pi}{2}$. Тогда $1=\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{T}{7}\right)$, откуда $\frac{T}{7}=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Т.к. наименьшее положительное k равно 1, то наименьший положительный период равен 14π. Ответ: 14π.

762. Аналогично задачам 712 и 724.

763. Указание: решите задачу графически, преобразовав неравенства к виду:

1) $\cos x\geq-\frac{1}{2}$; 2) $\sin x>\frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg}x>-2$; 4) $\operatorname{tg}x\geq\frac{1}{2}$.

764. 1) См. рис. 95.

2) См. рис. 96.

765. 1) Указание: $2x+\frac{\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) $y=\sqrt{\operatorname{tg}x}$. Решение: О.О. состоит из тех точек, где тангенс существует и положительный. Таким образом, область определения – это решения неравенства $\operatorname{tg}x\geq 0$, откуда $\pi k\leq x<\frac{\pi}{2}+\pi k$. Ответ: $\pi k\leq x<\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

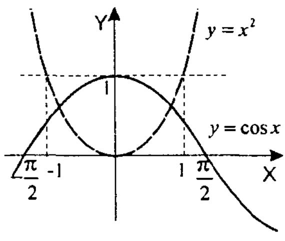

Рис. 95

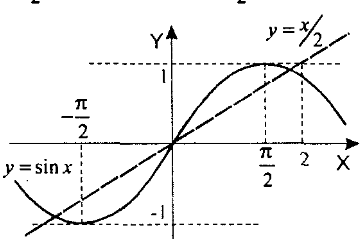

Рис. 96

766. 1) Указание: $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) =$
$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Решение: по формуле произведения синусов

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 2x\right) = -\frac{1}{2}\cos 2x$. Т.к. минимальное значение $\cos 2x$ равно -1, а максимальное 1, то максимальное значение функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ равно 0,5, а минимальное –0,5.

Ответ: 0,5 и –0,5.

767. 1) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$. Решение: $y(-x) = \sin(-x) + \operatorname{tg}(-x) = -(\sin x + \operatorname{tg} x) = -y(x)$, т.е. функция нечетная.

2) $y = \sin x \operatorname{tg} x$. Решение: $y(-x) = \sin(-x) \cdot \operatorname{tg}(-x) = \sin x \operatorname{tg} x = y(x)$, т.е. функция четная.

3) $y = \sin x|\cos x|$. Решение: $\sin(-x)|\cos(-x)| = -\sin x|\cos x| = -(\sin x|\cos x|)$, т.е. функция нечетная.

768. 1) $y = 2\sin(2x + 1)$. Решение: пусть T – период, тогда $\sin(2x+1) =$ $= \sin(2(x+T)+1)$, $\sin(2x+1) - \sin(2(x+T)+1) = 0$, откуда по формуле разности синусов $-2\sin 2T\cos(2x+1+T) = 0$. Поскольку это равенство должно выполняться при всех x, то необходимо, чтобы $\sin 2T = 0$, откуда $2T = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. При $k = 1$ $T = \pi/2$ не является периодом, а при $k = 2$ $T = \pi$ есть наименьший положительный период. Ответ: $T = \pi$.

2) $y = 3\operatorname{tg}\frac{1}{4}(x+1)$. Решение: пусть T – период, тогда $\operatorname{tg}\frac{1}{4}(x+1) =$ $= \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{T}{4}\right)$. Поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ π-периодична, то $\frac{T}{4} = \pi k$, откуда $T = 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. При $k = 1$ $T = 4\pi$ – это и есть наименьший положительный период. Ответ: $T = 4\pi$.

769. 1) См. рис. 97;
2) См. рис. 98.

770. 1) Указание: решите уравнение $\cos^2 x - \cos x = 0$. Аналогично 2).

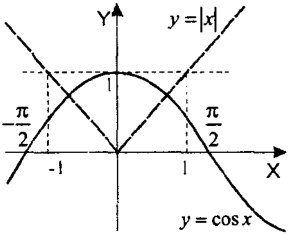

Рис. 97

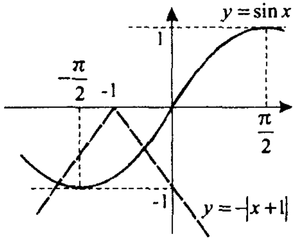

Рис. 98

2) $y=\cos x-\cos 2x-\sin 3x$. Решение: необходимо решить уравнение $\cos x-\cos 2x-\sin 3x=0$. Преобразуем это уравнение:

$$\cos x-\cos 2x-\sin 3x=-2\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{3x}{2}-2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}=$$

$$=2\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)=2\sin\frac{3x}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-\cos\frac{3x}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{3x}{2}\left(-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)=4\sin\frac{3x}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right),$$ то

есть $\sin\frac{3x}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=0$. Откуда $\frac{3x}{2}=\pi k$ или $x-\frac{\pi}{4}=\pi k$, или $\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Из первого уравнения $x=\frac{2\pi k}{3}$, из второго $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ и из третьего $x=2\pi k-\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\frac{2\pi k}{3}$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=2\pi k-\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

771. Указание: решите неравенство $\frac{3}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}>0$.

772. Указание: решите неравенство $\operatorname{tg}2x-1<0$.

773. 1) $y=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-2$. Решение: построим график $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$. Ис-

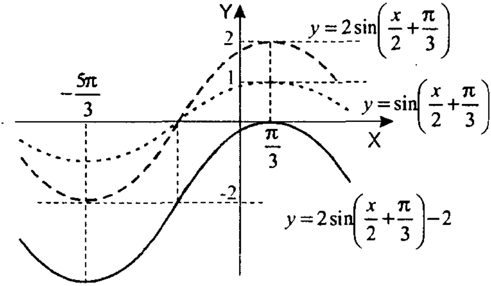

Рис. 99

ходный график получается из него растяжением в два раза вдоль оси OY и сдвигом на две единицы вниз. См. рис. 99.

2) $y=\cos x-\sqrt{\cos^2 x}$. Решение:

$$\cos x-\sqrt{\cos^2 x}=\cos x-|\cos x|=\begin{cases}0, \text{если} \cos x\ge 0\\ 2\cos x, \text{если} \cos x<0\end{cases},\ y=\begin{cases}0, \text{если} \cos x\ge 0\\ 2\cos x, \text{если} \cos x<0\end{cases}$$

График изображен на рисунке 100.

774. 1) Указание: $12\sin x-5\cos x=13\sin(x-\varphi)$, где $\cos\varphi=\frac{12}{13}$ и $\sin\varphi=\frac{5}{13}$.

См. задачу 697.

2) $y=\cos^2 x-\sin x$. Решение: преобразуем выражение, $y=1-\sin^2 x-\sin x$ и сделаем замену переменной $t=\sin x, -1\le t\le 1$. Тогда $y=-t^2-t+1$ – квадратный трехчлен. Его максимум достигается в точ-

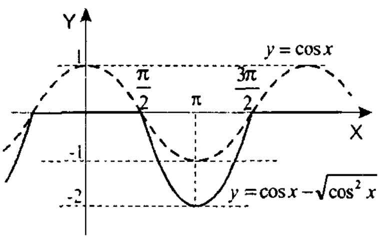

Рис. 100

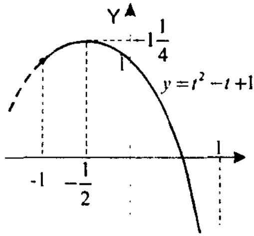

Рис. 101

ке $t_0 = -\frac{1}{2}$ и равен $1\frac{1}{4}$. Его минимум достигается на одном из концов промежутка $[-1;\ 1]$, т.к. $y(-1)=1$, а $y(1)=-1$, то минимальное значение равно -1 (см. рис. 101). Ответ: $1\frac{1}{4}$ и -1.

775. 1) $\sin x \geq \cos x$. Решение: перенесем все в левую часть и преобразуем, получим $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$. Таким образом

$$2\pi k \leq x-\frac{\pi}{4} \leq \pi + 2\pi k,\ 2\pi k + \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $2\pi k + \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: преобразуйте неравенство к виду $\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x} > 0$, тогда

необходимо, чтобы выполнялось условие: $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases}$.

Оглавление

Учебно-методическое издание

Сам себе репетитор ®

Щеглова Александра Павловна

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ ИЗ УЧЕБНИКА ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

Ш.А. Алимова, Ю.Н. Колягина
(М.: Просвещение)

10–11 классы

Дизайн обложки *Екатерины Бедриной*

Налоговая льгота – ОКП 005-93-953 (Литература учебная).
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати с диапозитивов 28.02.2007.
Формат 70*100/32. Печать офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 14,3.
Тираж 15 000 экз. Заказ № 18678.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Саратовский полиграфический комбинат»
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59
www.sarpk.ru